

## La enseñanza de las matemáticas en Rusia\*

**Evguéni Bounimovitch**

**INFORME**

**E**n Rusia, en la educación primaria, existen dos posibilidades: puede elegirse entre 4 cursos (de los 6 a los 10 años) o 3 cursos (de los 7 a los 10 años). Los padres eligen de acuerdo con el desarrollo del niño, tanto en el plano físico, como en el intelectual o psicológico, etc. En los pueblos, es posible que solo se de una de estas posibilidades. Durante las clases primarias, los dos tipos de enseñanza están separados, los alumnos se juntan después, en la secundaria.

En la secundaria, son 5 cursos (desde 5.º hasta 9.º) de escolarización obligatoria, uniforme para la mayoría de las escuelas, seguidos por 2 cursos (10.º y 11.º), que casi todos los alumnos realizan, con diferentes opciones posibles. Al acabar el curso 9.º, hay un examen obligatorio sobre dos materias: ruso y matemáticas (álgebra). La región o la propia escuela pueden exigir otras materias. Más adelante veremos el tipo de pruebas.

En 11.º también hay un examen nacional de final de estudios secundarios, sobre cinco materias, entre las que hay pruebas escritas de matemáticas (análisis y álgebra) y de ruso, obligatorias para todos. Las pruebas, preparadas por el Ministerio de Educación, dependen de las opciones. Las otras tres materias las elige el alumno, entre éstas está la *geometría*.

La mayor parte del tiempo, todas las clases primarias y secundarias están en un mismo centro, con una administración común.

Desde 1986, comienzo de la *perestroika*, el sistema está en permanente reforma. No obstante, se puede precisar la fecha de 1991, que corresponde a la primera ley del primer presidente de Rusia, *ley de educación*. Antes de esta ley, el sistema era casi uniforme, con muchas obligaciones para el profesor, y para el alumno; a partir de esta ley, se deja más libertad a las regiones, a las escuelas, a los

\* Traducción: Florencio Villarroya

profesores y a los alumnos, tanto en la elección de las diversas opciones y de los libros de texto, como en la organización y estructura de los estudios. Los programas en las disciplinas literarias y sociales, evidentemente, se han cambiado por completo, en esta situación, podrían aparecer las matemáticas como una disciplina conservadora, pero, incluso en matemáticas, el objetivo de la formación está centrado especialmente en el desarrollo individual del alumno.

Según encuestas recientes, las cuestiones de enseñanza, junto con las de ecología, ocupan el último lugar en las preocupaciones de la gente. Las reformas, por tanto, se aceptan bien...

### Calendario

El curso escolar empieza el primero de septiembre, en todo el país: es fiesta nacional (pero no un día de fiesta), llamada *el día de la sabiduría*. El final del curso es a final de mayo, día de fiesta llamado *la última campana*.

- Vacaciones de otoño: una semana a principios de noviembre.
- Vacaciones de invierno: 12 días a principios de enero.
- Vacaciones de primavera: 10 días a finales de marzo.
- Vacaciones de verano: julio y agosto.

En junio se realizan los exámenes para los cursos 9.º y 11.º. En algunas escuelas, hay también en junio, exámenes para los otros cursos, y trabajos prácticos dependiendo de las opciones.

*Según encuestas recientes, las cuestiones de enseñanza, junto con las de ecología, ocupan el último lugar en las preocupaciones de la gente.*

Durante las *vacaciones cortas* de los alumnos, los profesores celebran reuniones sobre la organización del trabajo en la escuela.

### Número de alumnos por aula

- en la escuela primaria, 35 aprox.
- desde 5.º hasta 9.º 30
- en 10.º y 11.º 25

### Horarios

En principio, las clases empiezan a las 8 h 30 m, su duración es de 45 minutos (a veces de 35 en la escuela primaria), hay de 10 a 15 minutos de tiempo entre dos clases: 4 o 5 clases por día en la escuela primaria, con estudios vigilados por la tarde, para aquellos alumnos cuya familia lo solicita. Hay de 5 a 7 clases diarias en la escuela secundaria, hasta 9.º, y de 6 a 8 en 10.º y 11.º. En general no hay clases los sábados, ni por supuesto los domingos.

Por falta de puestos escolares en los centros, algunos alumnos tienen horario matinal, mientras que otros lo tienen vespertino.

El cuadro 1 es el documento oficial nacional desde 1993. En este plan, hay una parte obligatoria y una parte opcional, debido a las peculiaridades de las regiones y de sus lenguas regionales y tradiciones socio-culturales.

Las regiones pueden hacer un horario regional propio, sobre la base del anterior, después la escuela hace su propio horario, sobre la base del regional.

La ley de Educación de 1991 sanciona la libertad de enseñanza, la enseñanza privada es poco numerosa, principalmente está situada en las grandes ciudades. la mayoría de las veces se trata de escuelas primarias. Todavía no existen estadísticas sobre este tema.

### Contenidos matemáticos

Por lo que respecta a las matemáticas, su contenido es tradicional, y está en el núcleo de la enseñanza. Incluye aritmé-

| asignaturas   | curso | Número de clases a la semana en cada curso |    |     |    |    |    |     |      |    |    |    |
|---|-------|--|----|-----|----|----|----|-----|------|----|----|----|
|   |       | I  | II | III | IV | V  | VI | VII | VIII | IX | X  | XI |
| Lengua rusa como lengua oficial                         |       | 3  | 3  | 3   | 3  | 3  | 3  | 3   | 3    | 3  | -  | -  |
| Lengua y literatura                                     |       | 4  | 4  | 4   | 4  | 8  | 8  | 6   | 5    | 5  | 4  | 4  |
| Arte  |       | 2  | 2  | 2   | 2  | 2  | 2  | 2   | 2    | -  | -  | -  |
| Ciencias sociales                                       |       | 2  | 2  | 2   | 2  | 2  | 2  | 2   | 3    | 4  | 4  | 4  |
| Ciencias físicas y naturales                            |       | 2  | 2  | 2   | 2  | 2  | 3  | 6   | 8    | 8  | 4  | 4  |
| <b>Matemáticas</b>                                      |       | 4  | 4  | 4   | 4  | 5  | 5  | 5   | 4    | 5  | 4  | 4  |
| Educación física  |       | 2  | 2  | 2   | 2  | 2  | 2  | 2   | 2    | 2  | 3  | 3  |
| Tecnología  |       | 2  | 2  | 2   | 2  | 2  | 2  | 2   | 3    | 3  | 2  | 2  |
| TOTAL   |       | 19   | 19 | 19  | 19 | 26 | 27 | 28  | 30   | 30 | 20 | 20 |
| Optativas obligatorias                                  |       | 1  | 3  | 5   | 5  | 3  | 3  | 4   | 2    | 3  | 12 | 12 |
| Horario total obligatorio                               |       | 20   | 22 | 24  | 24 | 29 | 30 | 32  | 32   | 33 | 32 | 32 |
| Trabajos voluntarios, individuales o en pequeños grupos |       | 2  | 3  | 3   | 3  | 3  | 3  | 3   | 3    | 3  | 6  | 6  |
| TOTAL   |       | 22   | 25 | 27  | 27 | 32 | 33 | 35  | 35   | 36 | 38 | 38 |

Cuadro 1. Horario mínimo

tica, álgebra, análisis, geometría, estadísticas y probabilidades, lógica, etc.

Los alumnos adquieren una muy buena formación técnica en cálculos algebraicos, incluso son entrenados en un cierto virtuosismo. La enseñanza del análisis en 10.º y 11.º se introdujo a partir de la reforma de Kolmogorov, en los años 60. La geometría se considera como una asignatura aparte; entre 7.º y 9.º se trata la geometría plana, enseñada de una forma bastante axiomática y formal; en 10.º y 11.º se enseña la geometría en el espacio. Es sobre todo geometría métrica; se hace poca geometría vectorial y poca geometría de transformaciones.

El análisis de datos, la estadística y las probabilidades no se han enseñado nunca en la escuela secundaria. En los nuevos programas, está prevista esta enseñanza, se acaban de preparar libros de texto para los cursos 5.º y 6.º, así como para el 10.º curso de la opción literaria. Por ahora se trata de una enseñanza experimental (a escala rusa: aproximadamente 500.000 alumnos).

Para el acceso a la Universidad el ingreso es mediante examen después de la clase de 11.º curso, independientemente del examen de final de estudios de la escuela secundaria.

## La formación de los profesores de matemáticas

La mayoría de los futuros profesores entran, después del curso 11.º, en la Universidad de Pedagogía. Los estudios duran 4 años para los futuros profesores de la escuela elemental, y 5 para los de la escuela secundaria, en centros universitarios diferentes.

Los profesores de la escuela elemental enseñan todas las materias, los de la escuela secundaria están especializados en una. En particular, los profesores de matemáticas solo enseñan matemáticas.

También es posible enseñar en la escuela primaria con 4 años de estudios, después del curso 9.º de secundaria, en el Colegio Especial Pedagógico. En este caso, los salarios son inferiores. Si faltan profesores en la escuela secundaria, pueden dar las clases de ese nivel los profesores de la escuela primaria.

El diploma expedido al final de los estudios universitarios, también da derecho para enseñar en la escuela secundaria.

Los diplomas concedidos al final de los estudios en la Universidad o en la Universidad de Pedagogía, o en el Colegio Especial Pedagógico, no son un concurso-oposición para ingresar automáticamente en un puesto de enseñante. Actualmente, debido a la penuria de profesores, sobre todo de matemáticas y de lenguas extranjeras, los recién licenciados no tienen problemas para encontrar trabajo. El contrato se hace bien directamente por la

escuela, o bien por la el gobierno regional.

Desde primer curso, los estudiantes reciben a la vez una enseñanza de la disciplina, y una enseñanza profesional. En los cursos 4.º y 5.º, realizan una estancia de un mes en la clase de un profesor tutor pedagógico. En la situación de penuria de profesores, los estudiantes de los dos últimos cursos, pueden ya empezar a dar clases.

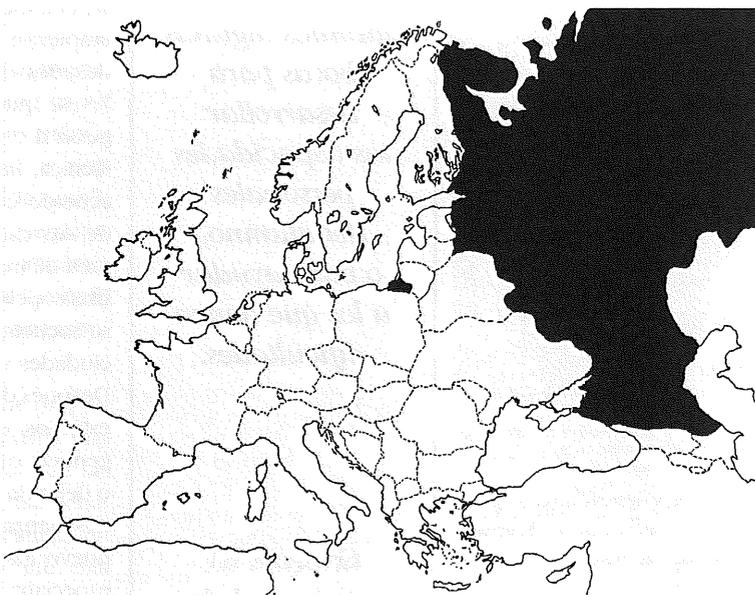
En este momento, la formación continuada de los profesores no es obligatoria. Pero es bastante frecuente, especialmente debido a los

cambios de programas y de libros de texto. La formación continua consiste en realizar cursos fuera de su horario de trabajo, dar *clases abiertas* (clases a las que asisten otros colegas, así como inspectores), redactar una memoria. El hecho de haber seguido una formación continua, puede permitir mejorar la remuneración personal.

Los profesores de la escuela primaria tiene 24 clases a la semana, los profesores de la secundaria, tienen 18 horas, pero la mayoría de ellos, hacen 10 horas suplementarias más.

## Los programas

En la escuela primaria, los programas son sensiblemente los mismos en todas partes. Existen programas y libros de texto experimentales que siguen las ideas de la escuela de Vigotsky (Davidov, Zankov, Galpérine).



### Apéndice 1

Examen de matemáticas, año 1994  
(Se dan 5 horas para este examen).

#### Cursos de educación básica

1. Resolver la ecuación:  $\sqrt{(10-x)} = 4-x$
2. Resolver la inequación:  $3 \cdot \log_8(3x+2) < 2$
3. Calcular todas las raíces de la ecuación  
$$\operatorname{sen} 2x + \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$
que pertenezcan al segmento  $[-3\pi/2, 3\pi/2]$ .
4. Escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  
$$y = 4^x - 2^{x+1}$$
en el punto donde alcanza su mínimo.

5. Encontrar el área de la figura encerrada por las líneas

$$y - x^2 = 0 \quad \text{e} \quad y^2 - x = 0$$

- 6) ¿Para qué valores del parámetro  $a$  la ecuación

$$x^2 - (3a-1) \cdot |x| + 2a^2 - a = 0$$

tiene cuatro soluciones distintas?

#### Cursos de matemáticas

1. Entre los números complejos  $z$ , no nulos con argumento  $\pi/4$ , encontrar todos aquellos para los que es real,  $z^5 - 8 \cdot z$
2. Encontrar todas las raíces del polinomio  
$$x^3 + 2a \cdot x^2 - 5 \cdot x - a - 9$$
si los restos de sus divisiones por  $x-2$  y  $x+1$  son iguales.
3. Para qué valores de  $p$  el número 2 es solución de la inequación:

$$\log_{x/(2+p^2)}(0,5p^2 + 0,5 - x^2 + \frac{6p}{x}) \geq -1$$

4. El gráfico de la función

$$y = 2 - \sqrt{2x+2}$$

intersecta al eje de abscisas en el punto K, y la recta tangente a la gráfica intersecta al eje de abscisas en el punto C. Escribe la ecuación de la tangente si el origen es el punto medio de KC.

5. Probar que para todo negativo  $x$ ,  $\ln \frac{2x-3}{x-7} + \frac{x}{11} \leq 0$

6. Una figura está limitada por las líneas  $y = 2 + \cos x$ ,  $y = \operatorname{sen} \pi/2$ ,  $x = a$ ,  $x = a + \pi$ . Encuentra el mayor valor de su área.

#### Clases de humanidades

1. Resolver la ecuación  $\cos(3x - \pi/4) = 1/2$ , e indicar todas sus raíces positivas.
2. Resolver la desigualdad:  $\log_2(3-2x) < 2$
3. Encontrar todos los números  $a$ , para los que  $4 \cdot 2^{3a} = 0,25^{a^2/2}$
4. Calcula el área de la figura limitada por la gráfica de la función  $y = x(4-x)$  y el eje de abscisas.
5. Determina el dominio de definición de la función

$$y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$$

6. ¿Para qué valores de  $a$  el valor máximo de la función,  $y = x^3 - 3x + a$  en el segmento  $[-2, 0]$  vale 5?

*En los primeros cursos de la enseñanza secundaria (10 a 14 años), todos los alumnos reciben la misma enseñanza, pero la escuela puede añadir, para algunos alumnos algunas horas para desarrollar las capacidades personales del alumno, o para ayudar a los que tienen dificultades.*

Como se mostraba en el cuadro anterior, cada escuela tiene sin embargo, un cierto *margen de maniobra*, en algunas se dan más clases de matemáticas, por tanto se dice que en ciertas escuelas su nivel es más alto que en otras, sus alumnos entran a través de un examen... ¡la entrada en algunas escuelas primarias o secundarias puede ser más selectiva que la entrada en la universidad!

En los primeros cursos de la enseñanza secundaria (10 a 14 años), todos los alumnos reciben la misma enseñanza, pero la escuela puede añadir, para algunos alumnos algunas horas para desarrollar las capacidades personales del alumno, o para ayudar a los que tienen dificultades. Las diferentes opciones empiezan a partir de 7.º (13 años), o después de 9.º (15 años). Después de 7.º se puede continuar la enseñanza general o elegir una opción científica, técnica, literaria, económica u otra, de acuerdo con la elección del alumno o de sus capacidades para pasar el examen de ingreso en estas especialidades. Estas opciones no existen en toda Rusia, se encuentran sobre todo en las grandes ciudades y en las escuelas de *alto* nivel. Después de 9.º, se pueden continuar los estudios en la escuela de enseñanza general, o elegir una enseñanza técnica, o dejar de estudiar. Los mejores van a la enseñanza general, y entre estos, de nuevo los mejores van a la enseñanza especializada: opciones científica, técnica, literaria, económica u otra.

También existen escuelas que dependen de una universidad o de un instituto y que únicamente tienen clases de 10.º y 11.º, con una orientación especial para acceder a ese instituto. Utilizan el material del instituto y los enseñantes son profesores de la escuela y profesores del instituto. El ingreso en estas escuelas se hace con un examen. Superar los exámenes al acabar los estudios da derecho a entrar en el correspondiente instituto.

Por lo que se refiere a las matemáticas, las clases especializadas de matemáticas existen desde los años 60, los programas de estas clases están adaptados

para el acceso a la universidad. En el cuadro anterior, se ve que se pueden dar entre 3 y 12 horas de matemáticas a la semana. Los programas no son obligatorios, pero el ministerio da recomendaciones relativas a los contenidos de enseñanza para 3, 5 u 8 horas semanales. Es lo que corresponde aproximadamente a las clases literarias, generales y científicas. Siempre se pueden añadir contenidos a los anteriores, si la escuela tiene medios para ofrecer un número mayor de horas. Lo que es obligatorio, no es ni el programa, ni el número de horas, ni el contenido del libro de texto, sino los *Standars Nacionales*: currículum definido por sus contenidos matemáticos, sus tipos de problemas y un sistema de evaluación. Hay dos niveles: el mínimo exigible a todos los alumnos, y el contenido que el profesor es capaz de proponer a sus alumnos. Los exámenes nacionales corresponden a esta doble exigencia: para alcanzar la nota 3, hay que haber hecho bien los ejercicios correspondientes al programa mínimo, se puede tener una nota mejor (hasta 5) haciendo bien los ejercicios correspondientes al segundo nivel.

Debido a la estabilidad de los programas en la Unión Soviética, existía una correlación entre los programas de las diferentes disciplinas, pero actualmente las modificaciones que se realizan en todas las disciplinas, hacen que esta cuestión no esté definida.

## Los métodos de enseñanza

El método tradicional de enseñanza es la lección, explicada por el profesor, seguida por ejercicios de aplicación. Esto es lo que sucede en la mayoría de las clases de la mayoría de los profesores. Pero hay un objetivo nuevo declarado por la ley de educación y los documentos ministeriales: el desarrollo de las capacidades de cada individuo. Se aplican los estudios de los psicólogos, y ahora se proponen problemas abiertos, investigaciones breves, trabajos en grupos pequeños, investigaciones documentales en libros. Lo que

*La mayoría de los trabajos de evaluación en clase, tiene el carácter de reproducción de los trabajos ya hechos. Se utiliza mucho la capacidad de memorizar (muchas fórmulas de trigonometría, logaritmos,...).*

## Apéndice 2

Examen de entrada al departamento de matemática y mecánica de la universidad estatal de Moscú, año 1994. El examen es de 4 horas.

### Matemáticas

1. Determina todas las raíces de la ecuación:

$$\frac{4 \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 2}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2^x + 2 \cdot y &= 1 \\ 3 \cdot y - 6 \cdot y^2 &= 2^{x-1} \end{aligned} \right\}$$

3. Resolver la desigualdad:

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6 \cdot x^2 - 6x + 1)}$$

4. Dado el trapecio ABCD con bases AD y BC. las diagonales AC y BC se cortan en el punto E. Se traza el círculo circunscrito al triángulo ECB. La recta que toca a esta circunferencia en el punto E, intersecta a la recta AD en el punto F, de modo que los puntos A, D y F están sucesivamente en la recta AD. Sabemos que  $AF = a$ ,  $AD = b$ . Calcula EF.
5. Dado el cubo ABCDEFGH. Una esfera toca a las aristas AD, DH, CD y a la recta BG. Encuentra el radio de la esfera, si la longitud de las aristas del cubo es uno.
6. Para cada valor del parámetro  $a$  resuelve la ecuación:

$$2x^2 + 2 \cdot a \cdot x - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}$$

### Física

1. Determina el valor máximo y el mínimo de la expresión

$$f(a) = \sqrt{2} \cdot \sin a + \sqrt{2} \cdot \cos 2a$$

¿Para que valor de  $a$  se han conseguido?

2. Traza la gráfica de la función:  $y = \frac{x^2 - 6 \cdot x + 5}{x - |x - 2|}$

3. Resuelve la ecuación:  $\sin(2x) + 3 \cdot \sin x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

4. Resolver la desigualdad:  $\log_x 3 - 4 \geq 4 \cdot \log_{1/3} x$

5. Dado el paralelepípedo, en el que las longitudes de las aristas que parten del mismo vértice son  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; cuyas aristas  $a$  y  $b$  son perpendiculares, y la arista  $c$  forma un ángulo  $\alpha$  con cada una de las otras aristas  $a$  y  $b$ , determina el volumen del paralelepípedo.

actualmente, es todavía *vanguardista*. La mayoría de los trabajos de evaluación en clase, tiene el carácter de reproducción de los trabajos ya hechos. Cuando se desarrolla un tema, se desarrolla más la técnica que su aplicación en los temas próximos. Se utiliza mucho la capacidad de memorizar (muchas fórmulas de trigonometría, logaritmos,...). Las instrucciones nuevas del Ministerio de Educación (1995) referentes a los exámenes de matemáticas dan ahora a los alumnos la posibilidad de utilizar calculadoras y formularios.

Siempre se pide a los alumnos que hagan demostraciones, y se concede más importancia al rigor en éstas en las clases científicas.

## El sistema de evaluación

El examen nacional al final de 9.º consiste en una prueba escrita de 6 ejercicios (aritmética y álgebra) elegidos de forma nacional entre los aproximadamente 1000 ejercicios de un libro oficial que está en todas las escuelas.

El examen nacional al final de 11.º consiste en una prueba escrita de 6 ejercicios (álgebra y análisis) elaborados de forma nacional. Rusia se extiende sobre 9 husos horarios, está claro que hay diferentes preguntas según la región.

Los ejercicios son corregidos por una comisión de profesores de la escuela del alumno.

Además de su examen de 11.º, el alumno puede elegir hacer la prueba de geometría. Elige, no solo el contenido, sino también la forma de la prueba, que puede ser un test constituido por varias cuestiones elementales, un examen oral con cuestiones del curso, extraídas al azar y un problema (es la forma más tradicional), o la presentación

de un trabajo sobre un tema que el alumno ha elegido con su profesor durante el curso escolar, o incluso una entrevista (esta última posibilidad, propuesta en las instrucciones de 1995, todavía no se ha aplicado).

El servicio de inspectores regionales puede, por otro lado, proceder a hacer evaluaciones del sistema escolar, sobre todo de la puesta en marcha de los nuevos programas, de los nuevos libros...

La administración de la escuela organiza evaluaciones en el interior de la escuela destinadas a evaluar el trabajo de los profesores.

La evaluación de los alumnos *día a día* en la clase, la hace el profesor, principalmente son trabajos escritos, en tiempo limitado, después del estudio de cada tema; hay también exámenes orales, y otros elementos de evaluación, tales como el cuaderno del alumno (sobre todo de 10 a 14 años).

**Evguéni Bounimovitch**  
Vicepresidente de  
la Asociación de Profesores  
de Matemáticas  
de Rusia

La Géométrie  
Descartes

## L A G E O M E T R I E. L I V R E P R E M I E R.

*Des problèmes qu'on peut construire sans  
y employer que des cercles & des  
lignes droites.*



**O**u s les Problèmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoïn par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'ar'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre conuës, que leur en adiouter d'autres, ou en ofter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est à l'vnité, ce qui est le mefine que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'vnité

P p

est