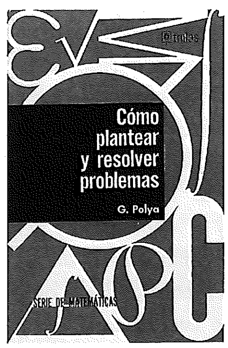
SUMA 22
junio 1996

Polya, un clásico en resolución de problemas

COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS
G. Polya
Ed. Trillas, México.
Título original. 'How to solve it'. 1ªedición inglesa, 1945
Primera edición en español, 1965.

El libro que comentamos es de apariencia sencilla, sin visos de trascendencia. Y no sólo porque no es muy extenso (215 páginas), sino por su tono coloquial, cercano y directo, y porque en ningún momento hace referencia a ningún resultado matemático que no sea conocido por cualquier profesor de matemáticas de los niveles primario y medio. A pesar de todo ello, su importancia ha sido impresionante en la enseñanza de las matemáticas desde su publicación, hace ya más de cincuenta años, en todo el mundo. Y a pesar de su 'edad' ya no muy juvenil es un libro que sigue vivo, no sólo desde el punto de vista de su influencia actual, sino que lo es en el sentido editorial, es decir, que es un libro que se sigue vendiendo con regularidad, incluso en nuestro país, donde se puede encontrar en las librerías la reimpresión número 19, de mayo de 1995. Ello ha hecho de *How to solve it* uno de los 'best seller' matemáticos más relevantes, traducido a 17 lenguas, entre las que están todas las mayoritarias, y del que se han vendido más de un millón de ejemplares, cifra relevante para cualquier libro, y más para uno de didáctica de las matemáticas.



Para valorar la importancia del libro, nada mejor que ceder la palabra a Schoenfeld, una de las grandes autoridades actuales de la resolución de problemas (que, en aras de la brevedad, aparecerá como RP en lo sucesivo). En 1992, en un artículo sobre el estado actual de la cuestión en RP, decía: «planteándolo simplemente, *How to solve it* plantó las semillas del 'movimiento' de resolución de problemas que floreció en los ochenta. Abra el *1980 NCTM Yearbook* (*El libro del año 1980* de la Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas), que supuso el aldabonazo a partir del cual se consideró a la RP como la tarea fundamental de los profesores de matemáticas] en cualquier página y probablemente encontrará a Polya invocado, bien directamente o por inferencia en la discusión de ejemplos de resolución de problemas».

A pesar de todo ello, y a pesar de su influencia, a través de la enseñanza de las matemáticas (que no hay que olvidar que es obligatoria durante varios cursos para todos los alumnos en todos

RECENSIONES

los países que tienen un sistema educativo organizado) en buena parte de los ciudadanos de casi todo el mundo, Georges Polya no ha logrado traspasar la barrera del conocimiento más allá de los círculos matemáticos. Por eso su nombre no aparece en ninguna de las enciclopedias que hemos consultado (las españolas más habituales, francesas y hasta la unánimemente reconocida como excelente *Enciclopedia Británica*, en que su nombre sí aparece, pero no como artículo independiente, sino sólo referido a un 'Teorema de Polya', relativo a asuntos combinatorios, pero sin citar en absoluto ni el libro que comentamos ni su influencia en la RP). Y por comparar, en todas ellas, en el lugar que debería estar, nos encontramos con Pollock, un pintor contemporáneo norteamericano.

George Polya nació en Budapest en 1887. Durante su infancia no encontró las matemáticas especialmente interesantes; comenzó en la Universidad de Budapest estudios universitarios de leyes, y se cambió después a lenguajes y literatura, durante los cuales, como parte de un curso de filosofía, escogió matemáticas, y ahí comienza su relación con las mismas, que ya no abandonaría. Se doctoró en Matemáticas en 1912 en Budapest, con una tesis sobre probabilidad. Hizo trabajos posdoctorales en Göttingen y París y encontró un trabajo como profesor en 1914 en el Instituto de Tecnología de Zurich (Suiza), donde continuó hasta 1940, en que emigró como otros cientos de intelectuales europeos a Estados Unidos. Trabajó primero en la Universidad de Palo Alto y a partir de 1942 en la de Stanford. Murió en 1985. Escribió 11 libros (entre los que está, además de los de didáctica, *Theorems and Problems in Analisis*, escrito con Szegö en 1925, y que es uno de los clásicos del siglo XX) y unos 250 artículos (recogidos en cuatro volúmenes), en distintas áreas de las matemáticas.

Por situar la edición en castellano, hay que destacar que su traducción es en México, no en nuestro país, y que deben pasar 20 años desde la primera edición, para que se publique. Y se hace cuando ya ha aparecido la segunda edición inglesa de la obra, y otro libro de Polya que profundiza y desarrolla los contenidos del primero. Nos referimos a *Matemáticas y razonamiento plausible* (1954), que sí que fue traducida en España con algo más de rapidez (la edición de Tecnos es de 1966), aunque por los avatares de la industria editorial hoy es inencontrable (y bueno sería poder disponer de nuevo de una edición del mismo). Como muestra del avance de la relación con otros países y de la propia situación general en el contexto internacional, no parece plausible, por utilizar un término del ramo, que una obra de esta trascendencia tardara 20 años en la actualidad en traducirse al castellano.

El contenido

El libro constituye el primer intento de la puesta a punto de la 'heurística moderna', que según su propia definición «trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular 'las operaciones típicamente útiles' en este proceso». [...] Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como sicológico; no deben descuidarse las aportaciones hechas al tema por autores tales como Pappus, Descartes, Leibnitz y Bolzano, pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Un tal estudio tiene objetivos 'prácticos'; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de enseñanza, en particular en lo que se refiere a las matemáticas». Sirva esta larga cita para situar el ámbito del estudio y los objetivos, tendentes sobre todo a la enseñanza, que, por una vez, se han cumplido, puesto que, como recordábamos antes en la cita de Schoenfeld, este libro sentó las bases sobre las que se impulsó el cambio en la enseñanza de las matemáticas.

El libro constituye el primer intento de la puesta a punto de la 'heurística moderna', que según su propia definición «trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular 'las operaciones típicamente útiles' en este proceso.

El libro trata, en esencia, de un largo comentario con cuatro partes (que luego explicitaremos) del, ahora, conocido plan de Polya. Según él, para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema.
II Concebir un plan.
III Ejecución del plan.
IV Examinar la solución obtenida.

Y además, cada una de estas fases tienen subdivisiones y preguntas que hacerse para llevarlas a cabo.

La primera parte (pp. 23-48) se titula «En el salón de clases», y en ella, después de hablar del propósito del libro y de la enseñanza y de los roles del profesor y del alumno, pasa a explicitar su plan por medio de un problema, en apariencia no muy atractivo: 'Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura'. Sobre él estudia el proceso de las cuatro fases, las preguntas que hay que realizar, los comentarios que le sugieren,... Y después, de una forma más concisa, desarrolla el mismo método en otros tres problemas. Uno de construcción ('Inscribir un cuadrado en un triángulo dado tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo respectivamente'), otro de demostración ('Dos ángulos están situados en dos planos diferentes, pero cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, y en la misma dirección. Demostrar que los dos ángulos son iguales') y el último de rapidez de variación ('Se vierte agua en un recipiente de forma cónica con una rapidez r. El recipiente de forma de cono de base horizontal tiene el vértice dirigido hacia abajo; el radio de la base del cono es a, su altura b. Determinar la velocidad a la que la superficie del agua se eleva cuando la profundidad del agua es y. Después obtener el valor numérico de la incógnita, suponiendo que $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $r = 2$ dm^3 por minuto e $y = 1$ dm').

Reproduciremos algunos comentarios que aparecen en esta primera parte. «El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. [...] Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos. [...] El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. [...] Además, cuando el maestro resuelve un problema ante la clase, debe 'dramatizar' un poco sus ideas y hacerse las mismas preguntas que emplea para ayudar a sus alumnos». Respecto a lo que son problemas, «el alumno debe comprender el problema. Pero no sólo debe comprenderlo, sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante». En cuanto a la concepción de un plan y la aparición de las 'ideas brillantes', Polya señala que «lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirle a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele». Y añade que «un simple esfuerzo de memoria no basta para provocar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar ciertos hechos pertinentes a la cuestión».

Por fin Polya advierte sobre las preguntas que hay que hacer a los alumnos en la aplicación de su método, que no debe aplicarse de forma rígida, sino más bien como si se le hubieran ocurrido de forma espontánea al propio alumno.

Una vez que ya se está ejecutando el plan, «el peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro». Y cuando se está en la fase de la visión retrospectiva, «una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico». Por fin Polya advierte sobre las preguntas que hay que hacer a los alumnos en la aplicación de su método, que no debe aplicarse de forma rígida, sino más bien como si se le hubieran ocurrido de forma espontánea al propio alumno. Y advierte contra algunas sugerencias que se plantean de «forma sorpresiva y poco natural, como el conejo que el prestidigitador saca del sombrero», que no son instructivas en absoluto.

La segunda parte, muy corta (pp. 49-52), es un diálogo sobre «Cómo resolver un problema», que reúne todas las fases para resolver un problema, así como las preguntas que hay que hacerse en cada una de ellas.

La heurística

El núcleo fundamental del libro lo forma la larga tercera parte (pp. 55-197), titulada «Breve diccionario de heurística». En ella, por orden alfabético, va tratando una serie de entradas, de distinta importancia y extensión, sobre la RP. Así hace un recorrido histórico por la 'heurística' o 'ars inveniendi', que «trata del comportamiento humano frente a los problemas; este estudio se remonta, al parecer, a los primeros tiempos de la sociedad». En cuanto a sus nombres propios comienza, en el tiempo, en Pappus (aprox. del año 300 antes de Cristo), sigue con Aristóteles (de quien da una sugestiva descripción de las 'ideas brillantes' como actos de sagacidad, y 'sagacidad es descubrir adivinando una relación esencial en un lapso de tiempo inapreciable'); Descartes (1596-1650), que se propuso encontrar un método universal para la RP, pero que dejó inconclusa; Leibnitz (1646-1716), que tuvo el proyecto de escribir un 'Arte de la invención', y que dijo que «no hay nada más importante que el considerar las fuentes de la invención que son, a mi criterio, más interesantes que las invenciones mismas»; Bolzano (1781-1848), que dedicó una buena parte de su obra de lógica al tema de la heurística; para acabar en los contemporáneos como Hadamard.

Iremos reproduciendo algunas citas de Polya a lo largo del capítulo, par intentar dar una idea del espíritu del mismo. En el largo artículo dedicado a 'analogía' dice que «el sentimiento de que un orden armonioso y simple no podía ser engañoso guía al investigador tanto en matemáticas como en las demás ciencias», y recuerda que «la inducción está naturalmente basada en la analogía». Recuerda también que un 'corolario', etimológicamente, es una 'propina', y asegura que «sería un error el creer que la solución de un problema es un 'asunto puramente intelectual'; la determinación, las emociones, juegan un papel importante»; y, en la misma línea, «la solución de problemas es una escuela de la voluntad. [...] Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objetivo más esencial».

Cuando se refiere a 'Examine su hipótesis' dice «su hipótesis puede ser correcta, pero sería absurdo el tomar una hipótesis por cierta simplemente porque se le ha ocurrido, como hacen la mayor parte de las veces las personas simplistas. Su hipótesis puede no ser correcta. Sería igualmente absurdo el no considerar una hipótesis plausible; este es el defecto en que incurren los pedantes. [...] No existen en realidad ideas francamente malas, a menos que no tengamos sentido crítico. Lo que realmente es malo es no tener idea alguna, por muy sencilla que sea». En cuanto al papel de la 'inducción', «las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva. En matemáticas, como en las ciencias físicas, podemos emplear la observación y la inducción para descubrir leyes generales; pero existe una diferencia. En las ciencias físicas, en efecto, no hay nada por encima de la observación y de la inducción, mientras que en matemáticas se tiene, además, la demostración rigurosa». Por eso, «todo conocimiento sólido se apoya sobre una base experimental reforzada por cada problema cuyo resultado ha sido cuidadosamente verificado». En cuanto al tipo habitual de presentación formal de las matemáticas, «la exposición euclideana es perfecta si se trata de subrayar cada punto particular, pero menos indicada si lo que se quiere es recalcar las articulaciones esenciales del razonamiento. [...] La exposición euclideana se desarrolla en un orden que es, la mayor parte de las veces, exactamente opuesto al orden natural de la invención». Todo este conjunto de reflexiones no dejan de ser pertinentes sobre la manera de llegar a resultados y de comunicarlos, sobre todo en la enseñanza.

En cuanto a la notación que se debe utilizar en la RP, «el empleo de símbolos matemáticos es análogo al de palabras. La notación matemática aparece como una especie de lenguaje, *une langue bien faite*, un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufren excepciones. [...] La elección de la notación constituye una etapa importante en la solución de un problema. Debe elegirse con cuidado. [...] Una notación apropiada podrá contribuir de modo primordial a la comprensión del problema».

En el camino hacia la resolución de un problema aparecen a veces ideas brillantes. «¿Qué es una idea brillante? Es una transformación brusca y esencial de nuestro punto de vista, una reorganización repentina de nuestro modo de concebir el problema, una previsión de la etapas que nos llevarán a la solución, previsión en la cual, pese a su aparición repentina, presentimos que nos podemos fiar». En cuanto a los tipos de problemas, «'los problemas por resolver' tienen mayor importancia en las matemáticas elementales, los 'problemas por demostrar' son más importantes en las superiores». «Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar la enseñanza de las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarla por debajo del nivel de un 'libro de cocina' ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa». En cuanto a la relación con la vida fuera del aula, «podemos decir que las incógnitas, los datos, las condiciones, los conceptos, los conocimientos necesarios, en suma, todo en los problemas prácticos es más complejo y menos preciso que en los problemas puramente matemáticos. [...] Sin embargo, las razones y los métodos fundamentales que conducen a la solución son propiamente los mismos para los dos tipos de problemas».

También Polya da unas reglas, como casi todo el mundo, pero que en este caso están llenas de buen sentido.

También Polya da unas reglas, como casi todo el mundo, pero que en este caso están llenas de buen sentido. Reproducimos algunas partes de las mismas. 'Reglas de enseñanza': «La primera de estas reglas es conocer bien lo que se quiere enseñar. La segunda es saber un poco más. [...] No olvidemos que un profesor de matemáticas debe saber lo que enseña y que, si desea inculcar a sus alumnos la correcta actitud mental para abordar problemas, debe él mismo haber adquirido dicha actitud». 'Regla de estilo': «La primera regla de estilo consiste en tener algo que decir. La segunda es saberse controlar en caso de tener dos cosas por decir; exponer primero la una y después la otra, no ambas a la vez». 'Reglas de descubrimiento': «La primera de estas reglas es ser inteligente y tener suerte. La segunda es sentarse bien tieso y esperar la ocurrencia de una idea brillante. [...] Reglas infalibles que permitiesen resolver todo problema de matemáticas serían con toda seguridad preferibles a la piedra filosofal tan buscada en vano por los alquimistas. Tales reglas procederían de la magia y no hay tal magia. Encontrar reglas infalibles aplicables a todo tipo de problemas no es más que un viejo sueño filosófico sin ninguna posibilidad de realizarse».

Algunos problemas

La cuarta y última parte del libro (pp. 199-215), «Problemas, sugerencias, soluciones» da la oportunidad al lector de practicar el método descrito en las tres partes anteriores proponiendo, en el primer apartado, 20 problemas de tipos y contenidos muy diversos; para cada uno de los cuales da sugerencias más o menos largas para su solución en la línea del método, en el segundo apartado; y aporta, por fin, la solución de todos ellos.

Como muestra aportamos las tres fases en un problema, el número 4. «Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2.989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?». Sugerencias: «'He aquí un problema relacionado con el suyo'. Si el libro tiene exactamente nueve páginas numeradas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? (9 evidentemente). He aquí otro problema 'en relación con el suyo': si el libro tiene exactamente 99 páginas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? Solución: «Para un libro de 999 páginas se necesitan

$$9 + 2x90 + 3x900 = 2.889$$

dígitos. Si el libro en cuestión tiene x páginas,

$$2889 + 4(x - 999) = 2.989$$

$$x = 1.024$$

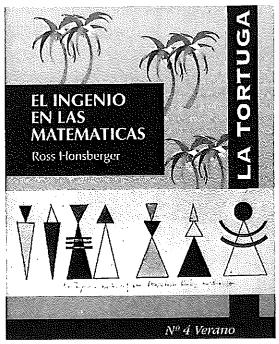
Este problema nos hace ver que una evaluación preliminar de la incógnita puede ser útil (e incluso necesaria, como en este caso)».

Para acabar

Sorprende la frescura de un libro como este, con más de cincuenta años a sus espaldas, que se puede leer con gusto y aprovechamiento, y no sólo una vez, sino tantas como se haga se siguen encontrando reflexiones, comentarios atractivos, y no siempre los mismos. Interesa, sobre todo, por propugnar la creación de un espíritu abierto, constructivo, experimental de la clase de matemáticas. Si hubiera de poner alguna pega (todo la tiene), habría que referirse (además de una traducción mejorable) a una presentación descarnada de los problemas, con poca historia por medio, y a un gusto por despojarles de su contexto, seguramente deseada, pero que nos gustaría que tuvieran un aire más vivo, menos académico. Algo que con el transcurso de los años, en los discípulos de Polya (que somos todos, conscientemente o no), se ha ido superado.

Fernando Corbalán

Jordi Deulofeu



EL INGENIO EN LAS MATEMÁTICAS
Ross Honsberger
DLS-Euler, Madrid 1994
ISBN: 85731-14-X
205 páginas

La reciente aparición editorial de dos nuevos números de la colección de libros «La Tortuga de Aquiles» es una gran noticia para aquellos que amamos las matemáticas. Desde estas líneas quiero animar y aplaudir este esfuerzo de la Editorial DLS-Euler que sigue publicando en español la «New Mathematical Library», bajo ese sugestivo nombre de La Tortuga de Aquiles.

Que grandes matemáticos dediquen parte de su tiempo a escribir sobre matemáticas, que no necesiten un excesivo aparato matemático, es muy de agradecer, quizá especialmente por todos aquellos que nos dedicamos a la docencia, pero sobre todo porque es una oportunidad de disfrutar y emocionarnos con algunos retazos de partes de las matemáticas que no han estado ni están en los planes de estudios que hemos conocido o conocemos. Parece ser que esto que tan brillantemente hace aquí Miguel de Guzmán es una práctica mucho más habitual en Estados Unidos, donde matemáticos de gran prestigio escriben sobre distintas cuestiones matemáticas que puedan ser leídas por alumnos con conocimientos equivalentes a los que se tienen en bachillerato o COU. Esta es la idea que parece animar a la editorial Euler con la publicación de esta colección de libros que el mismo Miguel de Guzmán elogia en la siguiente nota a la edición española que aparece en la contraportada de todos los libros que se han publicado hasta ahora:

«La colección New Mathematical Library (que aparece en España bajo el nombre de La Tortuga de Aquiles), de exposiciones matemáticas breves y de nivel asequible a los estudiantes de secundaria, comenzó a ser publicada con la intención de ofrecer un acceso fácil a los estudiantes hacia el área de la matemática generalmente no incluidas entre los contenidos de su enseñanza.