

# Un atardecer en África y América

MANUEL GARCÍA PIQUERAS

Este artículo muestra dos aportaciones no occidentales, que suponen dos preludios diferentes y favorecen el aprendizaje basado en el propio descubrimiento de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. En la parte relacionada con los dibujos sona, se recogen distintas aproximaciones a las conjeturas del «máximo común divisor» y del «lusona monolineal». Además, se muestran ciertos aspectos de la herencia maya como el uso del triángulo 3, 4 y 5, así como la semejanza.

*Palabras clave:* Sona, Espejos, Conjetura, antigua cultura Maya, Historia de las Matemáticas, Enseñanza y aprendizaje.

## A sunset in Africa and America.

This paper shows two non-western contributions, which suppose different approaches and can be conducive to learning based on own discovery of highest common factor and lowest common multiple. Related to sona drawings, different approaches toward 'highest common factor' and 'monolineal lusona' conjectures are included. Furthermore, certain aspects of the ancient mayan culture are shown, in particular the use of the 3: 4: 5 triangle, as well as similarity.

*Keywords:* Sona, Mirrors, Conjecture, ancient Mayan culture, History of Mathematics, Teaching and learning.

Imaginemos una apacible puesta de sol en el Oeste de África, todo el pueblo está reunido en la plaza mayor, ha venido un famoso cuentacuentos *Chokwe* y todos los niños, jóvenes, y no tan jóvenes están entusiasmados. La historia dice así:

### *El Perro y el Cazador*

Un viejo cuentacuentos dijo que cierto cazador, llamado Tshipinda, fue de cacería, llevando al perro Kawa, y cogió una cabra salvaje. A su vuelta al pueblo, el cazador dividió la carne con Calala, el dueño del perro. Kawa se quedó con los huesos.

Después de algún tiempo, Tshipinda preguntó otra vez por los servicios del perro, pero este último rechazó ayudarlo. Le dijo al cazador que se llevara a Calala, ya que era él con quien estaba acostumbrado a repartirse la carne.

Toda esta historia quedaría simplemente en una amena fábula, si no fuera porque al mismo tiempo el cuentacuentos realiza dibujos en la arena como el de la figura 1.

La tribu de los Chokwe vive en el suroeste de África, en una región que comparte territorio con Angola, Namibia y Zaire. Las tradiciones de este tipo se remontan a las primeras organizaciones sociales humanas, entre ellas se encuentran los llamados *ritos de paso de edad*. En estos eventos el aspirante adquiere nuevos derechos y promete cumplir determinadas obligaciones en su comunidad. No obstante, es ne-

cesario superar ciertas pruebas que miden la capacidad de realización de unos dibujos geométricos denominados *sona* (se utiliza *lusona* para el singular), y que pueden llegar a ser bastante difíciles de realizar. En la bibliografía, concretamente en García Piqueras (2013-2014), se proporcionan enlaces web a una serie de vídeos que ilustran la realización de distintos *sona*.

Incluso, aún hoy en día podemos encontrar personas que se dedican profesionalmente a esta actividad: los *akwa kuta sona*, es decir, *aquellos que saben dibujar*. Aparte de transmitir este conocimiento a sus descendientes varones, estos expertos son al mismo tiempo cuentacuentos que usan los dibujos en la arena para ilustrar acertijos, fábulas y proverbios.

Esta tradición Chokwe ha sido recogida, formalizada, ampliada y divulgada desde un punto de vista matemático por diversos investigadores, si bien, una parte muy importante es debida a los esfuerzos del matemático Paulus Gerdes (1999, 2007), cuyas investigaciones han puesto de manifiesto numerosas propiedades sobre los *sona*.

Antes de estudiar sus propiedades, consideramos necesario establecer cuáles son las reglas del juego que caracterizan estos dibujos.

A partir de la figura 1, puede deducirse que las líneas no pueden superponerse, solo pueden cortarse entre ellas. Podemos observar ejemplos como los de las figuras 2 y 3.

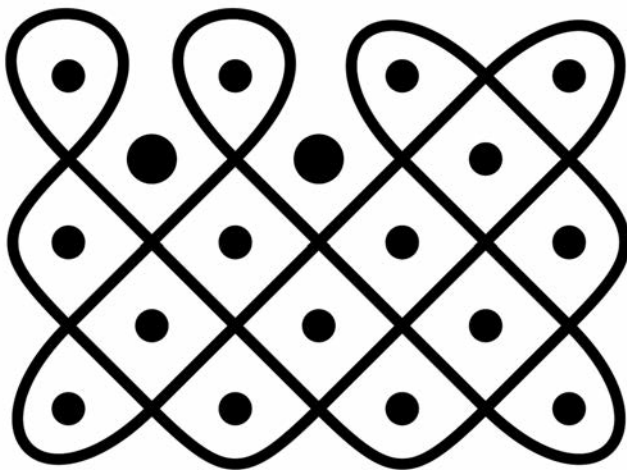


Figura 1. El punto aislado del centro representa el cazador y el de la izquierda el perro

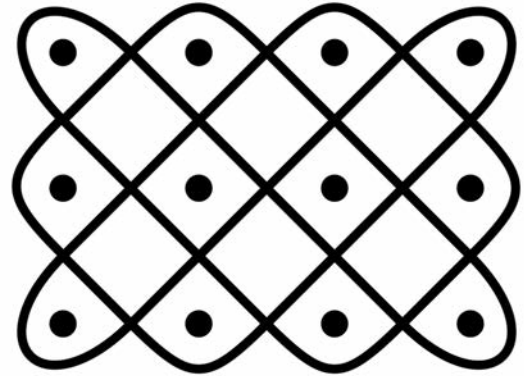


Figura 2. Lusona  $3 \times 4$

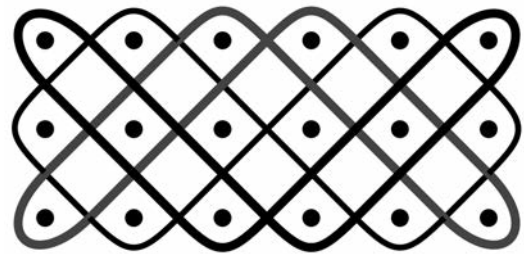


Figura 3. Lusona  $3 \times 6$

Si bien hay *sona* de distintos tipos, muy diferentes entre sí, nosotros nos vamos a centrar de ahora en adelante en aquellos que son como *trayectorias de bolas en un billar*. Los rebotes de bolas han generado una gran cantidad de literatura matemática (Gardner, 1971, 1975), sin embargo nosotros nos vamos a centrar, de momento, en aquellos que cumplen las siguientes normas:

- 1) Consideramos un conjunto de puntos distribuidos rectangularmente en filas y columnas, de manera que la distancia vertical u horizontal entre puntos adyacentes sea siempre la misma. A esta distribución la llamaremos *plantilla* de  $m$  filas y  $n$  columnas.
- 2) Rodeamos la plantilla mediante un rectángulo donde la distancia, vertical u horizontal de dicho rectángulo a un punto cualquiera externo de la plantilla, sea la mitad de la distancia entre puntos adyacentes. A este rectángulo

lo llamaremos *rectángulo rebote* (*cuadrado* si el número de filas y columnas coincide), o simplemente *caja*.

- 3) Comenzando en la base del rectángulo, justo debajo de un punto cualquiera de la plantilla, trazamos una línea con un ángulo de  $45^\circ$  respecto de la horizontal en sentido noreste. Dicha línea *rebotará* cuando llegue a un lado de la caja (reflejándose con un ángulo de  $45^\circ$ ) y proseguirá su recorrido, imitando la trayectoria que seguiría una bola de billar.

Consultemos un ejemplo de este proceso en las figuras 4, 5 y 6. Empezaremos en

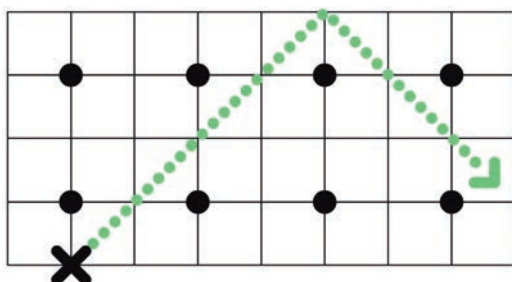


Figura 4. Realización de un lusona  $2 \times 4$ .  
Primera trayectoria

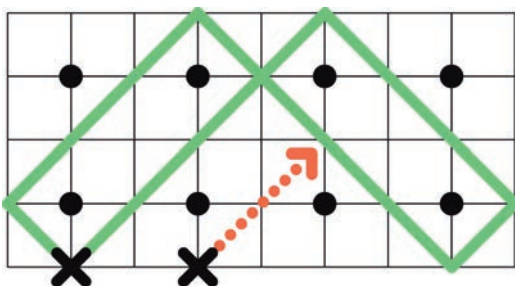


Figura 5. Realización de un lusona  $2 \times 4$ .  
Segunda trayectoria

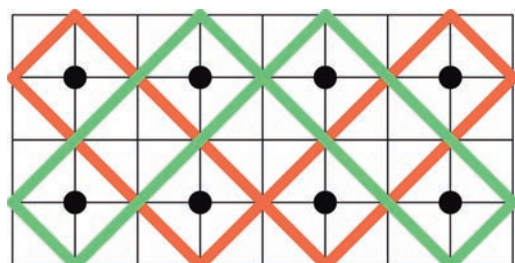


Figura 6. Lusona  $2 \times 4$  finalizado

el lugar marcado con un aspa en dichas figuras según las pautas proporcionadas.

Podemos consultar un vídeo donde se muestra cómo realizar paso a paso este tipo de dibujos en García Piqueras (2013-2014), en el apartado indicado como *sona en papel cuadriculado*.

*Nota.* Si bien los sona de las figuras 2 y 3 tienen sus esquinas redondeadas, el de la figura 6 tiene las esquinas rectas. Consideraremos ambas formas equivalentes, pues siempre podremos redondear las esquinas de sona como los de la figura 6 sin alterar las propiedades que vamos a estudiar.

A estos sona los clasificaremos como tipo *mesa de billar*, denotándolos mediante  $m \times n$ , donde  $m$  y  $n$  son el número de filas y columnas de la plantilla dada respectivamente.

## Una conjetura relacionada con los sona

Denominamos *trayectoria* a cada una de las líneas cerradas empleadas para realizar un lusona determinado. Una vez que tenemos definidas las reglas del juego, conviene que observemos cuántas trayectorias son necesarias para realizar este tipo de sona.

Podremos comprobar como un lusona  $2 \times 3$  necesita de una única trayectoria para su construcción, sin embargo, un lusona  $2 \times 6$  necesita de dos trayectorias, mientras que otro  $9 \times 12$  necesita de tres... Ahora bien, ¿existe alguna relación entre el número de trayectorias necesarias para realizar un lusona mesa de billar con el número de filas y columnas de su plantilla? (tabla 1)

Filas	Columnas	Trayectorias
1	1	1
2	1	1
2	2	2
2	3	1
2	4	2
3	1	1
3	2	
3	3	
...	...	

Tabla 1. Número de filas, columnas y trayectorias en sona del tipo mesa de billar

Es decir, planteamos en clase la siguiente pregunta: ¿Existe alguna relación entre el número de filas, columnas y trayectorias empleadas para realizar un sona mesa de billar? (Reto africano en García Piqueras, 2013).

Para afrontar el problema recomendamos proceder científicamente, así que en primer lugar trataremos de recabar datos para posteriormente estudiarlos y elaborar una hipótesis. Por tanto, la prioridad ahora consiste en rellenar una tabla como la 2 (recomendamos este tipo). Esta situación suele desilusionar bastante al alumnado, ya que conlleva una cantidad importante de dibujos a realizar. Sin embargo, es crucial que el estudiante se de cuenta de tres importantes propiedades:

*Propiedad 1.* Los sona formados por una única fila o una única columna siempre se forman mediante una sola trayectoria. Visualmente podemos comprobar dicha propiedad mediante la figura 7.

Por tanto, la primera fila y la primera columna de la tabla 2 son todos unos.

*Nota:* Sin pérdida de generalidad, dada una plantilla  $m \times n$ , trabajaremos utilizando un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen estaría situado en el vértice inferior izquierdo de la caja y cuyos ejes co-

$f \backslash c$	1	2	3	4	5	6	...
1	1	1	1	1	1	1	
2	1	2	1	2	1	2	
3	1	1	3	1	1	3	
4	1	2	1	4	1	2	
5	1	1	1	1			
6	1	2	3	2			
...							

Tabla 2. Los números de la fila y columna de los márgenes indican, respectivamente, la cantidad de filas y columnas de un lusona.

Como si del juego *hundir la flota* se tratara, dichos números determinan el número de trayectorias necesarias para realizar el lusona indicado

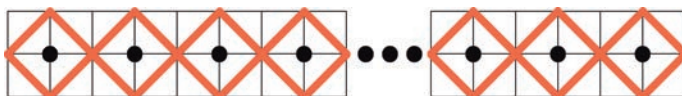


Figura 7. Un lusona de una única fila posee solo una curva cerrada

ordenados  $OX$  y  $OY$  contienen la base y el lado vertical izquierdo de dicha caja respectivamente. Esto nos es útil para comprobar nuestra siguiente propiedad.

*Propiedad 2.* Se necesitan exactamente  $n$  trayectorias para realizar un lusona  $n \times n$ , tal y como puede observarse en la figura 8. Además, existe exactamente un único punto de cada lado del cuadrado rebote por cada una de dichas trayectorias.

Por tanto, la diagonal de la tabla 2 sería 1, 2, 3, 4, 5, ... y así sucesivamente.

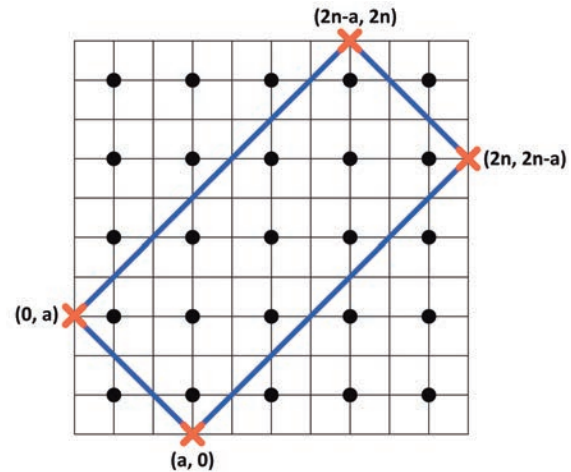


Figura 8. Si Dado *disparamos* desde el punto  $(a, 0)$ , con  $a \in \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ , entonces se generan tres puntos rebote más. En total cuatro puntos rebote, uno por cada lado de la caja:  $(a, 0)$ ,  $(2n, 2n-a)$ ,  $(2n-a, 2n)$  y  $(0, a)$

*Propiedad 3.* El número de trayectorias de un lusona  $m \times n$ , es el mismo que el de otro  $n \times m$ , ya que podemos transformar uno  $m \times n$  en otro  $n \times m$  mediante un simple giro que no alteraría, en ningún modo, el número de trayectorias del lusona original.

Así pues, la tabla que queremos rellenar es simétrica respecto de su diagonal.

Si utilizamos las propiedades (1), (2) y (3) podremos rellenar los huecos de la tabla 2 haciendo menos de la mitad de los di-

bujos que en un primer momento hubiéramos tenido que hacer. Además, de esta manera nos vamos familiarizando con las propiedades aritméticas del problema que estamos estudiando.

Cuando tengamos rellenados los huecos de una tabla como la 2 (las dimensiones  $9 \times 9$  o  $10 \times 10$  serían suficientes), podemos lanzarnos a emitir una conjetura sobre la relación existente entre filas, columnas y trayectorias. Aquí el papel del profesor resulta clave pues tendrá que rechazar aquellas hipótesis planteadas que resulten erróneas y, por otra parte, tendrá que encaminar a los alumnos por el camino correcto.

Con las indicaciones oportunas, los alumnos pueden llegar a la siguiente conjetura: *El número mínimo de líneas cerradas para realizar un lusona tipo mesa de billar es el máximo común divisor de filas y columnas*, que llamaremos simplemente *conjetura del máximo común divisor* para abreviar.

En Gerdes (1999) podemos encontrar una explicación a la conjetura planteada. También podemos consultar una prueba formal en García Piqueras (2014). Ambas exposiciones pasan por entender y aplicar con soltura el algoritmo de Euclides, pues es una de las piezas claves en la resolución de la conjetura del máximo común divisor. Sin embargo, en esta ocasión proponemos un método alternativo de mostrar el porqué de dicho resultado. Según nuestras experiencias, esta última aproximación resulta más asequible en niveles educativos inferiores, tales como 6.º de primaria o primer ciclo de la ESO.

En primer lugar partiremos de un caso particular, un rectángulo (posteriormente se pueden plantear otros ejemplos). Imaginemos que queremos embaldosarlo con baldosas cuadradas del mayor tamaño posible. Además no podemos cortar baldosas ni es posible dejar resquicio alguno, ¿cómo podríamos hacerlo?

El alumnado tendrá que ver la necesidad de emplear baldosas de tamaño  $2 \times 2$ , es decir, una baldosa cuadrada cuya dimensión es un número que divide a los dos lados del rectángulo y, por otro lado, caer en la cuenta de que es el mayor de todos los divisores de los lados del rectángulo (ver figura 9). Así pues, la solución sería emplear baldosas cuadradas cuya dimensión ha de ser el máximo común divisor de las dimensiones del rectángulo que queremos embaldosar (este tipo de problema es muy utilizado en los libros de texto a modo de aplicación práctica del máximo común divisor).

Una vez embaldosado el rectángulo  $4 \times 6$  mediante baldosas  $2 \times 2$ , lo superponemos sobre el lusona  $4 \times 6$ . Podemos mostrar a los alumnos que cada una de dichas baldosas albergará un lusona  $2 \times 2$ . De manera que en cada una de las baldosas se emplean tan solo dos trayectorias. Ahora bien, ¿podemos crear a partir de un único lusona  $2 \times 2$  todo el lusona  $4 \times 6$ ?

Para ello necesitamos utilizar la siguiente propiedad.

*Propiedad 4.* Dado un lusona  $m \times n$ , consideramos un lusona cuadrado cuya dimensión sea  $s \times s$  de manera que  $s \leq \min(m, n)$  (es decir, la dimensión del cuadrado es menor o igual que cualquiera de las dimensiones del rectángulo).

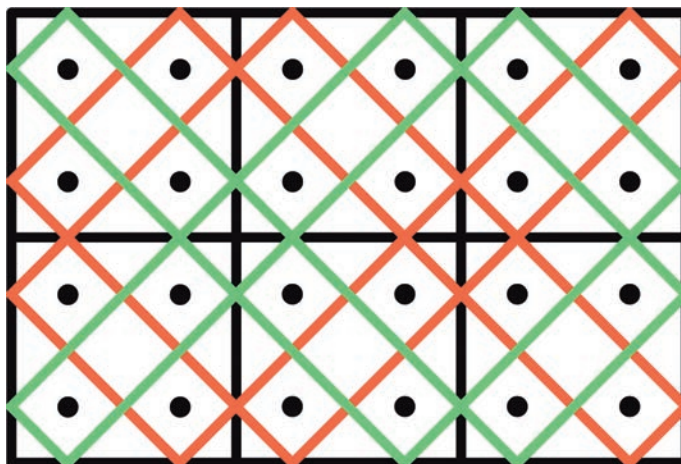


Figura 9. Lusona  $4 \times 6$  formado por lusona  $2 \times 2$

Entonces, si adosamos al lusona  $m \times n$  el lusona cuadrado  $s \times s$ , el número de trayectorias del lusona resultante conservará el número de trayectorias original.

Cuando hablamos de *adosar* dos sona queremos indicar que sus cajas se superponen, es decir, que un lado de la caja del lusona queda completamente incluido en un lado de la caja del otro, manteniendo siempre la misma distribución vertical u horizontal de las respectivas plantillas de puntos. Podemos ver un ejemplo de cómo se adosan dos sona en la figura 10.

Este hecho, al que hace referencia la propiedad 4, unido a que un rectángulo  $m \times n$  puede dividirse en cuadrados máximos de tamaño  $\text{MCD}(m, n)$ , daría como resultado la comprobación de la conjetura del máximo común divisor. Pues a partir de un primer lusona cuadrado  $k \times k$  (donde  $k = \text{MCD}(m, n)$ ), iríamos adosando nuevos cuadrados idénticos de modo que se formaría el lusona  $m \times n$  que queremos realizar. Así, en el caso particular que nos ocupa, el lusona  $4 \times 6$  podría ser formado mediante un proceso que consistiría en partir de una baldosa  $2 \times 2$  e ir adosando un total de cinco baldosas  $2 \times 2$  más sucesivamente.

Visualmente el proceso parte de la figura 11 y, en pasos sucesivos, se adosan baldosas  $2 \times 2$  como en las figuras 12 y 13. Este proceso finaliza el lusona al quedar *pegados* seis sona en dos filas de tres columnas cada una (ver figura 9), que era lo que queríamos desde un primer momento.

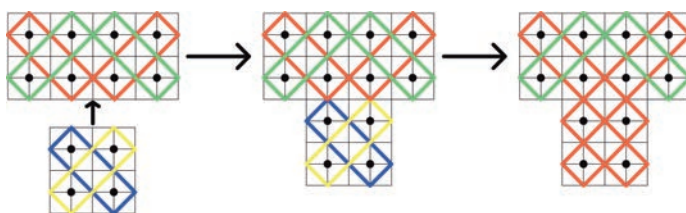


Figura 10. Si a un lusona se le *adosa* otro lusona cuadrado de menor o igual dimensión, el número de trayectorias se mantiene

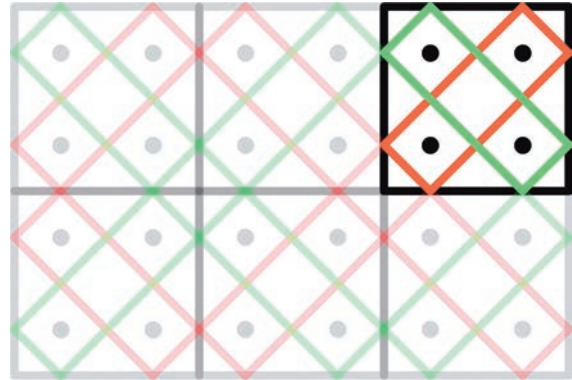


Figura 11. Lusona  $2 \times 2$  clave para generar el  $4 \times 6$

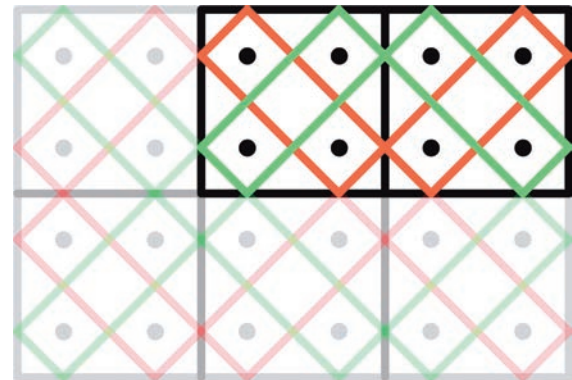


Figura 12. Dos sona  $2 \times 2$  adosados uno al otro

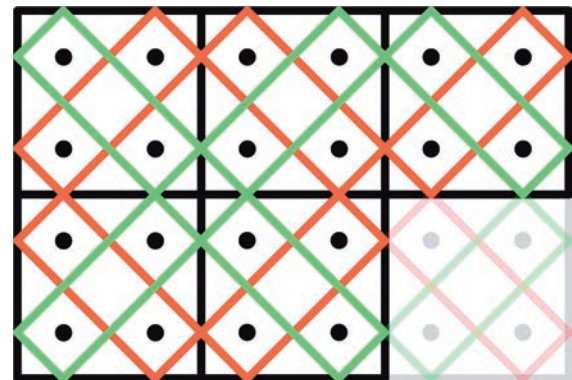


Figura 13. El lusona  $4 \times 6$  puede formarse adosando sona  $2 \times 2$

## Sona con espejos

Hasta aquí hemos comprobado cómo se resuelve la conjetura del máximo común divisor. Sin embargo, los Chokwe muestran más interés por aquellos sona que están formados por una única trayectoria (sona *monolineales*). Este hecho, motiva la siguiente cuestión que vamos a plantear:

Dado un lusona formado por varias trayectorias, ¿es posible colocar *espejos* o *paredes rebote internas* de manera que nos quede un lusona formado por una única trayectoria?

Si bien los Chokwe no representan espejos o paredes rebote en sus dibujos, estos están siempre muy presentes cuando se realizan. Hay múltiples ejemplos de su utilización, uno de ellos sería el de la figura 1, pues se trata de un lusona tipo mesa de billar en el que se han colocado dos espejos verticales justo encima de los dos puntos más gruesos (ver figura 14).

Así pues, queremos saber cuáles son las condiciones que nos permitirán obtener un lusona monolineal a partir de uno que esté formado por varias trayectorias.

En primer lugar consideraremos espejos de doble cara, sin grosor, cuya longitud es la misma que la distancia horizontal o vertical entre puntos adyacentes de una plantilla dada.

Bajo estas condiciones, la posición de un espejo en una plantilla queda definida por los siguientes valores:  $\{A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)\}$ , siendo  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  las coordenadas de los extremos del segmento que representa

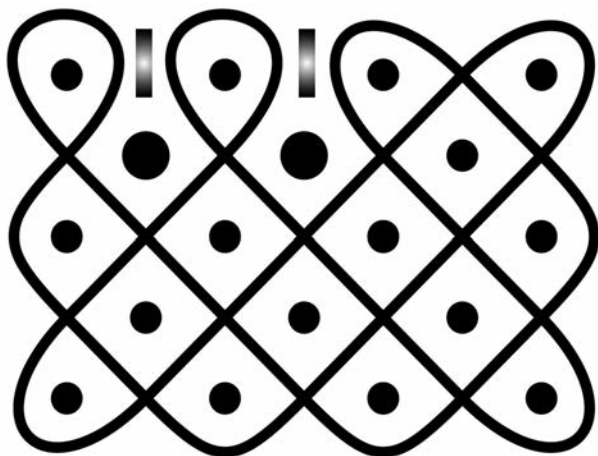


Figura 14. Espejos situados sobre los dos puntos más gruesos

el espejo, según el sistema de referencia que hemos mencionado anteriormente.

Ahora tenemos que saber en qué puntos podemos colocar un espejo: Diremos que un espejo  $\{A, B\}$  se ha colocado en el punto  $M$  cuando  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ .

Vamos a colocar los espejos donde haya un cruce de trayectorias, ya sean dos trayectorias diferentes o bien, una única trayectoria que se corta consigo misma, por tanto: dada una plantilla  $m \times n$ , podemos colocar un espejo en un punto cualquiera del conjunto

$$E = \left( \bigcup_{j=1}^{m-1} \left( \bigcup_{i=1}^n (2i-1, 2j) \right) \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \left( \bigcup_{j=1}^m (2i, 2j-1) \right) \right)$$

tal y como puede observarse en la figura 15.

$E$  contiene el número de puntos en una plantilla susceptibles de colocar un espejo. Un buen ejercicio aritmético consiste en descubrir que el cardinal de dicho conjunto viene dado por la fórmula

$$|E| = 2mn - (m + n)$$

Ya sabemos cómo son los espejos con los que vamos a trabajar y dónde podemos colocarlos. Nuestros esfuerzos van a dirigirse ahora en descubrir el efecto que tendrá su colocación en un lusona. Para trabajar en este sentido nos ayudará tener presente

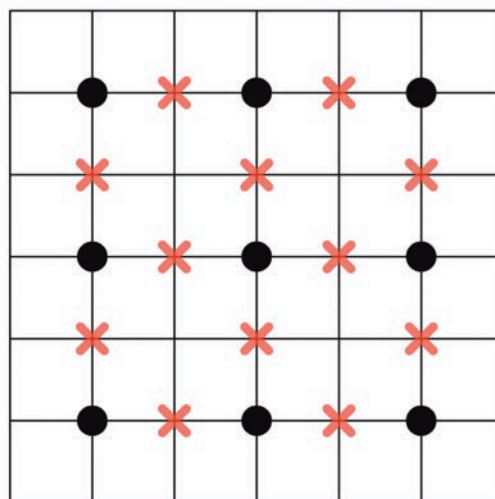


Figura 15. Puntos donde colocar un espejo para un lusona  $3 \times 3$

la imagen física de un rayo que se refleja en un espejo o de una bola que rebota en una pared. Una actividad geométrica interesante consiste en comprobar cuáles son los efectos de la colocación de un espejo, veamos qué ocurre.

Dado un lusona  $m \times n$ , la colocación de un espejo en cualquiera de los puntos susceptibles de poder hacerlo tiene una serie de consecuencias cuyos efectos podemos clasificar de la siguiente manera:

*Caso 1.* Supongamos que en el punto donde colocamos un espejo se cruzan dos trayectorias diferentes. Entonces ambas trayectorias quedarán unidas en una sola, de manera que el número de trayectorias se verá reducido en una unidad (ver figura 16).

*Caso 2.* Si en el punto donde colocamos un espejo las líneas que se cruzan pertenecen a la misma trayectoria, se nos presentará uno de los dos casos siguientes:

*Caso 2a.* Los extremos del espejo no quedan contenidos en la trayectoria que cortan, tal y como puede apreciarse en la figura 17. En este caso la trayectoria cerrada se parte en dos, separada por el espejo que acabamos de colocar. Así pues, en esta ocasión el

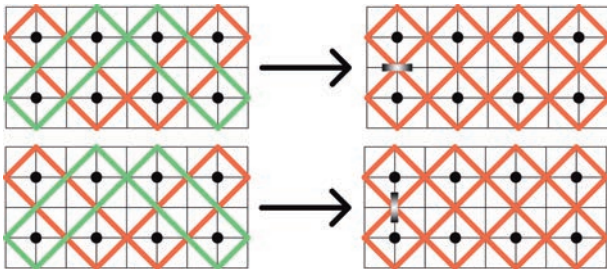


Figura 16. Dos trayectorias diferentes quedan unidas al colocar un espejo donde se cruzan dichas trayectorias

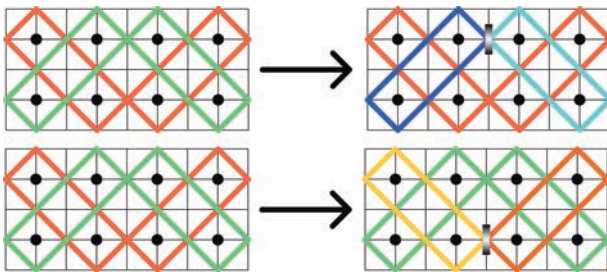


Figura 17. Una trayectoria queda separada en dos diferentes al colocar un espejo en un punto donde se cruza consigo misma

número de trayectorias aumentaría en una unidad.

*Caso 2b.* Los extremos del espejo que se coloca quedan contenidos en la trayectoria que corta. En esta ocasión la trayectoria recorrería los mismos puntos con y sin espejo (ver figura 18). Por tanto, en este caso el número de trayectorias no se ve alterado.

Una vez que hemos averiguado los efectos de la colocación de un espejo. Retomamos la *conjetura del lusona monolineal*, es decir, ¿es posible colocar un conjunto de espejos en un lusona  $m \times n$  con  $k = \text{MCD}(m, n)$  trayectorias de manera que el lusona quede reducido a una única trayectoria?

Resolveremos esta cuestión mediante la siguiente estrategia:

*Paso 1.* Comprobaremos que es posible encontrar  $k-1$  espejos en un lusona  $k \times k$  de manera que quedaría formado por una única trayectoria.

*Paso 2.* Adosamos varios lusona  $k \times k$  al lusona formado en el paso anterior utilizando  $k-1$  espejos. Así construiremos un nuevo lusona  $m \times n$  formado por exactamente  $(m/k \cdot n/k - 1)$  lusona  $k \times k$  y un lusona  $k \times k$  formado a partir de  $k-1$  espejos.

Veamos cuál es el proceso necesario para llevar a cabo el paso 1, es decir, qué tenemos que hacer para convertir un lusona mesa de billar cuadrado  $k \times k$  en un lu-

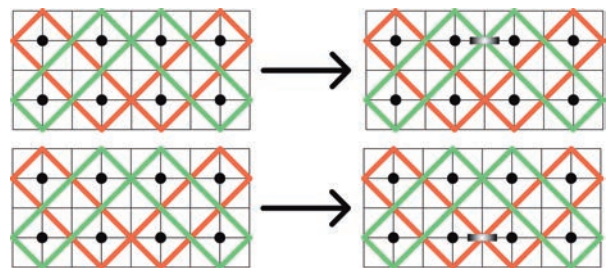


Figura 18. Una trayectoria queda invariante pese a colocar un espejo en un punto donde se cruza consigo misma



sona monolineal mediante la colocación de  $k-1$  espejos.

En primera instancia observamos que disponemos al principio de exactamente

$$|E| = 2k^2 - 2k = 2 \cdot k \cdot (k-1)$$

posiciones susceptibles de colocar un espejo.

Además, debido a que las trayectorias contienen tan solo un punto rebote por cada lado, en todos y cada uno de los puntos de  $E$  se juntan dos trayectorias diferentes. Así pues, en un primer momento disponemos de  $2 \cdot k \cdot (k-1)$  posibles puntos para poner un espejo.

Una vez colocado el primer espejo, dos trayectorias se funden en una sola. Ahora bien, dadas dos trayectorias en un luson  $n \times n$ , ¿en cuántos puntos se cruzan?

Para resolver esto tomamos  $a \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$  y consideramos la familia de cuatro rectas que contiene los segmentos

$$\begin{aligned} & \overline{(a,0)(2n,2n-a)}, \\ & \overline{(2n,2n-a)(2n-a,2n)}, \\ & \overline{(2n-a,2n)(0,a)} \text{ y } \overline{(0,a)(a,0)} \end{aligned}$$

respectivamente. Denotaremos a esta familia de rectas mediante  $F_n(a)$ .

Ahora consideramos  $b \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$  con  $a \neq b$ , entonces se cumple que

$$|F_n(a) \cap F_n(b)| = 8$$

Es decir, ambas familias de rectas se cortan exactamente en ocho puntos. Además, de esos ocho son tan solo la mitad, es decir cuatro puntos, los que se quedan en el interior de la caja asociada al luson  $n \times n$ , tal y como podemos observar en la figura 19.

En otras palabras, dos trayectorias diferentes en un luson  $n \times n$  sin espejos se cortan en cuatro puntos exactamente.

Si colocamos un espejo se unen dos trayectorias (la llamaremos trayectoria compuesta), perdemos así 4 puntos de  $E$  donde colocar el siguiente espejo. Por tanto, el segundo espejo puede colocarse en  $|E| - 4$  posiciones distintas.

En cuanto al tercer espejo, optamos por unir la trayectoria compuesta obtenida en un paso anterior con otra trayectoria (aunque si unimos dos trayectorias no compuestas el proceso seguiría teniendo un final idéntico). Perdemos en esta ocasión  $4 + 4$  puntos donde poner un espejo que una dos trayectorias diferentes (ver figura 20).

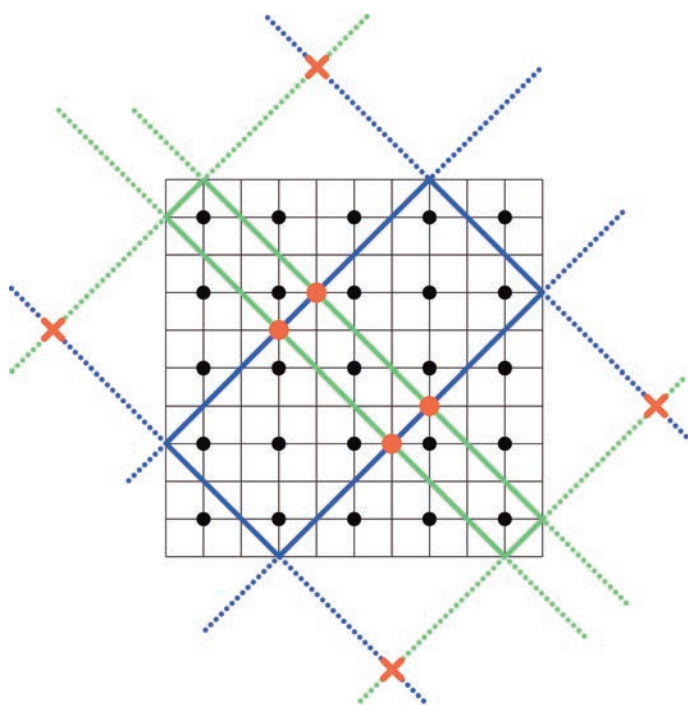


Figura 19. Puntos de corte para dos trayectorias distintas en un sona cuadrado

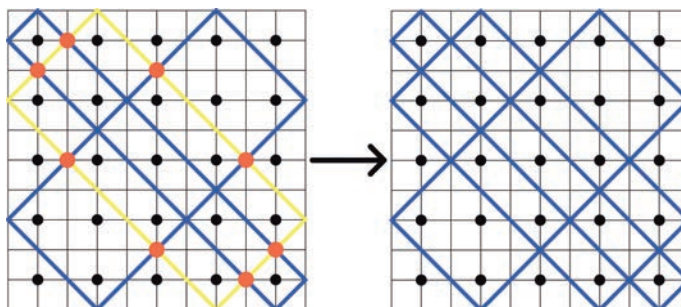


Figura 20. Una trayectoria compuesta (dos trayectorias simples unidas) corta a una trayectoria simple en  $4+4$  puntos, si en uno de esos puntos se coloca un espejo la trayectoria compuesta y la simple quedarían unidas

Podríamos continuar este procedimiento hasta que todas las trayectorias estuvieran unidas en una sola. La tabla 3 ilustraría los efectos que tendría la sucesiva colocación de espejos siguiendo el método descrito con anterioridad.

Observamos como en la última fila de la tabla ya tenemos una única trayectoria y han desaparecido todos los puntos posibles donde colocar un espejo que disminuya el número de trayectorias. De esta manera habríamos culminado el objetivo que nos fijamos en el paso 1.

Para conseguir llevar a cabo el Paso 2 bastará con adosar varios sona sin espejos al que acabamos de fabricar en el Paso 1 anterior con espejos. Esto es debido a que sabemos que el número de trayectorias de un lusona no varía cuando adosamos uno cuadrado, tal y como vimos en la conjetura del máximo común divisor (ver figura 21).

En resumen, podemos conseguir un lusona monolineal de dimensiones  $m \times n$  con  $k-1$  espejos, siendo  $k = \text{MCD}(m, n)$ . Además,  $k-1$  es el número mínimo de espejos necesarios para realizar esta operación, ya que un espejo puede disminuir, a lo sumo, en una unidad el número de trayectorias resultante.

32  
SUMOS  
78

Espejos colocados	Núm. de trayectorias	Núm. de puntos posibles donde colocar un espejo que una trayectorias
0	$k$	$2k^2 - 2k$
1	$k-1$	$2k^2 - 2k - 4$
2	$k-2$	$2k^2 - 2k - [4 + (4+4)]$
3	$k-3$	$2k^2 - 2k - [4 + (4+4) + (4+4+4)]$
...	...	...
$k-1$	$k - (k-1) = 1$	$2k^2 - 2k - \frac{4 \cdot (k-1) \cdot k}{2} = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$

Tabla 3. Relaciones numéricas entre el número de espejos, número de trayectorias y número de puntos disponibles para colocar más espejos que unan trayectorias

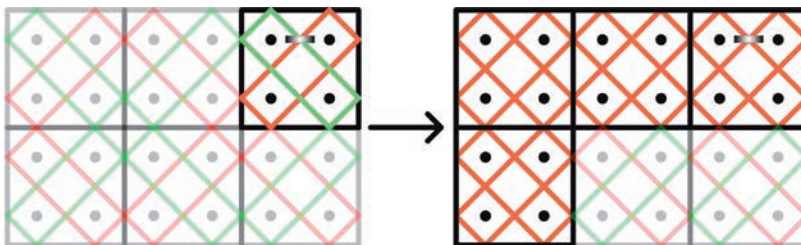


Figura 21. Proceso que convierte un lusona formado por varias trayectorias en otro monolineal

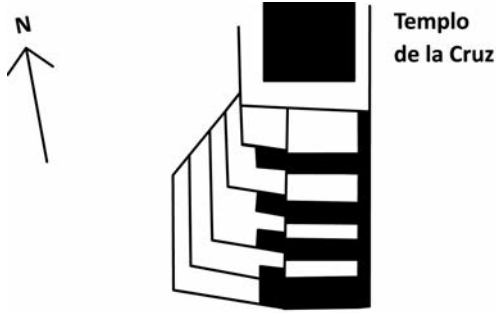
Ya hemos comentado la afición de los Chokwe a hacer uso de sona monolineales, pero también debemos mencionar su interés por aquellos que contengan ciertos tipos de simetrías. Así pues, dejamos abierta la *conjetura del lusona monolineal simétrico* que consistiría en descubrir el conjunto de espejos necesario para que el lusona resultante sea monolineal y además, que cumpla algún tipo de simetría (axial, rotacional, etc.).

### Semejanza y mínimo común múltiplo en la antigua cultura maya

Volvamos a nuestra puesta de sol, pero en esta ocasión en otra plaza muy distinta. Viajemos a Centroamérica, concretamente a la ciudad de Palenque en la plaza del Conjunto de las Cruces (ver figura 22).

Situémonos frente al Templo del Sol al atardecer de un solsticio de verano, veremos como el Sol se pone justo detrás de dicho templo. Si nos trasladamos en el tiempo a la época de esplendor de la ciudad, dicho atardecer tuvo que ser excepcional, ya que los últimos rayos de Sol del día más largo del año atravesarían la crestería del templo, adornada con figuras divinas y seres mitológicos.

Este no es más que uno de tantos casos que ejemplifican los amplios conocimientos astronómicos de los antiguos pueblos maya. El propio Templo del Sol es una especie de *calendario solar* (García Piqueras, 2013). En su interior los primeros rayos de Sol de ciertos días clave como solsticios, equinoccios, etc. producen una serie de luces y sombras que registran cuáles son dichos días clave (ver figuras 24, 25, 26 y 27).



Templo del Sol

Figura 22. Plaza del Conjunto de las Cruces. Palenque. México



Templo de la Cruz Foliada



Figura 23. Templo del Sol visto desde el Templo de la Cruz

Por otra parte, el estudio de su geometría podría darnos cierta información acerca de las matemáticas que manejaban los arquitectos de aquellos antiguos templos maya. En este sentido, uno de los aspectos puestos de relieve en la construcción del Templo del Sol ha sido la utilización de rectángulos en proporción  $3 \times 4$  (García Piqueras, 2013).

En las figuras 28, 29 y 30 puede observarse como la planta, el alzado y la placa fundacional interior que recuerda a los cons-

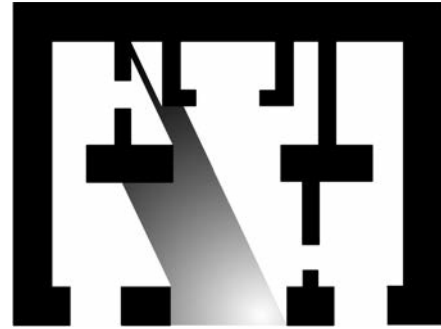


Figura 24. Amanecer en el interior del Templo del Sol los días de equinoccio

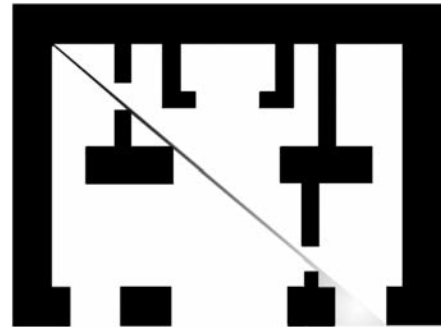


Figura 25. Amanecer en el interior del Templo del Sol los días de solsticio de verano

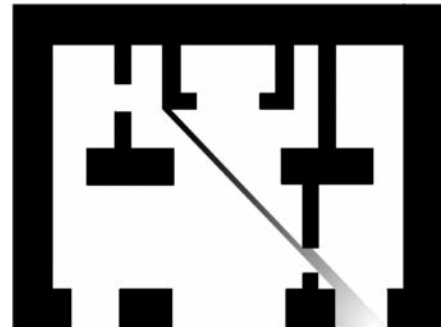


Figura 26. Amanecer en el interior del Templo del Sol los días de paso por el cenit

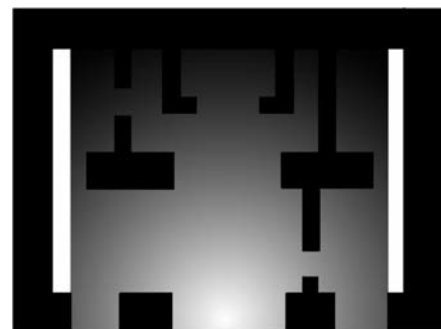


Figura 27. Amanecer en el interior del Templo del Sol los días de paso por el nadir

tructores del templo (Janaab' Pakal y su hijo Kam Balam) se enmarcan perfectamente en rectángulos en proporción  $3 \times 4$ .

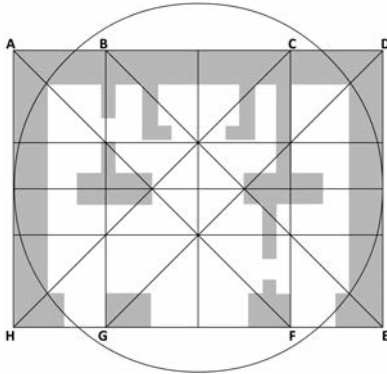


Figura 28. Análisis de la planta del Templo del Sol mediante un rectángulo  $3 \times 4$

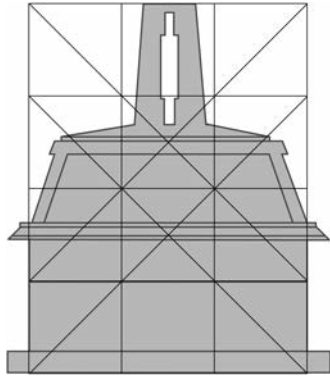


Figura 29. Estudio del alzado del Templo del Sol por medio de un rectángulo  $3 \times 4$

Es muy posible que aquella predisposición maya hacia este tipo de rectángulos provenga de su estrecha relación con el triángulo rectángulo de lados 3-4-5 (un rectángulo  $3 \times 4$  se divide exactamente en dos triángulos rectángulos 3-4-5 trazando una de sus diagonales). Este triángulo rectángulo ha sido empleado por distintas culturas a lo largo de la historia, aunque no hay pruebas concluyentes, al menos por el momento, de haber sido estudiado desde un punto de vista matemático por la antigua cultura maya (en parte porque no han sobrevivido más que unos pocos códices de aquella época).

El estudio geométrico de la arquitectura del Templo del Sol podría ser un buen punto de partida para introducir la semejanza, así como las escalas, etc. Pero por otra parte, también es una buena manera de introducir o recordar cuáles son los múltiplos de un número. Una forma de generar réplicas a mayor tamaño de un rectángulo  $3 \times 4$  consistiría en obtener sucesivamente múltiplos del 3 y del 4. En general, podemos generar réplicas de rectángulos  $m \times n$  simplemente con obtener múltiplos de sus dimensiones (basta

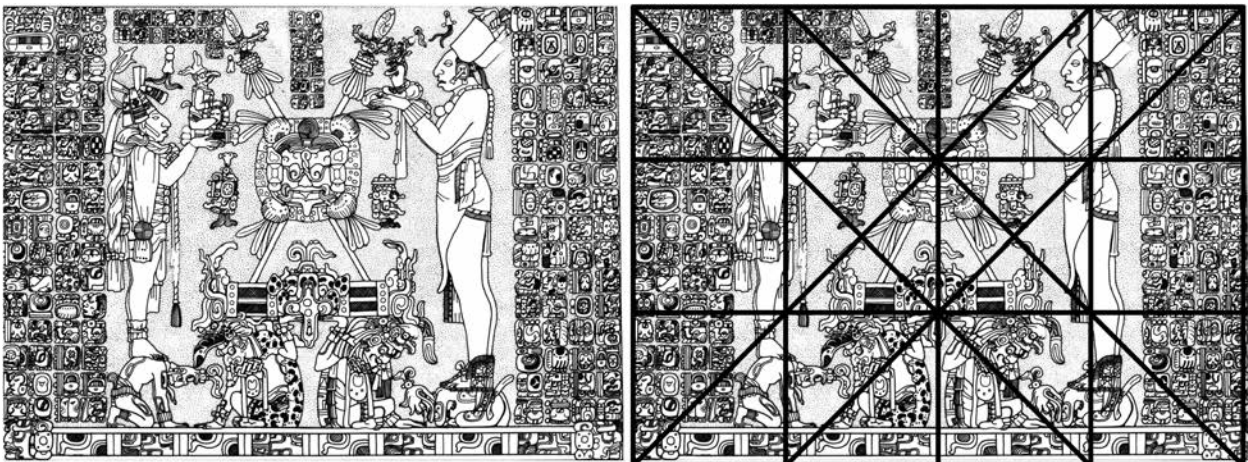


Figura 30. Placa fundacional situada en el santuario interior del Templo del Sol (Janaab' Pakal y Kam Balam). Sus dimensiones son analizadas mediante un rectángulo  $3 \times 4$

con multiplicar  $m$  y  $n$  por el mismo número).

Si ya tenemos afianzado el concepto de múltiplo, podemos fijar nuestra atención en otro aspecto importante de la cultura maya. En esta ocasión, se nos servirá en bandeja la introducción a otro concepto matemático que convenimos en denominar *mínimo común múltiplo*.

Los mayas llevaban un riguroso registro de los días del año, en concreto diseñaron varios calendarios.

El *Tzolkin* es un período de 260 días, y era el más usado por los pueblos de la antigua región centroamericana para establecer los tiempos de las tareas agrícolas, celebraciones populares, fiestas religiosas, etc.

Se compone de 20 meses, representados por caricaturas, y 13 días. Al primer día se le asocia el número 1 y el primer mes, al segundo día el número 2 y el segundo mes, etc. Cuando se llega a un día múltiplo de 14 se le vuelve a asociar el número 1, continuando la sucesión del 1 al 13 otra vez. En paralelo, cuando lleguemos a un día múltiplo de 21, el mes regresa al primero de los 20 posibles, siguiendo así sucesivamente (ver figura 31).

En resumen, el número de días del *Tzolkin* es 260, es decir, el mínimo común múltiplo de 13 y 20.

El *Haab* es otro calendario, compuesto por 18 meses de 20 días cada uno y 5 días sobrantes denominados *Uayeb*, que hacen un total de 365 días (ver figura 32).

Si se entrelazan *Tzolkin* y *Haab*, de la misma manera que se entrelazan los 13 números y los 20 meses del *Tzolkin*, se obtiene un nuevo período de 18.980 días, aproximadamente unos 52 años, que recibe el nombre de *Calendario Redondo* (figura 33).

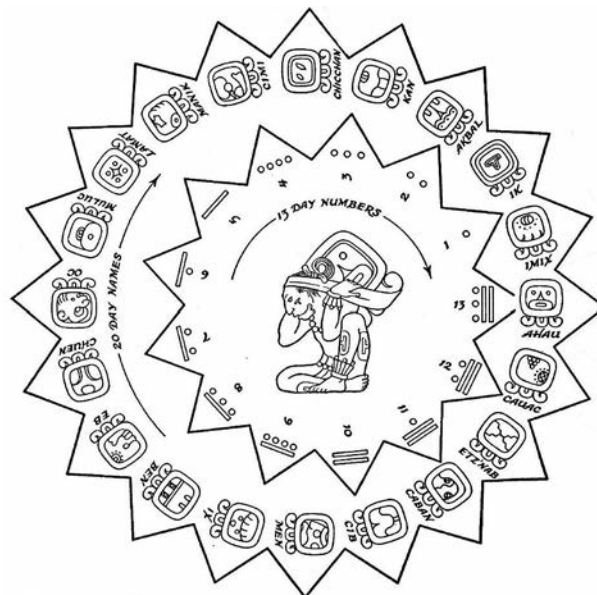


Figura 31. Calendario Tzolkin de 260 días



Figura 32. Calendario Haab de 365 días

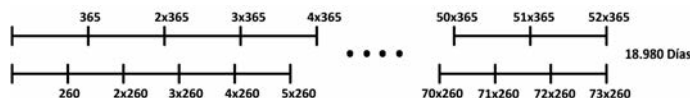


Figura 33. Calendario Redondo de 18.980 días

El hecho de que aparezca tan claramente aquí el mínimo común múltiplo, puede ser utilizado como excusa para que el alumnado descubra por él mismo en qué consiste dicho concepto, a la vez que se entrelaza *Tzolkin* con *Haab*, y por qué no, cómo se entrelazarían otros calendarios con un número de días inventados.

Podríamos utilizar tablas como la siguiente:

Calendario I	Calendario II	Calendario Entrelazado
15	20	60
30	40	120
42	56	168
...	...	...

Tabla 4. Relación entre calendarios que se entrelazan

Para finalizar, nos gustaría simbolizar la unión en un mismo atardecer de las culturas africana y americana por medio de la conocida fórmula matemática

$$a \cdot b = \text{MCD}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b)$$

## Conclusión

Consideramos que realizar una *introducción* de máximo común divisor y mínimo común múltiplo como la realizada ayudaría, en gran medida, a que los alumnos encuentren una salida al laberinto que a veces suponen estos conceptos. De esta manera se favorece un aprendizaje basado en el descubrimiento propio, al mismo tiempo que se potencia el razonamiento lógico.

Por otra parte, el trabajo realizado a partir de los sona, así como el análisis de la herencia arquitectónica y cultural maya, abre un abanico de posibilidades para la experimentación matemática asequible a un público muy amplio, que va desde los últimos cursos de la educación primaria en adelante.

## Referencias bibliográficas

- GARCÍA PIQUERAS, M. (2013), *Una historia de la proporción*, Nivola, Madrid.
- (2013-2014), *Videos y láminas relacionados con los sona*, disponibles a través de <<http://goo.gl/YYna2m>>.
- (2014), «Sona: una herramienta didáctica, un algoritmo y un corolario», *La Gaceta de la RSME*, vol. 17, n.º 4, 765–782.
- GARDNER, M. (1975), *Carnaval matemático*, Alianza, Madrid [edición 1995].
- (1971), *Comunicación extraterrestre*, Cátedra, Madrid (edición 1986).
- GERDES, P. (1999), *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations*, The Mathematical Association of America, Washington.
- (2007), *Drawings from Angola: Living Mathematics*, Research Centre for Mathematics, Culture and Education, Maputo.

*Dedicado a la memoria de Bernardino del Campo López.*

MANUEL GARCÍA PIQUERAS  
IES Bonifacio Sotos (Casas-Ibáñez, Albacete).  
<[mgiquieras@gmail.com](mailto:mgiquieras@gmail.com)>