

## Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos

**Fernando Corbalán Yuste**

**E**ste artículo no surge de la nada, sino que tiene detrás un largo proceso de dedicación personal, que podría empezar en la adolescencia o en la juventud, en el momento de la elección de una carrera universitaria. ¿Por qué se elige Matemáticas? Seguro que no es ni por la gloria ni por el dinero, sino más bien por un gusto y una habilidad en la resolución de problemas y un disfrute particular con los entretenimientos matemáticos.

Pero sin irse tan lejos, porque se puede perder la perspectiva (y por otra parte relatar una etapa muy parecida para buena parte de los lectores), nos podemos detener en el trabajo como Asesor de Matemáticas del CEP n.º 1 de Zaragoza, los cursos 1986/87 hasta el 1991/92 en que desarrollamos un trabajo de diseño, experimentación y mejora de juegos matemáticos de diversos tipos, una investigación cuantitativa sobre los mismos, así como cursos y talleres para profesores o alumnos a lo largo de todo el Estado.

De entre las posibles clasificaciones de los juegos, hay una que nos interesa especialmente, según el objeto del juego: por una parte los *juegos de conocimientos*, que son aquellos que hacen referencia a uno o varios de los tópicos habituales de los programas de matemáticas; en segundo lugar, los *juegos de estrategia*, en los que se trataría de poner en marcha uno o varios procedimientos propios de la resolución de problemas o los modos habituales de pensamiento matemático.

Vamos a referirnos en lo sucesivo a los juegos de estrategia, que son el objeto de nuestro artículo. Su utilidad dentro de la formación matemática es potencialmente muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la realización de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros) y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos de pensar matemáticamente.

Este artículo describe el inicio de una investigación que trata de contestar a dos grandes preguntas: ¿por qué utilizar juegos? y ¿para qué utilizar juegos?, por medio de investigaciones con alumnos para avanzar en el conocimiento de las relaciones entre juegos y resolución de problemas.

Para ello, en pequeños grupos de alumnos de 13-14 años se estudia la utilización de determinadas estrategias para contrastarlas con el trabajo de los expertos y tratar de las maneras de instruir esas estrategias. Se utilizan seis juegos y se hace un análisis de los mismos a partir de la información que proporcionan los alumnos en varios aspectos, lo que permite hacer un diagnóstico de los mismos para su utilización en clase de matemáticas.

Trataremos de precisar un poco más lo que entendemos por juegos de estrategia. Hay que recordar, en primer lugar, que la palabra *estrategia* (tanto como *táctica*) proviene, desde los antiguos griegos, del vocabulario militar, desde donde ha penetrado el lenguaje matemático y económico. En el solvente *Diccionario de matemáticas* de Bouvier-George (1984) la entrada de la palabra *estrategia*, que podría pensarse que tiene que ver más con la resolución de problemas que con los juegos (porque así pasa en la literatura de Didáctica de las Matemáticas), nos lleva a su sentido en los juegos. Es la siguiente: «*Estrategia.- Estrategia de un jugador.-* Descripción completa de la manera en que se debería comportar el jugador ante cualquier circunstancia posible, en cada jugada. En un juego finito, si se conocen las estrategias de los jugadores, se puede saber el desarrollo y el resultado del juego». Y habla también de «*Estrategia ganadora.-* En teoría de los juegos, se dice de una estrategia que lleva al jugador a un éxito hagan lo que hagan sus adversarios». Ese es el mismo sentido que da Guzman, (1992): «Todos esos juegos admiten una estrategia para uno de los jugadores, es decir, una forma de mover en cada situación tal que, cualquiera que sea el movimiento de su oponente, él es capaz de ganar».

Y también, para situar con más claridad estos juegos, «si de lo que se trata es de poner a punto procedimientos para ganar siempre o para no perder, estamos ante juegos de estrategia». (Corbalán-Deulofeu, 1996). Y podemos todavía acotar más el campo de estudio: «Dentro de la amplia gama de juegos de estrategia, podemos distinguir concretamente los juegos bipersonales de información completa, es decir, sin intervención del azar. [...] Todos estos juegos tienen unas características comunes: las partidas se desarrollan entre dos personas y es posible, por lo menos en teoría, determinar una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores (o en algunos casos decidir que el juego acabará en tablas). Llamamos pequeños juegos de estrategia a aquellos cuyas condiciones (tablero, situación inicial, finalidad, reglas,...) hacen que las partidas sean, en general de corta duración». (Corbalán-Deulofeu, 1996). Se puede también consultar sobre estos juegos en Deulofeu (1995).

En el camino hacia una estrategia ganadora juegan un papel importante las ideas que producen o proporcionan reflexiones apropiadas. En ese sentido distinguiremos las *ideas claves* y las *ideas favorecedoras*. Ideas claves son las que desencadenan una estrategia ganadora total o una estrategia parcial (que sirve para ganar en una determinada posición) para un juego. Ideas favorecedoras son las que facilitan el análisis del juego y permiten, a veces, desencadenar una estrategia. Todas las ideas claves son favorecedoras, pero no todas las ideas favorecedoras son claves. En nuestro trabajo nos interesamos en detectar todas las ideas favorecedoras y, dentro de ellas, las ideas clave.

Si hacemos una revisión de la bibliografía, en general los jue-

gos aparecen más como uno de los instrumentos aplicables en clase de matemáticas, de los cuales se ha obtenido empíricamente su utilidad, o como generadores de problemas, que como un objeto de estudio en sí mismo. Y eso tanto en el caso de que sea alguna de las actividades propuestas como en publicaciones dedicadas exclusivamente a juegos matemáticos. El origen de todas las aproximaciones modernas está en la publicación en 1945 del famoso libro de Polya *Cómo plantear y resolver problemas (How to solve it)* (Polya, 1945), que fue el origen del movimiento de *resolución de problemas*, del cual podemos considerar una de las partes los juegos, sobre todo los de estrategia, como un tipo especial de *problemas* que pueden desencadenar la búsqueda de determinadas estrategias.

Queríamos destacar dos aspectos de interés para nuestro trabajo. Por una parte Harvey y Brigh (1988) apuntan que «faltan investigaciones sobre la efectividad de los juegos de estrategia». Y Williford (1992) relaciona los juegos de estrategia con los Estandares curriculares del NCTM y concluye, tras analizar algunos juegos, que los juegos prueban ser «vehículos atractivos para aumentar destrezas generales de razonamiento matemático».

Por nuestra parte, y después de la investigación cualitativa (Corbalán, 1991) sobre juegos con una participación amplia, y que muestra que los profesores tienen una visión muy positiva sobre la práctica sistemática de juegos en clase, creemos que siguen pendientes las respuestas razonadas a dos grandes preguntas: ¿por qué utilizar juegos matemáticos? y ¿para qué utilizar juegos matemáticos? Respuestas basadas en algo más que en apreciaciones subjetivas de un profesorado entusiasta que utiliza juegos matemáticos en sus clases. Por eso son necesarias investigaciones concretas con alumnos, para dar razones objetivas para contestar a las preguntas anteriores y avanzar en el conocimiento sobre las relaciones entre los juegos y las estrategias de resolución de problemas. Una investigación en esa línea es la que presentamos en este artículo.

...creemos que  
siguen pendientes  
las respuestas  
razonadas a dos  
grandes preguntas:  
¿por qué  
utilizar juegos  
matemáticos?  
y ¿para qué utilizar  
juegos  
matemáticos?

## Objetivos del estudio

Nuestra investigación ha tenido un triple objetivo:

- Estudiar la *utilización* por parte de los alumnos de 2.º de ESO (13-14 años), de *determinadas estrategias* en unos juegos prefijados.
- *Contrastar las estrategias* con las que a priori el profesor (o los «expertos» en general) supone que son *rentables*.
- *Tratar de los mecanismos* que pueden dar lugar a una *instrucción* de los alumnos para que encuentren y apliquen mejores estrategias.

Nos enfrentamos, por tanto, a la tarea de responder en la medida de lo posible a la siguiente cuestión fundamental:

Utilizando juegos determinados se ponen en funcionamiento por parte de los alumnos algunas estrategias:

- ¿Cuáles son?
- ¿De qué manera intervienen?
- ¿Cuál es su nivel de eficacia?

Para aproximarse a una respuesta realista a una pregunta tan ambiciosa, se imponen algunas puntualizaciones y restricciones. En primer lugar habría que seleccionar los juegos para *evitar*, en lo posible, *la presencia de lo conceptual*. Puesto que se trata de «ver» el proceso de pensamiento, parece conveniente, en segundo lugar, utilizar *juegos que admitan algún tipo de registro escrito*. Y por fin, y aunque tal vez hubiera ventajas, para *evitar distorsiones* de los juegos por la presencia del ordenador, *no habrá modelización informática* de los juegos, sino que la presentación sería la habitual en los juegos de mesa, es decir, con un tablero y fichas.

Hemos elegido dos tipos de juegos: solitarios y de dos jugadores, y siempre de los que antes hemos llamado *pequeños juegos de estrategia*. Dentro de las muchas posibles estrategias de resolución de problemas que se pueden investigar por medio de juegos (y que pueden verse con detalle en Corbalán, (1994)), hemos elegido las tres que consideramos más importantes: *empezar por el final*, *utilización de la simetría* y *estu-*

*dio sistemático de todos los casos*. Y también queríamos ver la incidencia de *encontrar notaciones adecuadas* en la búsqueda de las estrategias.

## Elección de los juegos


Para poder realizar un estudio de esas estrategias la primera labor era la elección de unos juegos adecuados. Basándonos en nuestra experiencia anterior y la búsqueda bibliográfica, seleccionamos los solitarios, *Sol y sombra*, *Estrella de oro* y *El páarking*, y los juegos para dos jugadores, *Quitamanchas*, *Llegar el primero* y *Margarita*. Las reglas definitivas de los mismos, que fueron las presentadas a los alumnos tras un proceso de puesta a punto, aparecen como figuras a lo largo de este artículo. Ahora trataremos de las estrategias previstas en cada uno de ellos, así como daremos referencias de los mismos.

*Sol y sombra*: Es un juego muy conocido con diferentes nombres (*Las ranas*, *Sol y luna*, *Blanco y negro*,...). Hay dos posibles estrategias para abordar este juego:

- i) Comenzar por un caso más sencillo (dos fichas de cada color o, incluso, una ficha de cada color, separadas en ambos casos por un espacio vacío).

### SOL Y SOMBRA

Es un juego *solitario* (para un solo jugador)

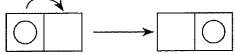


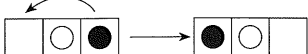
POSICIÓN INICIAL

El juego consiste en intercambiar la colocación de las fichas; las que estaban a la izquierda ponerlas a la derecha y viceversa. Hacerlo en el menor número de movimientos posible.


FORMA DE MOVER LAS FICHAS

- 1.- Las fichas colocadas inicialmente a la izquierda sólo se mueven hacia la derecha. Las de la derecha sólo hacia la izquierda.
- 2.- Una ficha puede moverse a la casilla de su lado si está vacía:  


- 3.- Si una ficha tiene a su lado una ficha de otro color y a continuación una casilla libre, puede saltar a la casilla libre:  



**Nunca puede haber en una casilla más de una ficha.  
No es necesario mover alternativamente fichas de los dos colores**

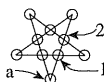


### ESTRELLA DE ORO

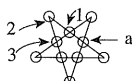
Es un juego *solitario* (para un solo jugador). Se coloca una ficha en cada uno de los diez vértices. El juego consiste en quitar nueve fichas (es decir dejar sólo una) siguiendo las:

#### REGLAS

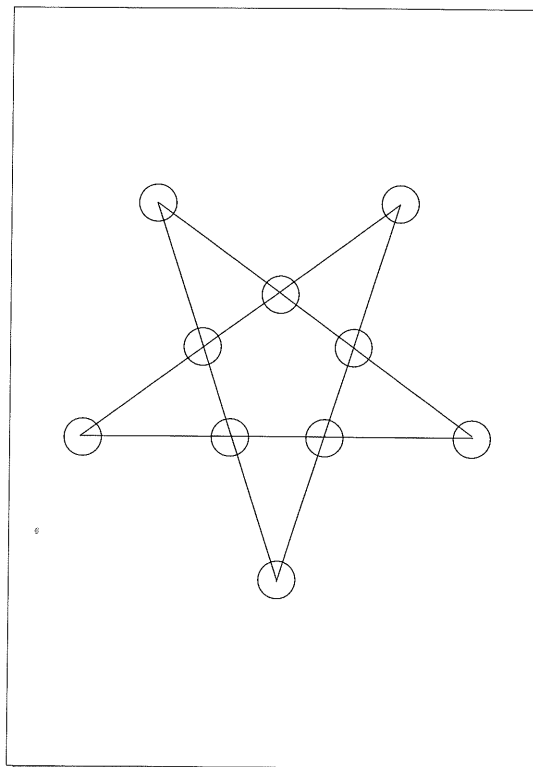
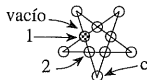
1.- Elegimos un vértice cualquiera que tenga ficha, se cuentan a partir de él dos vértices que formen con el inicial una línea recta y se quita la ficha que está en el último vértice que hemos contado. Por ejemplo, si elegimos el vértice *a*, se puede quitar la ficha que esté en el 2, porque los vértices 2, 1 y *a* están en línea recta.



Si elegimos el vértice *b*, se puede quitar la ficha que esté en 2, porque los vértices 2, 1 y *b* están en línea recta. Pero no se puede quitar la ficha que esté en 3 porque los vértices 3, 1 y *b* no están en línea recta.



2.- Si en un vértice no hay ficha no se puede empezar a contar en él, pero siempre hay que contarlo como lugar. Es decir, que si elegimos el vértice *c*, en el que hay una ficha, en el vértice 1 ya hemos quitado la ficha y en el vértice 2 hay todavía una ficha, ésta la podremos quitar porque 2, 1 y *c* están en línea recta, y el lugar del vértice 1 hay que contarlo aunque no haya ficha.



ii) Hacer un estudio sistemático de todos los casos posibles y la utilización de la simetría.

Asimismo hay una estrategia favorecedora, consistente en encontrar una notación adecuada para escribir las partidas, siendo posibles varias (Corbalán, 1994; Alfonso-Gracia, 1995).

La primera de las dos estrategias es difícil que se le ocurra sin preparación previa a ningún alumno. Sin embargo, una buena instrucción puede desencadenarla (Shell Centre, 1984; Olfield, 1991). En otros trabajos, hemos elaborado un análisis detenido de las posibilidades didácticas del juego (Corbalán-Gairín, 1988), y lo hemos incluido dentro de una secuencia educativa (Corbalán, 1994). La segunda estrategia, junto con la utilización de una notación adecuada, tendría que ser el método normal de encontrar la forma de realizar el juego.

*Estrella de oro:* El tablero de este juego es uno de los más antiguos que se conocen, habiéndose encontrado tallado en los bloques de piedra del templo de Kurna (hacia 1700 a. de C.) (Bell-Cornelius, 1990). Con ese tablero pueden hacerse diferentes juegos, tanto solitarios como de dos jugadores (Corbalán, 1994). El nombre que hemos adoptado proviene de la clásica relación áurea que aparece en el pentágono estrellado.

El juego que planteamos en nuestra investigación puede resolverse con facilidad si se hacen una serie de análisis. En concreto hay una idea clave, consistente en que desde un vértice se comen dos fichas y que una de ellas es comida a su vez desde dos vértices. Por eso, si desde un vértice comemos dos fichas, la que había en ese vértice ya no la podremos retirar. También hay una idea favorecedora, que puede provenir de una buena notación al intentar escribir las partidas, y que permite ver que solo hay dos tipos de vértices, los de fuera –las puntas– y los de dentro –los del pentágono interior–, y por tanto darse cuenta de la simetría del juego.

En cualquier caso, a partir de la idea clave, la obtención de una estrategia es inmediata si en vez de ir quitando fichas suponemos que el tablero está vacío (o con una ficha) y a partir de ahí, siguiendo las reglas, vamos rellenando todo el tablero. Así se ve que para poder quitar todas se trata de empezar a contar en una

ficha y a continuación quitar esa ficha, empezando a contar en la única ficha que es ahora posible. Es decir, la estrategia consiste en *empezar por el final*.

Además, junto con la utilización de la simetría del tablero, se ve que se puede lograr dejar al final la ficha que queramos previamente.

La forma de poder quitar todas las fichas menos una es empezar a contar en una ficha cualquiera, y a continuación quitar esa ficha contando desde la única ficha que podrá quitarla. Es decir, quitar la ficha desde la que se ha empezado a contar para quitar la anterior. Puede hacerse siempre (porque desde una ficha se pueden quitar dos y solo dos), y podemos elegir la ficha desde la que empezamos (de las puntas o del pentágono interior) y la colocación de la ficha que dejemos.

*El parking*: Este es un juego del tipo del *mancala*, muy populares en África y Asia, pero que nunca tuvieron arraigo en Europa (Grunfeld, 1978), en los cuales

hay huecos que se realizan en la tierra (o en un tablero) y semillas (que hacen de fichas) que se *siembran* en ellos. Dentro del grupo hay tanto juegos individuales como de dos jugadores (Bell-Cornelius, 1990). La versión que nosotros hemos utilizado (Corbalán, 1994) es una variante urbana del juego indio *tchuka ruma*, en el que las semillas han sido sustituidas por coches que hay que llevar a un parking. Un análisis de las posibilidades y variaciones de este juego fue hecho por Sainte-Laguë (1937).

Para encontrar la forma de realizarlo la estrategia adecuada es el *examen sistemático de todos los casos*, para evitar dejarse algunas de las posibilidades o repetir algunas jugadas, lo que lleva a que se alargue mucho el análisis. Para ello puede hacerse un diagrama de árbol que nos permita barrer todas las jugadas posibles, en cuyo caso es conveniente *encontrar notaciones adecuadas*.

*Quitafichas*: Es una de las múltiples posibilidades de simplificación del clásico juego para dos personas de origen chino *Nim* o *Marienbad*, así llamado en Europa como consecuencia de que uno de los personajes de la extraordinaria película *El año pasado en Marienbad*, de A. Resnais, ofrece continuamente jugar a este juego, y siempre gana porque conoce la estrategia ganadora, que según su formulación clásica pasaba por cambiar a base dos el número de fichas de cada fila. Esa

### EL PARKING

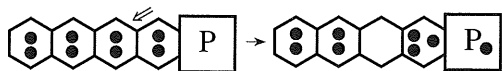
Es un juego *solitario* (para un solo jugador)  
Se empieza *colocando dos fichas en cada una de las casillas hexagonales*. El juego consiste en *trasladar todas las fichas a la casilla cuadrada P: el parking* siguiendo las

REGLAS

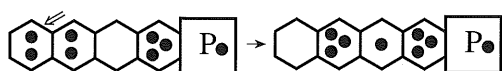
Coger con la mano *todas las fichas que haya en una casilla* (al empezar son dos, pero luego pueden ser más o menos), poner *una en cada una de las casillas* que le siguen a su derecha (incluida el parking), hasta que se acaben. Si se llega al parking y aún no se han acabado las fichas continuar por la primera casilla de la izquierda (como se marca en el tablero). *Nos fijamos en la casilla donde hemos colocado la última ficha*. Pueden pasar tres casos:

- 1.- Que sea el parking: repetimos la operación anterior empezando de nuevo en la casilla que se quiera.
- 2.- Si se acaba en cualquier otra (que no estuviera vacía), se tienen que coger todas las fichas de esa casilla (incluida la que acabamos de dejar) y repetir la operación anterior.
- 3.- Si la casilla estaba vacía, hemos hecho un movimiento prohibido y tenemos que volver a empezar: recolocar las fichas, dos en cada casilla hexagonal.

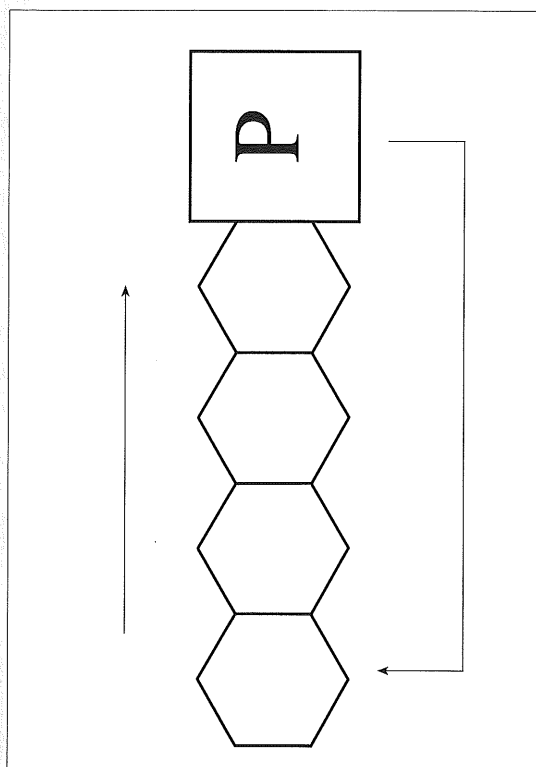
Por ejemplo, si al empezar el juego elegimos la casilla marcada ⇒



Como la última ficha la hemos colocado en el parking, podemos continuar con la casilla que queramos. Si lo hacemos con la casilla marcada ⇒



Como la última ficha la hemos colocado en una que estaba vacía, hemos hecho un movimiento prohibido y tenemos que volver a empezar en la posición inicial.



estrategia es un tanto complicada de encontrar, al menos para alumnos de ESO, y desde luego requiere bastante tiempo.

No es así en la versión simplificada *Quitafichas*. Se encuentra la forma de ganar mediante la estrategia *empezar por el final*, y la idea clave es que entre los dos jugadores pueden siempre retirar tres fichas del tablero, y por tanto el primer jugador ganará siempre al ir dejando al segundo sucesivos múltiplos de tres fichas.

En el análisis del juego hay, por tanto, que hacer planteamientos numéricos. Para encontrar la estrategia, podemos analizar empezando por el final, y forzando al contrario a situaciones *fatales* (es decir, aquellas que necesariamente llevan a perder la partida). En este caso se obtiene con facilidad: «siendo el primero en coger fichas, coger una ficha; y a continuación en cada movimiento coger un número de fichas diferente del otro jugador (de manera que entre los dos se sumen tres fichas). Por ello la secuencia de fichas que se dejan al adversario es: nueve, seis y tres; con lo cual ganamos la partida». Esta estrategia sirve para el primer jugador con cualquier número de fichas no múltiplo de 3 (es decir, de la forma  $3n+1$  o  $3n+2$ , quitando en primer lugar una o dos ficha). Si el número de fichas es múltiplo de 3, quien tiene estrategia ganadora es el segundo jugador, al ir presentando al contrario números de fichas múltiplos de 3 (que son las situaciones fatales).

*Llegar el primero*: Es un juego clásico con varios nombres, como *Arrinconar la reina*, —puesto que se puede imaginar como el movimiento de una reina, en un tablero de ajedrez, que hay que llevar hasta un extremo o rincón (ADECUM, 1988)—, *First one home* (Shell Centre, 1984) o *Juego de Wytboff* (M. de Guzmán, 1992). También hay versiones con tablero limitado (como el de ajedrez u otros) o con cuadrícula ilimitada.

Nosotros optamos por un tablero finito y pequeño (para poder hacer un análisis en un tiempo limitado), pero con suficiente extensión de manera que el número de casillas en que es ganador el primer jugador fuera mayor que cuatro, y que exigiera para poder encontrarlas un estudio sistemático. En ese estudio una estrategia apropiada es *empezar por el final*, para ir haciendo un análisis hacia atrás desde la casilla marcada como FINAL. Además de la *utilización de la simetría* del tablero

### QUITAFICHAS

Es un juego para dos jugadores

#### REGLAS

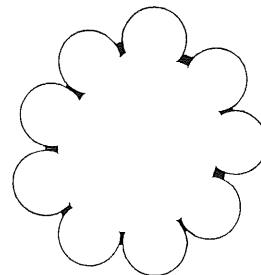
- 1.- El orden de inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.
- 2.- Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.
- 3.- Se colocan 10 fichas sobre la mesa. Cada jugador, en su turno, quita una o dos fichas, según quiera.
- 4.- **Gana** el jugador que consigue retirar la última ficha.

### MARGARITA

Es un juego para dos jugadores

#### REGLAS

- 1.- El orden de inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.
- 2.- Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.
- 3.- Cada jugador, en su turno, quita de la margarita con nueve pétalos, un pétalo o dos pétalos, a su elección. Si decide quitar dos pétalos, tienen que estar juntos.
- 4.- Puedes jugar con más comodidad poniendo al principio una ficha en cada uno de los pétalos y retirando en cada jugada una ficha o dos fichas que estén juntas.
- 5.- **Gana** el jugador que consigue llevarse el último pétalo (retirar la última ficha).

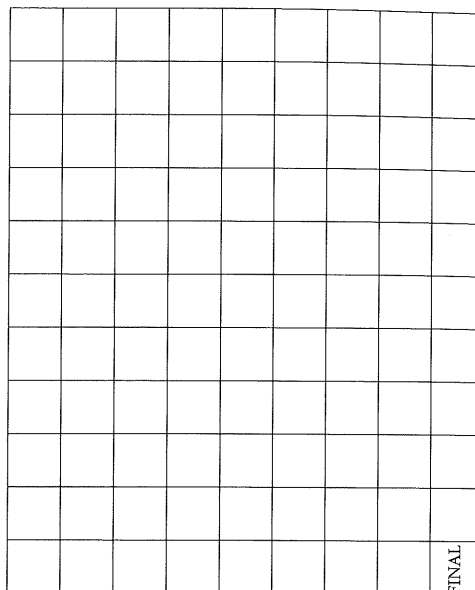
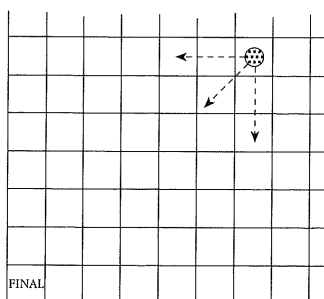


## LLEGAR EL PRIMERO

Es un juego de dos jugadores  
Se necesita el tablero adjunto y una sola ficha para los dos jugadores

### REGLAS

- 1.- Uno de los jugadores (la primera partida por sorteo y en las demás por turno) sitúa la ficha en una casilla cualquiera del tablero, a su elección.
- 2.- Mueve en primer lugar el otro jugador, y a partir de ese momento van haciendo movimientos alternativamente.
- 3.- Cada movimiento consiste en desplazar la ficha en horizontal (hacia la izquierda), vertical (hacia abajo) o en diagonal (hacia abajo y a la izquierda) cualquier número de casillas, como se ve en la figura.
- 4.- **Gana** el jugador que consigue llevar la ficha a la casilla marcada con FINAL (la situada en el ángulo inferior izquierdo).



para saber que, una vez que se tiene un cuadro ganador para un jugador, también lo será el cuadro simétrico con respecto a la diagonal principal del tablero.

La idea clave para hacer el análisis, es el hecho de que si una determinada casilla A es ganadora para uno de los dos jugadores, todas las casillas desde las que se pueda llegar a A en un solo movimiento son ganadoras para el otro jugador. Esta idea, combinada con la vuelta atrás desde el final, nos dan todas las posibilidades.

*Margarita:* Dentro de los pequeños juegos de estrategia, ligeras variaciones en las reglas permiten cambiar mucho la estrategia necesaria para ganar. Así sucede si en el caso de un juego del tipo Nim (como el *Quitafichas* anterior) añadimos la condición de que en el caso de quitar dos fichas han de estar juntas (Deulofeu, 1995; Corbalán-

Deulofeu, 1996). Al objeto de que hubiera que hacer un análisis detallado, en el que no sólo interviniera el número de las fichas sino su colocación, propusimos el juego *Margarita*, así llamado porque el tablero se hace en forma de esa flor.

El número de pétalos (y por tanto el número de fichas) puede variar, sin que ello añada dificultades conceptuales, excepto la cantidad que puede, si es un poco grande, oscurecer el procedimiento a desarrollar. Elegimos 9 pétalos para diferenciarlo del número de fichas que había en el *Quitafichas* (10 en ese caso). Aquí la estrategia ganadora es la utilización de la simetría, de forma que si le presentas al contrario una situación simétrica, siempre que él coja una ficha, tú podrás hacer lo mismo y, por tanto, ganar.

Por eso la estrategia ganadora, para el segundo jugador, es la siguiente: en la primera jugada se retira el número contrario de fichas que haga el adversario (es decir, una si él ha retirado dos, y dos si él ha quitado una), y además situadas opuestas a las suyas, de forma que se le deje al primer jugador seis fichas colocadas en dos grupos simétricos de tres fichas. A partir de ese momento coger la o las fichas simétricas de las que retire el adversario.

## Recogida, organización y análisis de los datos

Una vez que los jugadores individuales o por parejas hubieran dedicado un tiempo a jugar, hacía falta que expresaran sus reflexiones sobre la actividad que habían hecho. Para que esas reflexiones fueran homogéneas y comparables, se les proporcionaba a cada jugador (o pareja de jugadores) una misma ficha en la que tenían que contestar una serie de preguntas.

Y era necesario que contestaran tanto quienes habían llegado a alguna estrategia ganadora como los que no la tenían. En el primer caso se trataba de que la explicitaran, así como que aportaran información sobre el proceso que habían seguido hasta su hallazgo. Los que no tenían estrategia, era interesante que dijeran por qué motivo y cuando habían decidido que no la podían encontrar. Y también una información necesaria para todos era comprobar que el juego que habían jugado era el que se explicitaba en las reglas, es decir, que habían entendido las reglas que se les proporcionaban y que esas eran las que seguían.

Diseñamos una ficha para cada juego, que tenía que rellenar cada jugador (en el caso de los juegos individuales) o pareja de jugadores (en los juegos de dos). Estaba escrita por las dos caras, pero de ellas cada uno de los jugadores (o parejas de jugadores) solo debían contestar una, en función de su respuesta a la primera de las preguntas, que era si habían encontrado o no una estrategia ganadora.

La primera tarea que era necesario realizar era poner a punto la experiencia. Puesto que lo único que se iba a proporcionar a los alumnos era información escrita, era necesario contrastar con grupos de alumnos la redacción de los juegos. Se realizó un largo proceso de pruebas en diferentes grupos de alumnos de 1.º de ESO (12-13 años), con versiones reelaboradas de las reglas hasta que una mayoría de los alumnos las entendía correctamente.

En cuanto a la muestra para la recogida de datos, se eligieron 10 jugadores (o parejas de jugadores) para cada juego, que eran alumnos y alumnas de 2.º de ESO del Colegio Sagrada Familia de Zaragoza. En total conformaban un grupo de 45 alumnos, y la toma de datos se realizó en dos sesiones de 60 minutos de duración. La metodología de la misma fue la siguiente:

1. *Presentar* la sesión.
2. Explicitar que la *única información* sobre los juegos que se les proporcionará será la que aparezca en las *hojas escritas*.
3. Distribución de los *tableros de juego* y las *fichas necesarias* para jugar a cada uno de los jugadores o parejas de jugadores.
4. Jugar durante el tiempo necesario para la *familiarización y comienzo del análisis* (unos 25-30 minutos).

5. Se reparte la *ficha del juego* correspondiente a cada uno de los alumnos (o parejas).
6. *Se recogen las fichas* una vez cumplimentadas.

Además de la recogida de datos por medio de las fichas, también realizamos entrevistas directas con 6 alumnos (2 sobre juegos individuales y otros 4 que formaban dos parejas), porque queríamos tener *información directa* de todo el proceso de pensamiento de los alumnos, expresado por sus propias palabras. En ellas se trataron tres aspectos: *comprensión de las reglas* del juego, indagación sobre el *camino seguido para encontrar una estrategia* (parcial o global, correcta o no), así como en las *razones para dejar el análisis* si no se encuentra y las *relaciones* que manifiestan los alumnos *entre matemáticas, juegos y cultura*.

Para computar los datos de las fichas proporcionadas por los alumnos hemos utilizado seis aspectos distintos en cada uno de los juegos, con una codificación común para poder compararlos. Esos aspectos han sido: respuesta subjetiva, respuesta objetiva, comprensión de las reglas del juego, estrategia, expresión de la realización y descripción del proceso.

En cada uno de los juegos se obtenía de esta forma un cuadro de datos. A partir de ellos y para poder caracterizar los juegos se valoraron las cinco cualidades siguientes:

- 1) *Comprensibilidad*: Se refiere a la facilidad para entender el proceso del juego, así como el autocontrol respecto al mismo.
- 2) *Facilidad*: Hace referencia a las dificultades para obtener una estrategia ganadora (en el caso de juegos de dos jugadores) o para obtener la forma de realizar las jugadas necesarias (en el caso de los solitarios), o al menos una estrategia parcial.
- 3) *Posibilidad de descripción*: Se trata de analizar el aspecto de comunicación del proceso seguido en la manera de actuar, así como de los procesos para llegar a adoptar alguna solución.

*...era necesario que contestaran tanto quienes habían llegado a alguna estrategia ganadora como los que no la tenían. En el primer caso se trataba de que la explicitaran, así como que aportaran información sobre el proceso que habían seguido hasta su hallazgo. Los que no tenían estrategia, era interesante que dijeran por qué motivo y cuando habían decidido que no la podían encontrar.*



- 4) *Posibilidades de análisis del juego:* Hace referencia a la utilización de estrategias adecuadas en el análisis del juego.
- 5) *Estrategias utilizadas:* Se trata de comparar con las previsiones o hipótesis de posibles estrategias para encontrar las soluciones de los juegos.

De acuerdo con los resultados recogidos en los cuadros de cada uno de los juegos se han analizado las cinco cualidades de los juegos que hemos relatado, definiéndose índices (números comprendidos entre 0 y 1 para valorarlas) en algunas de ellas para poder compararlas.

## Resultados sobre juegos

Recopilamos a continuación los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación.

*Puesta a punto de los juegos.* Hemos hecho una labor de depuración de la presentación de las reglas de los seis juegos objeto de nuestra investigación, hasta conseguir que la mayoría de los alumnos entiendan las reglas de los mismos con la presentación por escrito de las mismas, sin explicación oral por parte del profesor. Hay que destacar las grandes dificultades de los alumnos de estas edades (13-14 años) para realizar lecturas comprensivas, y más en el caso de los juegos en que las reglas tienen que estar enunciadas y entenderse con precisión.

*Cómputo de las respuestas de los alumnos.* Se ha puesto a punto un mecanismo que recoge seis aspectos distintos y la misma codificación de las respuestas para cada uno de los juegos. En cuanto a la estrategia que utilizaban, objetivo fundamental de la investigación, se ha caracterizado en cada uno de los juegos lo que hemos llamado, dentro de las estrategias apropiadas, es decir, que llevan a resultados positivos, las estrategias *de ataque*, consistente en encontrar una *idea clave*, que bien aplicada nos llevaría a una estrategia ganadora; las estrategias *parciales*, cuando

*...se ha caracterizado en cada uno de los juegos, las estrategias de ataque, consistente en encontrar una idea clave, que bien aplicada nos llevaría a una estrategia ganadora; las estrategias parciales, cuando sirven en casos particulares; y la estrategia completas, que son aquellas que efectivamente nos dan una estrategia ganadora general.*

sirven en casos particulares; y la estrategias *completas*, que son aquellas que efectivamente nos dan una estrategia ganadora general.

*Caracterización de los juegos.* Como resultado del análisis de los resultados obtenidos, se caracterizó los juegos en cinco aspectos distintos, que pasamos a enumerar, junto con los resultados obtenidos.

1) *Comprensibilidad.* Hemos elaborado un *índice de comprensibilidad* (medido sobre 1), que es mayor cuando más grande es el porcentaje de alumnos que entienden las reglas y el de jugadores (o parejas) que encuentran algún tipo de estrategia ganadora. El valor de este índice de comprensibilidad para cada uno de los juegos aparece en la tabla adjunta, en la columna *I comp*, y nos muestra que hay tres juegos *bastante comprensibles* (aquellos cuyo *I comp* es mayor de 0,5) y otros tres *poco comprensibles* (de *I comp* menor que 0,5).

2) *Facilidad.* Con el estudio de las respuestas de los alumnos hemos elaborado un *índice de facilidad* (medido sobre 1), que es más cercano a la unidad cuando se encuentra la estrategia con más facilidad. El valor de este índice de facilidad (columna *I faci* de la tabla) permite dividir a los juegos en *fáciles* o *difíciles*, separados por el valor 0,5 de ese índice, y entre los utilizados en nuestra investigación hay tres de cada tipo.

3) *Posibilidad de descripción.* En cuanto a la descripción de la estrategia que se ha encontrado, hay dos tipos de juegos. Por una parte aquellos en que el proceso se describe sobre todo de forma gráfica (apelando en algunos casos a otros códigos añadidos), y que incluyen a *Sol y sombra*, *El parking*, *Llegar el primero* y *Estrella de oro*. Y la otra clase está formada por los juegos en que la descripción se hace por medio de palabras (*Quitafichas* y *Margarita*). La primera clase estaría formada por los juegos que tienen que ver con la geometría, y la segunda con la aritmética (al menos en la forma de análisis de los alumnos).

En lo que se refiere a la descripción del proceso seguido para llegar a la solución hay también dos tipos de juegos: aquellos en que se utilizan sobre todo palabras (*Estrella de oro*, *Quitafichas* y *Margarita*) y aquellos en que se dan códigos o jugadas (*Llegar el primero* y *Sol y sombra*), estando *El parking* a caballo entre ambas. Las dos clasificaciones sólo coinciden parcialmente porque se refieren a aspectos diferentes: la comunicación de la estrategia y la descripción del proceso de búsqueda de esa estrategia.

4) *Posibilidad de análisis del juego.* Tratamos de la utilización de estrategias adecuadas en el análisis de los juegos, es decir, estrategias diferentes del *ensayo y error* estricto. Por tanto, de la utilización de estrategias de ataque, parciales o completas. Definimos un *índice de análisis* (medido sobre 1) para clasificar los juegos según la

facilidad de análisis (columna *I ana* de la tabla). Es de destacar que los tres juegos por parejas que hemos usado en nuestra investigación tienen un índice de análisis mayor que los juegos individuales.

|                          | I comp | I faci | I ana |
|--------------------------|--------|--------|-------|
| <i>Sol y sombra</i>      | 0,722  | 0,667  | 0,074 |
| <i>Estrella de oro</i>   | 0,409  | 0,273  | 0,182 |
| <i>El páarking</i>       | 0,338  | 0,143  | 0,023 |
| <i>Quitafichas</i>       | 0,833  | 0,667  | 0,592 |
| <i>Llegar el primero</i> | 0,7    | 0,5    | 0,567 |
| <i>Margarita</i>         | 0,425  | 0,35   | 0,3   |

### Adecuación a las estrategias y diagnóstico de los juegos

Damos cuenta de los resultados obtenidos en cuanto a las estrategias que se utilizan por parte de los alumnos, cuáles son rentables y si son coincidentes con las previstas en el estudio previo, con las utilizadas por los *expertos*. Lo hacemos separadamente para cada juego.

*Sol y sombra*. Los alumnos no utilizan ninguna de las estrategias previstas, sino la primaria de *ensayo y error*; pero de forma consciente porque les da resultados. Eso se desprende de que este juego tiene un índice de análisis muy pequeño (0,074), que nos indica que no se utilizan estrategias elaboradas, y un índice de facilidad alto (0,667), que nos señala que a pesar de ello, muchos alumnos encuentran la solución. En cuanto a la descripción de la estrategia se hace de forma geométrica y el proceso de encontrar esa estrategia también se comunica por medio de las jugadas realizadas.

No sería un juego apropiado para utilizarlo como inductor de unas determinadas estrategias, aunque su utilidad sería buena para particularizar y generalizar resultados (tomando otros números de fichas), para encontrar términos generales de sucesiones, así como para demostrar que el número de movimientos es mínimo (y se hace en un contexto geométrico y lúdico).

*Estrella de oro*. Las estrategias previstas eran *empezar por el final*, de una forma un poco más complicada de lo habitual, puesto que suponía un cierto cambio de reglas (llenar el tablero en vez de vaciarlo), junto con algún tipo de utilización de la simetría. La realidad nos muestra que pocos alumnos las utilizan, ya que el índice de análisis es pequeño (0,182), y no es porque otras más sencillas les sean rentables, ya que el índice de facilidad (0,273) es también muy pequeño. La descripción de la estrategia se hace de forma gráfica, y el proceso de llegar al mismo por medio de una descripción verbal.

... los tres juegos por parejas que hemos usado en nuestra investigación tienen un índice de análisis mayor que los juegos individuales.

Se trata de un juego con dificultades de análisis derivados del hecho de que se puede utilizar la estrategia de *empezar por el final*, pero de una forma no evidente. Y la posible *utilización de la simetría*, tampoco es aplicada. Podría utilizarse después de haber interiorizado esa estrategia como un paso más adelante, pero no como uno de los primeros juegos en esa línea.

*El páarking*. Los alumnos no utilizan ninguna estrategia rentable, y convierten a este juego en el peor de todos en cuanto a la posibilidad de análisis ( $I\ ana = 0,023$ ), y además en el más difícil ( $I\ faci = 0,143$ ). No sería utilizable en estos niveles educativos, salvo que se hiciera antes un trabajo en la interiorización de esas estrategias.

*Quitafichas*. Se puede analizar con facilidad por medio de *empezar por el final*, y así se hace, con lo que es el juego de mayor índice de análisis (0,592), así como, en consecuencia, de mayor índice de facilidad (0,667). Hay que añadir que en el análisis del juego no se requieren elementos geométricos, sino sólo numéricos, y que no interviene la simetría, lo que parece facilitar mucho el análisis del juego. Figura en primer lugar en todos los índices que hemos elaborado, y la descripción de los procesos que intervienen se hace siempre por medio de palabras. Es un juego muy apropiado para desarrollar la estrategia de *empezar por el final*, y a partir de la formulación que nosotros hemos hecho se podría generalizar para obtener resultados con otro número de fichas. Facilita el análisis del juego el hecho de que no intervienga en ningún aspecto la geometría.

*Llegar el primero*. Se utiliza realmente *empezar por el final* (el 80% de los alumnos lo hace así), pero el carácter simétrico del juego sólo es tenido en cuenta por el 10% de los alumnos. Por eso el índice de análisis no es lo alto que podría ser (0,567) y lo mismo pasa con el de facilidad (0,5). La expresión de los análisis se hace de forma gráfica y con jugadas. La dificultad mayor de este juego es la no utilización del aspecto simétrico, mientras que sí se aplica la estrategia de *empezar por el final*. Parece sumamente

conveniente para, una vez que se han encontrado posiciones ganadoras, incidir en el aspecto de la simetría.

*Margarita.* Únicamente se aplica *empezar por el final*, lo que lleva a tener en cuenta sólo aspectos numéricos, a obtener sólo estrategias parciales, y a confundirlo en cierta medida con un juego del tipo de *Quitafichas*, en que interviene sólo el número y no la colocación de las fichas. Ello hace que se quede con un 0,3 como índice de análisis y en cuarto lugar en cuanto a facilidad ( $I \text{ faci} = 0,35$ ). La descripción de los procesos que intervienen en su análisis se hace por medio de palabras, olvidando los aspectos geométricos de colocación de las fichas.

Las dificultades del análisis de este juego provienen de considerarlo como sólo de cantidad, de número de fichas, no de posición de las mismas, un análisis del mismo tipo que el que se hace en *Quitafichas*.

Hay que reseñar además, y como suele ser habitual en los trabajos con juegos, que la participación y el interés de los participantes ha sido grande en general, deducido de una apreciación subjetiva, no medida de ninguna forma. Como resultado de ella, en poco tiempo (el de una clase normal) se puede tomar contacto con un juego, analizarlo y rellenar una ficha que proporciona información suficiente de formas muy diferentes de abordar los juegos. Con los indicadores anteriores que hemos puesto a punto, así como con el estudio de la adecuación de los mismos a las estrategias, podemos hacer un diagnóstico de cualquier juego.

Como recapitulación de los comentarios anteriores, parece que se infiere que en el nivel de 2.º de ESO (13-14 años), en que hemos realizado nuestro trabajo, hay una serie de estrategias generales de resolución de problemas que están asumidas de manera general, mientras que otras lo están en menor medida o no lo están en absoluto. Entre las interiorizadas destaca *empezar por el final*, como muestra en los juego *Quitafichas*,

*Los resultados anteriores parecerían indicar que las técnicas utilizadas en aritmética están más interiorizadas que las técnicas más apropiadas para la geometría o el estudio del azar.*

*Llegar el primero y Margarita.* El primero que es de aplicación directa y única de esa estrategia es el más fácil. Los otros dos se complican en la medida en que hay que utilizar otras además de esa. La no asumida en absoluto es el *estudio sistemático de casos*, estrategia importante para el análisis de múltiples situaciones y que, al menos con los juegos, no se aplica en absoluto. Tampoco está muy extendida la *utilización de la simetría*. Se hace muy poco en *Llegar el primero*, a pesar de que el contexto parece inducirlo, y se *olvida* en *Margarita*, poniendo el énfasis sólo en el aspecto numérico, sin tener en cuenta el geométrico. Sin embargo, las entrevistas con alumnos parecen insinuar que podría ser posible con cierta rapidez la instrucción en el caso de la simetría de algunos juegos.

Los resultados anteriores parecerían indicar que las técnicas utilizadas en aritmética, y en particular en el manejo de números, están más interiorizadas que las técnicas más apropiadas para la geometría (como el tener en cuenta la simetría) o el estudio del azar (el recuento de posibilidades).

## **Futuras líneas de investigación**

El trabajo que reseñamos se ha realizado con una muestra pequeña de alumnos (entre 9 y 14 jugadores o parejas de jugadores) y además todos ellos del mismo centro, del mismo curso y del mismo grupo. Por medio de este estudio se trataba de poner en marcha mecanismos adecuados para un estudio más profundo que nos permitiera responder de manera más fiable a las preguntas que nos hacíamos sobre los juegos de estrategia y su relación con las estrategias de resolución de problemas. Es, por tanto, el comienzo de un trabajo que se va a continuar y profundizar con grupos más grandes de alumnos, de centros, cursos y grupos diferentes, para de esta forma poder alcanzar una serie de objetivos. En concreto, se trataría de:

- Contrastar los resultados obtenidos en este trabajo con los que se consigan en grupos más numerosos de alumnos, que nos permitan abarcar un abanico más amplio de posibilidades y estudiar las posibles variaciones de los resultados en función de la edad de los alumnos, dentro de la etapa 12-16 años (la ESO).
- Caracterizar posibles tipos de jugadores (aquellos que siempre utilizan la misma estrategia o los que tienen interiorizadas varias; jugadores más o menos capaces...). Para ello se hará un seguimiento de los resultados que obtienen los jugadores o parejas de jugadores con los tres juegos individuales o de parejas.
- Relacionar los resultados que se obtienen con otras variables. Entre las posibles estarían el sexo, la práctica de juegos *inteligentes* fuera de la escuela (siendo el caso más frecuente el del ajedrez) y el interés por las matemáticas o las notas que obtienen en la asignatura.

Con todo ello esperamos tener una panorámica más amplia de las relaciones entre los juegos de estrategia y las estrategias más interesantes de resolución de problemas en la etapa de los 12-16 años, que corresponde al nivel de la Educación Secundaria Obligatoria.

*Nota final:* Una versión detallada de esta investigación, bajo el título *Estudio de algunas estrategias de resolución de problemas utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos matemáticos de estrategia*, dirigida por Jordi Deulofeu, ha sido presentada como Treball de Tesina de Doctorat en el Programa de doctorat de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona en Junio de 1996, y fue realizada por el autor en el marco de una Licencia por Estudios concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia para el curso 1995/96.

## Bibliografía

- ADECUM-Université d'Orléans (1988): *Mosaico matemático*, Muskaria, Tudela.
- ALFONSO, J. y F. GRACIA (1995): «El juego de las ranas», *UNO*, n.º 5.
- BELL, R. y M. CORNELIUS (1990): *Juegos con tablero y fichas*, Introducción de R. C. Bell. Labor, Barcelona.
- BOUVIER, A. y M. GEORGE (1984): *Diccionario de matemáticas*, Akal, Madrid.
- BRIGHT, G. W., J. G. HARVEY y M. M. WHEELER (1985): «Learning and Mathematics Games», *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph number 1, NCTM, Reston.
- BRIGHT, G. W. y J. G. HARVEY (1988): «Games, Geometry and Teaching», *Mathematics Teacher*, abril 1988.
- CORBALÁN, F. (1991): «Utilisation habituelle des jeux mathématiques dans la classe», *Proceedings of the 42nd CIEAEM meeting*, Pedagogical University in Cracow (Poland).

**Fernando Corbalán**  
 IES Grande Covián  
 Zaragoza  
 Sociedad Aragonesa de  
 Profesores de Matemáticas  
 Pedro Sánchez Ciruelo

- CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.
- CORBALÁN, F. y J. DEULOFEU (1996): «Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas», *UNO*, n.º 7.
- CORBALÁN, F. y J. M<sup>a</sup> GAIRÍN (1988): *Problemas a mí. 3. Juegos matemáticos*, Edinumen, Madrid.
- DEULOFEU, J. (1995): «Los pequeños Juegos de Estrategia en la enseñanza de las Matemáticas. ¿Por qué?, ¿para qué?», en *Actas de las 7<sup>a</sup> JAEM*, Madrid.
- GRUNFELD, F. V. (1978): *Juegos de todo el mundo*, Edilan-Unicef, Madrid.
- GUZMAN, M. de (1992): «Wining Strategies for Your Games», en *Mathematics in Education*, University of La Verne, La Verne, California, USA.
- HARVEY, J.G. y G. W. BRIGHT (1985): «Mathematical Games: Antithesis or Assistance?», *Arithmetic Teacher*, February 1985.
- OLDFIELD, B. J. (1991): «Games for developing strategies», *Mathematics in School*, May 91.
- POLYA, G. (1945): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México. (Traducción de 1965).
- SAINTE-LAGUË, A. (1937): *Avec des nombres et des lignes*, Vuibert, Paris. (Existe una reedición de 1994, Paris, Blanchard).
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1984): *Problems with Patterns and Numbers. An O-level Module*, University of Nottingham.
- WILLIFORD, H. (1992): «Games for Developing Mathematical Strategy», *Mathematics Teacher*, february 1992.



René Descartes (1596-1650)  
 (Retrato de Franz Halls)