SUMA 22
junio 1996, pp. 25-31

El problema de Isis: interés educativo de sus variadas soluciones. Algunas generalizaciones

Alberto Martínez Delgado

ARTÍCULOS

Este trabajo resume algunas de las formas de resolución publicadas del problema de Isis, ofrece una variante en el método de resolución –basado en dar prioridad sobre cualquier representación concreta a la idea de acotación–, resuelve generalizaciones planas y tridimensional del problema, formula una acotación del conjunto de variables para la generalización d-dimensional y recoge algunas notas de carácter didáctico y epistemológico.

Interés educativo del *problema de Isis*

El problema, atribuido a la diosa egipcia Isis, pide la determinación de las dimensiones, números naturales, de un rectángulo cuya área sea igual a su perímetro. La simplicidad de su enunciado, las connotaciones histórico-culturales que evoca y la diversidad de formas de resolución, con conocimientos matemáticos que pueden considerarse, en general, de un nivel de bachillerato, confiere a este problema una especial importancia en la práctica educativa y en la reflexión teórica sobre la actividad matemática.

Este problema, de importancia mágico-religiosa, fue resuelto por los antiguos egipcios, aunque no sabemos cómo. Davis (1985, p. 89) ha señalado al respecto: «no tengo ni idea de cómo los egipcios probaron el teorema de que [...] son los *únicos* enteros positivos que representan el perímetro de un rectángulo y también el área del mismo rectángulo».

Como sucede con gran parte de los problemas de matemáticas, el problema de Isis permite tanto una aproximación empírica basada en un tanteo rudimentario como planteamientos teóricos resolubles por métodos distintos. El cálculo empírico, por tanteo, ofrece frutos rápidos que conducen de forma casi automática a formular preguntas de envergadura estrictamente matemática: ¿cómo hallar de forma sistemática *todas* las soluciones posibles? ¿el estancamiento en el cálculo empírico de soluciones, significa que no existen más posibilidades?

Las soluciones que presentamos, la mayoría de ellas ya publicadas, nos permitirán apreciar la riqueza de enfoques y la reflexión sobre aspectos cognitivos que el problema suscita, tema sobre el que volveremos más adelante. La utilización de estrategias y representaciones distintas, aunque algunas emparentadas entre sí, ofrecen en algunos casos una bella simplicidad. El método empleado por Greer (1993, pp. 175-176) añade el aliciente de su proximidad a lo que pudo haber sido la forma de resolver el problema en el antiguo Egipto (Davis, 1993, p. 6).

Quienes lo deseen pueden detener la lectura en este punto para intentar resolver independientemente este problema, durante unos minutos, unas horas o unos meses; puede ser interesante también seguir las soluciones aquí recogidas e intentar posteriormente otros métodos de resolución.

Distintas resoluciones publicadas del problema de Isis

El tanteo conduce, sin necesidad apenas de conocimientos matemáticos, a la determinación de las soluciones (lados 4 y 4, con perímetro y área 16, o lados 3 y 6, con perímetro y área 18). Una segunda fase del problema surge inmediatamente, espoleada por la curiosidad de saber si podemos encontrar otras soluciones, dada la infinitud del conjunto de los números naturales. Esta segunda fase puede formularse como un teorema que sostiene la no existencia de otras soluciones.

El tanteo conduce, sin necesidad apenas de conocimientos matemáticos, a la determinación de las soluciones (lados 4 y 4, con perímetro y área 16, o lados 3 y 6, con perímetro y área 18).

El enunciado general del problema de Isis, se traduce al lenguaje algebraico en los siguientes términos:

$$x \cdot y = 2x + 2y \text{ , donde } x, y \in \mathbb{N}.$$

A continuación recogemos, esquemáticamente, algunas formas de resolución, publicadas en *The Journal of Mathematical Behavior*, a partir de que Davis (1985) llamara la atención sobre el problema de Isis:

1. *Solución de M. Klamkin* (1986):

Partiendo del planteamiento general del problema, $xy = 2x + 2y$, se consigue la descomposición factorial: $(x-2)(y-2) = 4$, que nos proporciona inmediatamente las soluciones 3, 6; 4, 4.

2. *Solución de M. Walter* (1986):

Partiendo también del planteamiento general, $xy = 2x + 2y$, despejamos una de las incógnitas, x: $xy - 2x = 2y$, $x(y-2) = 2y$, $x = 2y/(y-2)$; dividiendo: $x = 2 + 4/(y-2)$; los valores de y pueden ser 3 o 4, dando valores para y, 6 o 4. Los lados solución son por tanto 3, 6 y 4, 4.

3. *Solución de L. Imree* (1987):

$xy = 2x + 2y$; dividiendo los dos miembros entre xy ($\neq 0$):

$$1 = \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$

como x e y «son intercambiables», x e y no pueden ser simultáneamente mayores que 4 ... soluciones 3, 6; 4, 4.

4. *Solución de R. Pandharipande* (1985):

$xy = 2x + 2y$; como en el método de M. Walter: $x = 2y/(y-2)$. Fácilmente se obtienen los valores 3, 6 y 4, 4.

Consideremos ahora $y > 6$:

$$\frac{2y}{y-2} > \frac{2y-4}{y-2} = 2$$

por otra parte:

$$\frac{2y}{y-2} < 3$$

Si hallamos la derivada de $2y/(y-2)$ tenemos:

$$\left[\frac{2y}{y-2}\right]' = -\frac{4}{(y-2)^2} < 0, \forall y (y > 6)$$

Como la expresión obtenida al despejar x, está comprendida entre 2 y 3, y como la pendiente es negativa, resulta que x no puede tomar ningún valor entero. Por tanto sólo se pueden presentar soluciones en que $2 < y \leq 6$, que se determinan fácilmente.

5. *Solución de B. Greer* (1993):

Partiendo de la descomposición factorial realizada por M. Klamkin, $(x-2)(y-2) = 4$, en la figura 1 se «ve» que, en general, el número de cuadrados en el «perímetro grueso» es P–4 ... el área del rectángulo «interior» (prescindiendo del «perímetro grueso») es $(x-2)(y-2)$ ...

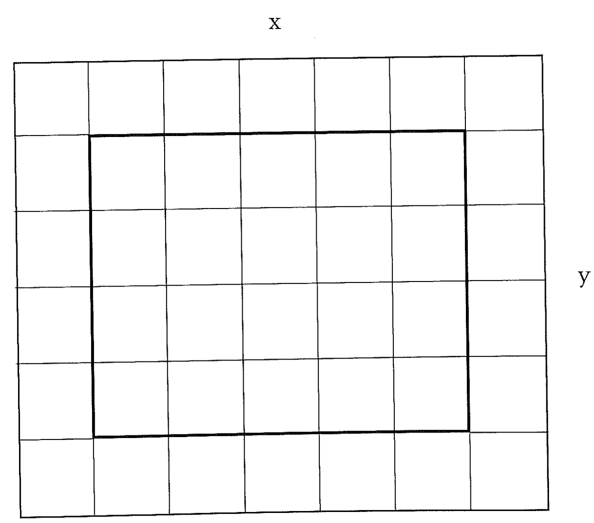

Figura 1. Solución de B. Greer. Área y «perímetro grueso»

Cuando el área del «interior valga 4» (que sólo se puede obtener por las dos descomposiciones factoriales 1·4 y 2·2), tendremos la solución del problema (lados de valores 3 y 6, o 4 y 4).

Esta forma de abordar el problema de Isis, a base de considerar «baldosas» del perímetro y «baldosas» del área puede llevarse a cabo a través de una contabilización «inteligente y sistemática» (Davis, 1993, p. 4) de «baldosas», estudiando cómo cada una de ellas contribuye al área o al perímetro según su posición en el rectángulo considerado. La sistematización, que puede hacerse de forma narrada, admite también una representación esquemática como división del rectángulo en celdillas, indicando en cada una de ellas el área y el perímetro que correspondería al rectángulo si la celdilla en cuestión fuera el vértice «inferior derecho» del rectángulo; de esta forma se observarían las regularidades, progresiones aritméticas para áreas y para perímetros, las soluciones y la imposibilidad de otras soluciones *aumentando el tamaño del rectángulo.*

6. *Solución de M. O'Nan (Davis, 1993):*

Si a la expresión algebraica del problema añadimos la consideración no restrictiva de que uno de los lados del rectángulo ha de ser menor o igual que el otro ($x \leq y$), podremos establecer la siguiente acotación:

$$xy \leq 2(y+y) = 4y \Rightarrow x \leq 4.$$

A partir de esta acotación es fácil estudiar la solución algebraica de los casos x=1 (1y = 2 +2 y, sin solución en $\mathbb{N}$), x=2 (2y = 4 + 2y, sin solución), x=3 (3y = 6 + 2y, solución y=6) y x=4 (4y = 8 + 2y, solución y=4).

La solución encontrada por dos alumnos de COU

Durante las sesiones, una semanal, de un Seminario sobre Estructuras y Problemas Ejemplares de Matemáticas, a cargo del autor de este trabajo en el IB Tartesos de Camas (Sevilla), realizadas a lo largo del curso 1995–96, se le planteó a los alumnos asistentes, pertenecientes al Curso de Orientación Universitaria, el problema de Isis. En unos minutos se encontraron las soluciones del mismo, pero quedó por resolver si éstas eran las únicas. La traducción al lenguaje algebraico también se obtuvo rápidamente. La resolución se orientó, por parte del profesor, tras dejar transcurrir algunas semanas para dejar libre curso a las propias ideas e iniciativas que pudieran manifestarse, hacia vías que estuvieran relacionadas con los conocimientos más «trabajados» por los alumnos de ese nivel, apareciendo como prometedora la utilización del estudio y representación de la gráfica cartesiana de la función asociada al problema de Isis:

La resolución se orientó, por parte del profesor, [...] apareciendo como prometedora la utilización del estudio y representación de la gráfica cartesiana de la función asociada al problema de Isis

$$xy = 2x + 2y;$$

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

La gráfica cartesiana (figura 2) ilustra que dicha función, una hipérbola, sólo pasa por los puntos (de coordenadas números naturales, positivos) que ya conocemos como soluciones al problema de Isis.

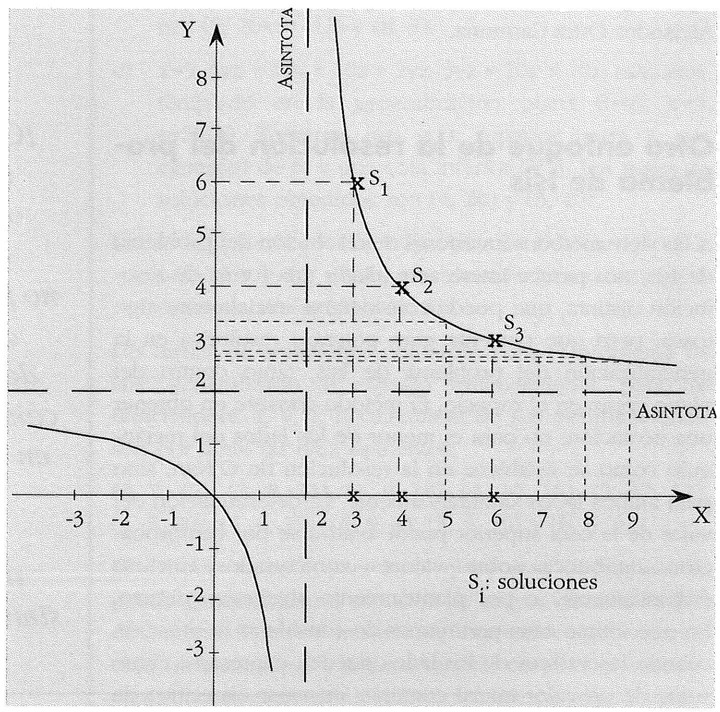

Figura 2

El carácter decreciente de la función estudiada (a través del estudio de su función derivada) y la existencia de asíntotas son puntos claves en esta demostración del *teorema* de Isis, que conlleva una actitud de «insumisión» a algunos términos del enunciado, saliendo del marco preestablecido de los números naturales para situarse en el de los números reales, para después de determinados análisis en este nuevo marco obtener conclusiones sobre su restricción al conjunto numérico inicial ($\mathbb{N}$).

Los argumentos anteriores fueron silenciados por el profesor que se limitó a comentar el enunciado de este problema al grupo normal de alumnos de COU, fuera de las sesiones del Seminario, a pedir que se realizara la gráfica de $y = 2x/(x-2)$ y a, en alguna sesión posterior, preguntar si existía alguna relación entre ambas cuestiones, relación que fue advertida públicamente por algunos alumnos. Al cabo de algunas semanas, Alejandro Ortiz Carmona y Alberto Bech Sánchez, alumnos del grupo de COU en que se había incitado de alguna manera a buscar una solución inspirada en la gráfica cartesiana, y asistentes al Seminario mencionado, expusieron de forma convincente el resultado de su trabajo conjunto que suponía una nueva demostración del teorema de Isis que el autor de este trabajo no ha encontrado publicada hasta ahora, aunque puede entroncar con la de Pandharipande.

Les ha sido pedida una exposición escrita de su indagación, en la que, según manifiestan, ha jugado un papel la representación gráfica de la función con un «viejo» ordenador, *Spectrum de 128K*, y un programa elaborado por Alejandro Ortiz Carmona.

Otro enfoque de la resolución del problema de Isis

A las siete métodos anteriores de resolución del problema de Isis, nos parece interesante añadir una forma de resolución distinta, que puede considerarse inicialmente algo tosca, pero que presenta gran potencia resolutiva en la generalización del problema de Isis, tanto dentro del plano como en el espacio. El método consiste en obtener una acotación, no para el menor de los lados del rectángulo como se establece en la resolución de O'Nan, sino para ambos lados simultáneamente. La determinación del valor de la cota superior puede realizarse por comprobación algebraica sobre valores conjeturados (incluso empíricamente) o por planteamiento algebraico directo. En este último caso partiríamos de considerar la situación cuando los valores de los lados pueden expresarse como suma de un valor inicial común y un valor específico de cada uno de ellos (cambio de variable):

$$x = k + a,\ y = k + b,\ a, b \in \mathbb{N}$$

(incluso podría suponerse, $x = k$, $y = k + b$).

Recordando la expresión algebraica del problema de Isis ($A = P$, $xy = 2x + 2y$), si sustituimos en la expresión del área, A, y del perímetro, P, tendremos:

$$A = (k+a)(k+b) = k^2 + kb + ka + ab;$$
$$P = 4k + 2a + 2b.$$

[Otro] método consiste en obtener una acotación, no para el menor de los lados del rectángulo como se establece en la resolución de O'Nan, sino para ambos lados simultáneamente.

Si llamamos $\Delta = A - P$,

$$\Delta = ab + (k-2)a + (k-2)b + k^2 - 4k =$$
$$= ab + (k-2)a + (k-2)b + k(k-4).$$

La diferencia $\Delta \geq 0$, $\forall\ k \geq 4$, con lo que se llega a la conclusión de que el problema de Isis no puede tener solución si los dos lados son mayores que 4, simultáneamente, por lo que al menos uno de ellos ha de ser menor o igual que 4. La resolución terminaría como en el procedimiento de O'Nan, analizando los casos $x=1$, $x=2$, $x=3$ y $x=4$.

Si hubiéramos aventurado que esa cota superior, común a los dos lados, es 4, siguiendo un desarrollo similar al anterior quedaría demostrado que efectivamente los dos lados no pueden ser simultáneamente mayores que 4 ($\Delta > 0$):

$$\Delta = (4+a)(4+b) - 2(4+a) - 2(4+b) =$$
$$= ab+2a+2b>0,\ \forall\ a ,b > 0.$$

Generalización plana del problema de Isis

El problema de Isis puede generalizarse, dentro de un planteamiento plano, bajo la condición de que *h* veces el área sea igual a *k* veces el perímetro ($hxy = 2k(x+y)$), o incluso adjudicando distintos coeficientes a x e y.

Siguiendo el mismo método que hemos utilizado para el problema de Isis, no generalizado, tendríamos, para el caso general anterior ($hxy = 2kx + 2ky$), la cota superior, s, simultánea para las dos variables x e y: $s = 4k/h$.

Como ejemplo podemos considerar los siguientes casos:

a) $xy = x + y$ ($h=1$, $k=1/2$), $s = 2$. Habría que comprobar sólo los casos $x=1$ (sin solución), $x=2$ (con solución, $y=2$).

b) $2xy = 3(x+y)$ ($h=2$, $k=3/2$, $s=3$). Comprobados los casos $x=1$, $x=2$ y $x=3$, obtenemos las soluciones respectivas 2, 6 y 3, 3.

c) $3xy = 2x + 2y$ ($h=3$, $k=1$, $s=4/3$). Sólo puede haber solución para $x=1$ ($y=2$).

d) $xy = 6x + 6y$, caso que se presentará en el estudio de la generalización tridimensional del problema de Isis ($h=1$, $k=3$, $s=12$); deberán probarse, sucesivamente, los valores de x de 1 a 12, que podremos reducir si determinamos una cota inferior de los valores de x (en este caso $x>6$, coeficiente de y en el segundo miembro). Las soluciones resultantes son los pares (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), y (12, 12).

e) $3xy = 10x + 10y$, utilizable también en la generalización del problema de Isis al espacio tridimensional, que veremos más adelante ($h=3$, $k=5$, $s=20/3$). Deben considerarse los casos en que x toma valores comprendidos entre 1 y 6, y las soluciones de la ecuación son los pares 4, 20 y 5, 10.

A las soluciones anteriores habría que añadir, como es obvio, las resultantes de intercambiar entre sí los valores de x e y.

Generalización espacial del problema de Isis

En el caso del espacio tridimensional $\mathbb{N}^3$, el problema de Isis podría enunciarse pidiendo la determinación de las dimensiones, naturales, de un paralelepípedo rectangular, cuyo volumen, V, sea igual al área, A, del mismo (formulado por Greer, 1993, p. 176):

$$V = A,\ xyz = 2xy + 2xz + 2yz$$

Podríamos establecer una acotación simultánea para los tres lados del paralelepípedo siguiendo un procedimiento similar al seguido en el plano: $x = k + a$, $y = k + b$, $z = k + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$(k+a)(k+b)(k+c) =$$

$$= 2(k+a)(k+b)+2(k+a)(k+c)+2(k+b)(k+c),$$

Si consideramos $\Delta = V - A$, operando las expresiones anteriores y reorganizando adecuadamente, tenemos:

$$\Delta = abc + ab(k-2) + ac(k-2) + bc(k-2) +$$
$$+ a(k^2-4k) + b(k^2-4k) + c(k^2-4k) + k^3 - 6k^2,$$

En el caso del espacio tridimensional $\mathbb{N}^3$, el problema de Isis podría enunciarse pidiendo la determinación de las dimensiones, naturales, de un paralelepípedo rectangular, cuyo volumen, V, sea igual al área, A, del mismo.

con $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. Cuando $k > 6$, $\Delta > 0$, y el problema no tiene solución; por tanto una cota superior de las tres dimensiones del paralelepípedo rectangular, simultáneamente es 6. Esto nos permite estudiar el caso general a través de 6 casos particulares, tomando para uno de los lados (x por ejemplo), sucesivamente, los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6. De esta forma el problema tridimensional se reduce a seis casos bidimensionales (generalizados):

a) $x=1$, $yz = 2y + 2z + 2yz$, $2y + 2z + yz = 0$, que no admite soluciones positivas.

b) $x=2$, $2yz = 4y + 4z + 2yz$; $y + z = 0$, ecuación que tampoco admite soluciones positivas.

c) $x=3$, $3yz = 6y + 6z + 2yz$; $yz = 6y + 6z$, caso resuelto en el apartado d) de la generalización plana, dando los pares de soluciones (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), y (12, 12).

d) $x=4$, $4yz = 8y + 8z + 2yz$; $yz = 4y + 4z$. Siguiendo el procedimiento propuesto para la generalización bidimensional, tenemos $h=1$, $k=2$, $s=8$, una cota superior de los valores de y sería 8, y una cota inferior 5. Resolviendo las ecuaciones correspondientes a $y=5$, 6, 7 y 8, obtenemos, para y y z, los pares de soluciones (5, 20), (6,12) y (8, 8).

e) $x=5$, $5yz = 10y + 10z + 2yz$; $3yz = 10y + 10z$, caso contemplado en la generalización plana ($h=3$, $k=5$, $s=20/3$). Tenemos una cota superior (para y, por ejemplo) de 6, y una cota inferior de 3. Los pares de soluciones obtenidos son (4, 20) y (5, 10).

f) $x=6$, $6yz = 12y + 12z + 2yz$; $yz = 3y + 3z$ ($h=1$, $k=3/2$, $s=6$); $3 < y \leq 6$, y los pares de soluciones correspondientes son: (4, 12) y (6, 6)

Las ternas de soluciones obtenidas para el problema de Isis, generalizado al espacio tridimensional, para las dimensiones *x*, *y*, *z*, o cualquiera de sus permutaciones, son por tanto las diez siguientes:

(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10) y (6, 6, 6).

El método anterior para resolver el caso tridimensional puede generalizarse a espacios de mayor dimensión $\mathbb{N}^d$, $d \geq 4$, manteniendo el modelo de expresión algebraica del caso bidimensional y tridimensional; en el caso cuatridimensional la expresión algebraica correspondiente sería:

$$xyzt = 2xyz + 2xyt + 2xzt + 2yzt.$$

El elemento determinante para la acción de reducir el planteamiento a un número finito de casos es el establecimiento de una cota superior para el conjunto de las dimensiones. Siguiendo un procedimiento similar al seguido en el caso bidimensional y tridimensional se puede establecer con carácter general el teorema según el cual *una cota superior en $\mathbb{N}^d$ de las d variables es 2d* (4 en el caso bidimensional, 6 en el tridimensional, como ya sabemos, 8 para el espacio de cuatro dimensiones,...). La demostración de este teorema no es conceptualmente complicada empleando el método ya descrito, pero su expresión resulta algo prolija. Puede demostrarse (también para d=2 y d=3, ya analizados) de forma más elegante recurriendo a los procedimientos de resolución propuestos por O'Nan (Davis, 1993, p. 5) y por Imree (1987), respectivamente, procedimientos que revelan, a través de esta convergencia, su proximidad, por encima de las apariencias.

Siguiendo el procedimiento de O'Nan al caso general:

$$x_1x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d =$$

$$= 2(x_1x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1} + x_1x_2x_3 \dots x_{d-2}x_d + x_1x_2x_3 \dots x_{d-1}x_d +$$

$$+ \dots + x_1x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d + x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d).$$

Si ordenamos los valores de las distintas dimensiones:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{d-1} \leq x_d,$$

podemos sustituir en cada término del segundo miembro cada factor hasta llegar al «factor ausente» en cada término, por el siguiente en la secuencia ordenada anteriormente; con ello el primer miembro queda acotado superiormente por el resultado de la sustitución mencionada (que afecta a todos los términos excepto al último de ellos):

$$x_1x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d \leq$$

$$\leq 2(x_2x_3x_4 \dots x_{d-1}x_d + x_2x_3x_4 \dots x_{d-1}x_d +$$

$$+x_2x_3x_4 \dots x_{d-1}x_d + \dots +x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d+x_2x_3 \dots x_{d-2}x_{d-1}x_d)$$

Como todas las variables son positivas, podemos dividir por el término que aparece repetidamente en el segundo miembro, resulta:

$$x_1 \leq 2(1 + 1+ \dots {}^{d} \dots +1),\ x_1 \leq 2d,$$

y queda demostrado que una cota superior de la menor de las dimensiones (y por tanto de todas ellas) es 2d.

Aplicando el procedimiento de Imree al enunciado general formulado, si dividimos los dos miembros por el producto de todas las variables que constituyen el primer miembro, resulta:

$$1 = \frac{2}{x_d} + \frac{2}{x_{d-1}} + \cdots \frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_1}$$

(con d sumandos)

igualdad que no puede satisfacerse si todas las variables toman valores superiores a 2d, con lo que queda demostrada la acotación simultánea de todas las variables que intervienen en el problema de Isis, d–dimensional.

El problema de Isis presenta fundamentalmente un interés desde el punto de vista de la historia de las culturas matemáticas. Como otros problemas, sirve de motivo para la reflexión sobre el proceso de conocimiento humano, a través de los variados intentos y vías de resolución.

Consideraciones cognitivas sobre la resolución del problema de Isis

El problema de Isis presenta fundamentalmente un interés desde el punto de vista de la historia de las culturas matemáticas. Como otros problemas, sirve de motivo para la reflexión sobre el proceso de conocimiento humano, a través de los variados intentos y vías de resolución.

Davis (1985; 1993, pp. 3–8) destaca la importancia de las distintas «representaciones» empleadas en los intentos, con éxito o sin él, de resolución del problema de Isis, importancia que no puede ser negada. Sin embargo, conviene advertir del peligro de reducir el proceso de conocimiento a la evocación de esquemas o armazones de resolución. A pesar de que pueda vincularse la idea de «representación» a los más dinámicos principios piagetianos de «asimilación» y «acomodación» (Davis, 1984, p. 158), parece insuficiente limitarse al juego de «representaciones» en el desarrollo del conocimiento, en el proceso de aprendizaje y en la resolución de problemas.

En este sentido, de no supeditación a una interpretación basada exclusivamente en esquemas cognitivos, puede tener algún interés el trabajo presente. Así no nos parecen equiparables en importancia las dieciocho representaciones en los intentos de resolución recogidos por Davis (1985), algunas de ellas ligeras variantes de otras, con otros enfoques más amplios, quizás no limitables a meros esquemas de representación. Davis mismo admite la existencia de ciertas categorías por encima de cada tipo de representación cuando, por ejemplo, manifiesta respecto a la solución aportada por Greer «... él y sólo él, pensó acerca de las baldosas cuadradas concretas... todos los demás nos alejamos inmediatamente de las representaciones concretas del problema y empleamos en su lugar representaciones abstractas» (Davis, 1993, p. 6); surge pues, en el mismo texto de Davis, la necesidad de abordar el fenómeno de pasar de unos grupos de representaciones a otros.

En la resolución que hemos ofrecido del problema de Isis, basada en la idea de acotación, expresable, en un principio, de forma algo rudimentaria (con una mezcla de aspectos concretos, en la fijación de una presumible cota, y de aspectos algebraicos en la demostración de lo acertado de la conjetura concreta previa), y depurada posteriormente usando métodos algebraicos, y particularmente a través de los procedimientos de resolución empleados por O'Nan, M. (Davis, 1993, p. 5) y por Imree (1987), se perfila, como en los trabajos que acabamos de mencionar, quizás con mayor pureza en sus planteamientos más rudimentarios, la conveniencia de destacar una acción de resolución (si se prefiere un bloque de representaciones) consistente en deformar el conjunto del problema inicial, no acomodándose al planteamiento explícito en el enunciado de «igualdad», sino transformándolo en un problema de desigualdad que permita una mayor amplitud de manipulación, concreta y abstracta. Con toda la importancia que pueden tener las representaciones particulares del problema, distinguiendo, por ejemplo, como distintas representaciones «4n + 2v = v2n (quinta representación), 2n + v = nv (sexta representación)…» (Davis, 1985, p. 90), nos parece más relevante la distinción entre «líneas» o estrategias de acción y resolución. Una primera distinción de líneas puede establecerse en torno a la actitud de sujeción, o de independencia, respecto al enunciado recibido. En nuestro caso la actitud de irreverencia respecto al enunciado recibido, saltando, al menos provisionalmente, de un enunciado en el que se pone el énfasis en determinar valores concretos que satisfacen una condición de igualdad, a establecer una cota, superada la cual no se cumple dicha condición, supone una preponderancia de la acción de «asimilación» sobre la «acomodación», asimilación que acaso deba entenderse más allá del sentido cognitivo, restrictivo, para resaltar su aspecto biológico originario (Piaget, 1977) de actuación transformadora sobre el medio.

La importancia concedida a la actitud transformadora del sujeto no nos hace identificarnos, sin embargo, con el planteamiento constructivista en boga que ignora o menosprecia el papel del medio como moldeador del conocimiento y la referencia objetiva (exterior al sujeto) del conocimiento mismo.

Análoga situación de *insumisión* se detecta en el método de resolución descubierto por los alumnos de COU del IB Tartesos de Camas (Sevilla), Alejandro Ortiz Carmona y Alberto Bech Sánchez. En este caso el distanciamiento de las condiciones prefijadas del problema se produce respecto al conjunto numérico al que tienen que pertenecer las soluciones, planteando el problema en $\mathbb{R}$ (y no en $\mathbb{N}$), más que respecto a que la relación considerada sea de igualdad.

La importancia concedida a la actitud transformadora del sujeto no nos hace identificarnos, sin embargo, con el planteamiento constructivista en boga que ignora o menosprecia el papel del medio como moldeador del conocimiento y la referencia objetiva (exterior al sujeto) del conocimiento mismo. Aunque paradójicamente hayamos puesto el énfasis sobre la acción del sujeto en lugar de las meras representaciones, más propicias a ser consideradas como reflejos de una realidad objetiva, no suscribimos la filosofía y la epistemología constructivista defendida, entre otros, por Davis (Davis, Maher y Noddings, 1990), siguiendo el modelo del procesamiento de la información, nueva forma de conductismo para algunos. El debate sobre estos aspectos epistemológicos, apenas comenzado, necesita, para prosperar, liberarse del paralizante dogmatismo académico y administrativo, actualmente anclado en el constructismo y factor de su escasamente discutida hegemonía.

Alberto Martínez
IB Tartesos.
Camas (Sevilla)

Referencias bibliográficas

DAVIS, R. B. (1984): *Learning Mathematics. The Cognitive Approach to Mathematics Education*, Ablex Publishing Corporation, New Jersey (2ª impresión, 1986).

DAVIS, R. B. (1985): «The Role of Representations in Problem Solving: Case Studies», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, n.° 1, 85–97.

DAVIS, R. B. (1993): «The Isis Problem and the Question of Representations», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, n.° 1, 3–8.

DAVIS, R. B., C. A. MAHER y N. NODDINGS (1990): *Constructivist Views on the Teaching of Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston, Virginia (*Journal of Research in Mathematics Education*. Número 4, monográfico).

GREER, B. (1993): «A Pre–Algebraic Solution of the Isis Problem», The Journal of Mathematical Behavior, vol. 12, 175–176.

IMREE, L. (1987): «The Isis Problem Revisited», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 6, 381–382.

KLAMKIN, M. y M. WALTER (1986): «Contributions», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 5, n.° 3, 337–338.

PANDHARIPANDE, R. (1985): «The Isis Problem»: *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, n.° 1, 101–103.

PIAGET, J. (1977): *Biología y conocimiento*, Siglo XXI, México, Madrid y Buenos Aires.