SUMA 22
junio 1996, pp. 13-24

Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local

José-Luis Llorens Fuster

ARTÍCULOS

Se ha resuelto el problema abierto de la extensión del modelo de Van Hiele a niveles educativos superiores, fuera del ámbito de la Geometría, aportando descriptores de los niveles de razonamiento a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local: el de recta tangente a una curva en un punto. Se ha analizado la relación existente entre el modelo de Van Hiele y la duplicidad de imágenes conceptuales de Vinner. La posibilidad de aplicar el modelo a los fundamentos del Análisis Matemático abre nuevas perspectivas en la investigación, revelándose útil para valorar la eficacia de propuestas metodológicas. La parte experimental del trabajo aporta técnicas aplicables a grupos numerosos de estudiantes.

En un momento histórico en el que los recursos tecnológicos están incidiendo de forma muy notable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ciertos aspectos de la investigación en educación matemática adquieren un interés añadido. Así, la utilización de esos recursos plantea la cuestión fundamental de su utilidad para facilitar *la comprensión* de los conceptos. Ésa fue, en parte, la motivación de nuestra memoria de doctorado, de la que a continuación presentamos un breve resumen.

El modelo de Van Hiele aporta una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de unos *niveles de pensamiento*, característicos del modelo. Precisamente, esos niveles suponen unas formas peculiares de razonar y, por tanto, no se identifican con niveles de destreza en cálculos algebraicos ni con los niveles educativos. Actualmente, nos referimos a esos niveles como nivel 0 (básico o predescriptivo), nivel I (de reconocimiento o descriptivo), nivel II (teórico informal o de análisis) y nivel III (deductivo o teórico). El propio Van Hiele (1986, p. 47) señala que niveles superiores a éstos pueden tener sólo un interés teórico y presentar dificultades severas para su discernimiento. Hay que señalar que el nivel III es el que contiene los elementos esenciales del razonamiento matemático, pues en él se lleva a cabo *la demostración*. La aplicación del modelo de Van Hiele a un tema supone, por tanto, aportar *descriptores* de los niveles, esto es, características que permitan reconocer cada uno de los niveles a partir de la actividad de los estudiantes. En el contexto del párrafo anterior, es evidente el interés que tiene la aplicación del modelo para la validación de determinadas propuestas metodológicas. Simplificando la cuestión, podríamos decir que una metodología es tanto más eficaz cuanto facilita más rápidamente o más generalmente (a más estudiantes) el progreso hacia el nivel III.

El modelo de Van Hiele se ha aplicado en numerosas ocasiones a diversos temas. Así, pueden verse descriptores (o recopilaciones de los mismos) en Fuys, Geddes y Tischler (1985), Burger y Shaughnessy (1986), Crowley (1987), Gutiérrez y Jaime (1990), entre otros. Sin embargo, las aplicaciones del modelo se han ceñido casi exclusivamente a cuestiones geométricas y a niveles educativos elementales. En todo caso, podíamos considerar como *problema abierto* la aplicación del modelo a cuestiones fundamentales del análisis matemático en niveles educativos universitarios o preuniversitarios.

Por otra parte, en la descripción de las dificultades conceptuales que surgen frecuentemente en la enseñanza secundaria y en la universitaria en relación con los fundamentos del análisis matemático, ha venido siendo muy eficaz la *terminología* introducida por Vinner relativa al *concepto-imagen* y al *concepto-definición* asociados a un concepto matemático –una formulación reciente de estos términos y de sus aplicaciones puede verse en Vinner (1991, pp. 65-81)–. La coexistencia de esa duplicidad de imágenes conceptuales asociadas a un concepto dado ocasiona frecuentemente situaciones conflictivas que se manifiestan en una escasa o nula comprensión de esos conceptos. Como se ha probado en numerosos trabajos (por ejemplo: Tall y Vinner, 1981; Cornu, 1983; Vinner, 1983; Sierpinska, 1987; etc.), esos conflictos se manifiestan de forma especialmente aguda cuando un concepto, del que el estudiante tenía una idea previa, se introduce sin definirlo explícitamente y, por tanto, sin integrar la definición formal con esas ideas previas de las que partía el estudiante. Tal es el caso del concepto de recta tangente a la gráfica de una curva en un punto, cuestión estudiada específicamente por Vinner (1982).

En nuestra memoria resolvimos las dos cuestiones fundamentales que se han esbozado en los párrafos anteriores. Por una parte, hemos aplicado el modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a una curva en un punto, es decir, a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local, cuestión que aparece en los fundamentos del análisis matemático, en los primeros cursos de matemáticas en la universidad o en los últimos de secundaria. Por tanto, aportamos una descripción de cada uno de los niveles I, II y III que cumple las condiciones teóricas para ser considerada propia del modelo de Van Hiele. Para ello, diseñamos dos instrumentos prácticos que permiten la detección de los niveles así descritos: el guión de una entrevista *semiestructurada y socrática*, y las preguntas de una prueba de elección múltiple, de respuesta *semicerrada*. Como resultado de la aplicación de esta prueba a diversas muestras de estudiantes universitarios y preuniversitarios, presentamos también algunas conclusiones sobre la eficacia de propuestas metodológicas basadas en la visualización asistida por ordenador y, en concreto, en la utilización frecuente de programas de cálculo simbólico. Finalmente, el tratamiento estadístico realizado para obtener estos resultados supone una contribución a la resolución del problema genérico que se suscita en la detección de los niveles de Van Hiele en grupos numerosos de estudiantes y, sobre todo, aporta una confirmación independiente a nuestra descripción de niveles, reafirmando su existencia y la misma descripción realizada. Por otra parte, en esa descripción de los niveles de razonamiento, se caracteriza su relación con el *modelo* de Vinner en el sentido de que la existencia de una duplicidad conflictiva de imágenes conceptuales impide el progreso hacia el pensamiento matemático avanzado, es decir, hacia los niveles superiores de pensamiento.

...hemos aplicado el modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a una curva en un punto, es decir, a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local, cuestión que aparece en los fundamentos del análisis matemático, en los primeros cursos de matemáticas en la universidad o en los últimos de secundaria.

El concepto de aproximación local

Existen diversas manifestaciones del concepto de aproximación local. El concepto de límite de una sucesión, el de suma de una serie, el de convergencia aplicado a una expresión decimal infinita, el concepto de límite funcional, el de derivada, el concepto de recta tangente a la gráfica de una curva en un punto, etc., son ejemplos de ellas. En todos ellos podemos distinguir algunos aspectos comunes. Por ejemplo, la necesidad de recurrir a la idea de infinito, de tal suerte que podemos decir que cada uno de esos conceptos comporta un *proceso de razonamiento infinito*. ¿Es finita –o puede serlo– la acumulación indefinida de cantidades finitas? ¿Llega a convertirse en un segmento la magnificación indefinida de un *pedazo* de la gráfica de una curva? Esa característica podemos resumirla diciendo que el concepto de aproximación local es un *concepto dinámico*. Ese dinamismo del concepto significa, entre otras cosas, que el concepto involucra la idea de infinito en un proceso de razonamiento intrínsecamente abstracto, no visualizable, en absoluto sensible.

Un estudiante puede considerar trivial obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en $x = 0$ y, a la vez, «definir» recta tangente a una curva en un punto como aquella recta que *toca a la curva en un punto*, oponiendo esa definición (imagen) a la representación gráfica de $y = x^3$ en $x = 0$ y, por tanto, negando que $y = 0$ sea tangente a esa función en ese punto (Vinner, 1991, p. 78). La integración del concepto-imagen y el concepto-definición se muestra así como una *conditio sine qua non* para el progreso hacia un nivel de pensamiento superior en el que se produce una adecuada comprensión de los conceptos dinámicos como consecuencia del proceso de razonamiento inherente a la idea de aproximación. Recíprocamente, un estilo excesivamente *formalista* de la enseñanza, tiende a identificar «rigor» con formalismo entendido como manipulaciones algebraicas. El resultado es, muchas veces, el del ejemplo: estudiantes con ciertas habilidades algebraicas pero con deficiencias conceptuales importantes *en los mismos temas.* La elección del concepto de recta tangente como objeto de nuestro estudio es, en este sentido, casi indiferente. Se trata, sobre todo, de estudiar ese proceso de razonamiento inherente al concepto de aproximación, aunque sea en un contexto gráfico y, por tanto, supuestamente sencillo y conocido por los estudiantes que acceden a las carreras técnicas en la universidad.

En nuestro trabajo hemos probado que en una *primera fase* del concepto (precisamente la más intuitiva, pero que contiene los elementos esenciales del razonamiento) podemos distinguir niveles de razonamiento, acordes con el modelo de Van Hiele. Es decir, que *el proceso mental que conduce a concluir que una curva con tangente en un punto se caracteriza porque las sucesivas ampliaciones en un entorno de la gráfica de esa curva en ese punto se confunden con una recta que es, precisamente, la tangente en ese punto,* supone cierta *madurez de razonamiento* que, entre otras cosas, requiere la capacidad de comprender y aplicar el proceso de aproximación local. Es en ese proceso mental, *en esa madurez de razonamiento,* donde *es posible distinguir niveles,* en el sentido de lo establecido en el modelo.

Tanto la entrevista como el test de elección múltiple utilizados para obtener y validar esos descriptores, se plantearon con un carácter socrático…

Validación de los descriptores

Los descriptores que propusimos (que pueden verse en el apéndice 1 de la página siguiente) verifican las condiciones *teóricas* que consideramos como características del modelo de Van Hiele:

- Cada uno de los descriptores corresponde al nivel que describe y es concordante con las descripciones habituales del modelo.
- Presuponen los del nivel precedente; al mismo tiempo está expresamente caracterizada la separación, las diferencias entre los distintos niveles.
- Reflejan comportamientos que son consecuencia de una gradual adquisición de profundidad en el razonamiento y son fácilmente detectables.
- Finalmente, se ha descrito con amplitud cada uno de los niveles (no menos de tres descriptores por nivel), lo que permite una buena selección de actividades para detectarlos.

Tanto la entrevista como el test de elección múltiple utilizados para obtener y validar esos descriptores, se plantearon con un carácter *socrático*: se trata, por una parte, de que las preguntas no enmascaren el lenguaje propio de los estudiantes, imprescindible para detectar su nivel de razonamiento. Pero, por otra parte, se aprovechan las mismas respuestas de los encuestados o entrevistados para orientar el desarrollo de la prueba. Eso es particularmente cierto en el caso de la entrevista en la que, aunque existe un guión, no se excluye la intervención espontánea del entrevistador, de acuerdo con este objetivo. Esa orientación no es otra que tratar de llevar al entrevistado *hacia la verdad* o, en otros términos, procurar que la entrevista suponga una *fuerte* experiencia de aprendizaje que coopere, si fuera preciso, al progreso en el nivel de razonamiento.

La entrevista tiene un contenido esencialmente *visual*: Aunque las preguntas se formulaban verbalmente, en cada una se entregaba al entrevistado una hoja que reproducía el enunciado al tiempo que se le mostraba alguna representación gráfica sobre la que versa la pregunta. En determinados momentos se entrega información al entrevistado, coherentemente con el carácter socrático. La prueba es un *diálogo* pero que tiene su apoyo y su contenido en ese carácter visual. En ese sentido, se evita entrar en las *definiciones* de los términos que se usan: *curvas, rectas, puntos, gráfica* e, incluso, *tangente, secante,* etc. El término *zoom* se usó acompañado de sinónimos tales como *magnificar, ampliar, lente de aumento,* etc. En

Apéndice I
DESCRIPTORES DE LOS NIVELES

NIVEL I

I.1. El nivel I se caracteriza porque su imagen conceptual es muy semejante al caso de la circunferencia, es decir que para un estudiante en este nivel su idea de tangente es que la recta toca en un punto y, por tanto, es capaz de discriminar los casos evidentes (secante, exterior).

I.2. En este nivel aparece el reconocimiento de las ideas de escala y de localidad referidas al concepto. El estudiante que se mueva en este nivel será capaz de distinguir, ante una representación de una curva y de una recta, que esa recta no es tangente a la curva cuando evidentemente (visualmente) no lo sea, al menos en la parte de la representación que se le muestre. También distinguirá si la recta es secante en esos mismos casos evidentes.

I.3. Sin embargo, ante una gráfica que represente una recta que pueda ser tangente a una curva, afirmará sin demasiadas dudas que, efectivamente, ésa es la relación que tienen la recta y la curva, sin considerar la necesidad de ninguna propiedad adicional, basándose sólo en la apariencia.

I.4. Específicamente, en la cuestión del comportamiento de una curva en un entorno de un punto cuando se hace un proceso de aproximación (zoom) en dicho entorno, es capaz de reconocer que la forma, la apariencia de una curva, puede ser muy distinta según desde qué escala se la contemple.

I.5. Así, en este nivel puede reconocer que el vértice de un ángulo no cambia de aspecto aunque se haga sobre él un proceso de aproximación (zoom).

I.6. (Separación del nivel II): En este nivel es característico que el estudiante no relacione la cuestión de la aproximación con la de la tangente. Menos aún que una recta que corta a una curva pueda ser tangente (simultáneamente) a la curva (en el mismo punto).

NIVEL II

II.1. En el nivel II, el estudiante manifiesta una total seguridad para llevar a cabo esos procesos de aproximación visuales y, por tanto, para razonar sobre los cambios de forma o de apariencia que comportan dichos procesos sobre la representación gráfica de la curva. Por tanto, es capaz de distinguir aquellas curvas que, en ese proceso, localmente se aproximan a una recta, de las que no cumplen esa propiedad.

II.2. En cuanto a la tangente, la reconoce precisamente como el final de esa aproximación local. De modo que, como es característico de este nivel, relaciona el concepto de tangente con el de aproximación, y ahora ya no es suficiente que la recta parezca que es tangente, que toque a la curva en un punto, sino que debe cumplir una propiedad adicional que, realmente, la caracteriza. Así, dadas una curva y una recta con apariencia de tangentes (en un punto) formulará la necesidad de ver más de cerca la figura, de iniciar la aproximación, para dar contestación a la pregunta de si la recta es tangente o no.

II.3. (Separación del nivel III) Sin embargo, en este nivel no dará, en general, respuestas a las situaciones patológicas, es decir, a aquéllas en que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación. Por ejemplo, para los ángulos o vértices señalados antes.

II.4. Un estudiante no podrá progresar desde el nivel II al nivel III (ni al IV) mientras mantenga dualidades entre el concepto-imagen y el concepto-definición. El nivel de razonamiento que permite la comprensión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre imagen y definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos y estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación local) caracterizaría el acceso al nivel III.

NIVELES III y IV

III.1. En el nivel III (teórico-formal) es capaz de demostrar que la tangente a una curva, suponiendo que exista, será la única recta que, precisamente, es el límite ("el final") de ese proceso de aproximación visual o de zoom.

III.2. De hecho, será capaz de definir la tangente de esa forma. Sólo aquellas curvas que tengan un comportamiento patológico en ese proceso, es decir, que no acaben siendo como una recta, carecerán de tangente.

III.3. (Separación del nivel IV) El reconocimiento de la imposibilidad de predecir, en algunos casos, la existencia de la tangente (y, por tanto, de su inclinación) expresado con términos precisos y formales, aunque con el lenguaje propio del contexto y de la definición adoptada, podría ser una manifestación de ese acercamiento al nivel IV y, en todo caso, es una manifestación de la adquisición del nivel III.

Nuestro estudio no recoge ningún descriptor específico del nivel IV, entendido éste como un nivel teórico-formal, en el que predomina la comprensión no sólo del concepto considerado sino de éste en relación con otros. La definición y el análisis del concepto de recta tangente nos permite advertir que, ciertamente, al asegurar la misma posibilidad de la extensión de modelo por la elección de esa definición, prácticamente se desechaba la posibilidad de considerar el nivel IV, justamente porque consideramos esa definición aislada de cualquier otro contexto. Podemos decir que las características que potencian la aplicación del modelo son las mismas que impiden la manifestación de ese nivel. Finalmente, recordemos que la comprensión del concepto queda garantizada con la consecución del nivel III.

el mismo sentido, todas las gráficas se presentaron *sin ejes de coordenadas*, para evitar cualquier interferencia explícita con el concepto de función. Tampoco se habla de *ecuación de la recta*, ni de *ángulo* o de *pendiente*. Menos aún se menciona la palabra *derivada* (desconocida para algunos de los estudiantes). Como decíamos, la palabra *tangente* se usa expresamente sin haberla definido en ningún momento. Ello obedece a la evidencia contrastada de que los estudiantes la conocen y, además, *creen saber lo que significa*. Precisamente, un objetivo de la prueba es determinar cuál es para ellos ese significado, es decir, en qué medida tiene algo que ver con el concepto de aproximación local que lleva consigo.

Tras la formulación definitiva del guión de la entrevista socrática y la consiguiente validación de los descriptores, abordamos la cuestión de aplicar nuestras conclusiones a grupos numerosos de alumnos. El planteamiento de la prueba escrita es, coherentemente con las características del modelo, una *transcripción* de la entrevista: hay una coincidencia casi total en las preguntas; respetamos, asimismo, las respuestas, en el sentido de que las alternativas que se ofrecen en cada pregunta son las respuestas que escuchamos más frecuentemente cuando realizamos las entrevistas, además de una alternativa de *respuesta libre*, para asegurar en lo posible la manifestación espontánea del entrevistado usando su propio lenguaje; finalmente, se mantiene el carácter socrático, entregando información al encuestado, volviendo a plantear preguntas tras esas entregas de información, etc. Es obvio que, individualmente, el mejor procedimiento de clasificación es la entrevista. Sin embargo, con propósitos globales y respetando estas condiciones, estamos en condiciones de asegurar la validez y eficacia, en el contexto del modelo de Van Hiele, de este tipo de pruebas.

Tanto en la entrevista como en el test escrito (que puede verse en el apéndice 2 –páginas siguientes–) podemos distinguir tres bloques diferenciados de

...la palabra tangente se usa expresamente sin haberla definido en ningún momento. Ello obedece a la evidencia contrastada de que los estudiantes la conocen y, además, creen saber lo que significa.

preguntas. Las del primer bloque (de la 1ª a la 6ª) tienen como objetivo examinar, *sin relación con el concepto de tangente*, las cuestiones derivadas de las representaciones gráficas (nivel 0) y de los cambios de escala (nivel I). Tras la sexta pregunta, se hace una primera entrega de información, para terminar de establecer el marco de la prueba respecto a la cuestión de las aproximaciones visuales, tanto en lo que se refiere a la posibilidad de conocer lo que piensa inicialmente el estudiante sobre ellas como para sugerirle, para el caso más extremo, que el efecto de los *zoom* con relación a la apariencia de la curva puede ser *importante* (caracterizábamos el nivel I por la capacidad manifestada para reconocer esos cambios, de acuerdo con la perspectiva o la escala). En el segundo bloque (desde la 7ª a la 15ª) se trata de detectar, en primer lugar, el concepto-imagen con respecto a la tangente a una curva; después, usando el *socratismo*, se tratará de incidir en la oposición secante-tangente, derivada seguramente de la situación aplicable a la circunferencia. Por último, se relacionan las aproximaciones sucesivas con la misma existencia de la tangente. Para ello, se entrega nuevamente información en la que, sutilmente, se puede comprobar que las aproximaciones sucesivas permiten discriminar no sólo si una recta es o no tangente a la curva sino que *la existencia de la tangente la determina el comportamiento de la curva como consecuencia de esas aproximaciones*. Finalmente, el último bloque da oportunidades específicas para manifestarse en el nivel III. En la prueba escrita, además de las preguntas relacionadas con las *patologías* o con la posible limitación del método que también aparecen en la entrevista, se añaden cuestiones directamente relacionadas con los descriptores del nivel III: una *definición* del método; una *demostración* de la unicidad de la tangente, cuando ésta existe, basada en la definición que se está usando implícitamente; una explicación del aspecto de la definición referido a la apariencia de coincidencia entre la curva y su tangente, etc.

Resultados experimentales. Tratamiento estadístico

Ya hemos indicado que la obtención y validación de los descriptores se logró, inicialmente, a través de las entrevistas. Para la prueba escrita nos propusimos los siguientes objetivos:

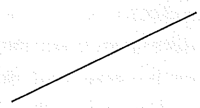
- La confirmación de los descriptores obtenidos a través de la entrevista.
- La validación de la propia prueba escrita, como instrumento coherente con nuestra descripción de los niveles, aplicable a grupos numerosos de estudiantes.
- La valoración de la eficacia de propuestas metodológicas basadas en la visualización por el uso habitual de programas de cálculo simbólico.

Apéndice 2
PRUEBA ESCRITA

El original se presentaba con un tamaño diferente y en hojas separadas, con la indicación expresa de *no pasar la página* hasta haber completado la respuesta y otras recomendaciones semejantes que aquí se omiten.

1. La ilustración adjunta decimos que corresponde a una **recta**. En realidad es, más bien, la representación de:

a) *Un segmento.*
b) *Un trozo de recta.*
c) *Una función.*
d) *Un polinomio de primer grado.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

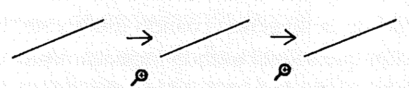


* * * * *

2. ¿Crees que las ilustraciones anteriores pueden corresponder a distintas perspectivas (*zooms*, «trozos» diferentes, etc.) de la misma curva?

a) *No, porque tienen el mismo grosor.*
b) *Sí, es posible.*
c) *No.*
d) *Es posible, pero es muy dudoso.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

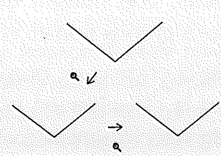


3. ¿Crees que las ilustraciones anteriores pueden representar *zooms* sucesivos aplicados a la misma recta? (Es decir, la pregunta es si lo que veremos al ampliar una recta tiene siempre el mismo aspecto).

a) *No, porque todo el rato se ve el mismo trozo.*
b) *Sí, porque todo el rato se ve el mismo trozo.*
c) *Sí, porque el aspecto de una recta no cambia aunque se cambie el zoom.*
d) *No, porque la recta se vería más «gorda», más «gruesa».*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

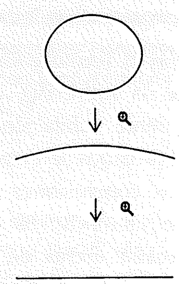
4. La misma pregunta para el «ángulo» de una curva como la que muestran las ilustraciones siguientes:



a) *No, porque el ángulo se iría abriendo a medida que ampliamos.*
b) *No, porque todo el rato se ve del mismo grosor.*
c) *Sí, porque el aspecto de un ángulo no cambia aunque se cambie el zoom.*
d) *Sí, aunque tendría que verse un poco más abierto cada vez.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

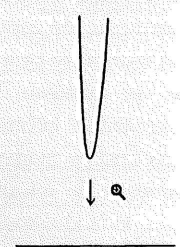
5. ¿Crees que es posible que las tres ilustraciones correspondan a la misma gráfica, a la que se aplican distintos «zooms»? (Es decir, contemplando una parte de la primera cada vez más de cerca):



a) *Depende de la parte que se ampliase.*
b) *No, porque al final es recta y nunca llegaría a ser una recta.*
c) *Sí, es posible que se vea de esa forma.*
d) *No.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

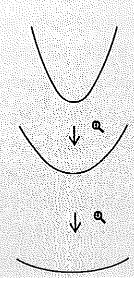
* * * * *

6. Repetimos la pregunta para la ilustración siguiente. Es decir, lo que se amplia, lo que se contempla más de cerca, es la zona de la curva que corresponde al *vértice*, al punto más bajo. La pregunta -insistimos- es si crees que si vamos ampliando llegará un momento que el aspecto puede ser el que muestra la segunda ilustración:



a) *No, porque habría que ampliar muchísimo y es excesivo, nunca se acabará viendo recto.*
b) *Sí.*
c) *No, porque el vértice siempre se verá curvo.*
d) *No.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

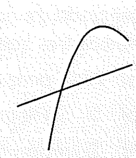
* * * * *



En la pregunta anterior, la respuesta correcta era que **sí** que es posible acabar viendo de esa forma la zona del vértice. En realidad, si hiciésemos ampliaciones sucesivas veríamos lo que se percibe en las ilustraciones adjuntas, en las que, efectivamente, podemos comprobar como la curva aparece poco a poco menos *puntiaguda*, se va haciendo plana.

7. ¿Qué relación tienen la recta y la curva?

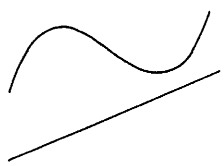
a) *Se cruzan.*
b) *Son secantes.*
c) *Se tocan en un punto.*
d) *Son tangentes.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

8. ¿Qué afirmación te parece más correcta, más precisa?

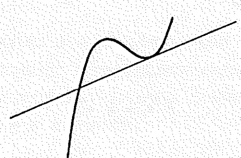
a) *La recta no corta a la curva.*
b) *Es posible que la recta corte a la curva, pero en la zona que muestra la ilustración la recta no tiene puntos comunes con la curva.*
c) *La recta no toca a la curva.*
d) *La recta y la curva no pueden tener ninguna relación entre ellas.*
e) *Ninguna de las anteriores: ..*



* * * * *

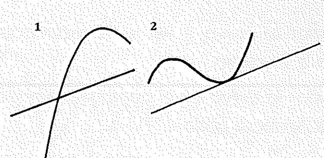
9. ¿Crees que la recta es tangente a la curva? ¿Por qué?

a) *No, porque la recta corta a la curva.*
b) *No, porque la recta tiene dos puntos comunes con la curva.*
c) *En una parte, seguro que no. En la otra, puede que sea tangente.*
d) *No se puede saber.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*



* * * * *

10. **En la zona** que muestran cada una de las ilustraciones (que corresponden a distintas zonas de la **misma** ilustración anterior), ¿crees que la recta **puede ser** tangente a la curva?

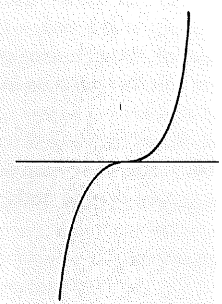


a) *La primera no es tangente y la segunda sí que es.*
b) *La primera no es tangente y la segunda puede que no lo sea o puede que sí.*
c) *Las dos son tangentes.*
d) *Ninguna es tangente.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*

* * * * *

11. La recta de la figura corta a la curva en un solo punto. ¿Crees que esa recta es tangente a la curva (en ese mismo punto)?

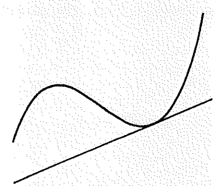
a) *No, porque la recta corta a la curva, la «atraviesa».*
b) *No, porque la recta toca a la curva en muchos puntos.*
c) *No, porque la recta corta a la curva y, además, la toca en muchos puntos.*
d) *Sí, parece que sí que es tangente.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

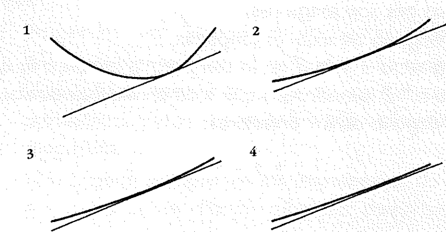
12. ¿Crees que, **en la zona** que muestra la ilustración, la recta **es** tangente a la curva en un punto?

a) Teniendo en cuenta sólo lo que se ve en la figura, no podemos estar seguros de que la recta sea tangente a la curva.
b) No, porque más bien parece que la toca en muchos puntos.
c) Sí, es tangente.
d) No, la recta es secante.
e) Ninguna de las anteriores: ...



* * * * *

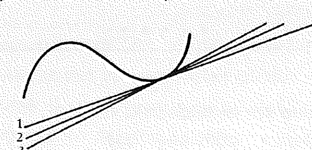
Sin embargo, la misma ilustración anterior, ampliada sucesivas veces en esa zona, tiene el aspecto siguiente:



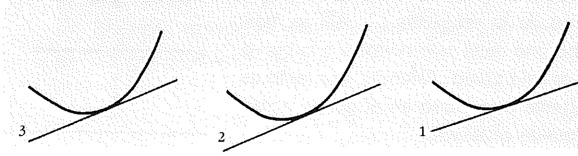
Como puedes observar, la recta **ni siquiera toca** a la curva en la zona donde se preguntaba.

* * * * *

13. En las figuras siguientes aparece una curva y, tres rectas (distintas, evidentemente) que pasan **por un mismo punto de esa curva** (insistimos en que las tres pasan por el mismo punto de la curva):



Ahora te las mostramos por separado, con una pequeña ampliación

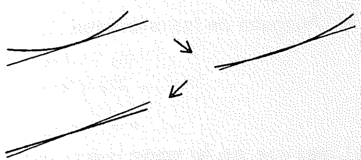


a) *Es posible que las tres rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión.*
b) *Las tres son tangentes, porque tocan en un punto.*
c) *Es posible que ninguna de las tres rectas sea tangente a la curva.*
d) *Una de ellas es tangente y las otras dos no lo son.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

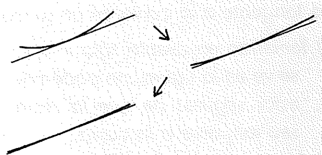
* * * * *

14. Como en el caso anterior, te mostramos ahora ampliaciones sucesivas de cada una de las rectas (por separado) y de la curva.

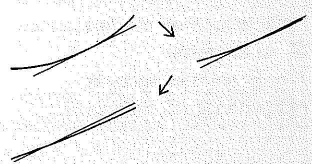
Recta 1:



Recta 2:



Recta 3:



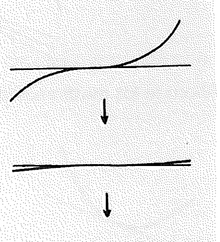
¿Cambia tu respuesta anterior, de alguna forma?
a) *La recta 1 y la 3 no son tangentes. La 2 parece que sí.*
b) *Las tres son tangentes.*
c) *Ninguna de ellas es tangente.*
d) *La recta 1 y la 3 no lo son porque cortan a la curva, y la n.° 2 tampoco porque toca en muchos puntos.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

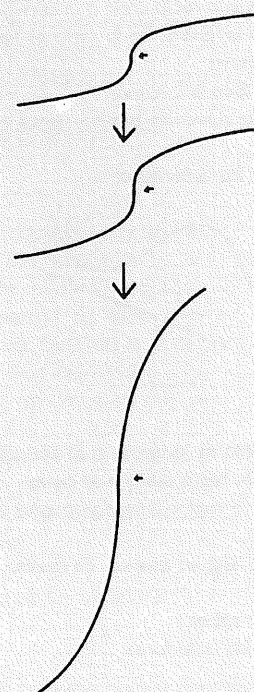
15. ¿Crees que una recta que corta a una curva en un punto puede ser tangente a la curva **en ese mismo punto**?
a) *No, porque si una recta toca a la curva no la corta.*
b) *Sí.*
c) *No, porque una recta no puede ser secante y tangente a la vez.*
d) *Sí, porque todas las rectas tangentes también son secantes.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

Independientemente de tu respuesta a la pregunta anterior, conviene que observes las ilustraciones siguientes, que son ampliaciones sucesivas de la figura de la pregunta 11. Allí se mostraba una recta que *cortaba* a la curva en un solo punto. Además, esa recta es tangente a la curva en el punto, como se puede observar...



16. ¿Eres capaz de predecir como será la tangente en el punto señalado de la curva, de la que, a continuación, te mostramos tres *zooms*?
a) *No, porque no habría tangente.*
b) *Sí. Sería una recta vertical.*
c) *Sí, sería una recta horizontal.*
d) *Sí: Cualquier recta que pasase por ese punto.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*

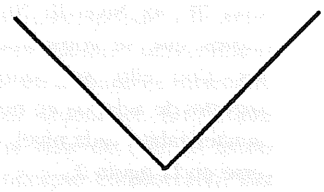


* * * * *

17. Supongamos que disponemos de un instrumento que nos permite ampliar, hacer *zooms* sucesivos, de cualquier curva. Entonces, un método para poder trazar la tangente de una curva en un punto, podría ser -en resumen- el siguiente:
a) *Ampliar la curva y ver si la recta acaba superponiéndose a la curva.*
b) *Ampliar la curva en el punto y prolongarla cuando aparente hacerse recta.*
c) *Ampliar la curva y la recta hasta que se toquen en el punto.*
d) *Trazar una recta que pase por el punto y ampliarla.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

18. Aplicando el método anterior (que podemos llamar, método del *zoom*), respecto de la «curva» de la pregunta 4 y su tangente en el punto más bajo (en el *ángulo*):



a) *No es aplicable el método del zoom, porque no es una curva.*

b) *El método demuestra que esa curva no tiene tangente en ese punto porque siempre se ve un ángulo, por mucho que amplíes.*

c) *Como siempre se ve un ángulo, cualquier recta que sólo toque en el ángulo es tangente en ese punto.*

d) *Como al ampliar el ángulo desaparece, la tangente será horizontal*

e) *Ninguna de las anteriores:...*

* * * * *

19. Supongamos que queremos aplicar el método anterior para trazar la tangente a la curva de la ilustración siguiente, en el punto señalado. Entonces:

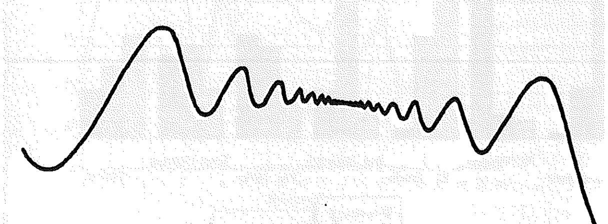
a) *Como antes, iríamos ampliando sucesivamente. Al final obtendríamos una recta, que será aproximadamente horizontal.*

b) *No es seguro que el método sea aplicable: Es posible que, al ampliar, comprobemos que siempre van saliendo más y más oscilaciones. Entonces, no sabríamos si hay o no hay tangente.*

c) *No se puede aplicar el método porque siempre van a salir más y más oscilaciones.*

d) *No puede haber tangente en ese punto porque siempre cortaría a la curva (salvo que fuese vertical, que no puede ser).*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

20. En esta pregunta pretendemos -para terminar- que demuestres, **si crees que es cierto**, que una curva sólo puede tener una tangente en un punto. O que demuestres lo contrario, si crees que lo cierto es lo contrario.

a) *Cuando se amplía una curva, pueden ocurrir sólo dos cosas: Que acabe viéndose siempre lo mismo (un ángulo) o que acabe viéndose una recta, que será la tangente. Pero no puede ser que la curva se convierta en dos o más rectas, de modo que si la tangente existe, es única.*

b) *Según la forma que tenga la curva, es posible que no haya tangente, que haya sólo una o que haya infinitas, ya que por un punto pasan infinitas rectas y, por tanto, la tangente puede ser única o puede no serlo.*

c) *De todas las rectas que pasan por un punto de una curva, que son infinitas porque por un punto pasan infinitas rectas, sólo una la toca porque las demás la cortarán. Por tanto, la tangente es única.*

d) *Como la tangente a una curva se halla haciendo la derivada de la función en el punto, si la función es derivable tendrá un resultado único. Por tanto, la tangente es única.*

e) *Ninguna de las anteriores:*

* * * * *

21. Como habrás podido observar a lo largo de la prueba, cuando se dibujan una curva y su tangente, parece que tienen más de un punto en común, que coinciden no sólo en un punto sino en un *segmento*, en un *trozo* de la curva cercano al punto de contacto. ¿Crees que siempre sucede esto?

a) *En general, no: Depende de la calidad del dibujo.*

b) *Sí, precisamente por la definición de tangente, ésta debe aproximarse a la curva de manera que siempre aparentará que se superpone a ella cerca del punto de tangencia.*

c) *No. Sucede eso porque los instrumentos de dibujo no son capaces de dibujar algo tan pequeño como un punto.*

d) *Sí, salvo que la curva sea lo suficientemente pronunciada («curva») como para que se pueda distinguir bien el punto.*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

22. Te planteamos ahora una cuestión más bien teórica: La tangente a una **recta** en uno de sus puntos. Entonces:

a) *No tiene sentido porque coincidirá con la propia recta y la tocará en muchos puntos.*

b) *Sería cualquier recta que pasase por el punto.*

c) *Coincidirá con la propia recta.*

d) *No tiene sentido porque una recta no es una curva.*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

- La «valoración» en este contexto del sistema de enseñanza tradicional en lo referido a su eficacia en el progreso en el nivel de razonamiento.

Para ello, se eligieron grupos de estudiantes, tal como aparecen en la figura 1:

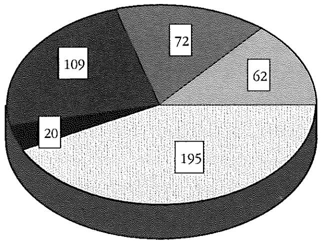


Figura 1.
Distribución de grupos en la muestra

Como podemos observar, la muestra total se distribuye en dos grandes grupos: 195 estudiantes de 2.° curso de secundaria (año en el que se introduce el concepto de aproximación local, derivadas, límites, etc.) y 263 estudiantes universitarios, distribuidos a su vez del siguiente modo: un grupo de 62 estudiantes de ingeniería técnica inmersos en un proyecto de innovación consistente en la utilización habitual de programas de cálculo simbólico (más detalles de ese proyecto pueden verse en Llorens (1993, pp. 61-80); un grupo de 72 estudiantes del mismo centro y nivel que el anterior, con metodología tradicional; dos grupos más, también con metodología tradicional (de ingeniería superior y de la facultad de Matemáticas), pero de nivel educativo superior a los anteriores.

Para el tratamiento estadístico elegido, se identificó cada entrevista con un vector de 22 componentes, cada una de las cuales es «1» o «0»: se codificó con «1» la coincidencia de la respuesta con un *patrón ideal*, coherente con el nivel III, y con un «0» en cualquier otro caso. A continuación se aplicó el algoritmo de clasificación *k-means* (cuyos detalles pueden verse en S-Plus Reference, p. 81 y ss.) caracterizando *previamente* los *cluster* (niveles) de acuerdo con el criterio que aparece en la tabla 1:

Criterio I	Bloque 3.°	Bloque 2.°	Bloque 1.°
Nivel III	≥ 4	≥ 5	≥ 3
Nivel II	< 4	≥ 5	≥ 3
Nivel I	< 2	< 4	≤ 3

Tabla 1

que refleja el número de aciertos (mínimo o máximo) por bloque de preguntas y nivel. Inicialmente, los casos que corresponden a cada nivel, resultaron: Nivel III: 46; Nivel II: 70; Nivel I: 61, valores que se consideran satisfactorios. Con ello, se obtuvieron unos *patrones* de aciertos en respuestas que caracterizaban cada nivel, como puede verse en la figura 2.

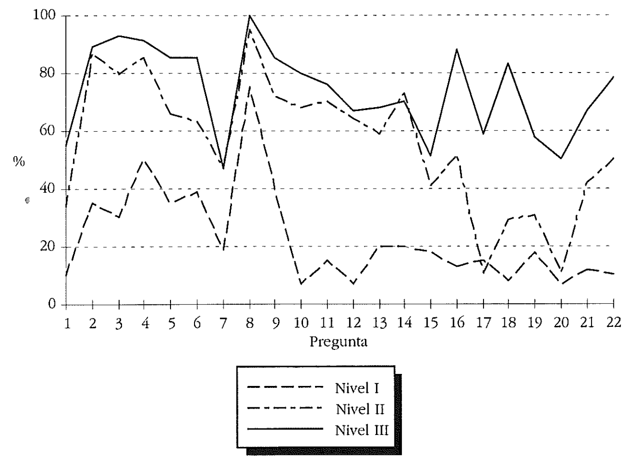


Figura 2. Centros iniciales
(% de aciertos por pregunta)

Tras la clasificación del total de vectores (es decir, de cada uno de ellos) se obtuvo la distribución por niveles de cada una de las muestras, tal como aparece en la figura 3.

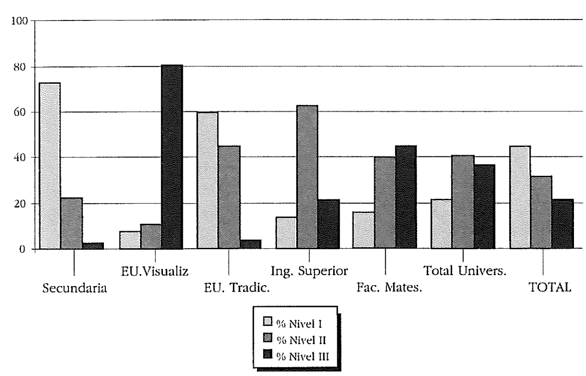


Figura 3. Porcentajes de niveles
en las muestras

Del análisis de esos resultados, se deducen casi inmediatamente las *conclusiones* siguientes:

- El mayor porcentaje de estudiantes en nivel III corresponde a la muestra de estudiantes universitarios implicados en técnicas de enseñanza asistida por ordenador. Esto confirma nuestra tesis de que, al menos para el concepto considerado, esas técnicas pueden facilitar significativamente el progreso hacia niveles superiores de compresión de los conceptos, de pensamiento matemático.
- Aunque existen diferencias entre los alumnos de secundaria y los universitarios, estas diferencias son irrelevantes si se consideran los universitarios de nivel educativo inferior. En todo caso, el porcentaje de estudiantes en nivel III que corresponde a las muestras de metodología tradicional es muy pequeño. En el contexto del modelo de Vinner, podemos interpretar este dato como la relativa incapacidad de esta metodología para facilitar la adecuada integración entre los conceptos imagen y definición, por lo que, de acuerdo con nuestros descriptores de nivel III, no se progresa hacia los niveles superiores.

Por otra parte, si comparamos los centros iniciales (figura 2) con los definitivos (figura 4), observamos inmediatamente diferencias muy significativas en la evolución de las medias de coincidencias en las preguntas del segundo bloque en los niveles II y III.

Aunque existen diferencias entre los alumnos de secundaria y los universitarios, estas diferencias son irrelevantes si se consideran los universitarios de nivel educativo inferior.

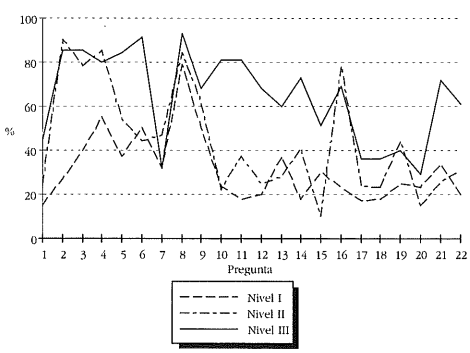


Figura 4. Centros definitivos (% de aciertos por pregunta)

Recordemos que el criterio de preclasificación mostrado en la tabla 1 no incluía esas diferencias (en ambos casos exigíamos no menos de 5 aciertos en ese bloque). Tras la clasificación definitiva, esas diferencias han aparecido, lo que representa una confirmación de la distinción entre el nivel II y el nivel III *independiente del criterio establecido previamente.* Además, *esas diferencias suponen también una confirmación explícita del descriptor en el que establecemos la relación entre el modelo de Vinner y el de Van Hiele,* puesto que las preguntas de ese bloque son las que tienen que ver directamente con la duplicidad de imágenes conceptuales.

Observaciones análogas pueden hacerse respecto de los niveles I y II con relación al último bloque de preguntas. Se comprueba que, en efecto, ese bloque discrimina los niveles II y III, pero no el nivel I y el nivel II. Al contrario, las preguntas del primer bloque (en particular, las 2ª, 3ª y 4ª) parece claro que tienen ese efecto separador entre los dos primeros niveles.

Estabilidad del análisis

Estas conclusiones vienen avaladas por la estabilidad del análisis estadístico. En efecto, si se realiza nuevamente el proceso de clasificación de acuerdo con este algoritmo pero partiendo de un criterio diferente (aunque, en todo caso, coherente con nuestro análisis previo de los descriptores establecidos) hay que esperar obtener una clasificación semejante. Así ocurre, por ejemplo cuando se parte del criterio que aparece en la tabla 2 (entre paréntesis figuran los valores del criterio anterior):

Criterio II	Bloque 3.°	Bloque 2.°	Bloque 1.°
Nivel III	≥ 5 (4)	≥ 5	≥ 4 (3)
Nivel II	< 5 (4)	≥ 5	≥ 4 (3)
Nivel I	< 4 (2)	< 4	≤ 3

Tabla 2

pues se obtiene, caso por caso, la misma asignación final a cada uno de los tres niveles. *Esa estabilidad confirma, en definitiva, la propia existencia de los niveles y la eficacia de los descriptores y de la misma prueba,* puesto que la existencia de *tres patrones de respuestas* bien diferenciados es clara.

El estudio de la estabilidad del análisis se completó con un análisis *discriminante,* en el que, estimando el estadístico de *Wilks* y dos funciones discriminantes lineales, de la forma

$$D = B_0 + B_1X_1 + \ldots + B_pX_p$$

(en las que X_i (i=1,...,p) representa el valor de cada variable –en nuestro caso X_i=1 o X_i=0, con la codificación que mantenemos– y B_j (j=0, 1 ,..., p) son los coeficientes que se determinan de forma que difieran *lo más posible* entre los grupos), se obtienen sendas puntuaciones para cada vector y, como consecuencia, una nueva asignación individual a cada grupo. En nuestro caso, se obtuvo un valor de de 0,1128 para la primera función discriminante, y una coincidencia en la asignación a cada grupo en el 97,2% de los casos. Es decir, sólo existió discrepancia con el grupo asignado anteriormente en un total de 13 casos, en los cuales el segundo grupo más probable es el grupo asignado previamente.

Conclusiones

Bajo ciertas condiciones es posible extender el modelo de Van Hiele a *conceptos dinámicos*, es decir, a ciertos conceptos matemáticos cuya complejidad los sitúa curricularmente en los niveles educativos más altos, en los que el *razonamiento* tiene un papel preponderante o exclusivo, frente a las destrezas en cálculos. Esas destrezas algebraicas se corresponden con una *segunda fase* en el desarrollo de esos conceptos y, por sí solas, no garantizan su comprensión. Al contrario, el énfasis en esas cuestiones, propio de una metodología *formalista* (o puramente formal) provoca una duplicidad conflictiva entre el concepto-imagen y el concepto-definición que, en todo caso, impide el progreso a los niveles superiores de razonamiento y, en definitiva, la comprensión misma del concepto.

Ciertamente, la entrevista es el medio idóneo para la determinación del nivel de razonamiento individual y, antes, para la investigación que culmina en la formulación y validación de los descriptores de los niveles. Sin embargo, es posible diseñar pruebas de respuesta múltiple, apropiadas para grupos numerosos de estudiantes cuyos resultados son susceptibles de ser tratados estadísticamente. Ese tratamiento no sólo confirma la descripción de los niveles y la validez de la propia prueba, sino que demuestra la misma existencia de los niveles. Además, al administrarse en grupos diferentes, permite la comparación entre las distribuciones de niveles respectivas lo que, para un mismo concepto, permite establecer conclusiones sobre la eficacia de las distintas metodologías empleadas en cada grupo.

En este sentido, y para conceptos dinámicos como el de *aproximación local* que, en sí mismos, no son visualizables, ciertas técnicas basadas en la utilización frecuente –en todas las fases del proceso de enseñanza y aprendizaje– de programas de cálculo simbólico, facilitan la integración de las imágenes conceptuales y, en todo caso, provocan con mayor frecuencia el progreso hacia el nivel III de Van Hiele.

Bajo ciertas condiciones es posible extender el modelo de Van Hiele a conceptos dinámicos, es decir, a ciertos conceptos matemáticos cuya complejidad los sitúa curricularmente en los niveles educativos más altos, en los que el razonamiento tiene un papel preponderante o exclusivo, frente a las destrezas en cálculos.

José Luis Llorens
Departamento
de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica
de Valencia

Referencias bibliográficas

BURGER, W. F. y J. M. SHAUGHNESSY (1986): «Characterizing the van Hiele levels of development in geometry», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, 31-48.

CORNU, B. (1983): *Apprentisage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat, Univ. de Grenoble.

CROWLEY, M. L. (1987): «The van Hiele model of the development of geometric thought», en NCTM, *Learning and teaching Geometry, K-12 (Yearbook)*, 1-16.

FUYS, D., D. GEDDES y R. TISCHLER (1985): *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (final report)*, Brooklyn College, City Univ. of N. York.

GUTIÉRREZ, A. y A. JAIME (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele», en LINARES y SÁNCHEZ (ed.), *Teoría y práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevilla.

HOFFER, A. R. (1983): «Van Hiele-Based Research», en *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Richard Lesh y Marsha Landau, Academic Press.

LLORENS, J. L. (1993): «Un curso de Matemáticas con DERIVE», *Epsilon*, v. 26.

S-PLUS REFERENCE MANUAL (1991): *v. 3.0. Statistical Sciencies.*

SIERPINSKA, A. (1987): «Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits», *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-387.

TALL, D. O. y S. VINNER (1981): «Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limitis and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, vol 12, n.° 2, 151-169.

VAN HIELE, P. M. (1986): *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

VINNER, S. (1982): «Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent», *Proc. of PME 6, Antwerp*, 24-28.

VINNER, S. (1983): «Concept definition, concept image and the notion of function», *Int. J. Math. Educ. Scl. technol.*, vol. 14, n.° 3, 293-305.

VINNER, S. (1991): «The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics», *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Ac. Pub, 65-81.