

máticas serían con toda seguridad preferibles a la piedra filosofal tan buscada en vano por los alquimistas. Tales reglas procederían de la magia y no hay tal magia. Encontrar reglas infalibles aplicables a todo tipo de problemas no es más que un viejo sueño filosófico sin ninguna posibilidad de realizarse».

Algunos problemas

La cuarta y última parte del libro (pp. 199-215), «Problemas, sugerencias, soluciones» da la oportunidad al lector de practicar el método descrito en las tres partes anteriores proponiendo, en el primer apartado, 20 problemas de tipos y contenidos muy diversos; para cada uno de los cuales da sugerencias más o menos largas para su solución en la línea del método, en el segundo apartado; y aporta, por fin, la solución de todos ellos.

Como muestra aportamos las tres fases en un problema, el número 4. «Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2.989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?». Sugerencias: «'He aquí un problema relacionado con el suyo'. Si el libro tiene exactamente nueve páginas numeradas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? (9 evidentemente). He aquí otro problema 'en relación con el suyo': si el libro tiene exactamente 99 páginas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? Solución: «Para un libro de 999 páginas se necesitan

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2.889$$

dígitos. Si el libro en cuestión tiene x páginas,

$$2889 + 4(x - 999) = 2.989$$

$$x = 1.024$$

Este problema nos hace ver que una evaluación preliminar de la incógnita puede ser útil (e incluso necesaria, como en este caso)».

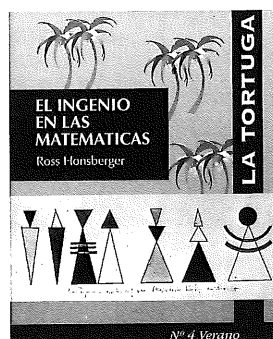
Para acabar

Sorprende la frescura de un libro como este, con más de cincuenta años a sus espaldas, que se puede leer con gusto y aprovechamiento, y no sólo una vez, sino tantas como se haga se siguen encontrando reflexiones,

comentarios atractivos, y no siempre los mismos. Interesa, sobre todo, por propugnar la creación de un espíritu abierto, constructivo, experimental de la clase de matemáticas. Si hubiera de poner alguna pega (todo la tiene), habría que referirse (además de una traducción mejorable) a una presentación descarnada de los problemas, con poca historia por medio, y a un gusto por despojarlos de su contexto, seguramente deseada, pero que nos gustaría que tuvieran un aire más vivo, menos académico. Algo que con el transcurso de los años, en los discípulos de Polya (que somos todos, conscientemente o no), se ha ido superado.

Fernando Corbalán

Jordi Deulofeu



EL INGENIO EN LAS MATEMÁTICAS

Ross Honsberger

DLS-Euler, Madrid 1994

ISBN: 85731-14-X

205 páginas

La reciente aparición editorial de dos nuevos números de la colección de libros «La Tortuga de Aquiles» es una gran noticia para aquellos que amamos las matemáticas. Desde estas líneas quie-

ro animar y aplaudir este esfuerzo de la Editorial DLS-Euler que sigue publicando en español la «New Mathematical Library», bajo ese sugestivo nombre de La Tortuga de Aquiles.

Que grandes matemáticos dediquen parte de su tiempo a escribir sobre matemáticas, que no necesiten un excesivo aparato matemático, es muy de agradecer, quizá especialmente por todos aquellos que nos dedicamos a la docencia, pero sobre todo porque es una oportunidad de disfrutar y emocionarnos con algunos retazos de partes de las matemáticas que no han estado ni están en los planes de estudios que hemos conocido o conocemos. Parece ser que esto que tan brillantemente hace aquí Miguel de Guzmán es una práctica mucho más habitual en Estados Unidos, donde matemáticos de gran prestigio escriben sobre distintas cuestiones matemáticas que puedan ser leídas por alumnos con conocimientos equivalentes a los que se tienen en bachillerato o COU. Esta es la idea que parece animar a la editorial Euler con la publicación de esta colección de libros que el mismo Miguel de Guzmán elogia en la siguiente nota a la edición española que aparece en la contraportada de todos los libros que se han publicado hasta ahora:

«La colección New Mathematical Library (que aparece en España bajo el nombre de La Tortuga de Aquiles), de exposiciones matemáticas breves y de nivel asequible a los estudiantes de secundaria, comenzó a ser publicada con la intención de ofrecer un acceso fácil a los estudiantes hacia el área de la matemática generalmente no incluidas entre los contenidos de su enseñanza.

La elección de los autores y de las materias pronto hicieron de la serie un gran éxito, siendo sus libros utilizados no ya sólo por los estudiantes de secundaria, sino por los estudiantes universitarios y profesores de todos los niveles.

Por su estilo y acierto expositivo suponen una visión introductoria y llana a unos cuantos temas matemáticos que han ido adquiriendo, al transcurrir de los años, aún más relevancia.

La traducción al castellano de las principales obras de la serie constituirá sin duda una gran oportunidad de enriquecimiento de nuestros profesores y de todos los usuarios de la matemática en los países de habla española, que ejercerá una profunda influencia en la tarea de renovación de nuestro sistema educativo en este área.»

Los libros aparecidos hasta la fecha son los siguientes:

1. *Retorno a la geometría*. Coxeter y Creitzer.
2. *Olimpiadas matemáticas internacionales*. Creitzer (recopilador).
3. *Métodos matemáticos de la ciencia*. Polya.
4. *El ingenio en las matemáticas*. Honsberger.
5. *Las matemáticas de los juegos de apuestas*. Packel.
6. *Grafos y sus aplicaciones*. Ore.
7. *Usos del infinito*. Zippin.
8. *Concursos de matemáticas: geometría*. Mathematical Association of America.

Como podemos ver por los títulos, los temas tratados abarcan un campo muy amplio y variado. Desde el punto de vista del docente no todos tienen las mismas posibilidades de ser utilizados directamente en el aula: el libro *Olimpiadas matemáticas internacionales* puede ser estupendo para los alumnos muy brillantes, sobre todo por lo sutil de algunas soluciones; en cambio *Concursos de matemáticas: geometría* abarcaría un espectro muy amplio de alumnos puesto que contiene problemas de dificultad muy diversa. Indirectamente todos nos servirán porque siempre se encuentran ideas con las que poder jugar en un momento dado; pero sobre todo, lo que sí tienen todos, en mayor o menor medida, es la capacidad de hacernos sentir eso que las matemáticas tienen de distinto y emocionante a la vez.

El ingenio en las matemáticas de Ross Honsberger consta de diecinueve ensayos cortos (algunos de cuatro páginas) que son diecinueve muestras de otros tantos aspectos de las matemáticas que delatan tanto las preferencias de Honsberger como el peculiar hacer de matemáticos como Sylvester, Gauss o Steiner. Alguno de los ensayos son propuestas de problemas en cuya resolución han participado matemáticos de primera fila. Las soluciones más brillantes son las que Honsberger nos muestra y donde se aprecia el ingenio del trabajo matemático que da nombre al libro. Como colofón se proponen a veces ejercicios de parecido interés que están resueltos al final del libro. No siempre son problemas nuevos pero sí siempre son interesantes y en los que aparece el ingenio del autor. Las referencias que se dan al final de cada ensayo cumplen la doble función de dar a conocer las fuentes y de sugerir bibliografía para el lector que quiera profundizar en el tema tratado.

*Alguno de
los ensayos
[de este libro
de Honsberger]
son propuestas
de problemas en
cuya resolución
han participado
matemáticos
de primera fila.*

Los ensayos son independientes entre sí y, por tanto, se puede elegir cualquier orden al abordar su lectura. En unos casos el ensayo es simplemente la resolución de un problema concreto que ha merecido el interés del autor, tanto por la curiosidad del planteamiento como por la brillantez de la resolución. Los ejercicios que a veces se proponen a continuación suelen ser simplemente un complemento al problema inicial. En otros casos la vocación de generalización es mucho mayor, y partiendo de soluciones de casos concretos o de casi curiosidades llega a importantes y sorprendentes generalizaciones.

Comienza el libro con *Probabilidad y π* , donde el autor nos transmite la emoción que le produjo la primera vez que leyó que la probabilidad de que dos enteros positivos elegidos al azar, sean primos entre sí es $6/\pi^2$. «Esto sencillamente me dejó asombrado. El que una elección al azar de un par de números enteros positivos tuviera algo que ver con π iba más allá de mi imaginación. La esperanza de determinar realmente π mediante un experimento de pruebas repetidas me parecía totalmente increíble». Como el problema anterior excede los conocimientos que supone puede tener el lector del libro nos propone algo más fácil pero que igualmente pone de manifiesto que el número π entra en este tipo de resultados. Cinco páginas son suficientes para que en otro ensayo, sobre el *álgebra de proposiciones*, nos muestre cómo aplicar técnicas algebraicas a problemas lógicos. *Números pares y números impares, cuadrando el cuadrado, el problema isoperimétrico, cinco curiosidades aritméticas, números abundantes, sucesiones complementarias, un problema de Regiomontano*, etc. son algunos de los títulos de los temas tratados que van desde la aritmética pitagórica al estudio de sucesiones, pasando por la geometría o la curiosa propiedad de algunos decimales periódicos.

Ross Honsberger nació en Toronto en 1929, estudió en dicha universidad de la que posteriormente fue profesor trasladándose más tarde a Waterloo. Su interés por la educación secundaria se ve reflejada en sus escritos así como en el diseño de cursos dirigidos especialmente a profesores. Su único libro traducido al castellano es este que comentamos, no obstante es recomendable la lectura de sus otros seis «best sellers»:

Mathematical gems (volumenes I, II, III) son, sobre todo, libros diseñados para profesores de ciclo medio, donde destaca la claridad de exposición y la belleza de los temas elegidos. Estos tres libros tienen una estructura parecida al de *El Ingenio en las Matemáticas*.

Mathematical morsels y *New mathematical morsels* consisten, en esencia, en el estudio de problemas matemáticos especialmente interesantes para Honsberger, extraídos de la prestigiosa revista *Crux Mathematicorum*, y totalmente resueltos.

Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry es el número 37 de la colección «New Mathematical Library», del cual el profesor Bellot Rosado, en el número 41 de la revista de la sociedad de profesores de Matemáticas Puig Adam, elogia cómo se obtienen conclusiones con un mínimo bagaje de resultados previos y como «¡todavía hoy es posible descubrir algo en geometría euclídea!».

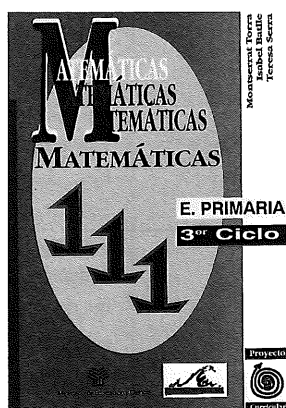
Solicitar estos libros u otros de la Mathematical Association of America es tan sencillo como escribir una carta, mandar un número de VISA y esperar un par de meses; como premio se obtiene una de estas joyas que puede leerse con mínimos conocimientos de inglés.

En el año 1993 la MAA (Mathematical Association of America) concedió a Ross Honsberger un Certificate of Merit por sus muchas contribuciones a las matemáticas.

Faustino Navarro

**MATEMÁTICAS
ENSEÑANZA PRIMARIA**
**Montserrat Torra, Isabel
Batlle y Teresa Serra**
MEC y Mare Nostrum,
Madrid, 1994
3 volúmenes
(uno para cada ciclo)
ISBN: 84-87049-74-5
243, 338 y 343 páginas

La publicación de materiales y propuestas como ésta facilitan la tarea de los equipos de profesores que buscan un tratamiento de las matemáticas más adaptado y significativo para sus alumnos.



Al hacer la recensión de estos tres libros, me viene a la mente el Editorial del n.º 21 de SUMA. En este artículo se hace referencia a que, cuando comenzó a experimentarse la reforma, parecía que los libros de texto iban a desaparecer, que los equipos de profesores deberían elaborar sus propias propuestas didácticas, calificando de utópica esta pretensión; para que esto fuera posible, hubiera sido preciso que se publicaran una gran variedad de materiales con unas características determinadas: diferentes enfoques, facilidad de reproducción, etc.

El MEC y Mare Nostrum con la publicación de estos tres libros, uno para cada ciclo, han contribuido a que los equipos de profesores de Educación Primaria dispongan de unos materiales variados, coherentes, estructurados y fáciles de trasladar al aula. Materiales que favorecen que los maestros y maestras de un ciclo o etapa se puedan plantear la tarea, casi utópica, de elaborar su propia propuesta de currículo y así no limitarse a la utilización de un determinado libro de texto.

Todas las actividades que aparecen están pensadas para llevarlas a las aulas y de acuerdo con la línea que propone la reforma del área de matemáticas en primaria. Se le da más importancia a los procedimientos que a los conceptos, los conceptos que se tratan son introducidos de forma inductiva, se potencia por igual el cálculo escrito, mental y con calculadora; se favorece la reflexión, el análisis y la investigación; todos los bloques están tratados teniendo en cuenta que los alumnos y alumnas son los que construyen su propio conocimiento, etc.

Los tres libros tienen la misma estructura y presentación. En ésta las autoras dan una explicación de su contenido: actividades, secuencia de los contenidos de la etapa por ciclos, programación y evaluación. Centrándonos en la parte dedicada a las «Actividades» me parece importante destacar que están presentadas de forma progresivamente más compleja y agrupadas por bloques o temas de contenido, que coinciden con los bloques del currículo a excepción del de «Números y Operaciones», que las autoras han desglosado acertadamente en tres: numeración, cálculo y cálculo mental, justificado por su gran peso en esta etapa. Además, existe un bloque temático titulado «Problemas», en el que las actividades que se proponen están en forma de problemas o situaciones matemáticas que globalmente relacionan aspectos de más de un bloque.

En las actividades no se hace referencia de forma explícita a las actitudes pero, como las autoras destacan en la presentación y se puede comprobar al experimentarlas, están pensadas para fomentar los contenidos actitudinales.

Son numerosas las propuestas que se encuentran. Están recogidas y elaboradas —me atrevería a decir— todas aquellas que alguna vez, cuando las leí en algún libro o las descubrí de alguna forma, me parecieron interesantes y con posibilidades de llevar al aula. Casi todas las actividades tienen una sugerencia de ampliación que flexibiliza y amplía la forma de proponerlas a nuestros alumnos. Los recursos didácticos que se utilizan son

variados y fomentan la investigación y la reflexión: calculadora, geoplano, tangram, juegos, plantillas, etc.

Cualquier bloque temático sería interesante analizarlo y ver su contenido, pero me voy a centrar sólo, y que sirva como referente, en el de «Cálculo mental». A los maestros y maestras nos preocupa este tema, buscamos métodos y recursos que faciliten su desarrollo en las aulas, pero es cierto que es muy escaso el material disponible. Cuando leí y estudié este apartado me recordó, gratamente, otra propuesta que alguna de las autoras hacía sobre el tratamiento del cálculo mental en las guías didácticas de una editorial catalana y por entonces me pareció novedosa y eficaz.

Las 60 sesiones que proponen para cada uno de los tres ciclos están divididas en tres apartados: numeración, operaciones y problemas mentales. En cada uno de estos apartados hay suficientes ejercicios para desarrollar las sesiones de forma completa y a lo largo de toda la primaria. En el apartado de numeración se tratan aspectos relacionados con el sistema de numeración decimal, lectura y escritura de números, orden, conteo, anterior y posterior, fracciones, números decimales, etc. Las secuencias de operaciones que se presentan en el apartado correspondiente permiten el descubrimiento de estrategias de cálculo mental. Por último aparecen cinco problemas para resolverlos mentalmente y así se potencia este tipo de cálculo que está muy olvidado en nuestras escuelas. Esta propuesta reúne todas las características que son necesarias para que el cálculo mental tenga el protagonismo que hasta ahora ha sido enmascarado por el cálculo escrito.

En los apartados dedicados a secuencia de contenidos por ciclos, programación y evaluación, se comentan y se proponen aspectos didácticos que teniéndolos en cuenta, son de gran ayuda para tratar de forma adecuada la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.

En el capítulo dedicado a la «Evaluación final», que se hace para cada uno de los ciclos, se proponen cuatro o cinco actividades, significativas e interesantes, con su correspondiente guía de observación. Si se reflexiona sobre ellas, se intuye qué tipo de tratamiento esperan las autoras que se debería dar a las matemáticas.

En los «Anexos» se pueden encontrar todas las plantillas y gráficos que son necesarios para desarrollar las actividades con los alumnos.

La edición en su conjunto permite un tratamiento completo del área de Matemáticas en la etapa de Educación Primaria. La organización y forma de presentar los temas facilita su comprensión, se podría haberse editado en otro formato, mediante hojas sueltas e individuales para cada actividad, que permitiría una reelaboración y utilización más fáciles. Son tres libros que los profesores de matemáticas deberían tener en cuenta al realizar sus programaciones de aula.

Jesús Antolín



Ministerio de Educación y Ciencia
CIDE

INVESTIGACIÓN Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

**Luis Puig y Juan
Calderón (editores)**
CIDE, Madrid, 1996
ISBN: 84-369-2811-3
319 páginas

Esta publicación constituye las actas del seminario «Investigación y didáctica de las matemáticas» organizado por el CIDE y celebrado en Madrid el pasado septiembre.

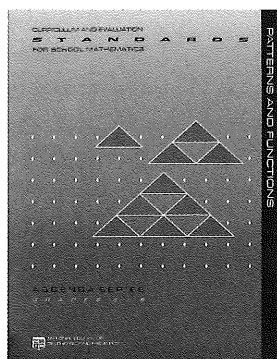
El objetivo fundamental de este seminario consistía en analizar las relaciones que existen, o que deben existir, entre investigación en educación matemática y práctica educativa. Como señalan los editores de las actas, Luis Puig y Juan Calderón, en la presentación de las mismas «... se constatan dos sensibilidades diferentes —como diferentes son, frecuentemente, los correspondientes objetivos profesionales, problemas planteados y metodologías de trabajo específicas— y, al mismo tiempo, simbióticas: por un lado, la investigación educativa necesita de la participación del profesor en ejercicio, de la práctica docente, para enfocar adecuadamente el objeto y el sujeto de la investigación; por otro, utilizar adecuadamente aquellos resultados de la investigación que puedan mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere que el profesor que se dispone a aplicarlos tenga en cuenta los objetivos y fines que contextualizan tal investigación y que los interprete y adapte a su entorno pedagógico concreto».

La primera parte del libro, Textos de un encuentro, recoge las intervenciones de los ponentes del seminario. La sola enumeración de éstos, Guzmán, Niss, Kilpatrick, Sierpínska, Laborde, Rico, Puig, Díaz Godino, Hernán, Argüello, Esteban, de la Fuente, Muriel, Guerrero, Villarroya, García Cruz, Sánchez Vázquez y Calderón, constituye la mejor garantía del interés de lo que en él está escrito.

En una segunda parte se recogen los resúmenes de todas las investigaciones sobre didáctica de las matemáticas que han sido financiadas por el INCIE/CIDE durante el periodo 1981-94.

Emilio Palacián

PATTERNS AND FUNCTIONS
Elisabeth Phillips
Curriculum and Evaluation
Standards for
School Mathematics
Addenda Series, Grades 5-8
NCTM
ISBN:
páginas



En marzo de 1989 el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) publica los *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* que abarcan desde el jardín de infancia hasta el grado 12 en las escuelas norteamericanas. Para proporcionar a los profesores ideas para su práctica diaria en las clases, en consonancia con el espíritu del documento, se encarga a una serie de grupos de trabajo la producción de materiales. Así surgen los *Addenda*, de los que este libro forma parte, divididos en tres grupos: grados k-6, 5-8, 9-12. Algunos han sido publicados por la SAEM Thales y los demás, entre los que figura el que se comenta aquí, aparecerán en breve editados por el servicio de publicaciones de la FESPM en colaboración con dicha sociedad.

En estos libros se conciben las matemáticas como resolución de problemas, comunicación, razonamiento y se consideran las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y con otras materias. Las actividades que se proponen tratan de unificar estos temas.

El libro que comentamos trata sobre modelos y funciones. El punto de partida es la importancia que la observación de pautas y regularidades tiene en las matemáticas. Se establece un paralelismo entre la actividad de los matemáticos —que observan modelos, conjeturan, prueban, discuten, verbalizan y generalizan esos modelos y a través de esos procesos construyen la comprensión de los conceptos y sus relaciones, desarrollan un lenguaje para hablar acerca del modelo, etc.— y la de los alumnos cuando se les plantea una tarea de este tipo.

Se parte de la hipótesis de que la investigación de modelos permite a los estudiantes:

- Resolver problemas.
- Desarrollar la comprensión de conceptos matemáticos y relaciones.
- Investigar las relaciones entre cantidades (variables) en un modelo.
- Generalizar usando palabras o variables.
- Ampliar y relacionar modelos.
- Construir el concepto de función.

El objeto de este libro es proporcionar ejemplos de cómo los modelos se pueden usar para desarrollar o profundizar en conceptos importantes sobre potencias, teoría de números, medida, geometría, probabilidad y funciones.

Cada capítulo consta de varias «investigaciones» con actividades de ampliación relacionadas. Cada investigación es un problema o experimento que se puede analizar mediante un modelo. En principio los problemas están diseñados para el ciclo medio pero pueden adaptarse según el tipo de alumnos, interés, edad o nivel.

Según el nivel de los alumnos, el estudio de los modelos llevará a distintos tipos de actividades. En el nivel más elemental, por ejemplo, los alumnos deberán ser capaces de continuar una serie; más adelante generalizarán mediante palabras o símbolos, lo representarán mediante tablas, gráficos etc. y, al final, proporcionará la oportunidad de analizar, hacer conjeturas, generalizar, etc. Aparece el álgebra, de modo natural, como un lenguaje para describir estos modelos.

El método de trabajo que propone es el planteamiento por parte del profesor de problemas abiertos o cerrados que presenten el estudio de las matemáticas como la obtención de la solución de problemas interesantes. La exploración puede hacerse en grupo o mediante una serie de preguntas y respuestas entre profesor y alumnos. Al final se resumen las soluciones, conjeturas, generalizaciones y extensiones del problema.

Cada investigación va seguida de notas para el profesor que comprenden:

- Métodos para abordar el problema.
- Material necesario y tecnología aconsejada.
- Soluciones posibles que los alumnos podrían encontrar.
- Preguntas para animar la discusión, relacionar, etc.
- Sugerencias para generalizar la discusión.
- Posibles extensiones.
- Conexión con otros problemas o temas.
- Ampliación según los niveles de edad.
- Sugerencias para evaluar.

En muchos casos nos resulta difícil integrar en los problemas o las actividades que se plantean en clase los conocimientos o resultados de distintas partes de las matemáticas. Este libro puede ser de gran ayuda, ya que no sólo los problemas que pro-

pone, las actividades de ampliación o relacionadas que aparecen en cada uno de los capítulos se pueden adaptar sin mucha dificultad a nuestro entorno cultural o el nivel de nuestros alumnos, sino que nos abre una posibilidad de cambio en las actividades que nosotros planteamos y en la manera de abordar el tratamiento de algunos temas del currículo.

Considero que este libro resultará interesante en cualquier nivel de la enseñanza, no sólo por los temas que trata y el enfoque de los mismos, sino también porque esta forma de abordarlos «engancha» desde el primer momento y nos hace utilizar el «modelo» en otros temas y buscar todo lo que pueden dar de sí las actividades que planteamos a nuestros alumnos.

Rosa Pérez

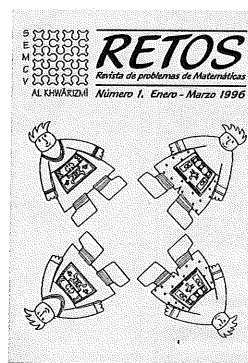
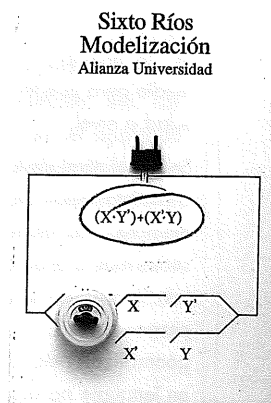
MODELIZACIÓN
Sixto Ríos
Alianza, Madrid, 1995
ISBN: 84-206-2822-0
331 páginas

En el prólogo el autor expresa claramente alguno de los objetivos que han motivado el libro. Se inicia con esta reflexión: «Un rasgo característico de la cultura actual es la amplia aplicación de los métodos matemáticos a las más diversas

actividades humanas, que van de la ciencia y la tecnología a los aspectos organizativos y productivos de la vida moderna. Este proceso se refuerza hacia los años cincuenta coincidiendo, no por casualidad, con la aparición de los primeros ordenadores, y el matemático, que hasta entonces era una planta rara de la sociedad, pasa a jugar un papel importante, al convertirse en la mente rectora de los procesos de modelización matemática, que constituyen el núcleo fundamental de dichas aplicaciones».

Cada capítulo está presentado a través de la imagen de un matemático y de unas ideas de un autor que nos resumen el contenido de lo que será expresado.

El capítulo primero se titula «Modelos y modelización». Hace una descripción didáctica de diferentes modelos (analógicos, cualitativos, matemáticos,...) que nos permiten introducirnos en esta concepción. Hay un esquema del proceso de planteamiento y modelización de problemas de la realidad que nos pone de manifiesto el breve campo de la matemática en el que trabajamos en la enseñanza. El capítulo segundo lo dedica al «Crecimiento y equilibrio» con el estudio de problemas biológicos. El tercero, titulado «Circuitos, lenguajes, conjuntos», se centra en el álgebra de Boole, álgebra de circuitos y álgebra de proposiciones. El capítulo cuarto versa sobre grafos, algoritmos,



RETOS
Revista de problemas de
Matemáticas
N.º 1. Enero-marzo 1996
Societat d'Educació
Matemàtica de la
Comunitat Valenciana
Al-Khwārizmī
26 páginas

Tras L'Aula de Matemàtiques y Algorisme la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwārizmī pone en circulación una tercera publicación con el título Retos. Revista de problemas de Matemáticas.

Es bien sabido que el diseño curricular en el área de Matemáticas de dicha comunidad contempla la «Resolución de Problemas» (RP) como un bloque específico de contenidos. Ahí se indica que la RP considerada tradicionalmente como aplicación puede ser enfocada también desde otras vertientes:

- Como método para descubrir paso a paso el conocimiento matemático.
- Como contenido, propiciando que el alumno vaya tomando conciencia del proceso seguido en la resolución.

Retos abarcará la RP desde las tres perspectivas.

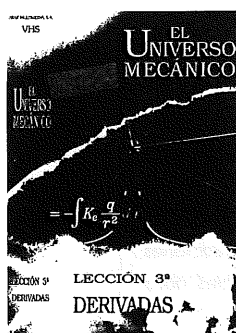
Son muchos los libros de problemas existentes en el mercado. No es éste el caso en cuanto a publicaciones periódicas. Retos quiere llenar este vacío. Va destinada especialmente al profesorado y alumnado de la ESO. No es una revista para leer, es una revista ágil y amena que obligará a actuar. Ofrece material listo para usar y totalmente adaptable a cualquier situación escolar. Presenta una amplia y escogida batería de problemas y actividades con el fin de provocar e incitar a la reflexión de forma continuada. Entre sus secciones figuran:

- *Olimpiadas matemáticas.* Recopilación de problemas propuestos en las diferentes fases de las olimpiadas que se celebran en distintas latitudes.
- *Grandes autores de problemas.* Selección de problemas de matemáticas recreativas de autores de todos los tiempos, desde los clásicos Sam Loyd, Henry E. Dudeney o Edouard Lucas, a los más recientes como Eric Emmet, Jean-Pierre Alem, Joseph S. Madachy, David Hall, Martin Gardner, Raymond Smullyam o Iam Stewart.
- *Actividad central.* Doble página con una propuesta que facilita la comprensión de enunciados o el abordaje de un llamativo problema, que obliga a usar una determinada estrategia, que da luz a una noción matemática o que abre caminos para indagar variantes o nuevas posibilidades.
- *Retos matemáticos.* La sección principal de la revista, con problemas de una mayor dificultad y de contenido muy variado.
- *Geometría.* Sección que pretende ir introduciendo al alumno en el arte de la deducción: concatenar sencillas premisas para ir extrayendo unas conclusiones muy directas.
- *Papiroflexia matemática.* Actividades para facilitar el paso, en un sentido y otro, de la segunda a la tercera dimensión.
- *Juegos de estrategia.* Un solitario o un juego para dos personas, de reglas sencillas y con posibilidades para analizar.

Afrontar un problema exige organización, sistematicidad, concentración, tesón, perseverancia, creatividad, versatilidad, flexibilidad de pensamiento,...; pone en tela de juicio la impulsividad, osadía, superficialidad y rebuscamiento del alumno; requiere análisis y adaptabilidad; obliga a la revisión, a la reflexión y a la síntesis; provoca ansiedad, desaliento, incertidumbre, entusiasmo, incitación y disfrute.

El proceso de resolución de un problema supone, sin duda alguna, una vivencia rica y formativa, y ningún profesor debe renunciar a que sus alumnos pasen por ella. Retos pretende facilitar esa labor ardua y apasionante.

Antonio Ledesma
Redactor Jefe de Retos



DERIVADAS
Serie: El Universo mecánico
Productor: Annenberg,
EEUU, 1985
Idioma: castellano
30 minutos

Este vídeo es el programa n.º 3 de la serie didáctica titulada «El Universo mecánico», la cual está compuesta por 52 títulos que abordan temas de

física, aunque varios de ellos están dedicados a las herramientas matemáticas fundamentales en la física como son las derivadas, las integrales y los vectores.

El vídeo que comentamos presenta el concepto de derivada, algunas reglas de derivación y aplicaciones concretas al estudio de movimientos.

En el programa se van enlazando dramatizaciones de personajes de época (Galileo, Newton, Leibnitz y Fermat), imágenes reales, animación en 3D, gráficos, rótulos de refuerzo de las ideas fundamentales,... Respetando la unidad de la serie, los ejemplos que se presentan están muy relacionados con problemas físicos y situaciones de la vida cotidiana.

El vídeo comienza con unas imágenes de una clase del Dr. Goodstein que sitúa históricamente la relación entre el mundo físico y las matemáticas.

Se realiza una introducción histórica mediante el estudio de problemas de movimiento planteados por Galileo y Fermat y del problema de la tangente a una curva en un punto. El desarrollo histórico del cálculo diferencial volverá a aparecer en diferentes momentos del programa, al revisar las contribuciones de Newton y Leibnitz.

A continuación se presentan unas aproximaciones intuitivas al concepto de derivada, relacionándolo con ejemplos tomados de

la física y de la vida cotidiana, para pasar a la definición de pendiente de una recta con el apoyo de animaciones en 3D y gráficos. A partir del concepto de pendiente de una recta tangente a una curva y de la velocidad instantánea de un móvil se llega a la definición de derivada y al concepto de función derivada.

El vídeo nos introduce, de una manera amena, en la gramática de la derivación, utilizando la idea de máquina de derivar de una forma bastante atractiva y simpática.

Se presentan algunas reglas de derivación (suma y producto de funciones y regla de la cadena) comparando los procesos seguidos con ejemplos muy plásticos de la vida real. Estas reglas se utilizan para hallar las derivadas de las funciones elementales.

La película termina con un resumen de imágenes del mismo, que evocan los conceptos anteriormente vistos, para volver a la clase del Dr. Goodstein que presenta un ejemplo de una función no derivable en un punto.

Esta serie, bastante conocida y utilizada por los profesores de Física, ha pasado desgraciadamente casi desapercibida para los de Matemáticas. Y es una pena.

La presentación de los conceptos matemáticos, tanto de este vídeo como de los de integrales, vectores o cónicas, se realiza de una forma muy atractiva para los alumnos y, a pesar de su enfoque fundamentalmente práctico, la referencia a situaciones físicas concretas los hacen especialmente recomendables para alumnos de 2.º y 3.º de BUP.

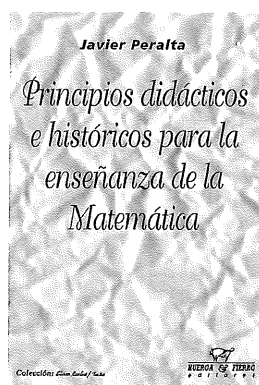
Este hecho, junto a la contextualización histórica de los descubrimientos matemáticos –tan ausentes de las clases de matemáticas–, y unido a un buen tratamiento audiovisual de temas matemáticos en apariencia muy abstractos o demasiado técnicos para ser tratados en imágenes atractivas convierten a este vídeo –y al de integrales– en una herramienta distinta y valiosa en las clases de matemáticas en el bachillerato.

Es aconsejable que cuando en 2.º de BUP se vaya a introducir el tema de derivadas, se recuerde que existe este vídeo, que se vea antes de usarlo y que se utilice con los alumnos. Algunos de ellos descubrirán que lo que van a estudiar tiene un sentido y unas aplicaciones prácticas que nunca hubiesen sospechado.

Pero quienes lo van a agradecer de forma efusiva serán los profesores de física, ya que contribuirá a dar un poco de sentido matemático a los cálculos de derivadas que realizan en sus clases, ¡habitualmente mucho antes de que el profesor de matemáticas haya llegado a este tema en el desarrollo de su programa!

En cualquier caso, de lo que no cabe duda, es que se trata de un buen instrumento para iniciar una coordinación didáctica más seria y estable de la que hoy se produce en los centros de enseñanza entre los departamentos de Matemáticas y de Física.

Antonio Pérez Sanz



**PRINCIPIOS DIDÁCTICOS
E HISTÓRICOS
PARA LA ENSEÑANZA
DE LA MATEMÁTICA**
Javier Peralta
Huerga y Fierro,
Madrid, 1995
ISBN: 84-88.564-50-3
229 páginas.

El objetivo declarado por el autor para este texto es proporcionar

–a los profesores de matemáticas en ejercicio y a los futuros profesionales– un manual útil y práctico con el que acercarse en poco tiempo y con poco esfuerzo a la didáctica de nuestra disciplina.

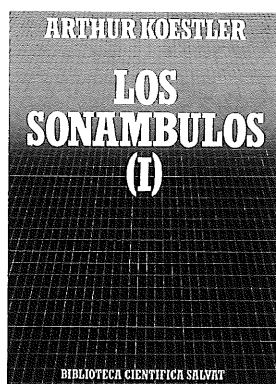
Consta de dos partes bien diferenciadas. En la primera se da un repaso a los principios didácticos más fundamentales para la enseñanza de las matemáticas, desde sus finalidades, el análisis de las diversas metodologías, la problemática del aprendizaje de las matemáticas, hasta el papel didáctico de la historia de la matemática.

La segunda parte aborda las didácticas específicas de la aritmética, álgebra, geometría, análisis, estadística y probabilidades. De manera clara y breve, presenta un bosquejo de la evolución histórica de estos tópicos, y de las didácticas específicas correspondientes de forma coordinada que permite apreciar la influencia de una en la otra. Se acompaña además de una colección de curiosidades y problemas seleccionados por su interés didáctico o histórico.

El libro puede ser muy bien una primera lectura para aquellos alumnos de licenciatura que estén pensando en un futuro profesional como profesores. También una fuente de ideas para los que se acaben de incorporar a la docencia, o un texto de apoyo para los que estén inmersos en un proceso de formación en ejercicio. Ahora bien, la brevedad con la que se toca una tan amplia variedad de temas hace que sea inevitable una posterior profundización.

Julio Sancho

LOS SONÁMBULOS
Arthur Koestler
Biblioteca Básica Salvat
2 volúmenes
Salvat, Barcelona, 1989
ISBN: 84-345-8246-5
167 y 176 páginas



Aprovechando la cercanía de las vacaciones de verano me voy a tomar la licencia de invitarnos, a los que todavía no lo hayáis hecho, a leer este clásico de la historia de la cosmología, que no de la astronomía, como aclara su autor. Y digo clásico por su fama y porque la primera edición en lengua inglesa apareció en 1959. Más tarde, en 1987, Salvat lo incorporó a su «Biblioteca Científica» y lo volvió a reeditar en 1994.

«Más que un libro es una delicia» es la primera anotación que guardo de él tras la primera lectura. Sigo conservando esa misma opinión. Su lectura ágil lo aleja de un tratado frío de historia de la ciencia en que, en aras de una pretendida objetividad que vaya más allá de cualquier objeción, el autor tratara de ocultar su sentir personal a base de una redacción «light» y fría, por desapasionada. En este aspecto el libro constituye un lujo, arcaico si se quiere, en estos momentos en los que tener pensamientos propios es un pecado y mantener una actitud crítica constituye una lujuria herética propia del juego estético de algunos intelectuales trasnochados.

Es un libro escrito con apasionamiento, lo que no significa que esté exento de rigor científico. Y es tendencioso, como alguien me comentó una vez, porque apuesta por los acontecimientos al margen de las ideas preestablecidas sobre el tema. Es por tanto una obra de investigación, no un simple relato histórico. Se implica en los hechos, los analiza y los disecciona, como no podía ser de otro modo, bajo el prisma de sus planteamientos ideológicos, entendido el término en su más amplia acepción. Lo que no significa que esté carente de objetividad. De pretendida objetividad, si se admite que cualquier objetividad es una presunción.

Manifiesta un exquisito cuidado en delimitar la fundamentación documental en la que sustenta sus argumentaciones, que sabe controvertidas, a base de incluir al final del libro las citas y textos a los que hace referencia. Esta técnica, habitual en muchos ensayos, favorece la claridad, fluidez y amenidad de la lectura y evita convertir el libro en un prolijo y farragoso ensayo inescrutable para el profano. De este modo compagina la profundidad del trabajo de investigación histórica con un enfoque divulgativo (aunque el autor confiese haber huido expresamente de él). En cualquier caso la obra mantiene un marcado carácter dialéctico gracias a estas constantes referencias a los textos originales.

El libro trata de tender puentes entre la «filosofía natural», tal como el autor gusta seguir denominando a la ciencia, y las humanidades. Personalmente nunca entendí esa disociación, ni por qué la ciencia, no sólo su historia, se estudia al margen de la historia de la música, de la literatura, del arte, en definitiva de la historia de la humanidad. Como si esta última no se viera influida por la primera o viceversa, o como si su influencia fuera un hecho intrascendente, olvidando de paso la contribución de la revolución cosmológica de Copérnico y Kepler a la destrucción de la imagen medieval de un orden jerárquico instituido por se. La especialización en los estudios ha conseguido que los historiadores se sientan incapaces de indagar en los textos científicos y prefieran perseguir la influencia de la ciencia a través de versiones sesgadas y parciales de sus efectos, más tarde convertidos en referencias superficiales en los libros de historia y por ende en las aulas. Es cierto que el lenguaje matemático, soporte de muchos textos científicos, exige un esfuerzo de adaptación, pero ello no ha sido óbice para que Koestler o Butterfield escribieran sus obras.

Las nuevas enseñanzas deberían paliar este distanciamiento, pero lejos de conseguirlo parecen empeñadas en agrandar el abismo. Sin embargo el reto no parece interesar a nadie. Desde luego que no le interesa a la universidad garante principal de la especialización, empeñada en una enseñanza cada vez más segregatoria incluso entre sus propias ramas. Ni creo que haya un interés social por el tema, ni que las autoridades educativas sean sensibles a esta necesidad. Por otro lado el profesorado, fiel reflejo de su formación, no se siente capaz de tender puentes, ni cuenta entre sus filas con muchos transgresores de la rutina. Y en cualquier caso, si es necesario, no tiene empacho en tergiversar deliberada e impunemente los objetivos educativos con objeto de seguir perpetuando el mismo modelo segregacionista desde edades cada vez más tempranas de forma que las asignaturas puedan seguir siendo compartimentos estancos y los departamentos pequeños reinos de taifas desligados unos de otros.

Pese a ello no es posible obviar que la influencia de la ciencia en el pensamiento humano es comparable a la de la religión con la que ha mantenido una dura pugna durante siglos. No en vano la primera ha estado sometida a las ideas previas, a los prejuicios y a los dogmas de la segunda y ha precisado de

muchos siglos, de pensadores clarividentes y de grandes dosis de pensamiento divergente para liberarse de su influencia y seguir avanzando. Y en ese avance condicionó y modificó esos mismos dogmas que la atenazaban y la estructura social que los sustentaba. Pues bien, el libro sabe recorrer ese fluir paralelo con exquisito detalle en lo que el autor denomina «los hilos gemelos de la ciencia y la religión».

Un aspecto que puede resultar especialmente interesante del libro en estos momentos y que a mi personalmente me ha obligado a releerlo es el análisis de corte psicológico que hace del descubrimiento y que es el que da título al libro.

Han pasado 11 años desde que oí a Schöenfeld por primera vez aportar sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas. Ahora hemos ido más lejos y algunos hablamos de una enseñanza basada en la resolución de problemas. Casi todas las editoriales parecen hacer referencia a ello pero sirve con echar una ojeada a sus textos para darse cuenta de la falacia. Pues bien, si alguien intenta «de verdad» una didáctica basada en la resolución de problemas, es decir, si habitualmente deja sobre la mesa de sus alumnos, sin explicación previa alguna, un problema para que sea resuelto, y analiza como llegan a la solución, verá que lejos de seguir un camino nítido avanzan guiados por la intuición como un ciego por su lazarillo. Se comportan como sonámbulos y precisan de una reflexión posterior, a veces larga, para entender lo que ellos mismos acaban de descubrir. Este es también el camino que ha seguido la ciencia y, en este sentido, resulta gratificante observar, una vez más, hasta qué punto se reproducen en clase los esquemas de comportamiento de una comunidad científica.

¿Cuál es la luz de la luciérnaga que guía sus mentes? Los objetos que rodean el camino se presentan confusos, imprecisos, y sin embargo, a veces, se agarran a ellos con desesperación. La oscuridad permanece a pesar del destello de luz del descubrimiento y no por quedar cegados precisamente. A veces precisan redescubrirlo para detectarlo, en muchos casos pasa a formar parte de la colección de sombras que rodean el camino y son incapaces de identificarlo cuando se topan con él a pesar de haberlo modelado con su propia mente.

Y se abren además algunos interrogantes sobre la importancia que tiene el pensamiento divergente en la creatividad, en los brotes de ingenio, sobre su trascendencia a la hora de resolver un problema «difícil». Sobre cómo se debe educar para que su ejercicio sea una actitud permanente. Sobre la importancia de saber hacer una síntesis de lo que se conoce y sobre la conveniencia de manejar simultáneamente más de tres conceptos distintos y múltiples vías de resolución, siendo capaces de acceder a ellos de forma aleatoria y no secuencial. Sobre la necesidad de que esos conceptos sean para el cerebro entes concretos, nítidos, precisos y no oscuros, indefinidos, vagos. Pero

al mismo tiempo, sobre la posibilidad de avanzar en ausencia de estas hipótesis. Sobre el papel que juega la falsa generalización en el descubrimiento. De cómo la inducción se apoya en ella. De cómo educarla, en el sentido de domesticarla, para reconducirla y no anularla. De cómo introducir el rigor para que sea antídoto en los excesos, precaución en los procesos pero no sea un antibiótico que arrase la intuición y la creatividad. Y replantearse algunas cuestiones como, por ejemplo, que es insuficiente el redescubrir el concepto para que se produzca un aprendizaje significativo, aunque el hacerlo así se ha demostrado como un método eficaz para favorecerlo y para estimular una componente esencial de la motivación: la confianza en uno mismo. Que no es suficiente tampoco con el conflicto cognitivo para desterrar las ideas previas, aunque parece ser condición necesaria...

Seguramente sobre todo ello, alejados de cualquier tentación teorizadora, deberíamos estar discutiendo en estos momentos, aprovechando la incontable información que investigaciones, cuadernos y el contacto diario con los alumnos nos aporta. En este sentido la lectura del libro estimula la reflexión y puede ser de ayuda a la hora de tomar decisiones didácticas en el marco de la resolución de problemas.

En cualquier caso el que se acerque al libro sin pretensiones tiene garantizada una lectura placentera y algunos destellos de brillo que añadir a su patina personal en historia del pensamiento. Completan el placer una lectura sencilla y una visión apasionada de la historia, al tiempo que rigurosa, exigente, ingeniosa, lúcida, inteligente, cuidada y sopesada, producto de una actitud crítica, libre, divergente, inconformista y transgresora de quien supo mantener la coherencia con sus ideas hasta el momento cumbre de dar por terminada su vida. Esa misma coherencia que le hace ser impenitente con Galileo..., pero mejor será no desvelar los detalles... Felices vacaciones.

Carlos Usón