SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

n.º 21

FEBRERO

1996

SUMA 21

febrero 1996

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M. J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C./ Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 21

febrero 1996

Los libros de texto, ¿una ayuda para el cambio?

EDITORIAL

Cuando comenzó a experimentarse la reforma, hace ya algunos años, se decía que iban a desaparecer los libros de texto y que los profesores tendrían que construirse el suyo elaborando sus propios materiales de aula. Ya se veía entonces que era una pretensión utópica; a lo sumo los profesores de un departamento, que asuman unos planteamientos didácticos semejantes, y... con muchas ganas de trabajar, pueden ir preparando alguna unidad didáctica cada año, pero de ahí a que elaboren todas las unidades de todos los cursos media bastante trecho. Para ello, además, hubiese sido preciso que se hubiesen publicado y distribuido, preferentemente por parte del MEC, una gran variedad de materiales, con muy diferentes enfoques y con facilidad para su reproducción.

Al establecerse el carácter abierto del currículo, muchas voces alertaron sobre el peligro de que «las editoriales cerrasen el currículo». Sin ir más lejos, en la reforma de los años setenta, el currículo era bastante abierto –tan abierto que los programas de BUP no llegaban a ocupar dos páginas del BOE– y, sin embargo, se llegó a una uniformidad bastante alta, debido a que todos los textos se parecían bastante y en algunos temas con unas interpretaciones no muy de acuerdo con el espíritu de los programas.

Otro interrogante que surgía era saber si los nuevos libros iban a ser como los anteriores, con un mero lavado de cara y la inclusión de unos toques formales para adaptarse a la nueva situación. O, por el contrario, se iban a impregnar del «espíritu» del DCB e incorporaban los cambios fundamentales que se propugnan en él, esto es, si se introducirían los conceptos inductivamente y no deductivamente; si se iba a guardar un *equilibrio entre cálculo escrito, mental y mecánico; si la estimación y aproximación constituirían algo más que una lección; si se iban a suprimir las largas colecciones de ejercicios mecánicos y, en cambio, se proponían verdaderos problemas; si se iba a bascular desde unas matemáticas precisas a unas aproximadas; si la estadística y el azar serían las últimas lecciones –por si no había tiempo–; si se aprovecharía la historia de las matemáticas como recurso didáctico; si...*

En los ya abundantes ejemplos de manuales que han aparecido, al llegar la reforma a la secundaria, encontramos recogidos algunos de estos aspectos pero también carencias o recaídas en viejas fórmulas. Además cabe cuestionarse si autores y editores se han preguntado sobre la coherencia entre los planteamientos didácticos, basados en dejar tiempo a los alumnos para construir sus aprendizajes, lo abultado de las propuestas de contenidos y el tiempo real disponible para la clase de matemáticas...

Ante esta perspectiva, los departamentos de profesores tienen ante sí la difícil tarea de plantearse y dar respuesta a cuestiones como: ¿se elige un libro de texto?, ¿cuál?, ¿qué características se le exigirá?, ¿los contenidos introducidos son compatibles con el tiempo necesario para desarrollarlos con la metodología que se propugna?, ¿cómo se utilizará?... Todo ello será clave para el futuro de la enseñanza y aprendizaje de nuestra materia en los próximos años.

Al integrarse la Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron» en la FESPM, deseamos, desde SUMA y aprovechando este editorial, dar la bienvenida a los nuevos socios y socias –muchos de ellos ya pertenecientes a otras sociedades federadas– y ofrecerles nuestra revista, la suya desde este momento.

SUMA 21
febrero 1996, pp. 5-10

(Educación) Matemática y sentido común*

Cristine Keitel

Sentido común

Sentido común equivale a buen sentido práctico adquirido por la experiencia de la vida y no por un estudio especial.
Oxford Advanced Learners Dictionary (1988).

El mundo de nuestra propia experiencia, nuestra propia realidad, se ha dividido en dos y las reglas que se aplican en nuestro mundo cotidiano no tienen conexiones visibles con las que se aplican en el área científica.
Moscovici (1981).

El término *sentido común* es impreciso. Su significado difiere según las interpretaciones individuales o los distintos entornos culturales; también es traicionado por sus equivalentes en otros idiomas; para los términos *buen sentido* y *sentido común*, la lengua francesa ofrece dos puntos de vista ligeramente diferentes del concepto; en holandés y en alemán los términos *gezond verstand* y *gesunder Menschenverstand*, es decir, razonamiento humano sano, se refieren a su significación como una cualidad innata del ser humano; y el austriaco *Hausverstand* (diferente del término alemán) subraya su orientación práctica *casera*.

El sentido común no es un sentido en el sentido literal. Más bien se le considera basado en la evidencia dada por los cinco sentidos. En el corazón del sentido común hay un proceso de razonamiento lógico y su objetivo es su aplicación. El impacto del proceso de razonamiento es lo que une el sentido común a las matemáticas, pero es el carácter fragmentario del proceso lógico lo que distingue el sentido común de las matemáticas. El sentido común toma, como punto de partida y material de argumentación, evidencias, verdades aceptadas y convenciones, las matemáticas no. El pensamiento matemático considera del mismo modo las implicaciones en ambos sentidos, el sentido común sólo razona en un sentido.

Sin embargo, el sentido común es una herramienta potente, indispensable, una condición *sine qua non* para la supervivencia del ser humano. Gracias a su buen sentido (común), Robinson Crusoe es capaz de reinventar la civilización. Robinson es un paradigma del sentido común como un equipamiento *natural* del hombre. La filosofía y la investigación científica dirigiendo esta referencia *natural*

* Texto de referencia en el 47-CIAEM, celebrado en Berlín en julio de1995. Agradecemos la autorización para su publicación en la revista SUMA.

ARTÍCULOS

del sentido común la une a un *sistema operacional* lleno de percepción, comprensión y razonamiento; o la asocia a actividades humanas fundamentales como *contar, medir, situar, explicar, dibujar* y *fijar*. El sentido común es estudiado aquí como un campo de investigación cognitiva, más a propósito de aspectos formales que a contenidos.

No menos importante de lo que puede ser en una isla desierta, es el impacto del sentido común en la supervivencia de la vida social. El sentido común es el medio con el que un individuo mantiene sus reivindicaciones hacia los demás, y al mismo tiempo negocia el equilibrio entre ellas. El sentido común es la gramática de las relaciones sociales. Y es más: esta gramática no es transmitida como una estructura abstracta, sino que es equipada de toda la *armada* de hipótesis corrientes o socialmente aceptadas, costumbres, creencias, leyes y tabús, conocimiento local, prejuicios y malas concepciones. Pues el sentido común no es sólo una herramienta, sino también el cuerpo más significativo de tradición y convención, conocimiento y valores sociales o culturales. Es el aspecto contenido del sentido común.

Matemática y buen sentido (común)

Históricamente, las matemáticas y el sentido común tienen el mismo origen: abstracción a partir de la acción social, basada en las experiencias y las intenciones sociales comunes. Pero el ámbito y el nivel de abstracción son diferentes, mientras que el sentido común está vinculado al contexto y destinado al uso inmediato, la abstracción matemática, por ser elemento constitutivo de las matemáticas consideradas como teoría científica elaborada, tiende a librarse de todo contexto y la universalidad. La abstracción y la formalización son un objetivo en sí; consideraciones estructurales y reglas formales reemplazan, para la acción, las reglas ligadas a los contenidos. Sin embargo, desde el punto de vista del sentido común, la potencia de aplicación de las reglas abstractas era la característica más convincente de las matemáticas: las matemáticas han sido socialmente reconocidas, principalmente, gracias a sus potencialidades para crear instrumentos potentes para usos muy variados; no sólo para explicar el mundo, sino también para manipular y cambiar la organización social de la vida y la relación humana con la naturaleza.

Mientras a los matemáticos no sólo les concernían la abstracción y la formalización (matematización), sino también el proceso inverso de aplicación y de recontextualización, el sentido común era un medio de juicio y de evaluación; el conocimiento vinculado al contexto comprometía la orientación. Por la separación de las matemáticas de las ciencias naturales y de las preocupaciones humanas, por abandonar los problemas de aplicación y de legitimación así como la responsabilidad social en aras de la especialización, por concentrarse más en los refinamientos formales de herramientas prospectivas universales, las matemáticas y el sentido común llegaron a ser extraños uno con el otro, incluso contradictorios en sus declaraciones y, por lo tanto, el sentido común fue condenado a un plano de inferioridad.

Históricamente, las matemáticas y el sentido común tienen el mismo origen: abstracción a partir de la acción social, basada en las experiencias y las intenciones sociales comunes.

Aplicación y evaluación

Los mecanismos de las matemáticas y de la tecnología, para modelar y presentar nuestro mundo, suelen estar fuera del alcance del juicio y del sentido común. El campo está libre para los profesionales y los especialistas en sus dominios respectivos. ¿Y la responsabilidad? Durante mucho tiempo, el hecho de que el razonamiento unido al sentido común daba un punto de partida para un discurso público sobre las materias de interés común, no ha sido el menor de sus valores; y el discurso público garantizaba evaluación y control. Cuando el sentido común queda relegado como una autoridad en los procesos sofisticados de modelización de las sociedades modernas, el bienestar común ha perdido sus instrumentos de cambio y de juicio más universales. Eso queda plasmado en las aplicaciones matemáticas explícitas y más aún en las implícitas (el término *matemáticas implícitas* se refiere a la transformación de teorías y de modelos matemáticos en tecnologías sociales o materiales: en *algoritmos sociales* como las órdenes militares, las instrucciones de trabajo o las leyes jurídicas, las instituciones de prácticas sociales como la burocracia; todo tipo de máquinas autónomas y de tecnología de la información). Las matemáticas implícitas penetran la vida social en todos los campos y en todos los niveles, su interferencia misma pasa en gran parte inadvertida y, en particular, su utilidad y sus objetivos subyacentes quedan a menudo en la oscuridad. La derrota del sentido común deja la concepción y la instalación de las herramientas matemáticas en la vida social incontroladas y no evaluadas.

No se puede esperar que soluciones al problema del control procedan de los representantes políticos de las sociedades. Éstos adoptan rápidamente las ofertas de los especialistas de las matemáticas implícitas para realizar sus objetivos. Mientras que la política está directamente enfrentada con el papel de las matemáticas en el mundo moderno, las reacciones son más bien inútiles. Pues se suele afirmar que para la salvación del desarrollo tecnológico y del progreso científico –el proyecto de matematización de nuestra sociedad– más conocimiento matemático debería ser adquirido por más personas, no solamente para su éxito profesional sino más bien para su funcionamiento social. Sin embargo, en la realidad, la transformación de las matemáticas y de otros conocimientos expertos en tecnología mantienen verdaderamente una descalificación matemática: lo más, las matemáticas implícitas son creadas, lo menos, las matemáticas explícitas son exigidas y aplicadas.

Conocimiento instrumental versus conocimiento orientativo

La actividad matemática comprende un amplio espectro de requisitos: ¿prevé la sociedad los buenos? ¿Y la sociedad se preocupa, al mismo tiempo, de renovarlos y de la ampliación de los conocimientos matemáticos expertos, y del desarrollo del conocimiento ordinario del sentido común? Mittelstrass propone una distinción entre los tipos de conocimiento: un conocimiento instrumental (*Verfügungswissen*), un conocimiento que se tiene a su disposición y un conocimiento modelizador, o de representación, descrito como el dominio de técnicas y habilidades que pueden obtenerse por una parte sirviéndose tanto de conceptos de la matemática pura como de métodos aplicables, y dirigiendo u orientando por otra parte el conocimiento (*Orientierungswissen*), que está en relación con el meta-pensamiento y los métodos hermenéuticos y caracterizado como heterogéneo, evaluativo, que busca la justificación, las visiones de conjunto, las conexiones, que está afectado por lo normativo y lo significativo, y que apunta en particular a la crítica de ideologías y sus ofertas negativas.

¿Consideramos el sentido común como algo estático, inmóvil y, en consecuencia, pasado de moda en su confrontación con los rápidos cambios de la realidad? ¿Es el sentido común tal vez algo que se renueva con cada generación, con su punto de partida real, sus perspectivas y sus desafíos? Es evidente que, para las operaciones cubiertas por habilidades instrumentales, el sentido común predispone al uso de la calculadora. Lo que debería alimentar el sentido común, debería ser más el *conocimiento orientativo*, en lugar de apoyar las habilidades instrumentales. Curiosamente, la educación matemática hace lo contrario.

La cuestión fundamental podría ser: ¿se debe rehabilitar el sentido común? La educación debería entonces hacer mayores esfuerzos para reforzarlo.

...la educación escolar, y en su seno la educación matemática, es el agente más eficaz de la reproducción del sentido común, sin preocuparse del hecho de que este rol sea aceptado o no.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el sentido común

La relación entre la educación matemática y el sentido común es complicada porque el sentido común infiltra los actos de todos los participantes, los fines y los medios, los contenidos y los métodos en todos sus aspectos y en todos los niveles. Los niños que entran en la escuela están llenos de *buen sentido*, la educación debe, en gran medida, volverlo a poner en su lugar; la educación en todas las disciplinas y la educación matemática, en particular, que está basada en un razonamiento anticipativo, depende mucho de él, y finalmente como resultado de la educación escolar, mientras ningún conocimiento experto sea estudiado (como es el caso de las clases secundarias superiores), alcanzará un estándad *sólido* de un nuevo sentido común.

La educación matemática es una labor social, está afectada por el conocimiento socialmente aceptado y seleccionado para metas y objetivos socialmente determinados. El conocimiento que ha sido aceptado depende del sentido común de la comunidad de matemáticos, de los educadores en matemática y de las personas responsables del sistema educativo. La clase, como parte principal del sistema didáctico, crea relaciones entre las redes de comunicación individuales y colectivos sociales, y entre el conocimiento y la significación individuales y sociales en matemática. En resumen, la educación escolar, y en su seno la educación matemática, es el agente más eficaz de la reproducción del sentido común, sin preocuparse del hecho de que este rol sea aceptado o no. El hecho de que la crisis del sentido común corresponda al ocaso del concepto de educación general no puede ser accidental.

Significación y comunicación en la educación matemática

La comunicación ha sido un prerrequisito necesario en el desarrollo de las matemáticas, y el discurso matemático y meta-matemático, guiado por reglas implícitas y (ciertas) reglas explícitas, ha determinado un código que manifiestamente comunica la significación en matemática. En la educación matemática, el proceso de aprendizaje se reparte en dos niveles con su propio lenguaje. El lenguaje del sentido común familiar sirve de sustrato sobre el que la comunicación matemática específica puede desarrollarse gradualmente.

Pero el lenguaje matemático no es el único que está en un estado de desarrollo, esto se aplica también al lenguaje familiar, y la construcción de significados comienza, en efecto, a partir de estructuras muy provisionales. Confrontando concienzudamente el lenguaje matemático y el lenguaje familiar, la educación matemática ofrece una rara oportunidad de abordar expresamente el sentido común, sus implicaciones y sus limitaciones, incluso a una edad precoz: en las clases de nivel inferior, las discusiones sobre el cero, las fracciones y la división, las operaciones sobre los números negativos, las relaciones entre área y longitud, pueden ofrecer ocasiones favorables para desarrollar la conciencia del sentido común y del lenguaje. La transferencia de fragmentos, del nivel de lenguaje profesional al nivel de sentido común, que suele ser una práctica frecuente en retórica política para intimidar y apartar la oposición, puede servir en niveles más altos para abordar más directamente problemas de *conocimiento orientativo.*

Sentido común y enseñanza de las matemáticas

Es siempre divertido ver cómo los niños desarrollan el sentido común en su vida profesional como alumnos. Aprenden muy pronto a organizar su trabajo, es decir, a evitar la mayor parte de este trabajo; a utilizar todos los tipos de equipamiento técnico posibles (fax para los intercambios de deberes); se hacen psicólogos evaluando a sus profesores por lo que necesitan escuchar y por lo que no pueden soportar. Los niños encuentran materia para desarrollar el sentido común en todas partes, pero el resultado puede ser diferente si la escuela es capaz de asir el proceso y de llevarlo más allá del horizonte limitado de los alumnos, o si los niños lo desarrollan contra la escuela, lo que puede ser, además, una pésima experiencia.

Hasta ahora, demasiado a menudo, en educación matemática, la enseñanza no anima a un desarrollo amplio y vivo del sentido común en conexión con la disciplina, a pesar del hecho de que las matemáticas, con su impacto en casi todos los dominios de la vida moderna, ofrecerían oportunidades particularmente ricas. En lugar de ello, en las matemáticas de la escuela primaria, la actividad que domina sigue siendo la manipulación de las operaciones básicas. Los ejercicios usuales, así como lo que se llama *aplicaciones, tareas contextualizadas,* reducen las matemáticas a un *juego de números*: «encuentra la operación y ejecútala».

Incluso en geometría, la preocupación principal es, por ejemplo, el cálculo del perímetro o del área. En las matemáticas de secundaria, las ecuaciones, las funciones, o los problemas de cálculo diferencial e integral, son pocas veces analizados teóricamente. Incluso el álgebra lineal, para la mayoría de los alumnos en la universidad, consiste solamente en calcular matrices. Una práctica de enseñanza de este tipo, a pesar de que pueda ser similar a un tipo de acercamiento del sentido común por culpa de su falta de ambición hacia la disciplina, no es más que convención y rutina pesada. Es más probable que el sentido común de los alumnos se desarrolle oponiéndose a ella.

Hasta ahora, demasiado a menudo, en educación matemática, la enseñanza no anima a un desarrollo amplio y vivo del sentido común en conexión con la disciplina, a pesar del hecho de que las matemáticas, con su impacto en casi todos los dominios de la vida moderna, ofrecerían oportunidades particularmente ricas.

La transformación didáctica

En opinión de los matemáticos, el objeto matemático en consideración para la enseñanza o el aprendizaje es estructuralmente, pero no cualitativamente, el mismo que en matemáticas. Después la selección *lógica* o *razonable* de los objetos matemáticos, el proceso de *simplificación* o *elementarización*, considerado como un proceso de transformación de objetos matemáticos en objetos de enseñanza y aprendizaje, está considerado como la responsabilidad de los educadores matemáticos. La mayoría de los matemáticos creen que la educación matemática sólo está afectada por problemas del tipo «¿Cómo transmitir los hechos matemáticos importantes a los alumnos?».

El concepto más elaborado de *transposición didáctica* que tiene por meta analizar *la ley* (constitucional) de base de esta transformación, comienza también en las matemáticas (de los matemáticos), y la transposición está comprendida como todo el proceso de selección, de análisis, de reinterpretación y de cambio de los objetos tomados por las matemáticas como objetos de enseñanza y aprendizaje, como tipos de conocimientos que hay que enseñar. Aunque se piensa aplicar este método a todas las matemáticas escolares, su origen de las concepciones de la escuela secundaria es evidente. Sus métodos asociados tienen, en efecto, fuertes tradiciones y apoyos en la didáctica de las matemáticas de las escuelas secundarias, por ejemplo, en Alemania y en Francia. El uso social de las Matemáticas (implícitas y explícitas) no tiene, o tiene poco, espacio en estos métodos, y el concepto de transposición didáctica no lo refleja en nada, no por error, sino en correspondencia con su filosofía explícita o implícita subyacente: un prejuicio académico sobre los valores relativos de disciplina y de conocimiento social, la convicción de que una formación general de conocimiento, concienzuda, por disciplinas, cubre en realidad, completamente y con detalles, todas las necesidades eventuales y las aplicaciones, y el interés por la determinación precoz del pensamiento profesional en la disciplina de las matemáticas (a pesar del hecho de que sólo una escasa minoría llegarán a ser realmente matemáticos profesionales).

El impacto de los cambios sociales

La escolaridad general siempre ha sido orientada hacia la vida profesional futura de los alumnos. Las quejas a propósito del éxito son notorias, pero las metas nunca fueron puestas en duda. ¿Qué significa para las escuelas, el hecho de que un aprendizaje coronado de éxito no conduzca más o menos automáticamente a una carrera profesional? ¿O que esta carrera sólo ocupe un corto espacio de tiempo en la vida? ¿La escolaridad general puede, o debería poder, mantener su orientación dominante hacia la vida laboral? ¿El equilibrio entre el conocimiento y la cualificación está vinculada al sentido común, y los conocimientos disciplinarios afectados? y ¿cómo llegar a entender esto, cuando la movilidad llega a ser una cualidad crucial, cuando un cambio repetido de trabajos durante una vida laboral llega a ser la norma, cuando la vida fuera del trabajo y del empleo está cada vez más y más estructurada matemáticamente?

Estudios comparativos, como por ejemplo el de la OCDE, describen tendencias generales en todos los países industrializados a *volver a definir los dominios de sujetos* y fuertes movimientos para concebir *matemáticas y ciencias para todos.*

La falta de trabajo en las sociedades industriales occidentales es un problema de dimensión relativamente limitada, comparado con el formidable cambio en otras partes del mundo. Los cambios sociales mundiales y la transformación de los sistemas políticos, por ejemplo, en Europa Central y en Europa del Este y en África del Sur engendran cambios y nuevas exigencias para la educación; las matemáticas y las ciencias, como asignaturas escolares, desempeñan casi siempre, un papel importante: en algunos países está puesta una gran esperanza en las matemáticas y en las ciencias de la educación para el desarrollo de la nueva sociedad –*matemáticas y ciencias para todos y para una sociedad democrática,* como en África del Sur– en otros países, como los países de Europa del Este, los cambios sociales ponen en duda el rol tan privilegiado de las matemáticas y de las ciencias de la educación o, por lo menos, piden cambios de sus centros de interés. Educadores en matemática en varios países unen sus esfuerzos para desarrollar métodos de *educación matemática crítica* como base de competencia democrática, movimientos por *la igualdad en educación* abordan especialmente la necesidad de superar las barreras de raza, de sexo y de clase social.

Educadores en matemática en varios países unen sus esfuerzos para desarrollar métodos de educación matemática crítica como base de competencia democrática, movimientos por la igualdad en educación abordan especialmente la necesidad de superar las barreras de raza, de sexo y de clase social.

El impacto de los desarrollos tecnológicos

La aplicación de las tecnologías de información avanzadas en matemáticas y en las matemáticas escolares como, por ejemplo, los sistemas de álgebra simbólica y los logiciales estadísticos, cambia fundamentalmente la definición de los requisitos matemáticos de base. Formas más elementales de tecnologías de la información van adquiriendo una influencia significativa sobre los métodos de enseñanza y el contenido de los programas escolares, por ejemplo los sistemas tutoriales, los constructores geométricos, diversas calculadoras estándar y útiles informáticos, o micromundos informáticos, especialmente concebidos. Es el giro de las matemáticas hacia las matemáticas implícitas que desencadena estas exigencias.

El rol y la influencia de las tecnologías de la información tendrán un impacto crítico para la educación matemática y, mientras tanto, la evolución está suficientemente avanzada para exigir el análisis, la evaluación y la síntesis de las lecciones de un amplio dominio de desarrollos que se hacen muchas veces poco a poco y que se han instalado. Desarrollos recientes en tecnologías cognitivas para la educación matemática deben ser evaluados para identificar y examinar las cuestiones didácticas fundamentales en la concepción y el uso de tales tecnologías, guardando en la mente los cambios sociales descritos anteriormente y las exigencias políticas. Tal labor demanda un método plurisdisciplinar y la interacción de gran número de perspectivas procedentes de tecnologías avanzadas de la información, de tecnologías educativas, de las matemáticas, de la didáctica de las matemáticas, de la epistemología, de las ciencias sociales y de la filosofía.

El aspecto cognitivo y el aspecto epistemológico

El sentido común y sus relaciones con la educación matemática aún no es, hasta ahora, un tema explícito de investigación. Sin embargo, CIEAEM 47 apunta a abordarlo expresamente y a resumir métodos emparentados. Pero hay direcciones de investigación, en particular de investigación cognitiva y de epistemología, que pueden aclarar el tema.

El sentido común ha llegado a ser un objeto de investigación, dentro del desarrollo de la inteligencia artificial, para la construcción de los sistemas tutoriales inteligentes o de programas de aprendizaje interactivos. El sentido común, considerado como una propiedad natural del ser humano, el *sistema operacional del cerebro*, es simulado y analizado de manera que pueda penetrarse y desarrollar formalizaciones nuevas de inteligencias humana y de conocimiento.

El sentido común ha llegado a ser un objeto de investigación, dentro del desarrollo de la inteligencia artificial, para la construcción de los sistemas tutoriales inteligentes o de programas de aprendizaje interactivos.

La investigación cognitiva tiene en cuenta también las nuevas herramientas como nuevos dominios de causas.

Una nueva rama de la investigación en matemática emerge del hecho de que no se puede establecer un puente entre las necesidades de ciertos grupos sociales o de ciertos países y las ofertas de una educación matemática bien establecida: a partir de la hipótesis de base de que el aprendizaje y la comprehensión son esencialmente determinadas por influencias locales, culturales y sociales, varias perspectivas de investigación en educación matemática fueron desarrolladas; éstas difieren más en el fin que en la dirección; por ejemplo, las etnomatemáticas, las feministas, las constructivistas, la perspectiva socio-política, que operan con conceptos como *conocimiento local, construcción social de la significación.* Varios investigadores han observado, en la práctica social, una inteligencia basada en la región, en la cultura y en lo social, que es independiente del aprendizaje escolar. Esta inteligencia puede ser identificada como sentido común. Los estudios de casos de estos investigadores pueden contribuir considerablemente a nuestra comprehensión del sentido común y de su relación con la educación matemática.

El aspecto innovador

El examen de las certezas que uno puede tener sobre el impacto y la eficacia de desarrollos de los programas escolares basados en lo social y lo tecnológico y sobre la dinámica del cambio educativo y pedagógico podría estar basado en experiencias recientes relativas a ensayos innovadores a gran escala, resultando tanto de iniciativas individuales como de una reforma sistemática. Podría considerarse un campo amplio de investigación, desde estudios de casos relativos a innovaciones particulares en contenidos específicos hasta estudios innovadores más globales, de cara a una identificación de los factores clave tanto en el juicio como en la explicación del éxito y del fracaso de la innovación.

- El sentido común no es un tema habitual en educación matemática o en investigación; el encuentro de la Comisión tiene el objetivo de cambiarlo.
- El sentido común, como enriquecimiento de las matemáticas escolares, se refiere al punto de vista de matemáticas para todos.
- El sentido común no es un nivel a adquirir, está fuera de las disciplinas, y no debe ser reemplazado por estudios superiores en matemática.
- El sentido común es un contrapeso a la especialización.
- El desarrollo del sentido común y la educación matemática podrían combinarse para obtener un instrumento potente de conocimiento, orientado para la salvación de la ciudadanía democrática.
- El sentido común tiene humor y espíritu y es por eso un complemento para la escuela.

Cristine Keitel
Freie Universität Berlín

Traducción:
Sixto Romero
Universidad de Huelva
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

SUMA 21
febrero 1996, pp. 11-20

La resolución de problemas. Una revisión teórica

José Lorenzo Blanco

ARTÍCULOS

Según las Orientaciones Didácticas marcadas por el MEC para las Matemáticas de secundaria obligatoria, la resolución de problemas es uno de los ejes vertebradores del área a lo largo de la etapa, por lo que debe estar integrada como una actividad de presencia permanente en el aula. Este artículo es una mirada sobre los aspectos teóricos más relevantes de la resolución de problemas. A partir de una revisión histórica, se examinan los principales modelos propuestos en la literatura. Se completa con un análisis de cierta profundidad sobre la propuesta de Miguel de Guzmán, entendida como síntesis y paradigma de los modelos anteriores.

Introducción

Desde la más remota antigüedad la actividad primordial del matemático ha sido la resolución de problemas. Aunque, como veremos más adelante, desde temprano los matemáticos se han preocupado por la naturaleza de los métodos empleados en su resolución, no es hasta la mitad de este siglo cuando, la reflexión sobre todos los parámetros que intervienen en la misma, no se ha generalizado de forma más unánime.

Convendría, antes de adentrarnos en los avatares de la *heurística* o *heurética,* como tradicionalmente se llamaba al arte de la resolución de problemas, definir de modo preciso algunos términos que vamos a emplear en esta exposición.

El estudio que realizaremos transciende en muchos aspectos el mundo de las Matemáticas, por ello vamos a aceptar una definición de problema muy amplia, que se debe a Bransford y Stein: «Un problema es un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada». Consecuentemente, «resolver un problema consiste en pasar de una situación a la otra».

Las operaciones útiles para la solución de problemas se llamarán *estrategias heurísticas* y aquellas preguntas, pautas o indicaciones dirigidas a centrar la atención del resolutor sobre ciertos aspectos del problema, suelen denominarse *sugerencias heurísticas.*

Se acostumbra llamar *modelo de resolución de problemas* a una doctrina que clasifica y analiza las fases del proceso de resolución de problemas, las sugerencias y estrategias heurísticas, y los distintos aspectos de orden cognoscitivo, emocional, cultural, científico, etc. que intervienen en el proceso.

Perspectiva histórica

Pappus de Alejandría en su famosa *Colección Matemática* publicada el año 320, y en su libro VII que dedicó a su hijo, incluye una serie de obras de autores anteriores con el propósito de que sirviera para adiestrar en la resolución de problemas. Introduce además unas reflexiones propias sobre los procesos de razonamiento que pueden emplearse. Es famosa su explicación del método de análisis-síntesis. Con todo ello se convierte en el primer gran estudioso de heurística que conocemos.

Más de un milenio ha de sucederse para que encontremos matemáticos de talla ocupados del tema. El primero que debemos mencionar es René Descartes (1596-1650), que se propuso encontrar un método universal para la solución de problemas. Proyectó escribir unas «Reglas para la dirección de los ingenios» pero no llegó a concluirlas. A pesar de ello, tras su muerte, reuniendo fragmentos dispersos fueron editadas.

Leibniz (1646-1716) quiso escribir un libro titulado *Arte de la invención* pero nunca lo hizo. Dejó, sin embargo, a lo largo de toda su obra una serie de anotaciones en las que se traslucía su interés por las fuentes de la invención y su funcionamiento.

Hay que avanzar seguramente hasta Bernardo Bolzano (1781-1848) para encontrar una aportación de interés sobre el tema que nos ocupa. Dentro de sus trabajos de lógica dedicó gran atención a la heurística. Con un afán muy de su tiempo, pretendía más que presentar algo nuevo, asentar en términos claros las reglas y los caminos de la investigación.

No es hasta finales del siglo XIX cuando la psicología inicia el estudio sistemático de los procesos de invención. Dewey formula en 1888 un modelo de resolución de problemas que se mantuvo vigente durante mucho tiempo. Según él, las fases del proceso serían:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

No vamos a entrar en la descripción precisa de los modelos por evitar la reiteración de muchos aspectos que son comunes a todos. Posteriormente, realizaremos la revisión detallada de uno de ellos, que supone en cierto modo una refundición de los modelos más importantes, y en él analizaremos con detalle muchos de los conceptos que se van a ir mencionando.

Cabe, sin embargo, referirnos a una cuestión de interés. La diferencia más marcada entre los modelos propuestos para problemas generales y problemas matemáticos está en la inclusión o no de una fase inicial de «identificación del problema». En los modelos matemáticos no está presente, puesto que se supone que los problemas están propuestos desde el exterior y por tanto han sido previamente explicitados. Sin embargo, en otras facetas ello no sucede del mismo modo, y se hace preciso detectar y perfilar la presencia de los mismos. Podemos ilustrar esta fase con un ejemplo mencionado por Bransford y Stein.

El modelo más relevante entre los primeros propuestos se debe a Wallas en su famoso libro The Art of Thought *de 1926. Muchos de los modelos propuestos después le son tributarios.*

Al parecer los hermanos Biro eran correctores de pruebas. Dedicaban mucho tiempo a la búsqueda y corrección de errores tipográficos. Para comunicar estos errores debían utilizar plumas estilográficas, y para no incrementar su número debían hacerlo con mucho cuidado y, por tanto, dedicándole mucho tiempo. Cuando identificaron su problema pusieron las bases de su famoso invento: el bolígrafo. Muchos otros habían pasado por la misma experiencia y habían pensado que era uno más de los inconvenientes de su oficio, nunca habían visto en ello un problema que se podía resolver.

El modelo más relevante entre los primeros propuestos se debe a Wallas en su famoso libro *The Art of Thought* de 1926. Muchos de los modelos propuestos después le son tributarios.

Las cuatro fases de resolución, según Wallas, serían:

1. *Preparación.* Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. *Incubación.* Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar.
3. *Iluminación.* Es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución (el famoso ajá o insight).
4. *Verificación.* Se comprueba la solución.

Como se puede apreciar es una descripción del proceso de invención más que un modelo para el análisis o la instrucción en resolución de problemas, tendencia hacia la que se han ido decantando las propuestas posteriores.

La aparición en 1945 de un librito titulado *How to solve it* del matemático norteamericano de origen húngaro George Polya supuso el nacimiento de una nueva doctrina. A raíz de su publicación un creciente número de matemáticos, lógicos, pedagogos y psicólogos se ha ocupado del tema, asentando con categoría de ciencia independiente lo que ha dado en llamarse *heurística moderna.*

A partir de ese momento se entenderá por heurística el estudio de todas las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas. Eso conlleva considerar cuestiones de tipo emocional, cultural, etc. que hasta entonces no se habían tenido en cuenta.

Polya basa su programa en la idea del *resolutor ideal,* esto es, el sujeto que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución.

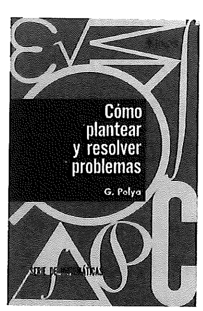
El propósito fundamental del modelo es conseguir que cualquier persona, preferiblemente con la ayuda de un tutor, logre asimilar las técnicas de resolución que se han demostrado efectivas, hasta convertirse en un buen resolutor de problemas.

Para lograr la asimilación de esas técnicas, el alumno debe conocer dos cuestiones fundamentales. La primera es que en la resolución de un problema se presentan cuatro fases, a saber:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
   - Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
   - De no encontrarse una relación inmediata puede considerar problemas auxiliares.
   - Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

La segunda es de índole didáctica. Según Polya el alumno aprende por

La estructura del modelo propuesto por Polya subyace, casi literalmente, en la mayoría de los que se han presentado con posterioridad...



Cómo plantear y resolver problemas. Polya

imitación y práctica, por lo tanto, se debe combinar la orientación del profesor con el empleo personal de las estrategias heurísticas.

La acción del primero se centra en lo que hemos llamado *sugerencias heurísticas,* una serie de preguntas del tipo: ¿qué es lo que queremos determinar?, ¿se han empleado todos los datos?, etc., con lo que consigue que el alumno se fije en ciertos aspectos del problema.

Con el propósito de proporcionar a sus alumnos el más depurado armamento para el ataque de los problemas, Polya expone una detallada relación de estrategias heurísticas.

La estructura del modelo propuesto por Polya subyace, casi literalmente, en la mayoría de los que se han presentado con posterioridad, y que han venido a suponer, en general, una ampliación del estudio a otros campos que intervienen también en la actividad de resolución.

Otro referente básico es el trabajo de Schoenfeld, que divulga en su libro *Mathematical problem solving* (1985) un nuevo programa, basado en el de Polya. Se trata, sin embargo, de un modelo mucho más global, e incluso acompañado por gran número de experiencias que lo validan.

La discriminación de las fases del proceso se basa en la observación del mismo en cientos de individuos. Schoenfeld detecta bloques de conductas homogéneas asociados a una función concreta dentro de la globalidad del proceso.

Con este modelo no se pretende convertir a cada individuo en un resolutor ideal estándar, sino hacerlo mejorar a partir de un doble conocimiento: el de las técnicas consagradas y el de las características del modo en que él mismo se enfrenta a los problemas.

En contra de la idea de Polya, Schoenfeld entiende que el proceso de resolución no es lineal, sino que supone caminos en zig-zag y marchas hacia atrás y hacia adelante, aún así, delimita cuatro fases en el mismo:

1. Análisis.
2. Exploración.
3. Ejecución.
4. Comprobación.

Presenta para cada una de ellas una exhaustiva relación de pautas y estrategias heurísticas. Sin extendernos en ellas vamos a citar las sugerencias, dejando para más adelante una revisión de las estrategias:

Análisis

1) Trazar un diagrama si es posible.
2) Examinar casos particulares:
   a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.

b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.

c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar, la secuencia de valores 0, 1, 2,... y buscar una pauta inductiva.

3) Probar a simplificar el problema:

a) Sacando partido a posibles simetrías.

b) Mediante razonamientos «sin pérdida de generalidad» (incluidos los cambios de escala).

Exploración

1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:

a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.

b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.

c) Introduciendo elementos auxiliares.

d) Replanteando el problema mediante:

- Cambio de perspectiva o de notación.
- Considerando el razonamiento por el contrarecíproco o por contradicción,
- Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

2) Examinar problemas ligeramente modificados:

a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones).

b) Relajar la condición y tratar de volver a imponerla.

c) Descomponer el problema en casos y estudiar uno a uno.

3) Examinar problemas ampliamente modificados:

a) Construir problemas análogos con menos variables.

b) Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.

c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.

d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida

1) ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?:

a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?

b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?

c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?:

a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?

b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?

c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?

d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Otro aspecto muy importante de la propuesta es lo que el autor llama las *categorías de conocimiento y comportamiento matemático*. Son las siguientes:

- *Recursos.* Conjunto de conocimientos matemáticos básicos, precisos para enfrentarse a los problemas de una materia.
- *Heurísticos.* Técnicas generales de resolución.
- *Control.* El modo con que cada persona se maneja en resolución de problemas, los recursos y heurísticos que conoce.
  Esta categoría, una novedad respecto a modelos anteriores, es según el autor la más crítica a la hora de lograr éxitos o fracasos. Por eso, se le concede especial atención y se diseña un programa de mejora del mismo.
- *Belief systems.* (Corrientes de opinión). Según el autor, las opiniones que reinan en nuestro ambiente tienen gran importancia sobre las actitudes que tomamos ante la resolución de los problemas.

Baste quizás recordar la existencia de criterios «estéticos» a la hora de rechazar un procedimiento de resolución, aun antes de que se haya mostrado ineficaz. O un hecho ampliamente comprobado, el que aunque se conozca a fondo una teoría sobre un modelo físico, a la hora de la aplicación en un caso real, tendemos a incluir elementos provenientes de «nuestra experiencia cotidiana», que muchas veces son contradictorios con el cuerpo de la teoría.

El modelo de Schoenfeld ha sido ampliamente aplicado, desde el ajedrez a la electrónica o desde la medicina a la arquitectura. Muchos investigadores en psicología del comportamiento han trabajado sobre él y han desarrollado algunos aspectos que el autor sólo había iniciado.

El modelo de Schoenfeld ha sido ampliamente aplicado, desde el ajedrez a la electrónica o desde la medicina a la arquitectura. Muchos investigadores en psicología del comportamiento han trabajado sobre él y han desarrollado algunos aspectos que el autor sólo había iniciado.

Es el caso de Mason, Burton y Stacey, que en su libro *Pensar matemáticamente* presentan una propuesta que pretende no sólo ser un instrumento de análisis sino de ayuda a la instrucción. Entienden que analizar *a posteriori* el proceso permite retroalimentar nuestra experiencia.

Partiendo de la idea de Schoenfeld sobre la trascendencia del Control en el proceso, proponen la idea de un *monitor*, una especie de tutor interior que desde arriba, sin implicarse, vigila y dirige los procesos, tanto personales como técnicos, que se despliegan en la resolución de problemas.

Dicho monitor puede desarrollarse siempre que demos ocasión al análisis. Los autores proponen la técnica del *rotulado*, como medio de propiciarlo. Se trata de emplear una serie de convenciones simbólicas para describir los momentos claves de la resolución y los estados afectivos que provocan. De este modo, se diferencia entre el proceso mismo de pensamiento y la propia conciencia del proceso.

Este modelo ha tenido gran divulgación, y el cuadro-resumen que presentamos a continuación, tomado del citado libro, puede encontrarse en gran número de libros, trabajos y artículos.

Procesos	Fases	Rótulos	Procesos	Estados
		Lo que SÉ		PRIMEROS CONTACTOS
	Abordaje	Lo que QUIERO		
		Lo que PUEDO USAR		
				ENTRANDO EN MATERIA
Particularizar		ATASCADO ¡AJA!		
				FERMENTACIÓN
		INTENTAR	Conjeturar	SEGUIR AVANZANDO
	Ataque	PODRÍA SER		
		PERO, ¿POR QUÉ?	Justificar	
				INTUICIÓN
Generalizar				MOSTRARSE ESCÉPTICO
		COMPROBAR		
	Revisión	REFLEXIONAR		
		EXTENDER		EN ESTADO CONTEMPLATIVO

A partir de la famosa disertación de Kilpatrick de 1967, se ha ido desarrollando un nuevo concepto, el de *protocolo*. Otros autores como Schoenfeld, Mason, Burton, etc. lo han ido perfilando a lo largo del tiempo. Empleando la desenfadada definición de M. de Guzmán, «el protocolo es el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema».

Entiende la mayoría de los autores que por medio de la realización y el análisis de estos protocolos se realimenta nuestra experiencia y, por tanto, podemos mejorar en nuestro papel de resolutores.

La resolución de problemas es un tema en permanente discusión. Basta comprobar el número de libros que cada año se publican o la ingente cantidad de artículos que nos ofrecen las revistas especializadas. Como sería inabarcable describir todas las vías de investigación y experimentación en este campo, vamos a analizar con detalle uno de los últimos modelos presentados que goza de mayor aceptación. Se trata del propuesto por Guzmán (1991) que recoge las aportaciones más importantes de los principales modelos anteriores.

El modelo de Guzmán

Su propuesta fue completamente desarrollada en el libro *Para pensar mejor*, aunque se ha ido perfilando a lo largo de otras publicaciones anteriores.

Debe entenderse que, aunque respetaremos la estructura expositiva del autor, en el análisis de los distintos aspectos del modelo emplearemos ideas y aclaraciones de otros autores, especialmente de muchos de los que ya hemos mencionado. Respetaremos también el empleo de la primera persona en la exposición y el tono didáctico, que manifiestan la intención del autor de que su propuesta sirva de entrenamiento personal para la mejora en la resolución de problemas.

Actitud inicial. Condicionantes personales y culturales

Para mejorar nuestra cualificación como resolutores debemos, primeramente, ser conscientes de las limitaciones personales y sociales que se hacen presentes a la hora de enfrentarse a los problemas. A partir de ese conocimiento se podrá actuar sobre los lastres que dificultan nuestras actuaciones.

La actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza, la tranquilidad, la disposición para aprender, la curiosidad, etc. Una actitud inicial negativa nos conduce con seguridad a una situación de bloqueo. Aunque un bloqueo debe asumirse como una etapa más de la solución de un problema, la acumulación de ellos puede conducir al desánimo y al abandono de la tarea.

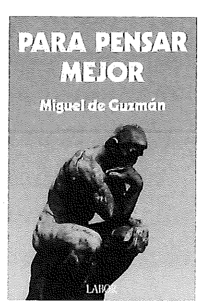
Hay muchos tipos de bloqueos y se debe estar alerta para combatirlos:

a) *Bloqueos de tipo inercial* (surcos de la mente). Nuestro proceder suele acomodarse inconscientemente a unas reglas fijas, ello empobrece nuestra capacidad y reduce nuestras posibilidades de éxito.

   Para superar ese tipo de bloqueos es preciso habituarse a colocarse en posiciones distintas de la nuestra. (Si se es profesor mirar con ojos de alumno, adoptar la perspectiva del hijo si se es padre, etc.).

b) *Bloqueos de origen afectivo.* Hay una amplia gama de sentimientos que favorecen el bloqueo, como la apatía, la pereza ante el comienzo, el miedo al fracaso, la ansiedad, etc. La actuación sobre este tipo de sentimientos no es sencilla. En general, el reconocimiento, la asunción de su existencia suele abrir vías para su superación. Si detectamos un origen justificado, quizás se deba a alguna carencia de nuestra formación que podemos tratar de enmendar. Si su origen no es racional, diferenciando su procedencia podremos, tal vez, reducir sus efectos.

La actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza, la tranquilidad, la disposición para aprender, la curiosidad, etc.



Para pensar mejor
Guzmán

c) *Bloqueos de tipo cognoscitivo.* Cuando tenemos dificultad para percibir el problema, identificarlo, definirlo o desglosarlo en tareas más sencillas, corremos un alto riesgo de derivar en un estado de bloqueo.

   Hay además otras actitudes que suelen conducirnos a la misma situación: una tendencia hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc. En general, estas actitudes suponen una aplicación descompensada de capacidades que empleadas en su justa medida pueden convertirse en una herramienta útil. Este es uno de los aspectos en los que el monitor y sus acciones de control pueden desempeñar un papel determinante.

d) *Bloqueos de tipos cultural y ambiental.* El conjunto de ideas y formas de pensar prevalentes en nuestro ambiente influyen del modo más sutil en nuestro modus operandi. Entran a formar parte de nuestra estructura de pensamiento y dirigen, sin nosotros percibirlo, nuestra actuación hacia zonas que no son siempre fructíferas.

Podríamos mencionar, como ejemplo, las ideas acendradas de nuestro acervo cultural que son erróneas, pero que han mantenido a lo largo del tiempo su predicamento. También lo que Whitehead denominó «ideas inertes», aquellas que tuvieron su virtualidad en algún momento, que la ciencia ha invalidado en ciertos dominios pero que, sin embargo, siguen impregnando nuestro modo de razonar (piénsese en las leyes de Newton sobre la gravitación universal y la teoría de la relatividad).

La actuación sobre estas actitudes nocivas se basa en la detección de las mismas y su postergación en beneficio de ideas más apropiadas.

Protocolo. Retrato heurístico

Si habitualmente no reflexionamos sobre la resolución de los problemas, cuando solucionamos otro similar recaemos en muchos de los caminos sin salida a que nos habían conducido otros. Y así, sólo tras un gran número de repeticiones el proceso comienza a ser ágil, claro y riguroso. Sin embargo, si examinamos a fondo nuestros propios procesos mentales, iremos depurando nuestra técnica de forma mucho más rápida y efectiva.

Para lograrlo el autor recomienda la realización de un *protocolo* del proceso. Posteriormente, deberá proceder a *analizarlo*, *evaluarlo* en sí mismo y, si es posible, en comparación con otros, y finalmente establecer el *tratamiento* sobre los puntos que se hayan detectado menos adecuados.

Un protocolo no es un mero borrador del proceso, sino que debe permitir recuperar todo lo que ha pasado por nuestra mente a lo largo de él, en lo que se refiere a:

- Lo que hemos ido realizando.
- Lo que hemos ido pensando.
- Los sentimientos y situaciones afectivas por las que hemos ido pasando.

Fundamentalmente debe anotarse:

a) La fase del problema en que nos hallamos.

b) Las posiciones afectivas ante el mismo.

c) El estado emocional (aburrimiento, interés, etc.)

d) Los cambios de actividad mental ante el problema.

e) Los orígenes de las posibles ideas que vayan apareciendo en nuestra mente.

Una vez finalizado el protocolo se encontrarán en él dos tipos de anotaciones: las que se refieren al contenido del proceso y las correspondientes a la observación del mismo. El análisis consiste en enmarcar el sentido de cada una de las anotaciones dentro del propio proceso.

Conocernos a nosotros mismos como resolutores nos proporciona la posibilidad de utilizar nuestros propios recursos de forma más eficaz.

La evaluación y el tratamiento están muy relacionados con la fase de «revisión» que veremos más adelante.

Conocernos a nosotros mismos como resolutores nos proporciona la posibilidad de utilizar nuestros propios recursos de forma más eficaz. Los rasgos más característicos de nuestra capacidad heurística conforman lo que ha dado en llamarse el *retrato heurístico*. El mejor mecanismo para obtener un retrato fiel es la realización y el estudio de protocolos, en sí mismos y por comparación con los de los demás.

Dicho autorretrato heurístico debe contemplar, al menos, tres aspectos distintos:

- *Aspectos externos.* Debe responder a preguntas del tipo: ¿En qué momentos y lugares preferimos trabajar? ¿Qué favorece nuestra concentración? ¿Qué es lo que más nos distrae? ¿En qué circunstancias suele surgir la inspiración? ¿Qué postura física solemos adoptar? ¿Cuántas horas de descanso precisamos?, etc.
- *Aspectos afectivos.* Debemos reflexionar sobre: ¿Qué sentimientos se producen al enfrentarnos a un problema? ¿Nos cuesta iniciar la tarea? ¿Tenemos altibajos en el esfuerzo o somos constantes? ¿Nos inclinamos al desaliento o somos tenaces? ¿Qué tipo de trabajos nos gustan y cuáles no? ¿Somos chapuceros o perfeccionistas?, etc.
- *Aspectos cognoscitivos.* Estudiar también: ¿Qué tipos de materias, procesos y tareas son más próximos a nuestra manera de pensar? ¿Tenemos curiosidad por lo desconocido? ¿Nos gusta reflexionar? ¿Nos gusta centrarnos en una sola cosa o en varias a la vez? ¿Cuánta y de que tipo de memoria disponemos?, etc.

Modelo para la ocupación con problemas

Esta propuesta se basa, según confesión del autor, en las observaciones realizadas en su propia actividad, en el intercambio de experiencias con sus compañeros, en la exploración de las formas de pensar de sus alumnos en la universidad y en el estudio de las obras de otros autores.

Para Guzmán la resolución de un problema pasa por cuatro fases:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Desarrollo de la estrategia.
4. Revisión del proceso.

Vamos a proceder a estudiarlas detalladamente, incluyendo las sugerencias heurísticas más adecuadas para cada una de ellas.

Familiarización con el problema

Engloba todas las acciones encaminadas a comprender del modo más preciso posible la naturaleza del problema a que vamos a enfrentarnos.

Las sugerencias heurísticas que el autor ofrece son:

- ¿De qué trata el problema?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué pide determinar o comprobar el problema?
- ¿Disponemos de datos suficientes?
- ¿Guardan los datos relaciones entre sí? Etc.

Búsqueda de estrategias

Se trata de determinar unas cuantas estrategias heurísticas para abordar el problema. No ha llegado aún el momento de aplicarlas, sino de seleccionar, dentro de nuestro archivo de estrategias, cuáles parece que se adecúan más a la naturaleza del problema.

Enumeramos aquí una serie de estrategias heurísticas, las más usuales. Remitimos a las obras de Miguel de Guzmán para un estudio más detallado de las mismas.

— Simplificación. Particularización.

— Ensayo y error.

  - Explorar simetrías.
  - Explorar casos límites.

— Realización de un esquema, una figura, un diagrama o una tabla.

— Organización y codificación.

— Analogía. Semejanza.

— Razonamiento regresivo.

— Reducción al absurdo.

— Técnicas generales.

  - Principio de inducción.
  - El principio de descenso de Fermat.
  - Principio del palomar de Dirichlet.
  - Etc.

— Estrategias específicas de la materia concreta en que se encuadra el problema.

Desarrollo de la estrategia

Momento en el que pasa a aplicarse la estrategia seleccionada. Aquí es de interés tener en cuenta la siguiente relación de sugerencias heurísticas.

- Llevemos adelante las mejores ideas que se nos hayan ocurrido, una a una.
- No hay que desanimarse a la primera dificultad, pero tampoco porfiar si las cosas se complican demasiado.
- Reflexionemos sobre la validez de cada paso.
- Preguntémonos si lo que hemos obtenido es la solución. Estudiémosla a fondo.

Revisión del proceso

Quizás el momento más fructífero sea aquel en que hemos resuelto el problema. Nos volvemos sobre él y sobre nuestro proceso de pensamiento e iniciamos una reflexión, cuya guía puede ser la siguiente serie de sugerencias.

- Examinemos a fondo el camino seguido. ¿Como hemos llegado a la solución? ¿O, por qué no la hemos alcanzado?
- Busquemos ahora un camino más simple.
- Tratemos de entender no sólo que la cosa funciona sino por qué funciona.
- Reflexionemos sobre el proceso de pensamiento y obtengamos consecuencias de él.
- Estudiemos qué otros resultados podríamos obtener con este método.

Para esta cuarta fase es primordial disponer de un protocolo completo de nuestro proceso de resolución.

Tanto el modelo de Schoenfeld como el de Guzmán están, tanto por su origen como por sus principales experimentaciones, ligados al mundo universitario.

Notas finales

Tanto el modelo de Schoenfeld como el de Guzmán están, tanto por su origen como por sus principales experimentaciones, ligados al mundo universitario. A pesar de ello, con alguna corrección, han sido aplicados en otros ámbitos como en las enseñanzas secundaria y primaria.

Conviene señalar a este respecto que bastantes autores entienden que en las enseñanzas no universitarias el desarrollo del *monitor interior* exige un grado de madurez intelectual que no suele encontrarse en los alumnos que cursan esos estudios. Por ello, en la mayoría de las experimentaciones que se han llevado a cabo en estos niveles, ese aspecto ha quedado un tanto relegado cuando no totalmente apartado.

Además de modelos de tipo global, en Matemáticas se han publicado otros referidos a distintos tipos de problemas y ámbitos escolares. Suelen basarse en los modelos ya mencionados, aunque en su adaptación sufren algunas modificaciones. Es el caso, por ejemplo, del modelo de De Corte y Werschaffel para problemas aritmético verbales en la enseñanza primaria.

Bibliografía

ANTÓN, J. L. y otros (1994): *Taller de Matemáticas*, MEC-Narcea, Madrid.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

BRANSFORD, J. D. y B. S. STEIN (1897): *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*, Labor, Barcelona.

BRIHUEGA, J. y otros (1992): *Currículo oficial del Taller de Matemáticas*, MEC, Madrid.

DECA, Grupo (1990): *Didáctica de la resolución de problemas*, Centro de Profesores, Burgos.

GOLDIN, G. A. y C. E. McCLINTOCK (1979): *Task variables in Mathematical Problem Solving*, ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1989): «Los protocolos de resolución en la enseñanza de las matemáticas», *Suma*, n.° 3.

GUZMÁN. M. de (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. de (1988): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. de (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.

HERNÁNDEZ, J. y M. SOCAS (1994): «Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas», *Suma*, n.° 16.

KILPATRICK, J. (1967): *Analyzing the solution of word problems in mathematics. An exploratory study*, Universidad de Stanford. No publicado.

MASON, J., L. BURTON y K. STACEY (1988): *Pensar matemáticamente*, MEC-Labor, Barcelona.

McLEOD, D.B. y V. M. ADAMS (1989): *Affect and Mathematical Problem Solving*, Springer-Verlag, Nueva York.

MEC (1992): *Currículo oficial de Matemáticas en la ESO*, MEC, Madrid.

MEC (1992): *Currículo oficial de los Bachilleratos*, BOE, Madrid.

POLYA, G. (1945): *How to solve it.* (Traducción española, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1976).

POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausibles Reasoning* (2 vols.), Princeton University Press. Princeton, NJ. (Traducción española: *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid, 1966).

PUIG, L. y F. CERDÁN (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

REY PASTOR, J. y J. BABINI (1985): *Historia de la Matemática*, Gedisa, Barcelona.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1984): *Problems with patterns and Numbers*, Universidad de Nottingham. (Traducción española: *Problemas con pautas y números*, Universidad del País Vasco, 1993).

SCHOENFELD, A. H. (1979): «Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem Solving Perfomance», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 10.

SCHOENFELD, A. (1985): *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

José Lorenzo
IES Venancio Blanco
Salamanca

N.° 230.—**Medidas para áridos.** — (Fig. 53). Colección de medidas de hierro para áridos, desde el medio decalitro hasta el decilitro (6 medidas). Precio, 16'50 pesetas.

N.° 231. El decalitro suelto, 11 pesetas.

N.° 232. El doble decalitro (sin asas). Precio, 13'50 pesetas.

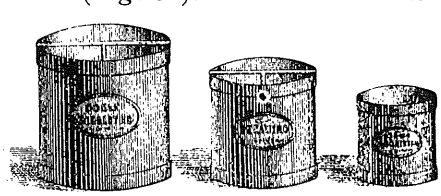


Fig. 53
Pesas y medidas del Sistema Métrico Decimal

Medidas para líquidos. — (Fig. 54). — Colección de medidas de hojadelata, desde el doble litro hasta el centilitro (8 medidas) 7 pesetas.

Núm. 233.—Forma alta.
Núm. 233 A.—Forma baja.

Fig. 54
Pesas y Medidas del Sistema Métrico Decimal

Aparatos de medida
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Secretario General: Luis Balbuena Castellano
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: María Antonia Canals
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Adela Salvador
Apartado de Correos 4051. 28080-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidenta: Rosa Pérez García
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Andrés Marcos García
Facultad de Económicas. Universidad de La Coruña

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Javier Brihuega
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 21
febrero 1996, pp. 21-33

El problema P-S de McCarthy y otros acertijos

Blas C. Ruiz
Francisco Gutiérrez
José E. Gallardo

ARTÍCULOS

Usualmente, los problemas de ingenio (puzles) han sido considerados ejemplos motivadores para la enseñanza de la programación. Muchos autores han defendido el lenguaje PROLOG como un primer acercamiento a la Programación y a las Ciencias de la Computación ya que con un conocimiento elemental de éste se pueden abordar problemas muy sugerentes, como los que estudiamos en este trabajo. Sin embargo, como mostraremos, también puede conseguirse el mismo objetivo con el uso de lenguajes funcionales (no estrictos) modernos, cuyo principal representante, al menos en la comunidad educativa, es *Haskell*

Enunciado del problema

Un problema es elemental cuando su enunciado es comprensible para aquellos que tengan un conocimiento básico de la disciplina (por ejemplo, en matemáticas, la aritmética); la historia de la Matemática aparece profundamente ilustrada con problemas elementales cuya solución necesita de un conocimiento profundo de alguna rama, como la Teoría Analítica de los Números (un ejemplo claro es el problema de Fermat); ello significa que ciertos problemas *elementales* no deben ser despreciados en modo alguno. Veremos pues cómo un problema elemental es resuelto, afortunadamente, con un conocimiento elemental de la Matemática, y con ayuda de un lenguaje (de programación) funcional moderno, cercano a la notación usual del matemático. El enunciado es:

Un árbitro elige dos números distintos entre 2 y 99, calcula el producto y la suma, los escribe en dos papeles distintos, entrega el papel con el producto a una persona PROD y el otro a SUM; dichas personas, después de leer los contenidos de los sobres, mantienen el siguiente diálogo:

PROD.- No puedo adivinar tu suma.

SUM.- Ya lo sabía; yo tampoco puedo adivinar tu producto.

PROD.- !Ajá!, entonces ya sé tu suma.

SUM.- En ese caso, yo también conozco tu producto.

¿Cuáles eran los números elegidos por el árbitro?

El problema anterior fue propuesto por John McCarthy durante una conferencia (Edimburgo, 1979) y ha sido estudiado por numerosos autores, entre ellos David Warren (1981), Antonio Porto (1981) y Martin Gardner (1980), dando los primeros programas escritos en el lenguaje *PROLOG* para su solución. Aunque el problema original es muy interesante, también resultan interesantes

(Hamond, 1995). Exponemos como este lenguaje puede ser utilizado para modelar los conceptos elementales de la Matemática; cada concepto es representado en el lenguaje, y éste sirve de modelo denotacional. Nuestra experiencia avala que, en la mayoría de los casos (aún más si la solución a los problemas debe sugerir cierta extrategia), las soluciones descritas en un lenguaje funcional moderno son más expresivas y convincentes que las obtenidas con las versiones más recientes de PROLOG. Para mostrarlo, resolveremos en el presente trabajo un problema de ingenio, dando una esfrategia hacia atrás para su solución y su implementación en *Haskell.*

otras *versiones* del problema en las cuales un *observador* debe adivinar los datos de dos personas que establecen un diálogo del estilo anterior:

En una urna hay siete bolas, tres de color rojo, dos de color verde y dos de color negro (R,R,R,V,V,N,N); un primer jugador P coge cuatro bolas de esta urna y un segundo jugador S dos; a continuación se entabla el siguiente diálogo:

P.- No puedo adivinar tus colores.

S.- Ya lo sabía; yo tampoco puedo adivinar los tuyos.

P.- Entonces tienes una roja.

S.- Entonces tienes dos negras.

¿Qué combinación de bolas llevan ambos jugadores?

El observador puede utilizar la siguiente estrategia para resolver el problema: representar el *espacio de búsqueda* (todas las combinaciones posibles) y, con cada afirmación, cribar sucesivamente este espacio; se trata de una *estrategia hacia adelante.*

En la primera columna de la figura 1 aparece este espacio completo. De la primera afirmación, el árbitro puede deducir que los colores que tiene el primer jugador son tales que la combinación que puede tener el segundo no es única. Por ello tachamos la primera posibilidad (VVNN-RR). La segunda afirmación se descompone en dos:

(a) *ya lo sabía, y*

(b) *tampoco puedo adivinar los tuyos.*

Por *(a)* el segundo jugador tiene una combinación tal que todas las posibles combinaciones que puede tener el primero tienen varias combinaciones compatibles, por lo que eliminamos RR y todas sus compatibles (si el segundo tuviese RR el primero podría tener VVNN, y en ese caso la primera parte de la segunda afirmación no hubiese podido ser enunciada); *(b)* no elimina ninguna posibilidad. Con la tercera afirmación eliminamos todos los casos en los que alguna de las combinaciones compatibles para el segundo no tenga una bola roja. Por último, con la cuarta afirmación eliminamos la posibilidad RVVN-RN; la única posibilidad que queda (RVNN-RV) es la solución al problema.

El espacio de búsqueda para el problema *P-S* de McCarthy puede verse en las figuras 2 y 3 (con $t = 14$, si los números elegidos por el árbitro verifican $2 \leq x < y \leq t$). Usando la estrategia anterior, tras la primera afirmación, el espacio queda reducido a 31 posibilidades; tras la segunda quedan 4: (18,11), (24,11), (28,11), (30,11); la tercera afirmación no cambia las cosas y tras la cuarta no queda ninguna posibilidad; luego el problema es inconsistente para $t = 14$.

Con objeto de describir una estrategia hacia atrás, veamos en primer lugar una brevísima introducción al lenguaje que utilizaremos (pueden verse otras introducciones en (Bird, 1988; Hudak, 1992; Gallardo, 1995). Posteriormente, describiremos la estrategia hacia atrás, y otros problemas equivalentes; analizaremos seguidamente cómo tal estrategia puede ser traducida a *PROLOG*, para terminar de nuevo con la estrategia hacia adelante.

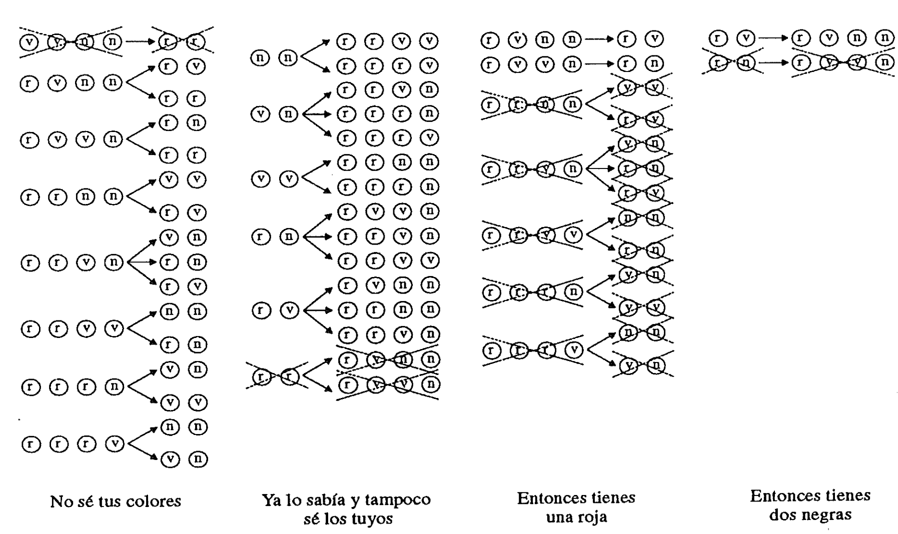


Figura 1. El juego de la urna

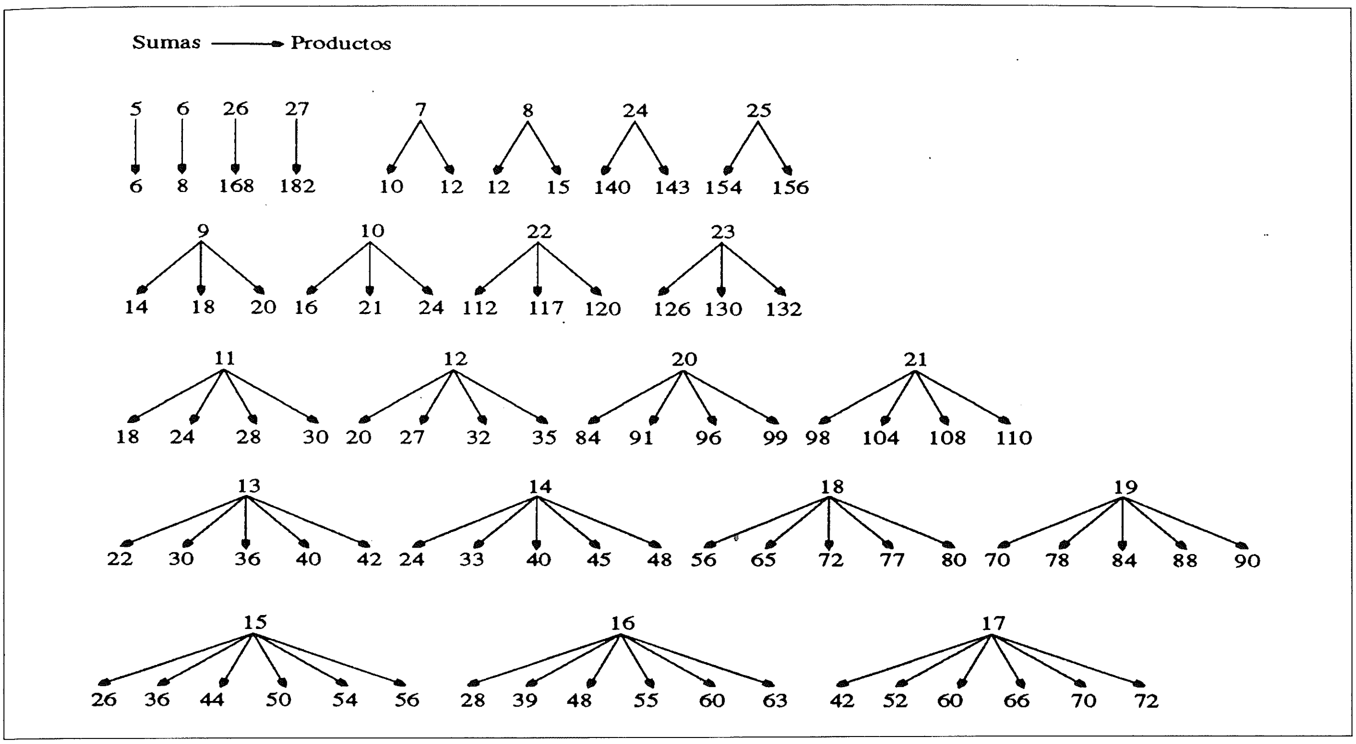


Figura 2. Productos compatibles con cada suma, para t=14

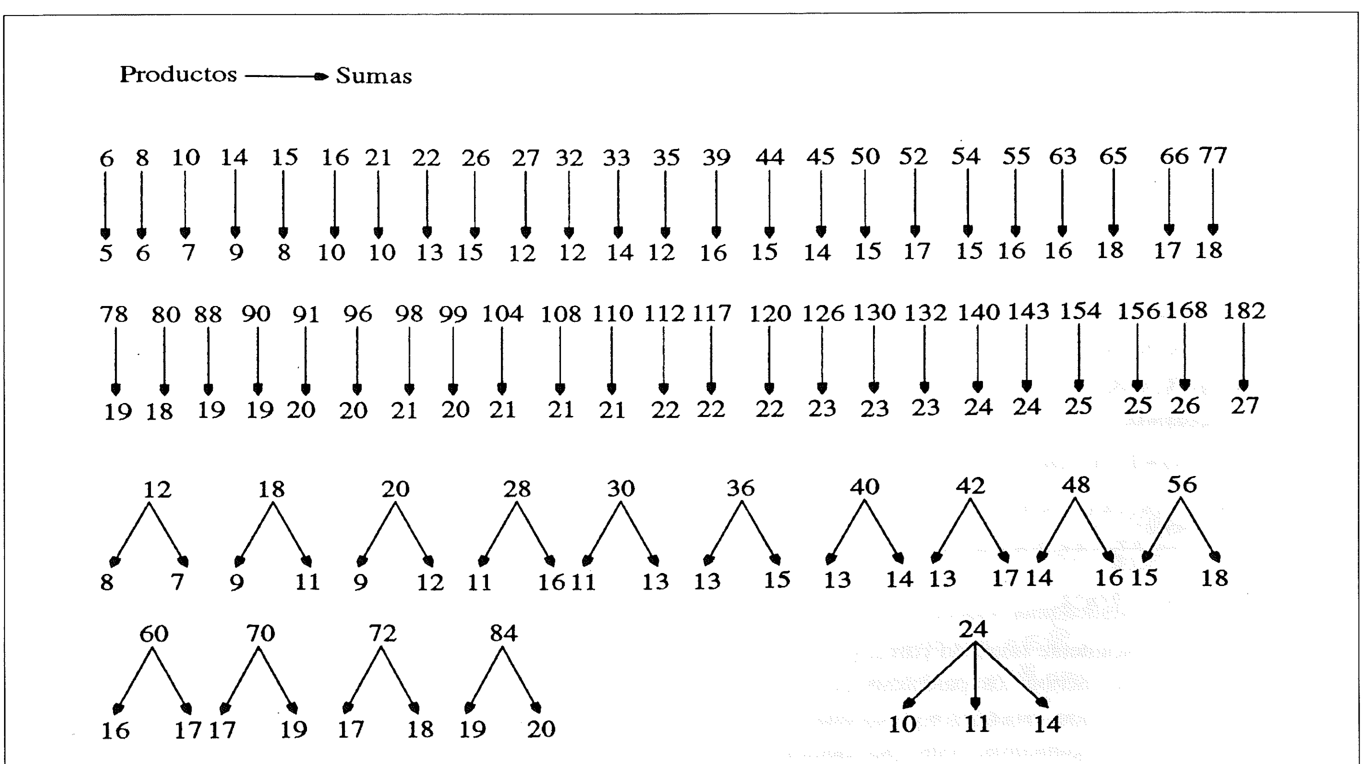


Figura 3. Sumas compatibles con cada producto, para t=14

1. Breve introducción a Haskell

Es usual en la Matemática encontrarnos con notaciones tales como

$$\pi : \mathrm{R}$$
$$\pi = 3.1415925\ldots$$

de forma que π es vista como una función constante. También es habitual encontrarnos con declaraciones de ecuaciones definidas *por partes* tal como

$$f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x \; sen \dfrac{1}{x} & , si \; x \neq 0 \\ 0 & , si \; x = 0 \end{cases}$$

Tales notaciones pueden ser vistas como declaraciones: la primera declara el *tipo* de la función, mientras que la segunda declara el método de cómputo necesario para calcular el valor de la función en cada punto (se trata de una *declaración de ecuación*). *Haskell* permitirá describir tales declaraciones con una notación próxima a la anterior, tanto sintácticamente como conceptualmente. En *Haskell* tenemos la siguiente traducción de las declaraciones anteriores:

```
pi      :: Float
pi      = 3.1415927
f       :: Float -> Float
f x     = x*sin(1.0/x),if x/=0.0
        = 0.0,         if x==0.0
```

Una misma función puede aparecer a la izquierda de varias ecuaciones:

```
not          :: Bool -> Bool
not True     = False
not False    = True
```

y la elección de la ecuación a aplicar se determina por *comparación de patrones* (*pattern matching*). Algo parecido ocurre con la definición típica de la Matemática

$$g : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$$
$$g(0) = 0$$
$$g(x) = 1 / x^2, \; en \; otro \; caso$$

cuya traducción sería

```
g 0.0     = 0.0
g x       = 1.0/x^2
```

Haskell utiliza sistemáticamente notación parcializada, en la cual no es necesario escribir los paréntesis para los argumentos en una aplicación; así (`f(x)` ≡ `f x`). Una función puede tener varios argumentos, como por ejemplo, la siguiente, que calcula el máximo común divisor de dos números:

Haskell utiliza sistemáticamente notación parcializada, en la cual no es necesario escribir los paréntesis para los argumentos en una aplicación...

```
mcd :: Int -> Int -> Int
mcd x y = x,                        if y == 0
        = mcd y (x `mod` y), otherwise
```

cuya ecuación utiliza el nombre de la propia función (recursividad). En este caso hay cierta diferencia entre la notación empleada en *Haskell* para describir una función con dos argumentos y la utilizada en la Matemática.

$$mcd : \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{Z}$$
$$mcd(x, y) = \begin{cases} x & , si \; y = 0 \\ mcd(y, x \; mod \; y) & , en \; otro \; caso \end{cases}$$

Un tipo de datos extraordinariamente útil en programación funcional es la lista (o secuencia), cuya declaración *Haskell* es

```
data [a] = [] | a : [a]
```

Los objetos `[]` y `(:)` son constructores de datos; el primero representará la lista vacía; la declaración anterior se lee: una lista es, o bien la lista vacía `[]`, o bien `a:[a]`, donde `(:)` se interpreta como un operador-constructor infijo (el primer operando es un objeto de tipo `a` –la cabeza de la lista– y el segundo una lista del mismo tipo –la cola). Las listas modelan la descripción de los conjuntos y los *multiconjuntos* de la Matemática. Las siguientes funciones comprueban si una lista es vacía, tiene un solo elemento, o varios, y las restantes `and` y `or` calculan la conjunción y disyunción de una lista de valores lógicos:

```
no_vacia (_:_)      = True
no_vacia _          = False

uno [_]             = True
uno _               = False

varios (_:_:_)      = True
varios _            = False

and []              = True
and (b:bs)          = b && and bs

or []               = False
or (b:bs)           = b || or bs
```

donde los operadores `(&&)` y `(||)` representan la conjunción y la disyunción, respectivamente. Se incluyen distintas formas de expresar una lista:

```
1:2:3: []  ≠ [11,2,3]
[1..]      ≠ [1,2,3,...]
[1,4..20]  ≠ [1,4,7,10,13,16,19]¶
```

Una función muy interesante es

```
map :: (a->b) -> [a] -> [b]
map f []= []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

que no es más que la representación *Haskell* de una función entre conjuntos; por ejemplo, si

$$f: A \to B \ \doteq\ \texttt{f::a->b}$$

(la anterior notación se lee: "f es representada en el lenguaje con la función f"), entonces, si (si $X \doteq \texttt{xs}$), el conjunto f(X) = { $f(x)$ | $x \in X$ } viene representado por `map f xs`. También, en matemáticas usamos sistemáticamente la descripción de *conjuntos por comprensión* en la forma $\{x \mid c\}$, donde c es una expresión que puede denotar un predicado, como $x \leq 100$, un generador como $x \in \mathbb{Z}$, o mezcla de ambos

A = { $g(x)$ | $x \in$ N, $x \leq 100$, x es par }

En forma similar, *Haskell* utiliza una notación para describir tales conjuntos en forma de *lista por comprensión*, a través de la función map; por ejemplo, el conjunto $\{g(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ se representa con `[g x | x<-[0..]]`, que equivale a `map g [0..]`. El anterior conjunto A viene descrito por:

```
a =[g x| x<-[0..], x<=100, par x]
    where par y = y `mod` 2 == 0
```

La función `map` verifica una serie de propiedades interesantes, como por ejemplo `map(f.g)= map f.map g`, donde `(.)` representa la composición de funciones: (f.g)x = f(g x), o también, para listas de booleanos: `or.map not = not.and`.

Si los conjuntos se modelan con listas sin repetición, veamos cómo modelar el cálculo de predicados con cuantificadores dentro del lenguaje; consideremos

...Haskell utiliza una notación para describir [...] conjuntos en forma de lista por comprensión, *a través de la función map*

las siguientes expresiones *Haskell* para modelar el cuantificador existencial (si $X \doteq \texttt{xs}, p \doteq \texttt{p}$)

$$\begin{array}{lll}
\exists x.\, x \in X.\, p(x) & \doteq & \texttt{no_vacia[x|x<-xs,px]} \\
\exists' x.\, x \in X.\, p(x) & \doteq & \texttt{uno\ \ \ \ \ \ [x|x<-xs,px]} \\
\exists'' x.\, x \in X.\, p(x) & \doteq & \texttt{varios\ \ \ [x|x<-xs,px]}
\end{array}$$

También podemos escribir

$$\exists x.\, x \in X.\, p(x) \ \doteq\ \texttt{or[px|x<-xs]}$$

(se demuestra fácilmente) y, podemos traducir directamente el cuantificador $\forall$:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x.\, x \in X.\, p(x) \\
= & \quad \text{!cálculo de predicados} \\
 & \neg(\exists x.\, x \in X.\, \neg p(x)) \\
\doteq & \\
 & \texttt{(not.or)[not(p x)| x <-xs]} \\
= & \quad \text{!def. de listas por comprensión} \\
 & \texttt{(not.or)[map (not.p) xs)} \\
= & \quad \text{!lema0, } \texttt{map(f.g)= map f.map g} \\
 & \texttt{(not.not.and) (map p xs)} \\
= & \quad \texttt{!not.not = id --identidad} \\
 & \text{and } \texttt{[p x| x<-xs]}
\end{array}$$

Es decir, hemos demostrado:

$$\forall x.\, x \in X.\, p(x) \doteq \text{and } \texttt{[p x| x<-xs]}$$

La estrategia hacia atrás

Resolveremos en primer lugar el problema *P-S* original y para ello introducimos algunas notaciones; supongamos que los números x e y elegidos por el árbitro, verifican $2 \leq x < y \leq t$; por consiguiente, un producto p de tales números deberá verificar $6 \leq p \leq t(t-1)$ y, una suma s, $5 \leq s \leq 2t-1$; para tales sumas y productos definimos los conjuntos de compatibles:

$$\oplus p = \{x + y \mid 2 \leq x < y \leq t, xy = p\}$$
$$\otimes s = \{xy \mid 2 \leq x < y \leq t, x + y = s\}$$

Si s $\in \oplus\, p$ escribiremos simplemente $s \oplus p$ y recíprocamente, $p \otimes s$ significará $p \in \otimes\, s$; por consiguiente $\otimes$ y $\oplus$ son dos relaciones sobre $\mathbb{N}$, una inversa de la otra.

Para resolver el problema, consideramos cuatro funciones de conjuntos,

$$V_1, V_2, V_3, V_4 : \mathrm{N} \to 2^{\mathrm{N}}$$

Cada valor posible p del producto de la primera persona (*PROD*) determina un conjunto de valores s, para los que la afirmación *no puedo adivinar tu suma* es cierta

$$\begin{aligned} V_i(p) &= S, \text{ si } card(S) \geq 2, \text{ donde } S = \oplus p \\ &= \varnothing, \text{ en otro caso} \end{aligned}$$

donde *card* denota el cardinal. Obsérvese que $V_1(p)$ es vacío para cada número primo p, ya que éste se descompone de forma única en un producto xy ($1 = x < y = p$) pero tal descomposición no es válida (ya que $x \ngeq 2$); de igual forma, p no puede ser producto de primos. La segunda observación es que si (p,s) es solución, debe tenerse $s \in V_1(p)$, pero no recíprocamente.

Veamos ahora como construir un conjunto

$$V_2(s) = \{p \mid \ldots.\}$$

cuyos elementos sean los posibles productos compatibles con s que certifican la segunda afirmación: *ya lo sabía; además tampoco puedo adivinar tu producto*, que la descomponemos como conjunción de dos:

(a) *ya lo sabía,*
que es independiente de la primera afirmación (puesto que con su suma s, SUM ya sabía que podía afirmarlo), y

(b) *tampoco puedo adivinar tu producto,*
que depende de la primera afirmación

A la condición *(b)* le asociamos el predicado

$$card\{\, p \mid p \otimes s,\ s \in V_1(p)\} \geq 2$$

ya que la suma de *SUM* debe ser alguna de las que *PROD* pensó (en $V_1(p)$ aparecen solamente las múltiples sumas que puede tener el segundo orador); en definitiva, tal predicado viene a decir: como *PROD* dijo la verdad, *SUM* tiene una suma dentro del conjunto $V_1(p)$ ya que la solución debe estar en el conjunto

$$\bigcup_{p=6}^{t(t-1)} \{p\} \times V_1(p)$$

Por el contrario, a no depende de la primera afirmación y viene a decir: *sé que no puedes adivinar mi suma.* Para cierta suma s consideremos la afirmación contraria *puedes adivinar mi suma*; ello significa que debe existir un producto p compatible ($p \otimes s$) con una única suma compatible (que sería precisamente s); y recíprocamente, si existiera un p con una única suma compatible, *PROD* podría adivinar, con tal producto, su suma; es decir, el predicado correspondiente a *puedes adivinar mi suma* es

$$\exists p.\ p \otimes s.\ card(\oplus p) = 1$$

Ahora es fácil escribir el predicado correspondiente a la afirmación *no puedes adivinar mi suma,* con un simple cálculo

$$\begin{aligned} & \neg(\exists p.\ p \otimes s.\ card(\oplus p) = 1) \\ = & \qquad !\ c.\ p. \\ & \forall p.\ p \otimes s.\ card(\oplus p) \neq 1 \\ = & \qquad !\ ya\ que\ p \otimes s \Rightarrow \oplus p \neq 0 \\ & \forall p.\ p \otimes s.\ card(\oplus p) \geq 2 \end{aligned}$$

En definitiva, a la segunda afirmación del diálogo le corresponde el conjunto

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \otimes s, \text{ si } (\forall p.\ p \otimes s.\ card(\oplus p) \geq 2) \\ & \qquad \wedge \\ & \qquad card\{p \mid p \otimes s, s \in V_1(p)\} \geq 2 \\ &= \varnothing, \text{ en otro caso} \end{aligned}$$

Según la conjetura de Christian Goldbach (anunciada en 1742), si s es una suma par se puede descomponer en suma de dos primos x e y, pero el producto xy solo se descompone en esta forma, por lo que si tuviera tal producto el primer orador, sabría su suma; por otro lado, obsérvese que tales sumas quedan excluidas al no verificar el predicado anterior (si p es producto de dos primos, card($\oplus p$)=1).

A la tercera afirmación (*entonces ya se tu suma*) le asociamos otro conjunto

$$\begin{aligned} V_3(p) &= S, \text{ si } card(S) = 1 \\ &= \varnothing, \text{ en otro caso} \\ & \text{donde } S = \{s \mid s \oplus p, p \in V_2(s)\} \end{aligned}$$

y finalmente, a la cuarta afirmación (*y yo tu producto*) le corresponde el conjunto

$$\begin{aligned} V_4(s) &= P, \text{ si } card(P) = 1 \\ &= \varnothing, \text{ en otro caso} \\ & \text{donde } P = \{p \mid p \otimes s, s \in V_3(p)\} \end{aligned}$$

En consecuencia, si Σ_t es el conjunto de sumas posibles

$$\Sigma_t = \{x + y \mid 2 \leq x < y \leq t\}$$

el conjunto de pares que verifican el diálogo es

$$S_t = \{(p, s) \mid s \in \Sigma_t, p \in V_4(s)\}$$

Un programa Haskell

La descripción por comprensión del conjunto S_t es una buena situación de partida para escribir un programa que calcule las soluciones; el único inconveniente es traducir a listas los conjuntos $V_1, \dots, V_4$. En primer lugar veamos la descripción de los conjuntos $\oplus p$ y $\otimes s$

Lema 1. Sea $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$; entonces:

$$(a) \quad \oplus\, p = \{x + y \mid \max(2, \lfloor p/t \rfloor \leq x \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor, (y \equiv \lfloor p/x \rfloor), xy = p, x < y, y \leq t\}$$

$$(b) \quad \otimes\, s = \{xy \mid \max(2, s - t) \leq x \leq \lfloor (s-1)/2 \rfloor, (y \equiv s - x), x \neq y\}$$

Demostración. En primer lugar observamos

$$2 \leq x < y \leq t, xy = p$$
$$\Rightarrow$$
$$2 \leq x, \quad x^2 < xy = p \leq tx$$
$$\Rightarrow$$
$$2 \leq x \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor, \quad \lfloor p/t \rfloor \leq x$$
$$\Rightarrow$$
$$\max(2, \lfloor p/t \rfloor) \leq x \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$$

La descripción de la solución al problema utiliza una técnica muy conocida: la técnica de backtracking *o vuelta-atrás...*

y esto probaría $\oplus p \subset \{\dots\}$; la recíproca es evidente. Para probar *(b)* tenemos

$$2 \leq x < y \leq t, \quad x + y = s$$
$$=$$
$$2 \leq x < s - x = y \leq t$$
$$=$$
$$4 \leq 2x < s = x + y, \quad y \leq t, \quad s \leq t + x$$
$$= \quad !\ x, y \in \mathbb{N}$$
$$4 \leq 2x \leq s - 1, x + y = s, y \leq t, \quad s - t \leq x$$
$$=$$
$$\max(2, s - t) \leq x \leq \lfloor (s-1)/2 \rfloor, y = s - x \leq t$$

de donde $\otimes\, s \subset \{\dots\}$; la recíproca de nuevo es fácil. <c.q.d>

Del lema concluimos que, en nuestro lenguaje, los conjuntos de compatibles vienen descritos por las funciones (`t` es una constante del programa):

```
pro_de s = [x*y|x<-[max 2 (s-t)..(s-1)`div`2],
                y=s-x, x/=y]
sum_de p = [x+y|x<-[max 2 (p`div`t)..sqrt p],
                y = p`div`x, x/=y,y<=t,x*y==p]
```

ya que en las listas anteriores no existen elementos repetidos (*Haskell* no permite variables locales en listas por comprensión, como por ejemplo `y=s-x`, pero sí Gofer (Jones, 1992) , un subconjunto extendido de éste; mantenemos tal notación para simplificar el código). La descripción de las funciones V_1, V_2, V_3, V_4 y S_t es fácil:

```
v1 p = ss, varios ss
     = [], otherwise
   where ss = sum_de p

v2 s = ps, varios [ p | p<-ps, s `elem` v1 p]
          && and [varios(sum_de p) | p<-ps]
     = [], otherwise
   where ps = pro_de s

v3 p = ss, uno ss
     = [], otherwise
  where ss = [ s | s<-sum_de p, p `elem` v2 s]

v4 s = pp, uno pp
     = [], otherwise
  where pp = [ p | p<-pro_de s, s `elem` v3 p]

sol = [(p,s)|s<-[5..2*t-1], p<-v4 s]
```

(`` `elem` `` comprueba la pertenencia de un elemento a una lista). Si utilizamos la conjetura de Goldbach podemos reemplazar la lista `[5..2*t-1]` por la lista de números impares `[5,7..2*t-1]` e incluso podemos eliminar la relación `x/=y` en la función `pro_de`.

La descripción de la solución al problema utiliza una técnica muy conocida: la técnica de *backtracking* o vuelta-atrás, en la cual, la búsqueda de la solución consiste en suponer un valor *s* para una solución *(p,s)* (o sea, una suma dentro de las posibles), y buscar los elementos de la lista `v4 s`; si ésta es vacía (*s* no está de acuerdo con la cuarta afirmación del diálogo) se produce la vuelta-atrás, eligiendo otra suma posible. Igualmente, en la descripción de `v4` se considera la lista

```
[p | p<-pro\_de s, s `elem` v3 p]
```

que se interpreta: «tomar un producto `p` compatible con `s`; si `s` es un elemento de `v3 p`, se tomará, en otro caso se elige otro»; pero tal lista, evaluada en forma perezosa, no debe calcularse completamente: en cuanto el evaluador descubra que hay más de uno dejará de calcular y devolverá la lista vacía. El lector que conozca con cierta destreza el lenguaje *PROLOG*, habrá observado un enorme parecido con la técnica utilizada en éste lenguaje; en el §5 volveremos sobre ello.

3. Revisión de la estrategia hacia atrás

Como puede verse en la función que describe la solución,

```
sol = [(p,s)|s<-[5..2*t-1], p<-v4 s]
```

para cada suma posible, se calcula el correspondiente conjunto `v4 s`, lo que conlleva en general mucho cálculo; se puede agilizar el proceso si tenemos en cuenta las observaciones del siguiente

Lema 2. Con las notaciones de §2,

$$(a)\ V_4(s) \subset V_2(s)$$
$$(b)\ V_3(p) \subset V_1(p)$$

El lema muestra la consistencia de las afirmaciones de los oradores (por ejemplo, *(a)* indica que la afirmación cuarta no contradice a la segunda). También, la propiedad *(a)* muestra que basta buscar las parejas que verifican $p \in V_2(s)$, por lo que la solución puede obtenerse también en la forma

```
sol = [(p,s)|s<-[5..2*t-1],
        no_vacio(v2 s), p<-v4 s]
```

que reduce el cómputo en una proporción del orden de $t/2$. La propiedad *(b)* indica que el conjunto $V_3(p)$ puede obtenerse en la forma

```
v3 p = ss, uno ss
     = [], otherwise
  where ss = [ s | s<-v1 p,
   p `elem` v2 s]
```

(donde hemos sustituido el generador `s<-sum_de p` por `s<-v1 p`)pero, aunque el cómputo de `v1 p` no conlleva demasiado cálculo, en general, es más eficiente la selección desde la lista `sum_de p`, ya que el número de sumas compatibles para un producto dado es pequeño, al contrario que el número de productos compatibles para una suma (como vemos en la tabla 1).

Demostración del lema:

$p \in V_4(s)$

$\Rightarrow$! en este caso $V_4(s) \neq \varnothing$ tiene un elemento

$p \otimes s, s \in V_3(p)$

$\Rightarrow$! también $V_3(p) \neq \varnothing$, con un elemento

$p \in V_3(p)$

La demostración de *(b)* es parecida

$s \in V_3(p)$

$\Rightarrow$! $V_3(p) \neq \varnothing$, con un solo elemento

$s \oplus p, p \in V_2(s)$

$\Rightarrow$! $V_2(s) \neq \varnothing$, y entonces debe darse

$\forall p'.\, p' \otimes s.\ \mathrm{card}(\bigoplus p') \geq 2$

$s \oplus p, card(\bigoplus p) \geq 2$

$\Rightarrow$! $V_1(p) \neq \varnothing$ y $s \in \bigoplus p$

$s \in V_1(p)$

<c.q.d.>

El lema muestra la consistencia de las afirmaciones de los oradores

Puede mejorarse aún más la eficiencia del programa si observamos que en el cómputo de las funciones que calculan los conjuntos V_1, ..., V_4 siempre es necesario evaluar un predicado previo. Para V_1 el predicado es

$$a_1(p) = card(\bigoplus p) \geq 2$$

que se corresponde con la afirmación del primer orador, de forma que el conjunto $V_1(p)$ queda determinado por éste, y el segundo orador evaluaría el predicado

$$\begin{aligned} a_2(s) &= (\forall p.\, p \otimes s.\ card(\bigoplus p) \geq 2) \wedge \\ &\quad card\{p \mid p \otimes s, a_1(p)\} \geq 2 \end{aligned}$$

Para la afirmación tercera podemos intentar el predicado

$$a_3(p) = card\{s \mid s \oplus p, a_2(s)\} = 1$$

de forma que el conjunto $V_4(s)$ es reemplazado por

$$\begin{aligned} W_4(s) &= P, \text{ si } card(P) = 1 \\ &= \varnothing, \text{ en otro caso} \\ &\quad \text{donde } P = \{p \mid p \otimes s, a_3(p)\} \end{aligned}$$

Desgraciadamente, el conjunto

$$S_t = \{(p, s) \mid s \in \Sigma_t, p \in W_4(s)\}$$

contiene pares que no son soluciones, y se observa que las no válidas aparecen porque no verifican el predicado a_2; en ese caso, introducimos tal predicado en el conjunto:

$$S_t = \{(p, s) \mid s \in \Sigma_t, a_2(s), p \in W_4(s)\}$$

Probaremos que los pares así obtenidos son las soluciones; ello será consecuencia del siguiente

Lema 3.

$$\begin{array}{lll} (a) & s \in V_1(p) & \Leftrightarrow\ s \oplus p \wedge a_1(p) \\ (b) & p \in V_2(s) & \Leftrightarrow\ p \otimes s \wedge a_2(s) \\ (c) & s \in V_3(p) & \Leftrightarrow\ s \oplus p \wedge a_3(p) \\ (d) & s \in V_3(p) & \Leftrightarrow\ s \oplus p \wedge a_3(p) \wedge a_2(s) \\ (e) & p \in W_4(s) \wedge a_2(s) & \Leftrightarrow\ p \in V_1(s) \end{array}$$

Antes de la demostración hagamos algunas observaciones; mientras las propiedades *(a)* y *(b)* son equivalencias, las restantes son implicaciones; por ejemplo, para el valor $t = 14$, la implicación recíproca de *(c)* es falsa, ya que $V_3(18) = \{11\}$, $\oplus 18 = \{9,11\}$, $a_3(18)$ es cierto (ver figuras 2 y 3) pero sin embargo $9 \notin V_3(18)$ (esto ocurre porque $a_2(9)$ = *Falso*). Por otro lado, la propiedad *(d)* asegura que toda solución obtenida con

```
sol = [(p,s)|s<-[5..2*t-1], a2 s, p<-w4 s]
```

verifica el diálogo, y recíprocamente. S_t es vacío para valores de t dentro del intervalo $3 \leq t \leq 61$. Para valores en el intervalo $62 \leq t \leq 1681$, dicho conjunto tiene un solo elemento, el par (52,17) que corresponde a $x = 4$ e $y = 13$: el números de *palos* y *cartas* (de cada palo) de la *baraja francesa*. Para valores mayores de t aparecen nuevos pares soluciones; conjeturamos que los pares soluciones de la forma $(2^k, y)$, donde y es un números primo, se conservan al aumentar t. Obsérvese la simpleza del programa resultante con tales predicados

```
a1 p = varios(sum_de p)
a2 s = varios[p|p<-ps, a1 p] &&
          and[varios(sum_de p)|p<-ps]
       where ps = pro_de s
a3 p = uno[s|s<-sum_de p, a2 s]
a4 s = pp, uno pp
     = [], otherwise
       where pp = [p|p<-pro_de s, a3 p]
```

Demostración del lema. (a) es trivial. Para probar *(b)*

$$
\begin{aligned}
& p \in V_2(s) \\
= \quad & \text{! definición de } V_2 \\
& p \otimes s \wedge (\forall p'. p' \otimes s. \, card(\oplus p') \geq 2) \wedge \\
& card\{p' \mid p' \otimes s, s \in V_1(p')\} \geq 2 \\
= \quad & \text{! cálculo, por } (a) s \in V_1(p') \equiv a_1(p') \wedge p' \otimes s \\
& p \otimes s \wedge (\forall p'. p' \otimes s. \, card(\oplus p') \geq 2) \wedge \\
& card\{p' \mid p' \otimes s, a_1(p')\} \geq 2 \\
= \quad & \\
& p \otimes s \wedge a_2(s)
\end{aligned}
$$

Es evidente que *(c')* ⇒ *(c)*; veamos entonces *(c')*:

$$
\begin{aligned}
& s \in \oplus p, \, a_2(s'), \, a_3(p) \\
\Rightarrow \quad & ! \; a_3(p) \equiv card(\{s \in \oplus p, \, a_2(s)\}) = 1 \\
& s = s' \\
\Rightarrow \quad & \\
& \{s' \in \oplus p, p \in V_2(s')\} = \{s\}, \text{ y } s \in V_3(p)
\end{aligned}
$$

Finalmente veamos *(d)*,

$$
\begin{aligned}
& p \in W_4(s) \wedge a_2(s) \\
= \quad & \text{! existe un único elemento en } W_4(s) \\
& p \otimes s \wedge card\{p' \mid p' \otimes s, a_3(p')\} = 1 \wedge a_3(p) \wedge a_2(s) \\
= \quad & ! \, (c') \\
& s \in V_3(p) \wedge card\{p' \mid p' \otimes s, a_3(p')\} = 1 \\
= \quad & \text{! por } (c') \\
& s \in V_3(p) \wedge card\{p' \mid p' \otimes s, s \in V_3(p')\} = 1 \\
= \quad & \\
& p \in V_4(s)
\end{aligned}
$$

<c.q.d.>

4. El problema de Freudenthal

El problema que hemos resuelto es el expuesto en Coehlo (1988), aunque, como demostraremos a continuación, es equivalente al propuesto por Hans Freudenthal en 1969 (ver referencias en Gardner, 1980), cuyo enunciado *original* es:

SUM.- No se cómo vas a adivinar mi suma.
PROD.- !Ajá!, entonces ya sé tu suma
SUM.- Y yo tu producto.

Es fácil comprobar que al diálogo anterior le corresponden los mismos predicados salvo

$$
\begin{aligned}
a_2(s) \quad = \quad & \forall p. \, p \otimes s. \, car(\oplus p) \geq 2 \\
& card\{p \mid p \otimes s, a_1(p)\} \geq 2
\end{aligned}
$$

que es reemplazado por

$$b_2(s) = \forall p. \, p \otimes s. \, card(\oplus p) \geq 2$$

Se observa también que podemos eliminar el predicado $a(p)$ del primer término de la conjunción de a_2 por lo que éste es equivalente a

$$a_2(s) = b_2(s) \wedge card(\otimes s) \geq 2$$

La equivalencia de los dos diálogos será consecuencia de la igualdad de los predicados a_2 y b_2, que a su vez será consecuencia del siguiente

Lema 4. Sea una suma $s \in \Sigma t$ ($t > 5$) con un único producto; entonces $s \in \{5, 6, 2t\text{-}2, 2t\text{-}1\}$. Y recíprocamente, tales sumas tienen un único producto.

A = Número de productos con N sumas compatibles
B = Número de sumas con N productos compatibles

N	1	2	3	4	5	6
A	47	14	1	0	0	0
B	4	4	4	4	4	3

$t = 14$

N	1	2	3	4	5	6	7	...	18	19
A	306	111	38	17	5	1	0	...	0	0
B	4	4	4	4	4	4	4	...	4	3

$t = 40$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	...	28	29
A	685	212	96	36	20	7	4	0	...	0	0
B	4	4	4	4	4	4	4	4	...	4	3

$t = 60$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	38	39
A	1216	347	155	73	42	23	6	3	0	...	0	0
B	4	4	4	4	4	4	4	4	4	...	4	3

$t = 80$

Tabla 1. Número de sumas y productos compatibles

Demostración. Sea $6 < s < 2t\text{-}2$; si s par (= $2k$):

$$6 < 2k < 2t-2$$
$$=$$
$$4 \leq k \leq t-2$$
$$\Rightarrow$$
$$p = (k-1)(k+1) \otimes s, p' = (k-2)(k+2) \otimes s, p \neq p'$$

y para s impar (= $2k$+1),

$$6 < 2k+1 < 2t-2$$
$$=$$
$$3 \leq k \leq t-2$$
$$\Rightarrow$$
$$p = k(k+1) \otimes s, p' = (k-1)(k+2) \otimes s, p \neq p'$$

El recíproco se deduce de $\otimes 5 = \{6\}$, $\otimes 6 = \{8\}$, $\otimes(2t\text{-}1) = \{(t\text{-}1)t\}$ y $\otimes(2t\text{-}2) = \{(t\text{-}2)t\}$ <c.q.d.>

Corolario. Los siguientes predicados son equivalentes

$$b_2(s) \quad = \quad \forall p.\, p \otimes s.\, card(\oplus p) \geq 2$$
$$a_2(s) \quad = \quad b_2(s) \wedge card(\otimes s) \geq 2$$

Demostración. Probaremos que los valores lógicos $b_2(5)$, $b_2(6)$, $b_2(2t\text{-}2)$, $b_2(2t\text{-}1)$, son todos falsos; los dos primeros resultan falsos ya que $\oplus 6 = \{5\}$ y $\oplus 8 = \{6\}$; por otro lado, el producto $t(t\text{-}1)$ sólo admite tal descomposición, ya que

$$p = t(t-1) = xy, 2 \leq x < y \leq t$$
$$\Rightarrow \ !\text{lema } 1$$
$$\max(2, \lfloor p/t \rfloor) \leq x \leq \left\lfloor \sqrt{t(t-1)} \right\rfloor,$$
$$\Rightarrow \ !(t-1)^2 \leq t(t-1) < t^2$$
$$t-1 \leq x \leq t-1$$

Igualmente $\otimes t(t\text{-}2) = \{2t\text{-}2\}$, ya que

$$p = t(t-2) = xy, 2 \leq x < y \leq t$$
$$\Rightarrow \ !\text{lema } 1$$
$$\max(2, \lfloor p/t \rfloor) \leq x \leq \left\lfloor \sqrt{t(t-2)} \right\rfloor,$$
$$\Rightarrow \ !(t-2)^2 \leq t(t-2) < (t-1)^2$$
$$t-2 \leq x \leq t-2$$

Es decir, tenemos

$$b_2(s) \Rightarrow 6 < s < 2t-2 \Rightarrow^{\text{lema } 4} card(\otimes s) > 1$$

<c.q.d.>

El lema muestra a su vez que los apartados correspondientes de los lemas 2 y 3 siguen siendo válidos, por lo que podemos eliminar las funciones `v1` y `a1`, y reemplazar `v2` y `a2` por:

```
v2 s = ps, and [varios(sum_de p) | p<-ps]
     = [], otherwise
        where ps = pro_de s
a2 s = and [varios(sum_de p) | p<-pro_de s]
```

5. Un programa PROLOG

La estrategia hacia atrás descrita, así como sus refinamientos, puede ser utilizada para diseñar programas en el lenguaje PROLOG teniendo en cuenta las siguientes transformaciones (Ruiz 1993, Wadler 1985): (a) reemplazamos cada función de conjunto V por un predicado v cuyo conjunto de éxitos (sustituciones) se identifica precisamente con V, y (b) los predicados se reemplazan directamente. En la figura 4 aparece el programa PROLOG ya traducido (la "`t`" representa la cota máxima).

```
compatible(S,P) :- nonvar(S), !,
                   Xmax is (S-1) // 2, Smt is S-"t",
                   max(2,Smt,Xmin),genera(X,Xmin,Xmax),
                   Y is S-X, Y=\=X, P is X*(S-X).

compatible(S,P) :- nonvar(P), !,
                   Xmax is integer(sqrt(P)), Pdt is P // "t",
                   max(2,Pdt,Xmin),genera(X,Xmin,Xmax),
                   Y is P // X, Y=\=X,Y=<Max,P is X*Y,S is X+Y.

a2(S) :-setof(P,compatible(S,P),L),varios_prods(L).

varios_prods([],_,_) :-!.
varios_prods([P|R]) :- setof(S,compatible(S,P), [_,_|_]),varios_prods(R).

a3(P) :-setof( S,(compatible(S,P),a2(S)),[_]).

a4(S,Psol):-genera(S,5,"2t-1"),a2(S), setof(P,(compatible(S,P),a3(P)),[Psol]).

genera(I,I,_) :- !.
genera(I,L,M) :- L<M, L1 is L+1, genera(I,L1,M).

max(X,Y,X) :- X >= Y,!.
max(_,Y,Y).
```

Figura 4. La estrategia hacia atrás en PROLOG

D. Warren describe otro programa en (Coehlo, 1988) parecido al nuestro, pero cambiando los predicados a3 y a4 en la forma

```
a3(P,S_sol) :- setof( S,
      (genera(S,5,"2t-1"),
      a2(S),compatible(S,P)),[S_sol]).
a4(S,Psol) :- setof(P,a3(P,S),[Psol]).
```

El lector podrá observar la enorme dificultad de su comprensión (¿y su corrección?), aunque resulta más eficiente ya que con el predicado `a3`, a través de `setof`, se recupera *¡en memoria!* todo el espacio de búsqueda correspondiente a la segunda afirmación, por lo que el programa resultante es *técnicamente imperativo*. En el siguiente apartado veremos una solución también técnicamente imperativa, con una eficiencia similar.

La estrategia hacia adelante

De acuerdo a lo expuesto en §0 para el problema de las bolas, podemos programar directamente la *estrategia hacia adelante*; vamos a resolver, por simplicidad, la versión de Freundenthal. La idea es representar el espacio de búsqueda de alguna forma, y filtrar éste espacio sucesivamente y según las afirmaciones. Podemos intentar un espacio de búsqueda de la forma

```
type Suma = Int; type Prod = Int
type EspacioBusqueda = [(Prod,Suma)]
```

Es decir, una lista de pares de posibles soluciones; tal organización no es muy eficiente si tenemos en cuenta que en cierto momento del proceso de criba debemos eliminar las sumas compatibles con cierto producto, o los productos compatibles con cierta suma. Por ello, es más interesante mantener una estructura que facilite la poda; por ejemplo podemos pensar en la estructura:

```
type EspacioBusqueda = [([Prod],Suma)]
```

donde cada suma posible aparece una sola vez, junto con la lista de los productos compatibles con ella, o también

```
type EspacioBusqueda = [(Prod,[Suma])]
```

donde `[Suma]` es la lista de productos compatibles con `Producto`. Se puede observar que, en general, hay más sumas con muchos productos compatibles que productos con muchas sumas compatibles, por lo que la primera representación del espacio de búsqueda es más adecuada, ya que implementando un filtrado especial, nos permitirá mejorar la eficiencia del algoritmo. La generación del espacio de búsqueda inicial será:

```
espacio_inicial :: EspacioBusqueda
espcacio_inicial = [ (pro_de s,s) |
                     s<-posibles_sumas]
```

Debemos ahora cribar según el orden de las afirmaciones:

```
type FiltroP = Prod->EspacioBusqueda->Bool
-- Filtra con afirmaciones
-- del primer jugador
criba_P_con :: FiltroP->EspacioBusqueda
               ->EspacioBusqueda
criba_P_con f es =
 [(ps',s') | (ps,s')<-es,
             ps'=[p|p<-ps, f p es],
             ps' /= []]

type FiltroS = Suma->[Prod]->Bool
- Filtra con afirmaciones del segundo
criba_S_con :: FiltroS->EspacioBusqueda
               ->EspacioBusqueda
criba_S_con _ []=              []
criba_S_con f ((ps@(p:ps'),s):es')
   = (ps,s):criba_S_con f es', if f s ps
   = criba_S_con f es',        otherwise
```

La función `criba_P_con` aplica el filtro para cada suma y cada producto compatible de la lista. Sin embargo, `criba_S_con` aplica el filtro para una suma, y si no se cumple, elimina del espacio de búsqueda dicha suma junto con todos sus productos compatibles en una sola vez. Los filtros para las distintas afirmaciones serán:

```
f3    :: FiltroP
f2,f4 :: FiltroS

f2 s es =
 and [varios(sum_de p es) | p<-pro_de s es]
f3 p es = uno (sum_de p es)
f4 s es = uno es
```

donde las funciones pro_de y sum_de ahora tienen un tercer argumento (el espacio de búsqueda):

```
sum_de p es = [s | (ps,s)<-es, p `elem` ps]
pro_de s es = [p | (ps,s')<-es, s'==s, p<-ps]
```

La solución al problema será:

```
      sol = criba_S_con f4 . criba_P_con f3
            criba_S_con f2 espacio_inicial
```

6. Otros acertijos

Otro tipo de problemas más complejos son aquellos acertijos en los cuales el número de personas que intervienen es mayor (tres o cuatro personas), cada una ve algunos datos de los restantes (pero no el suyo). Ejemplo de ello es la siguiente variante del *problema de los sombreros* (un curioso problema atribuido a J.Sebelik, 1983):

Tres personas -SEBELIK, PACO y BLAS - se encuentran en una habitación, de forma que SEBELIK ve a PACO y a BLAS, y PACO ve sólo a BLAS (BLAS -como casi siempre - no ve nada). En una mesa de otra habitación hay cinco sombreros, dos negros y tres blancos. Se apaga la luz; un "árbitro" toma tres sombreros de la mesa y los coloca en las cabezas de *las personas; después de encender la luz, se escucha el siguiente diálogo:*

SEBELIK.- Yo no se el color de mi sombrero.

PACO.- En ese caso, ya sé el color del mío.

¿De qué color es su sombrero?

Otra variante del problema es para cuatro personas:

SEBELIK, PACO, PEPE y BLAS, (SEBELIK ve a todos, PACO también ve a todos, PEPE ve solo a BLAS, y, de nuevo, BLAS no ve nada); los sombreros ahora son dos blancos, uno negro, uno rojo y uno verde, y el diálogo es

SEBELIK.- Yo no sé el color de mi sombrero.

PACO.- En ese caso, yo tampoco.

PEPE- ¡Ajá!, ya sé el color del mio.

El lector puede comprobar que las técnicas descritas anteriormente son fácilmente generalizables a tales problemas; algunos de los resultados demostrados anteriormente seguirán siendo válidos con ligeros retoques.

7. Conclusiones

En este artículo hemos visto como un lenguaje funcional moderno puede ser utilizado para describir la solución a problemas de forma próxima a la notación del matemático. Ciertas conjeturas derivadas de la ejecución del programa con ligeros cambios conducen a un estudio detallado de éstos; y viceversa, un estudio detallado de la formulación matemática del problema permite una descripción eficiente de la solución. Esta fuerte conexión ayuda a los alumnos a considerar las *Ciencias de la Computación* como una disciplina dentro de *la matemática.*

Blas C. Ruiz
Francisco Gutiérrez
José E. Gallardo
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación.
Universidad de Málaga

8. Referencias bibliográficas

BIRD, R. y R. WADLER (1988): *Introduction to Functional Programming*, Prentice-Hall.

COELHO, H. y J. C. COTTa (1988): *Prolog by example*, Springer-Verlag.

GALLARDO, J. E., P. GARCÍA, F., GUTIÉRREZ y B. RUIZ (1995): *Programación Funcional en Haskell*, Universidad de Málaga.

GARDNER, M. (1980): «Juegos Matemáticos», Investigación y Ciencia, Febrero, Abril y Julio.

HAMMOND, K. (Editor) (1995): *Report on the Programming Language Haskell, A Non-Strict Purely Functional Language, Version 1.3.*

HUDAK, P. y J. H. Fasel (1992): «A Gentle introduction to Haskell». *SIGPLAN*, 27, 5.

JONES, M. (1992): *Gofer 2.28. Release Notes,* Technical Report, Dep. Comp. Science, Yale Universiy.

RUIZ, B. (1993): «Programación funcional á là Prolog», en *Actas de PRODE'93*, Gerona.

WADLER, P. (1985): «How to replace failure by a list of successes», *2'nd Symposium on Functional Programming Languages and Computer Architecture*, Nancy.

REGLAMENTO DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA DE LA FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

(Aprobado en Junta de Gobierno celebrada el 13 de septiembre de 1995)

1. La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizará anualmente una Olimpiada cuyo nombre oficial es: *Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.*

   El logotipo será el que fije la Federación.

Sobre los objetivos

2. Se pretende conseguir los siguientes objetivos:
   a) Potenciar la participación masiva de estudiantes y profesores en las fases previas al encuentro nacional, de acuerdo con los objetivos propuestos en los Estatutos de la Federación.
   b) Fomentar entre los estudiantes el gusto por las Matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementaria a la utilizada en el aula.
   c) Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas comunidades autónomas.

Sobre la organización

3. La Junta de Gobierno de la Federación encomendará la organización de cada edición a alguna de las sociedades federadas.
4. La sociedad que asuma la responsabilidad de organizar la Olimpiada propondrá a la Junta de Gobierno el nombramiento de un coordinador de la misma.

5. Los logotipos de la Federación y de la Olimpiada figurarán en todos los impresos y propaganda que se haga.
6. Por problemas de organización, las sociedades participantes deberán respetar los plazos que fije la Junta de Gobierno a propuesta del coordinador de la Olimpiada.
7. El programa de la Olimpiada contemplará la realización de una reunión de coordinadores nombrados por las sociedades.

Sobre los participantes

8. Participarán en la Olimpiada Matemática Nacional un número de estudiantes pertenecientes a distintas comunidades que será fijado por la Junta de Gobierno.Estos serán seleccionados entre los que hayan participado en fases previas organizadas por las sociedades federadas.
9. Cada grupo acudirá con uno o más acompañantes según fije la Junta de Gobierno. En ningún caso podrán ser profesores o familiares de los alumnos participantes.
10. La Junta de Gobierno podrá invitar a esta fase a estudiantes que hayan participado en fases previas organizadas por otras entidades o grupos de profesores. estos deben solicitarlo a la Junta de Gobierno, la cual le fijará un cupo de participantes, debiendo asumir la entidad invitada los gastos que genere su participación.
11. Participarán alumnos que estén matriculados durante ese año en el 8.° nivel de EGB o en el 2.° de Enseñanza Secundaria Obligatoria.
12. Los participantes deberán cumplimentar aquellos documentos que se les soliciten, en particular:
    a) Permiso familiar para su participación.
    b) Seguro de enfermedad.
    c) Consentimiento propio.
13. Cada prueba no puede durar más de dos horas.
14. Debe existir al menos una prueba individual y otra por equipos.
15. Los problemas que se propongan deben tener al menos las siguientes características:
    a) Que no sean ejercicios estrictamente mecánicos.
    b) Que alguno tenga un cierto grado de dificultad, mientras otros deben poder ser resueltos por la mayoría.
    c) Que la redacción sea totalmente clara evitando interpretaciones, salvo que ese sea el objetivo.
16. El coordinador, que formará equipo con los coordinadores de las fases previas, será el responsable de proponer el contenido de las pruebas, así como de fijar los criterios de corrección, debiendo realizar cuantas consultas estime conveniente antes de tomar la decisión final. También fijará los premios que se otorgarán.
17. El coordinador recopilará toda la información precisa para la publicación de un libro dedicado a la Olimpiada.

Otras actividades

18. El coordinador puede organizar otro tipo de pruebas o actividades, a demás de las anteriores, (talleres, conferencias...) si lo estima conveniente y siempre que no se recargue en exceso el horario de los participantes.
19. Se considera de alto interés las actividades de ocio, recreativas y culturales, así como las de convivencia. Por ello el programa debe contemplar estos aspectos.

Sobre la duración

20. Aunque este aspecto dependerá de la sociedad organizadora y de los medios que consiga, se aconseja que dure entre 3 y 5 días (excluyendo el traslado), preferiblemente en el mes de junio.
21. El calendario de la actividad será elaborado y presentado, para su aprobación, a la Junta de Gobierno por el coordinador.
22. La Federación publicará cada año un libro que recoja las pruebas (tanto de las fases previas como de la nacional), soluciones interesantes ofrecidas por los participantes, lista de participantes y coordinadores, etc. Las pruebas se publicarán en la lengua en la que se realicen.

Sobre la financiación

23. Teniendo en cuenta la especificidad de la Sociedad Canaria, la Federación financiará los gastos de traslado a partir de las 20.000 pta/persona.
24. La Federación adelantará a la sociedad organizadora una cantidad cuya cuantía fijará en cada caso.

Sobre la liquidación

25. En la primera Junta de Gobierno que se celebre, tras la finalización de la Olimpiada, el coordinador de la misma presentará un informe sobre su desarrollo y financiación, así como aquellas sugerencias que le indique su experiencia y que puedan mejorar siguientes ediciones.

Sobre la interpretación de este reglamento

26. Cualquier decisión que modifique o contradiga lo que se establece en este reglamento debe ser consultada a la Junta de Gobierno o, en su defecto, a la Secretaría General la cual dará respuesta tras las consultas que estime necesarias.

SUMA 21
febrero 1996, pp. 35-39

La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de cambio y comparación

Jaime Martínez Montero
Manuel Aguilar Villagrán

ARTÍCULOS

El presente informe aporta datos experimentales que justifican que la categoría semántica de *igualación*, dentro de las estructuras aditivas, es sustancialmente distinta a las de *cambio* y *comparación*. Al hilo de los resultados, se ofrecen pautas para la secuenciación de los PAEV aditivos.

Introducción

Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV en adelante) de una etapa estructurados en función de categorías semánticas tienen una aparición reciente en la literatura científica. El trabajo de Puig y Cerdán (1988) los divulga en nuestro país, y un panorama abreviado de los mismos se puede ver en Bethencourt (1994). Una división típica de estos problemas ha sido considerarlos agrupados en dos grandes estructuras: aditivas y multiplicativas. Los problemas de *cambio, comparación* e *igualación*, así como los de *combinación*, estarían comprendidos dentro de las estructuras aditivas.

No todos los autores contemplan la categoría de *igualación* con entidad suficiente como para darle personalidad propia. Los trabajos de Heller y Greeno (1978), Nesher y Katriel (1978), Nesher, Greeno y Riley (1982), y De Corte, Verschaffel y De Win (1985) estarían entre ellos. Para ellos, la categoría de *igualación* habría que considerarla como un híbrido de las de *cambio* y *comparación*. Sin embargo, y de acuerdo con otros autores (Carpenter y Moser, 1982 y 1984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981 y 1983; Fuson, 1992 y Martínez Montero, 1995) *igualación* tendría características propias.

El presente trabajo quiere establecer la necesidad de considerar la categoría de *igualación* como distinta de las de *cambio* y *comparación*, añadiendo evidencias empíricas a los datos que, en este sentido, ya obran en la literatura científica.

Planteamiento general

Las diferencias existentes entre las categorías de *cambio* y *comparación* y la de *igualación* se pueden poner de manifiesto desde dos perspectivas:

a) La modelización de las situaciones de igualación con materiales concretos es distinta a las de cambio y comparación. Respecto a la primera, presenta inicialmente dos cantidades, mientras que cambio sólo presenta una. Respecto a la segunda, la resolución de la situación planteada no requiere nuevos materiales, mientras que sí es esencial tal aporte en el caso de que la situación sea de igualación. Por todo ello, presenta una diferencia fundamental respecto a cambio en la situación inicial, y respecto a comparación en la situación final.

b) No hay una relación entre los diversos tipos de problemas identificados con el mismo dígito dentro de las diversas categorías. Por decirlo de una forma breve, los niveles de dificultad de cada uno de los tipos de problemas que componen cada una de las categorías semánticas en cuestión o no se corresponden o, al menos, no lo hacen en los aspectos fundamentales de la lógica interna que les sirve de construcción.

El argumento correspondiente a la primera perspectiva no requiere de mayores demostraciones. Sí, sin embargo el correspondiente a la segunda. Para poner esto en evidencia, se han pasado a un conjunto de 172 alumnos de los cursos 3.° (50 alumnos), 4.° (57 alumnos) y 5.° (65 alumnos) de primaria, pertenecientes a un colegio público de Cádiz, una batería de problemas que contenía los seis tipos distintos de que consta cada una de las categorías.

En la elaboración de los textos de los problemas se han controlado las variables de contenido sintáctico (proposiciones que lo componen, número de palabras, vocabulario empleado, complejidad sintáctica), de contexto (formato de presentación, contexto verbal y formato de la información), de contenido (tópico, campo de aplicación, contenido semántico y elementos del problema) y de estructura (véanse Castro Martínez, 1991, y Webb, 1980). Los problemas propuestos a los alumnos se reflejan en los cuadros adjuntos.

Los diversos problemas adoptan dos formas, que requieren exigencias distintas en las respuestas de los alumnos. En una de ellas los problemas aparecen formulados con números muy pequeños (menores de diez), y son de respuesta libre. En la otra se presentan con números grandes, siendo la respuesta exigida de elección múltiple entre cuatro alternativas (las cuatro operaciones básicas). Esta última opción se encuentra apoyada por múltiples investigadores (Bell y otros, 1983; Fischbein y otros, 1985; Vergnaud, 1983 y 1988; Greer, 1987; etc.), puesto que permite diferenciar en una solución incorrecta del problema cuándo ésta se deba a una mala elección de la operación o a un simple error de cálculo (que no es el asunto que está en cuestión).

La modelización de las situaciones de igualación con materiales concretos es distinta a las de cambio y comparación.

PROBLEMAS DE CAMBIO

1G. Daniel tiene 156 pesetas. Su padre le da 125. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

1P. Tenía 4 pesetas y me dieron 3. ¿Cuántas tengo ahora?

2G. Tenía 248 pesetas. Me gasté 115. ¿Cuántas pesetas me quedaron?

2P. Daniel tiene 8 pesetas. Se gasta 3. ¿Cuántas pesetas le quedan?

3G. Tenía 58 cromos. Después de jugar tenía 97. ¿Cuántos cromos gané?

3P. Tenía 4 pesetas. Mi madre me da dinero. Ahora tengo 9 pesetas. ¿Cuántas pesetas me ha dado mi madre?

4G. Tenía 153 pesetas. después de comprar caramelos me quedaron 94 pesetas. ¿Cuánto dinero me gasté?

4P. Tenía 7 cromos. Después de jugar me quedan 2. ¿Cuántos cromos he perdido?

5G. Mi tío me da 125 pesetas. Con las que tengo reúno 217. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?

5P. Mi tío me da 4 pesetas. Ahora tengo 7. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?

6G. Andrés pierde jugando 43 cromos. Le quedan 72. ¿Cuántos cromos tenía antes de jugar?

6P. He perdido jugando 3 cromos. Me quedan 5. ¿Cuántos tenía cuando empecé a jugar?

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

1G. En el colegio hay 264 chicas y 234 chicos. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?

1P. En una tienda trabajan 5 hombres y 2 mujeres. ¿Cuántos hombres más que mujeres trabajan en esa tienda?

2G. Inés tiene 162 cromos. María tiene 144. ¿Cuántos cromos menos tiene María?

2P. Tengo 5 primos y 2 primas. ¿Cuántas primas menos que primos tengo?

3G. La clase de 3.° tiene 164 libros. La clase de 2.° tiene 32 libros más que la clase de 3.° ¿Cuántos libros tiene la clase de 2.°?

3P. Tengo 6 pesetas, mi hermano tiene 3 más que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?

4G. Tengo 262 pesetas. Mi hermano tiene 18 pesetas menos que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?

4P. Juani tiene 6 libros. Ana tiene 2 menos que ella. ¿Cuántos libros tiene Ana?

5G. En el colegio hay 264 chicas. Hay 39 niñas más que niños. ¿Cuántos niños hay?

5P. Tengo 6 lápices de colores. Tengo 4 más que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos tengo?

6G. En la clase hay 238 lápices de colores. Hay 53 lápices menos que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos hay?

6P. En un equipo hay 3 niñas, y hay 2 niñas menos que niños. ¿Cuántos niños hay en ese equipo?

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

1G. Juan tiene 259 pesetas. Andrés tiene 293 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene que tener Andrés para tener las mismas que Juan?

1P. María tiene 5 cromos. Inés tiene 3. ¿Cuántos cromos más debe tener Inés para que tenga los mismos que María?

2G. Inés tiene 162 cromos. María tiene 144. ¿Cuántos cromos tiene que perder Inés para tener los mismos que María?

2P. Nicolás tiene 7 pesetas. Roberto tiene 5. ¿Cuántas pesetas se tiene que gastar Nicolás para tener las mismas que Roberto?

3G. El Real Madrid ha marcado 89 goles. Si el Zaragoza marcara 22 goles más tendría los mismos que el Real Madrid. ¿Cuántos goles ha marcado el Zaragoza?

3P. Rocío tiene 5 chicles. Si a Natalia le dan 2 chicles tiene los mismos que Rocío. ¿Cuántos chicles tiene Natalia?

4G. En una tienda de chucherías hay 168 chicles. Si venden 23 caramelos quedan los mismos chicles que caramelos. ¿Cuántos caramelos hay?

4P. Hay 5 sillas en el dormitorio. Si del salón quitaran 3 sillas quedarían las mismas que en el dormitorio. ¿Cuántas sillas hay en el salón?

5G. Tengo 126 cromos. Si me dan 53 tengo los mismos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

5P. Yo tengo 1 peseta. Si me dieran 3 más tendría las mismas que Lidia. ¿Cuántas pesetas tiene Lidia?

6G. Tengo 212 pesetas. Si me gasto 34 me queda el mismo dinero que a Jaime. ¿Cuánto dinero tiene Jaime?

6P. Tengo 6 caramelos. Si doy 2 me quedo con los mismos que Luis. ¿Cuántos caramelos tiene Luis?

...para establecer el índice de dificultad de cada uno de los problemas se descuenta el porcentaje de los mismos que han sido bien resueltos con números grandes, pero mal resueltos con números pequeños.

Resultados

De forma previa a la exposición de los mismos, queremos destacar el papel jugado por los problemas formulados con números muy pequeños. Éste consiste en modular los resultados obtenidos en los expresados con números grandes descontando en buena medida la influencia del azar en la elección de la operación. El fundamento es sencillo: se puede establecer que si un alumno no sabe resolver un problema con números muy pequeños cuya manipulación no requiere el empleo de operaciones, tampoco sabrá resolver el mismo problema si además requiere las destrezas añadidas de elegir la operación y saber efectuarla.

Por ello, para establecer el *índice de dificultad* de cada uno de los problemas (o porcentaje de aciertos en la resolución de los mismos) se descuenta el porcentaje de los mismos que han sido bien resueltos con números grandes, pero mal resueltos con números pequeños. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Tipos	*Cambio*	*Comparación*	*Igualación*
Tipo 1	72,2	50,0	47,9
Tipo 2	81,9	74,7	72,8
Tipo 3	39,8	62,0	45,6
Tipo 4	68,1	72,3	26,5
Tipo 5	53,8	38,6	77,5
Tipo 6	56,2	32,5	68,6

Si, en lo que se refiere a la tipificación de la dificultad de los problemas en las categorías clásicas de *Muy fáciles, Fáciles, Medianos, Difíciles* y *Muy difíciles* se utiliza el baremo empleado por Cerdá (1978), Arnal (1988), García Hoz y Pérez Juste (1989) y Pérez Juste y García Ramos (1989), tendríamos la siguiente clasificación:

- Problemas *muy fáciles*: cambio 2 e igualación 5.
- Problemas *fáciles*: cambio 1, cambio 4 y cambio 6; comparación 2, comparación 3 y comparación 4; igualación 2 e igualación 6.
- Problemas *medianos*: cambio 5; comparación 1; igualación 1 e igualación 3.
- Problemas *difíciles*: cambio 3; comparación 5 y comparación 6; igualación 4.
- Problemas *muy difíciles*: Ningún problema ha sido resuelto por menos del 25% de los alumnos.

Esta clasificación nos lleva a hacer diversas consideraciones:

1) El orden de los dígitos que tipifican los diversos tipos de problemas dentro de cada categoría no sirve de indicador de la dificultad de los mismos, contraria-

mente a lo expresado por otros autores (véase, ppr ejemplo, Nesher y otros, 1982).

2) Se puede establecer una gran similitud en los resultados obtenidos entre los dos primeros tipos de comparación e igualación, pero no así entre éstos y los mismos tipos de cambio. A mayor abundamiento, los tipos 2 de las dos primeras categorías acusan por igual el impacto de la inconsistencia o incongruencia del lenguaje empleado con el tipo de operación requerido para su solución (véanse Lewis y Mayer, 1987).

3) Igualación 3 y 4 se comportan, dentro de la categoría, de forma parecida a comparación 5 y 6. Ambos se presentan como los problemas más difíciles. En ambos casos se puede ver también el resultado de la inconsistencia del lenguaje, ya apuntado en el párrafo anterior. Cambio 3 y 4 tienen un comportamiento muy distinto entre sí. Mientras que cambio 4 se convierte en un problema fácil, cambio 3 es el más difícil de la categoría.

4) Cambio 1 y 2, comparación 2, 3 y 4, e igualación 5 y 6 vienen a comportarse de forma similar. Todos ellos son problemas de lenguaje consistente (las palabras claves «más» o «menos» coinciden con el sentido de las operaciones que hay que emplear, suma y resta, respectivamente).

5) La categoría de igualación presenta un perfil netamente diferenciado respecto a las de cambio y comparación.

Conclusiones

Lo hasta aquí reflejado puede tener unas claras consecuencias en el trabajo en el aula dentro de los primeros cursos de la enseñanza. Sucintamente podrían ser:

a) Se debe atender a la enseñanza-aprendizaje de la categoría de igualación de una forma explícita y diferenciada respecto al resto de las categorías.

b) Secuenciar los diversos tipos de PAEV, dentro de cada categoría, en orden a la dificultad de los mismos en función del dígito que los identifica, no parece ser el criterio más realista para establecer el gradiente de dificultad adecuado a la progresión que deben seguir los niños en el aprendizaje de los mismos.

c) En el proceso de enseñanza-aprendizaje de los PAEV se deben abordar conjuntamente problemas de diversas categorías que tengan un nivel de dificultad similar. Por ejemplo, pueden abordarse a la vez los problemas de cambio 1 y 2, comparación 2, 3 y 4, e igualación 2, 5 y 6. De la misma forma, y con posterioridad a los anteriores, se deben trabajar los problemas de cambio 4, 5 y 6, comparación 1 e igualación 1. Finalmente, se debe prestar muy especial atención a los problemas de cambio 3, comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4. Estos últimos requieren, de manera notable, un mayor grado de madurez y dominio del lenguaje por parte de los alumnos, por lo que la ubicación del aprendizaje de los mismos debe situarse en los últimos cursos del nivel primario.

Se debe atender a la enseñanza-aprendizaje de la categoría de igualación de una forma explícita y diferenciada respecto al resto de las categorías.

...se deben abordar conjuntamente problemas de diversas categorías que tengan un nivel de dificultad similar

Referencias bibliográficas

ARNAL, J. (1988): *Matemáticas. Items de evaluación. 3.° de EGB*, PPU, Barcelona.

BELL, W., J. COSTELLO y D. KUCHEMAN (1983): *A review of research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching*, Windsor, NFER-Nelson.

BETHENCOURT, J. T. (1994): «La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción», *Suma*, 16, 4-8.

CARPENTER, T. P. y J. M. MOSER (1981): «The development of Addition and Substraction Problems-Solving Skills», en CARPENTER, T. P., J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (eds.): *Addition and Substraction: A cognitive perspective*, L. Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

CARPENTER, T. P. y J. M. MOSER (1984): «The acquisition of addition and substraction concepts in Grades One through Three», *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.

CARPENTER, T. P., J. HIEBERT y J. M. MOSER (1981): «Problem Structure and First-Grade Children Initial Solution Processes for Simple Addition and Substraction problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.

CARPENTER, T. P., J. HIEBERT y J. M. MOSER (1983): «The Effect of Instruction on Children's Solutions of Addition and Substraction Word Problems», *Educational Studies in Mathematics*, 14, 55-72.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada.

CERDÁ, E. (1978): *Psicometría General*, 2.ª Edición, Herder, Barcelona.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., y DE WIN (1985). «Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representations and Solutions». *Journal of Educational Psychology*, 77, 4, 460-470.

FISCHBEIN, E. y otros (1985): «The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division», *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.

FUSON, K. (1992): «Research on whole number addition and substraction», en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Grouws, McMillan, New York. DA, 243-275.

GARCÍA HOZ, V., y R. PÉREZ JUSTE (1989): *La investigación del profesor en el aula*, 2.ª edición, Escuela Española, Madrid.

GREER, B. (1987): «Understanding of arithmetical operations as model of situations», en SLOBODA, J. A. y D. RODGERS (eds.): *Cognitive processes in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 60-80.

HELLER, J. I. y J. G. GREENO (1978): «Semantic processing of arithmetic word problem solving», *Informe presentado a la reunión anual de la Asociación Psicológica del Medio Oeste*, Chicago.

LEWIS, A. B. y R. E. MAYER (1987): «Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1995): *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3.°, 4.° y 5.° de EGB/Primaria*, Tesis Doctoral.

NESHER, P. y T. KATRIEL (1.978): «Two cognitive modes in arithmetic word problem solving», *Informe presentado en la Segunda Reunión Anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática*, Osnabrück, Alemania.

NESHER, P., J. G. GREENO y M. S. RILEY (1982): «The Development of Semantic Categories for Addition and Substraction»», *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

PÉREZ JUSTE, R. y J. M. GARCÍA RAMOS (1989): *Diagnóstico, evaluación y toma de decisiones*, Rialp, Madrid.

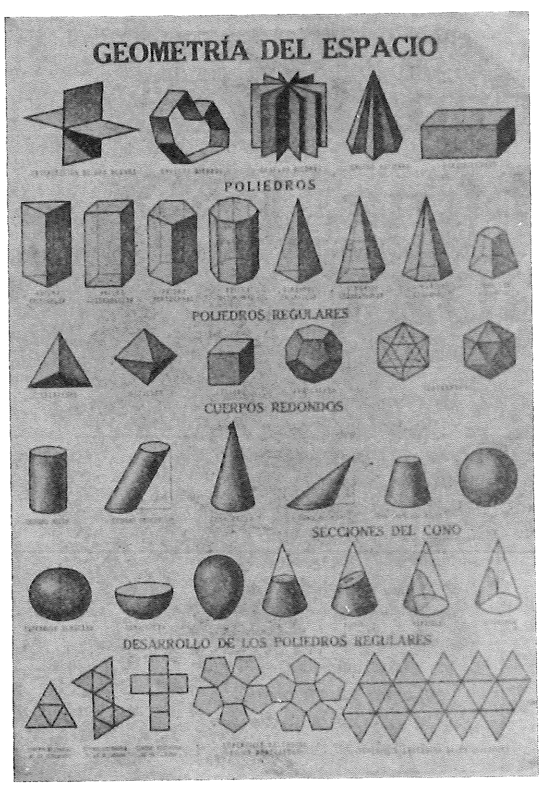
PUIG, L. y F. CERDÁN (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

VERGNAUD, G. (1983): «Multiplicative Structures»», en LESH, R. y M. LANDAU (eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, Londres.

VERGNAUD, G. (1988): «Multiplicatives Structures», en HIEBERT, J. y M. BEHR (eds.): *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Erlbaum A. Vol. 2, Reston, Virginia, L, 141-161.

WEBB, N. L. (1980).: «Content and Context Variables in Problem Task», en GOLDING y McCLINTOCK (eds.) (1984): *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, The Franklin Institute Press, Philadelphia

Jaime Martínez
Servicio de Inspección.
Delegación de Educación.
Cádiz
Manuel Aguilar
Departamento de Psicología.
Facultad de Ciencias
de la Educación.
Universidad de Cádiz.



Colección de cuerpos geométricos
Catálogo del Material Escolar de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A.
(Gerona, 1928)

NUEVA DIRECCIÓN

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tno.: (976) 76 13 49
Fax: (976) 76 13 45

SUMA 21
febrero 1996, pp. 41-54

Del dicho al hecho...

Jose María Gairín Sallán

ARTÍCULOS

Las vivencias personales como estudiante, las creencias sobre la disciplina científica, las concepciones sobre el trabajo de profesor y alumno, y las actitudes ante la asignatura forman un bucle que se retroalimenta a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
Este artículo pretende reflexionar acerca de las alteraciones que se producen en ese bucle al modificar las experiencias matemáticas de los estudiantes.

Para nuestros escolares la asignatura de matemáticas es materia de estudio obligatorio en todos los cursos de educación primaria y en buena parte de los de secundaria. Este «privilegio» lo disfrutan muy pocas disciplinas escolares, por lo que los estudiantes conceden a las asignaturas de matemáticas una importancia prioritaria en su currículum (Arana y otros, 1985). Y, claro está, una materia tan importante en el sistema escolar –a lo que no es ajena la creencia de la sociedad–, provoca que las asignaturas de matemáticas no sean anodinas para el alumno sino que despiertan reacciones positivas o reacciones negativas (Corbalán y otros, 1984). Además, y a lo largo de varios años, los alumnos viven la experiencia personal y directa de la adquisición de los conocimientos matemáticos en el contexto concreto de un sistema educativo determinado.

En este proceso formativo los estudiantes adquieren, de una parte, unos conocimientos científicos concretos sobre la ciencia matemática; además, los alumnos también van forjando sus propias creencias en torno a las matemáticas como disciplina científica. Estas creencias influirán en sus actitudes hacia la materia y determinarán el método de estudio. Por tanto, y como profesores de las asignaturas, resultan de gran interés preguntas como: ¿qué opinión se forman los alumnos de esta materia?, ¿qué caracterización dan los estudiantes a las matemáticas como disciplina científica? Encontramos respuestas en los trabajos de Borasi (1990), de los que entresacamos algunas de las opiniones que tienen los alumnos sobre las matemáticas:

- El conocimiento matemático ha existido siempre y es un producto terminado.
- En matemáticas no hay más alternativas que la certeza o la falsedad.
- Tanto en los hechos como en los procedimientos no hay lugar para los juicios personales.

- La actividad matemática, tanto de los profesionales como de los estudiantes, consiste en dar la respuesta correcta a problemas.
- Los problemas están siempre bien definidos y tienen una solución exacta y predeterminada.

Desde estas creencias resulta coherente que los estudiantes consideren que las asignaturas de matemáticas estén separadas en dos partes bien diferenciadas:

- Las matemáticas teóricas, las matemáticas de las definiciones, pruebas y demostraciones, que los alumnos perciben como actos rituales del profesorado de la materia, que valoran de poca utilidad para su trabajo en la asignatura y que escuchan sin participar.
- Las matemáticas prácticas, las matemáticas vistas como actividades de aplicación de los algoritmos adecuados a los problemas propuestos, las matemáticas en las que participa el alumno.

Esta doble perspectiva de las matemáticas delimita las condiciones del aprendizaje: los alumnos priorizan la memorización frente a la comprensión de los conceptos y métodos; a cambio, exigen de sus profesores que les hagan propuestas de trabajo claras y bien definidas –los buenos profesores son aquellos que nunca les provocan situaciones confusas.

Así queda perfilado un sistema escolar en el que el método de transmisión del conocimiento matemático forja en los alumnos unas creencias bien definidas. A su vez, estas creencias provocan en los alumnos unas actitudes concretas para el aprendizaje y definen los roles que corresponden tanto a los estudiantes como a sus profesores. De este modo, el proceso de enseñanza-aprendizaje queda plenamente orquestado para que el alumno viva nuevas experiencias que refuercen sus creencias acerca de la ciencia matemática y de su estudio.

Para reforzar con un ejemplo toda la argumentación anterior, y en el primer apartado de este trabajo, se revisa el tratamiento que dan los libros de texto al tópico matemático de las progresiones aritméticas. También se presenta un resultado matemático no habitual en los currícula escolares, el teorema que denominamos niriag, con la intención de que el lector pueda vivenciar experiencias similares a las que tan acostumbrados están nuestros estudiantes. Con estos materiales dispondremos de más información acerca del método habitual de transmisión de los conocimientos matemáticos, las que denominamos matemáticas *dichas*, así como de la influencia que ejerce el mismo sobre las concepciones que tienen los alumnos de las matemáticas.

Y una vez descrita la situación existente, ¿qué se puede hacer? Nuestra propuesta es la de variar las experiencias matemáticas de los alumnos, puesto que si no se modifican éstas tampoco variarán sus creencias sobre las matemáticas.

...los alumnos priorizan la memorización frente a la comprensión de los conceptos y métodos; a cambio, exigen de sus profesores que les hagan propuestas de trabajo claras y bien definidas...

Ahora bien, del estudio de Camacho (1995) se deduce que no es suficiente aumentar las exigencias sobre las que suelen llamarse matemáticas teóricas. En el mencionado estudio sobre las concepciones y actitudes hacia la matemática, se pone de manifiesto que las respuestas de los estudiantes de 5.° curso de la licenciatura de matemáticas y de los estudiantes del CAP –en su mayor parte licenciados en matemáticas– no son distintas de las que aparecen en el estudio de Borasi, anteriormente citado. Y eso que los estudiantes y licenciados en matemáticas tienen un mayor bagaje experiencial en formular y demostrar teoremas matemáticos, puesto que, en general, la evaluación de la matemática teórica tiene un importante peso en la calificación de las asignaturas universitarias.

Si, como como acabamos de indicar, el incremento de las matemáticas dichas no incide en la modificación de las concepciones de los estudiantes, habrá que optar por las matemáticas *hechas*, por las matemáticas que, como indica Fischbein (1990), construyan los alumnos. Entendiendo que construir las matemáticas significa sustituir la comunicación de conceptos y habilidades descontextualizadas y abstractas (matemáticas *dichas*) por la presentación de medios adecuados para desarrollar en los estudiantes los hábitos de pensamiento y los puntos de vista de los profesionales en este campo.

Esta nueva perspectiva exige la consideración de la matemática como creación de la mente humana, la matemática como resultado del trabajo real de unos profesionales que disponen de unas herramientas, un modo de pensar, un método artesanal de trabajo y una manera de presentar los resultados que son peculiares y característicos de la producción matemática. Y, claro está, la manera más adecuada de conocer una profesión es ejercerla.

Dedicando tiempo y esfuerzo se pueden hacer trabajos sencillos de cualquier profesión; aunque alcanzar la consideración de maestro artesano, de profesional prestigioso, exige, además, unas actitudes y capacidades más específicas. En consecuencia, con el debido tiempo y con los esfuerzos necesarios los estudiantes también pueden hacer trabajos como matemáticos, siempre y cuando se modifiquen los papeles y las relaciones del sistema escolar: el alumno ejerce el trabajo del aprendiz de una profesión (Silver, 1990; Lave y otros, 1988), el trabajo de la persona que, bajo la tutela del maestro, va paulatinamente adquiriendo los conocimientos del profesional. El profesor ocupa, entonces, la posición del maestro artesano, la del experto profesional, que tiene a su cargo a un colectivo de aprendices a los que va educando en la profesión; y el conocimiento matemático es el resultado de los trabajos que realizan los alumnos acompañados de su profesor.

En la segunda parte de este trabajo hay un ejemplo de matemáticas *hechas*, de cómo los alumnos pueden ir encadenando actividades matemáticas que les lleven desde el enunciado de un problema hasta la completa resolución del mismo. En la descripción de este trabajo se incluyen algunas consideraciones acerca del paso desde los resultados parciales a la formulación de hipótesis. Después, la confirmación de la hipótesis se presenta como una prolongación de los trabajos previos, como una reformulación de resultados ya obtenidos, como consecuencia de aplicar el pensamiento deductivo a situaciones ya conocidas; en suma, la demostración es un producto tangible para el alumno, no es un producto que se ha elaborado al margen de su propia experiencia.

1. El dicho

Sin entrar en la casuística particular, observemos una forma general de presentación de situación real de enseñanza tal y como se formula en distintos libros de texto. Y como núcleo de análisis elegimos el tema de progresiones aritméticas que es un tópico que se muestra por primera vez al alumnado.

Cuando no haya más preguntas de sus interlocutores la demostración se dará por explicada y pasará, se supone, a engrosar el conjunto de conocimientos de los estudiantes.

En los manuales consultados aparecen diferenciadas dos partes: tareas que son propias del profesor y tareas que corresponden al alumno.

Tareas del profesor

Es responsabilidad del profesor la presentación de los conocimientos. Y entre ellos, llama la atención la uniformidad con la que los distintos libros de texto presentan las demostraciones. Así, por ejemplo, el lector puede comprobar que no se encuentran variantes significativas en los distintos manuales escolares en la forma de presentar la demostración de, por ejemplo, la suma de los términos de una progresión aritmética limitada. Más o menos, se dice:

Sea la progresión a_1,. a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n

La suma de los términos de la progresión, S, será:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

o también:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando en columna:

$$2S = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + ... + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$$

Puesto que las sumas de cada paréntesis son iguales

$$S = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

El profesor, claro está, intercalará cuantos comentarios estime oportunos para que los alumnos puedan seguir los pasos de la demostración. Cuando no haya más preguntas de sus interlocutores la demostración se dará por explicada y pasará, se supone, a engrosar el conjunto de conocimientos de los estudiantes. Después del discurso del profesor al alumno queda convencido de la que la demostración es correcta. Además, también percibe el ingenio de quien haya utilizado tan sutiles argumentos y que, a buen seguro, a él no se le habrían ocurrido. Ahora ya sabe que su trabajo será recordar, de una parte, los pasos de la demostración (para el momento en que puedan evaluar su conocimiento) y, de otra parte, el resultado obtenido (para aplicarlo en los problemas que le serán propuestos).

Se puede suponer que los estudiantes han llegado a captar o comprobar cada paso de la demostración, pero también hay que suponer que no comprenden la razón de que así se haga, ni cuáles son las ideas básicas que hacen surgir esa idea, ni tampoco cuál es el método que se ha seguido hasta llegar a la demostración.

¿Y cuál ha sido la experiencia del alumno? Pues la de encontrar argumentos que fortalecen creencias sobre las matemáticas como las anteriormente mencionadas: el conocimiento matemático no se transmite más que como un producto terminado y que está revestido, eso sí, de argumentos que garantizan la validez del mismo. Además, tiene una nueva experiencia que le reafirma en su papel de espectador pasivo del quehacer matemático: no puede aportar opiniones personales ante resultados tan bien organizados que, a buen seguro, son patrimonio exclusivo del ingenio de quienes hacen las matemáticas.

Tareas de los alumnos

Los trabajos que han de realizar los alumnos se pueden clasificar en:

a) Ejercicios de aplicación directa de conceptos y procedimientos:
   - Escribe los términos 3, 10, 15 y 20 de la sucesión
     $$a_n = n/(n + 1)$$
   - Dados $a_1 = 4$; $d = 2$; $n = 8$. Hallar a_n y S.

b) Problemas en los que un proceso de deliberación permite superar los obstáculos que ocultan el objetivo a alcanzar:
   - Hallar el término general de la sucesión: 1/3, 4/11, 7/18, 10/25,...
   - Calcula los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor mide 60°.
   - ¿Cuántas campanadas dará un reloj durante un día entero si sólo toca las horas?

A la vista de esta práctica educativa, queda claro que las tareas de los alumnos, como ellos habían denunciado, son prioritariamente de aplicación, directa o indirecta, de algoritmos. Son muy escasas las tareas propuestas que demanden de los estudiantes un razonamiento inductivo (que los resultados de observaciones de casos particulares produzca la formulación de conjeturas), lo que reafirma la creencia de los alumnos acerca de la presentación de problemas bien definidos.

Y si decimos que la formulación de hipótesis es escasa, la confirmación de hipótesis (construyendo una demostración) o refutación de hipótesis (buscando un contraejemplo o demostrando su inviabilidad) no existen en los libros de texto consultados, no son tareas contempladas como propias de los alumnos. En suma, no se contemplan actividades en las que los estudiantes utilicen razonamiento de tipo deductivo.

Una vez explicitado el trabajo que corresponde al alumno en este tema concreto de progresiones aritméticas, hay que admitir que su experiencia matemática es limitada: al alumno se le han *dicho* unos resultados matemáticos, pero no le han enseñado cómo conseguirlos. Tampoco la realización de ejercicios y problemas, como los que se le proponen, va a serle de utilidad en la comprensión de los resultados que le han explicado. Y, como al alumno se le

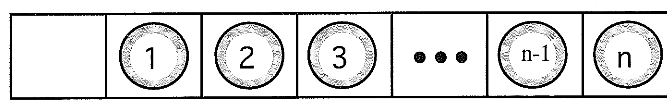
Son muy escasas las tareas propuestas que demanden de los estudiantes un razonamiento inductivo

cierra la posibilidad de conocer cómo actúan los que construyen el conocimiento matemático, resulta comprensible que vean a las matemáticas del modo que se mencionó anteriormente.

A modo de experiencia personal

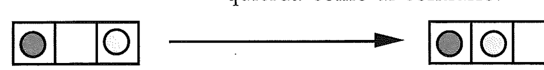
Personalmente no tengo recuerdos precisos de mis experiencias como alumno. Es posible que al lector le ocurra otro tanto. Aun cuando somos conscientes de las limitaciones que ello comporta, pensamos que buena parte del discurso anterior se hará más comprensible si el amable lector simula que actúa como alumno y que en el aula se vierte un discurso similar al que exponemos a continuación:

Teorema niriag. Se dispone de un tablero como el de la figura, en el que hay *n* (*n* impar) fichas numeradas y colocadas en la disposición que se indica:



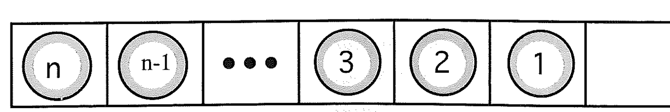
Si se cumplen las condiciones siguientes:

1. En cada casilla no puede haber más de una ficha.
2. Las fichas cambian de posición, hacen un movimiento, de una de las dos siguientes maneras:
   i. Desplazar una ficha a una casilla vacía, tanto de derecha a izquierda como al contrario:



   ii. Una ficha puede saltar por encima de otra ficha, siempre y cuando exista una casilla vacía

Entonces, el menor número de movimientos que permite pasar de la posición inicial a la posición final que indica el gráfico es $M_n = n(n+1)/2$



Demostración:

Obsérvese que para conseguir llegar a la posición final empleando el menor número de movimientos lo que hay que hacer es que las fichas salten todas las veces que sea posible, puesto que en cada salto se avanzan dos casillas, mientras que con un desplazamiento se avanza una sola casilla.

a) Contabilicemos, por tanto, el número de saltos. Comparando las posiciones inicial y final observamos que las fichas necesariamente han de saltar unas sobre otras. Para facilitar el trabajo, y puesto que no influye en el resultado, vamos a suponer que las fichas de número mayor saltan sobre las fichas de menor numeración, por ejemplo, la ficha de número 4 saltará por encima de las fichas de números 1, 2 y 3, y no efectuará ningún otro salto. De este modo, se tiene:

- La ficha de número n salta por encima de las n–1 de menor numeración.
- La ficha n–1 salta por encima de las n–2 fichas de numeración menor;.
- ....
- La ficha de número 2 salta por encima de la ficha número 1.
- La ficha número 1 no efectúa ningún salto.

Por tanto, el número total de saltos será:

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 =$$

$$= \frac{n-1+1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}(n-1) \quad (1)$$

b) Ahora bien, ¿es posible conseguir la posición final haciendo exclusivamente saltos?

Para responder a esta cuestión observemos en la tabla las posiciones inicial y final (las casillas están numeradas y V indica que la casilla está vacía):

N.° casilla	Posición inicial	Posición final
0	V	n
1	1	n–1
2	2	n–2
3	3	n–3
...	...	...
n–2	n–2	2
n–1	n–1	1
n	n	V

Se observa que la ficha que inicialmente ocupa la casilla de número k termina ocupando la posición n-k. Y teniendo en cuenta que n es *impar*, n-k será de paridad diferente a la de k (a la casilla de número 0 se le da la consideración de casilla par).

Ahora bien, cada vez que una ficha realiza un salto se desplaza dos casillas. Por tanto, después de un salto la ficha ocupa una casilla de la misma paridad que ocupaba. Pero si las fichas han de ir de una casilla de una determinada paridad a una casilla de paridad opuesta necesariamente han de hacer todos los saltos que puedan y, además, un *número impar* de desplazamientos, puesto que al hacer un desplazamiento cambia la paridad de la nueva casilla que ocupa la ficha desplazada.

Recordemos que el enunciado exige que el número de movimientos sea el menor posible. El número de saltos no puede ser menor que el obtenido en a), pues de los contrario sería imposible alcanzar la posición final. Por tanto, el mínimo que buscamos se obtendrá si limitamos a 1 el desplazamiento que deba hacer cada una de las fichas. En consecuencia, el número total de desplazamientos será: n (2)

De los resultados indicados en (1) y (2) se obtiene el número total de movimientos:

$$M_n = \frac{n}{2}(n-1) + n = n\frac{n+1}{2}$$

Y éste es el número mínimo de movimientos necesarios para intercambiar la posición de las fichas puesto que ahora ya se han efectuado todos los saltos y desplazamientos necesarios. Si se efectúa cualquier nuevo movimiento se produciría alguna permutación en el orden de las fichas y ello obligaría a hacer nuevos movimientos para restituir la situación final. *c.q.d.*

Nota.- Por si resulta más comprensible: el argumento empleado para obtener el número de desplazamientos (apartado b), se puede sustituir por el siguiente:

Si hay n fichas (n impar) se pueden encadenar un máximo de (n–1)/2 saltos consecutivos; por ejemplo la ficha de la casilla número 2 pasa a la casilla de número 0, la ficha de la casilla número 4 pasa a la casilla de número 2,... y la ficha de la casilla número n–1 pasa a la casilla de número n–3. Después, es imprescindible hacer un desplazamiento; de lo contrario, el único salto posible nos llevaría a posiciones anteriores: la ficha de la casillà número n–3 volvería a la casilla número n–1. Por tanto, los desplazamientos que hay que efectuar en total serán:

$$\frac{n}{2}(n-1) : \frac{n-1}{2} = n$$

Y ahora, amable lector, de nuevo reclamo su atención como un alumno que, a buen seguro, ha seguido los razonamientos que se han expuesto y que incluso puede hacer una valoración de los mismos en cuanto a la validez y sutileza de la lógica empleada en la demostración; aunque también es posible que no haya alcanzado a comprender el origen de los métodos y razonamientos que se han utilizado. De hecho, pueden aparecerle algunas dudas razonables sobre los «entresijos» que permanecen ocultos y en los que se sustenta la demostración:

- ¿cómo se tienen que mover las fichas para alcanzar el resultado final?;
- ¿por qué n es impar?;
- ¿vale el mismo resultado si n es par?;
- ¿hay otro teorema para el caso de que n sea par?;
- ¿no hay resultados para el caso de ser n par?
- ....

La práctica habitual del sistema escolar deja al alumno la posibilidad de encontrar por sí mismo la respuesta a las preguntas anteriores; o la de esperar que entre los acontecimientos venideros aparezcan un nuevo teorema que contemple alguna de esas situaciones. Entre tanto, al alumno se le propone que realice las tareas apropiadas, después de mostrar un resultado matemático, y que serán similares a las siguientes:

a) Ejercicios:
   - Calcular M_n siendo n = 12; 27; 32.
   - Sabiendo que M_n = 171, ¿cuánto vale n?

b) Problemas:
   - Encontrar el número de fichas que hay sobre el tablero, sabiendo que si se duplica el número de las mismas, hay que hacer 40 movimientos más para invertir el orden de colocación de las fichas.
   - ¿En qué situación ocurre que triplicar el número de fichas produce que el número de movimientos se multiplique por 8?

Y aquí finalizaría el tratamiento habitual del *teorema niriag* tal y como hemos caracterizado la práctica educativa a través de los libros de texto. Ahora se pueden hacer valoraciones sobre la utilidad o sobre la estética de los resultados, se pueden analizar o memorizar aspectos totales o parciales de la demostración, se pueden hacer los ejercicios y los problemas,... Y, también, pueden hacerse otras preguntas de carácter más o menos material: ¿qué he aprendido?, ¿para qué me sirve conocer cómo se demuestra este «importante teorema»?, ¿qué me pueden preguntar para la evaluación?, ¿esta demostración me ayuda a modificar la imagen que tengo de las matemáticas?,...

2. El hecho

El teorema que hemos llamado niriag es un ejemplo de cómo la presentación de los conocimientos matemáticos incide en las concepciones que se formen los alumnos acerca de las matemáticas como disciplina científica. La presentación de la matemática en torno al esquema puramente deductivo de axioma-teorema-demostración-corolario, que ya fue criticada por matemáticos tan prestigiosos como Polya (1966), Lakatos (1978) o Kline (1976) es la que vivencian los estudiantes y es, en consecuencia, la que alimenta la visión de la matemática que tiene los escolares.

> *Es evidente que el profesor, al igual que el alumno, ha tenido que acceder a resultados matemáticos revestidos de un carácter de infalibilidad y que se muestran de manera arreglada, bien pulida y reorganizada de acuerdo con los cánones del método lógico-deductivo*

Es evidente que el profesor, al igual que el alumno, ha tenido que acceder a resultados matemáticos revestidos de un carácter de infalibilidad y que se muestran de manera arreglada, bien pulida y reorganizada de acuerdo con los cánones del método lógico-deductivo (Davis y Hersh, 1988). También ha tenido experiencias frecuentes sobre aplicación de algoritmos. Y, sin embargo, la visión que tienen los alumnos de las matemáticas no suele coincidir con la que tienen sus profesores.

Ocurre que, en general, el profesorado ha tenido experiencias matemáticas más completas en su período de formación, en el ejercicio de sus tareas profesionales o en su mundo privado; el profesor ha *hecho* matemáticas, ha trabajado de acuerdo con el método matemático, ha tenido, en suma, que usar –de manera separada o en combinación– tanto del pensamiento inductivo como del pensamiento deductivo (NCTM, 1989). Y como las experiencias de los profesores no son iguales que las de los alumnos, también difieren sus concepciones sobre la matemática; del mismo modo que no son coincidentes las apreciaciones que tienen de la arquitectura aquellos que se limitan a ver las obras terminadas y quienes trabajan en su construcción.

Vamos a volver a tomar el caso del teorema niriag para ejemplificar una actuación de un profesor que quiere que sus alumnos hagan matemáticas (a la que el lector puede sumarse), y en la que se van intercalando aquellos comentarios que nos parecen oportunos.

Presentación del enunciado

El profesor no formula ningún resultado matemático, su trabajo se limita a hacer una propuesta: presenta el problema con *tres* fichas sobre el tablero, enuncia las reglas de actuación e indica los objetivos perseguidos.

El profesor abandona la pizarra y pasa a tutelar el trabajo de sus alumnos, orienta, responde a preguntas sobre aspectos parciales del trabajo, hace sugerencias,... pero, en ningún caso, da la respuesta a la tarea. Será la dinámica de la clase la que permita, con mayor o menor presteza, establecer el resultado: son 6 los movimientos mínimos.

Una nueva propuesta del profesor permite, porque el alumno ya está familiarizado con el trabajo, formular un enunciado sencillo para una nueva tarea: *averiguar los movimientos mínimos en el caso de 5 fichas.*

Nuevas formulaciones parciales con 7 fichas, 9 fichas,... permiten llegar a establecer el enunciado del problema inicial en términos más simples: *averiguar los movimientos mínimos en el caso de* n *fichas, siendo* n *impar.*

Cuando el profesor enuncia el problema en su totalidad el alumno dispone de información amplia sobre lo que está ocurriendo, el problema se le hace más familiar y, en consecuencia, tiene una idea muy precisa de lo que se quiere obtener.

Formulación de hipótesis

La nueva tarea propuesta exige analizar más o menos casos particulares con la intención de obtener los datos suficientes que permitan formular una hipótesis. La recogida de información puede sintetizarse en una tabla similar a la siguiente:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6
5	15
7	28
9	45
11	66
...	...

El profesor abandona la pizarra y pasa a tutelar el trabajo de sus alumnos, orienta, responde a preguntas sobre aspectos parciales del trabajo, hace sugerencias,... pero, en ningún caso, da la respuesta a la tarea.

A partir de los datos de la tabla hay que formular relaciones entre las dos columnas numéricas. Cada persona escribirá cuantas líneas estime oportunas como necesarias para lograr el objetivo propuesto. Es complicado, por tanto, que sea el profesor el que decida el número de datos que son adecuados para todos los alumnos de un aula.

Esta nueva tarea exige al alumno la búsqueda de relaciones entre dos secuencias numéricas. Debe emplear el pensamiento de tipo inductivo para «desenmascarar» esas relaciones numéricas que están ocultas; debe pasar del número entendido como una totalidad al número entendido como composición de otros números. Y teniendo en cuenta que las relaciones numéricas no son únicas, hay que esperar que las respuestas de los alumnos sean diferentes, por cuanto proceden de orígenes diversos. Con fines ejemplificadores he aquí alguna de las posibilidades:

HIPÓTESIS I. Relaciones multiplicativas

El número de movimientos aparece como un producto: el número de fichas iniciales multiplicado por un número, variable, que es un poco mayor que la mitad del número de fichas.

N.° fichas	N.° movimientos
3	6 = 3x2
5	15 = 5x3
7	28 = 7x4
9	45 = 9x5
11	66 = 11x6
...	...

De este modo se obtiene que el número de movimientos es $M_n = n(n+1)/2$

HIPÓTESIS II. Relaciones aditivas concatenadas

También pueden verse relaciones con resultados conocidos:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6
5	15 = 6+9
7	28 = 15+13
9	45 = 28+17
11	66 = 45+21
...	...

Aquí aparecen las igualdades:

$M_3 = 6$

$M_4 = 6 + 9 = M_3 + 9$

$M_5 = 15+13 = M_4 + 13 = M_3 + 9 + 13$

$M_6 = 28 + 17 = M_5 + 17 = M_3 + 9 + 13 + 17$

...

$M_N = M_3 + 9 + 13 + 17 + \ldots + (2n-1)$

Y teniendo en cuenta que se trata de una progresión geométrica de razón 4, se llega a

$$M_n = M_3 + \frac{2n-1+9}{2}\left(\frac{2n-1-9}{4} + 1\right) =$$

$$= 6 + (n-4)\left(\frac{n-3}{2}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

HIPOTESIS III. Relaciones aditivas independientes

El número de movimientos aparece como resultado de la suma de todos los números menores o iguales que el de fichas:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6 = 1+2+3
5	15 = 1+2+3+4+
7	28 = 1+2+3+4+5+6+
9	45 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9
11	66 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11
...	...

En estas condiciones, el resultado se configura como la suma de los números naturales desde 1 hasta el número de fichas, la suma de una progresión aritmética. De este modo el número de movimientos es:

$$M_n = \frac{n-1+1}{2}(n-1) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Se observa que el punto de llegada, como era previsible, es igual en los tres casos, pero lo que queremos destacar es que el origen es muy distinto en cada caso. No es nuestro propósito estudiar toda la casuística que puede darse, lo que pretendemos es mostrar que una actuación del profesor, que se centre en la presentación de resultados únicos, está cercenando muchas iniciativas particulares de gran valor formativo para los alumnos.

Aún más, es posible que los alumnos no presenten los resultados en la forma simplificada en que lo hemos hecho nosotros, sino que cada uno adoptará el medio de comunicación que considere más oportuno. Por tanto, la tarea del profesor será la de interpretar los pensamientos del alumnado a través de modos de expresión particulares (que, a buen seguro, no coinciden con los razonamientos y expresiones del profesor), y consensuar la uniformidad en la presentación de los resultados.

Confirmar las hipótesis

Con el apartado anterior, formulación de hipótesis, el estudiante dará por concluido el trabajo, puesto que ya ha utilizado símbolos matemáticos para expresar sus resultados. Si, como postulamos, hay que aproximar al alumno al trabajo del matemático, hay que hacer notar que el profesional no termina su trabajo al formular la hipótesis, él es consciente de que la verdad matemática se ha de evidenciar a través de una demostración. La presentación de conjeturas sencillas de comprender, como las de Fermat o Goldbach (Corbalán y Gairín, 1986), pondrán de manifiesto ante los alumnos la necesidad de argumentar que la hipótesis es cierta en todos los casos. También resulta recomendable utilizar otras situaciones, como el juego que Guzmán (1984) llama la «Rana saltarina», en el que la hipótesis, formulada a partir del estudio de unos pocos casos particulares, se desvanece al estudiar un nuevo caso particular.

...lo que pretendemos es mostrar que una actuación del profesor, que se centre en la presentación de resultados únicos, está cercenando muchas iniciativas particulares de gran valor formativo para los alumnos.

Estos ejemplos pueden servir para situar el papel de la demostración matemática como herramienta habitual para determinar la validez de una hipótesis. Y esta es la invitación a los alumnos, dar el salto cualitativo en busca de argumentos lógicos que den respuestas a una situación cualquiera, que se tenga la certeza de conocer el número de movimientos necesarios en el caso de un tablero sobre el que se sitúan cualquier número de fichas.

El paso de la conjetura a la demostración no es automático, pero todo el trabajo desarrollado en la formulación de las conjeturas permite o facilita la demostración. De hecho, ya se conoce el aspecto más importante: el resultado que hay que probar. Ahora bien, ese resultado, obtenido mediante el estudio de casos particulares, se ha hecho analizando exclusivamente relaciones numéricas, se ha utilizado el pensamiento inductivo. La demostración utiliza el pensamiento deductivo para esgrimir argumentos que justifiquen el producto $n(n+1)/2$.

A primera vista parece que el valor de n se puede corresponder con el número de fichas; ahora quedan por determinar dos hechos: de una parte, el origen del otro factor $(n+1)/2$ y, de otra parte, el producto de esos factores.

Abordar esas tareas exige de razonamientos que ya no están basados en relaciones numéricas. Hay que profundizar en las características de los resultados obtenidos, hay que analizar el origen de esos números y asociarlos no al número de movimientos, sino a las características de esos movimientos. Habrá que volver a tomar el trabajo ya realizado y revisarlo con nuevos ojos. Hay una necesidad de representar lo que ocurre en casos particulares para abandonar el recuento y entrar en el análisis cualitativo. La representación que usamos (véase cuadtro adjunto) para el caso de 7 fichas (V indica la casilla vacía), es un ejemplo de nuestro nuevo ámbito de trabajo y en el que la tarea no es la de contar.

Y, de acuerdo con las hipótesis formuladas, se podrán encontrar esas argumentaciones que andamos buscando. Veámoslo en cada una de las hipótesis que se han establecido anteriormente:

a) HIPÓTESIS I

De acuerdo con su formulación, y para el caso de 7 fichas, el número de movimientos que hay que realizar es 7 x 4 = 28. Por tanto, hay que centrar la atención en 7, 4 y el producto.

- El producto 7 x 4 lleva a preguntarse ¿qué ocurre cada 7 movimientos y que se repita 4 veces? Pueden darse respuestas como que cada 7 movimientos hay un mismo número en la casilla de la izquierda –la ficha 2 los 7 primeros movimientos; la ficha 4 los 7 siguientes;...
- También, a partir del producto 4 x 7, hay preguntas del tipo ¿qué ocurre cada 4 movimientos y que se repita 7 veces? Responder que, por ejemplo, los 4 movimientos se componen de 3 saltos y un desplazamiento invita a analizar las *características de los movimientos.*

b) HIPÓTESIS II

En este caso, hay que entender que los 28 movimientos resultan de sumar 15+13, es decir, los 15 movimientos que deben efectuarse para invertir el orden

Abordar esas tareas exige de razonamientos que ya no están basados en relaciones numéricas.

Mov.	Resultado							
1	2	1	V	3	4	5	6	7
2	2	1	4	3	V	5	6	7
3	2	1	4	3	6	5	V	7
4	2	1	4	3	6	5	7	V
5	2	1	4	3	6	V	7	5
6	2	1	4	V	6	3	7	5
7	2	V	4	1	6	3	7	5
8	V	2	4	1	6	3	7	5
9	4	2	V	1	6	3	7	5
10	4	2	6	1	V	3	7	5
11	4	2	6	1	7	3	V	5
12	4	2	6	1	7	3	5	V
13	4	2	6	1	7	V	5	3
14	4	2	6	V	7	1	5	3
15	4	V	6	2	7	1	5	3
16	V	4	6	2	7	1	5	3
17	6	4	V	2	7	1	5	3
18	6	4	7	2	V	1	5	3
19	6	4	7	2	5	1	V	3
20	6	4	7	2	5	1	3	V
21	6	4	7	2	5	V	3	1
22	6	4	7	V	5	2	3	1
23	6	V	7	4	5	2	3	1
24	V	6	7	4	5	2	3	1
25	7	6	V	4	5	2	3	1
26	7	6	5	4	V	2	3	1
27	7	6	5	4	3	2	V	1
28	7	6	5	4	3	2	1	V

de 5 fichas y otros 13 movimientos que serán necesarios para colocar en la posición final las 2 fichas restantes.

Pero no son tan nítidos los razonamientos lógicos que justifiquen esos 13 movimientos que permiten cambiar la posición de 2 fichas. Así que los alumnos deben volver a la situación real de cambiar 5 fichas y, después, hacer lo propio con las restantes: si se aborda la tarea de de invertir la posición de las 7 fichas que ocupan inicialmente la disposición V 1 2 3 4 5 6 7 sabiendo que con 15 movimientos se llega a la posición 5 4 3 2 1 V 6 7, la experiencia evidenciará la imposibilidad de alcanzar la posición final con 13 movimientos.

Se estudian otras alternativas en las que las 5 fichas no se invierten al principio. La reiterada imposibilidad de alcanzar el objetivo final inducen a pensar sobre las causas del fracaso. El disponer del estudio de los casos particulares (como el de 5 y 7 fichas) permiten observar las diferencias entre lo que ocurre en la realidad y lo que pretendemos alcanzar. Como por ejemplo, observar el *recorrido que hacen las fichas* desde la posición que ocupan hasta la posición final.

c) HIPOTESIS III

Para el caso de 7 fichas el número de movimientos se obtiene como 28 = 1+2+3+4+5+6+7. Este resultado, que se le ocurrirá más fácilmente a quien haya trabajado con progresiones aritméticas, nos llevaría a la demostración que se ha expuesto en el teorema niriag. Pero esta demostración, que concuerda con las exigencias de la presentación de resultados matemáticos, sólo es posible alcanzarla si se hace una abstracción de la realidad observada: hay que suponer que, por ejemplo, la ficha número 7 salta por encima de la ficha número 5, cuando en el cuadro anterior vemos que no se produce esa circunstancia sino la contraria.

Dos posibles argumentaciones

Vemos, por tanto, que la demostración que en principio parecía inaccesible para el alumno se le muestra más cercana si analiza los resultados de los trabajos previos. Además, serán los trabajos previos y las observaciones de cada alumno la que le lleven a un proceso de demostración diferente del de otros compañeros. Veamos dos posibles argumentaciones que parten de hipótesis distintas (I y II) y que, en consecuencia, usan de razonamientos diferenciados:

Argumentación 1: características de los movimientos

Si el alumno ha decidido que su argumentación hay que hacerla a partir de las peculiaridades que se observan en el tipo de movimientos, tiene que buscar comportamientos de carácter general, como los que se mencionan seguidamente (se incluye una tabla con las casillas numeradas que facilitará la lectura).

...la demostración que en principio parecía inaccesible para el alumno se le muestra más cercana si analiza los resultados de los trabajos previos...

N.° casilla	0	1	2	3	4	5	...	n–3	n–2	n–1	n
Fichas	V	1	2	3	4	5	...	n–3	n–2	n–1	n

1. Entre los movimientos hay saltos y hay desplazamientos.
2. Con los saltos las fichas avanzan dos posiciones, dos casillas, mientras que con los desplazamientos se avanza una sola casilla.
3. Después de una sucesión de saltos hay que hacer necesariamente un desplazamiento; en caso contrario, se volvería a posiciones anteriores y no se cumpliría la condición de emplear el menor número de movimientos posibles.
4. En el primer movimiento hay que hacer un salto: la ficha de la casilla número 2 termina en la casilla 0.
5. Se puede conseguir que, de forma consecutiva, las fichas que ocupan casilla pares (fichas con número par) avancen dos casillas hacia la izquierda. Si hay un número n de fichas, se pueden encadenar un total de (n–1)/2 saltos, siempre hacia la izquierda.
6. Al terminar todos los saltos hacia la izquierda, queda la casilla vacía en la posición n–1, y en la posición n está la ficha de número n. Ahora no es posible hacer un salto, pues se volvería a una posición anterior (la ficha de número n–1, que está en la casilla n–3, pasaría de nuevo a la casilla n–1). En consecuencia, se precisa hacer un desplazamiento, y el que resulta más beneficioso es llevar la ficha de número n a la casilla n–1, con lo que la casilla n–1 queda vacía.
7. Después del desplazamiento es posible que las fichas salten hacia la derecha, comenzando por la ficha que ocupa la posición n–2 que saltará a la casilla n. De este modo se encadenan una serie de (n–1)/2 saltos que hace que las fichas que ocupan las casillas impares avancen dos casillas hacia la derecha del tablero, y que la casilla vacía esté situada en la casilla 1.

8. Seguidamente hay que realizar un desplazamiento, siendo el más conveniente el de desplazar la ficha que ocupa la posición 0 (la ficha de número 2), a la casilla 1.
9. A modo de resumen: el tipo de movimientos más aconsejable es el de enlazar (n–1)/2 saltos consecutivos y, seguidamente, efectuar un desplazamiento. Podemos denominar «macromovimiento» a este conjunto de movimientos enlazados y que es posible realizarlo tanto si las fichas saltan hacia la izquierda como si lo hacen hacia la derecha y consta de un total de (n–1)/2 + 1 = (n+1)/2 movimientos. Además, después de un «macromovimiento» como los que se indican, la casilla vacía pasa a ocupar una de las posiciones extremas del tablero: la casilla *n* si el «macromovimiento» ha sido hacia la izquierda del tablero, y la casilla 0 en caso de hacerlo hacia la derecha.
10. Para alcanzar el objetivo final la ficha *n*, que ocupa la casilla *n*, debe terminar en la casilla 0 (o si se prefiere, que la ficha de número 1 debe terminar en la casilla n–1). Para lograr este propósito, observemos que el primer «macromovimiento» hacia la izquierda hace que la ficha *n* pase a ocupar la casilla n–1. El siguiente macromovimiento, hacia la derecha, deja la ficha de número *n* en la casilla n–1, pues al ser ésta par las fichas no se mueven.

Las ideas básicas están ya sobre la mesa, ahora queda hacer una formulación más detallada del recuento de los movimientos. Y si se quiere «adornar» la presentación del resultado se puede hacer en términos similares a estos:

...ahora queda hacer una formulación más detallada del recuento de los movimientos.

- «Macromovimiento» a la izquierda: conjunto de movimientos consistente en (n–1)/2 saltos hacia la izquierda seguidos del desplazamiento de la ficha de la casilla número *n* hacia la izquierda. En estas condiciones las fichas que ocupan casillas de números pares, P, pasan a ocupar casillas pares de número P–2. Además, la ficha de lugar *n* pasa a la posición n–1 y queda vacía la casilla *n*.
- «Macromovimiento» a la derecha: conjunto de movimientos consistente en (n–1)/2 saltos hacia la derecha, seguidos del desplazamiento de la ficha de la casilla 0 hacia la derecha. En estas condiciones las fichas que ocupan casillas de números impares I, pasan a ocupar casillas impares de número I+2. Además, la ficha de lugar 0 pasa a la posición 1 y queda vacía la casilla 0.

Teniendo en cuenta que a cada «macromovimiento» a la izquierda le sigue un «macromovimiento» a la derecha, la ficha *n* pasa de la casilla *n* a la casilla 0 si se hacen, de manera consecutiva, las acciones siguientes:
- 1 «macromovimiento» a la izquierda (la ficha *n* pasa a la casilla n-1, que es par).
- 1 «macromovimiento» a la derecha (la ficha *n* no cambia de casilla).
- (n–1)/2 «macromovimientos» a la izquierda (número de saltos necesarios para ir de la casilla de número n–1 a la casilla de número 0).
- (n–1)/2 – 1 «macromovimientos» a la derecha (el número de «macromovimientos» de este tipo necesarios para realizar los «macromovimientos» a la izquierda del punto anterior).

Por tanto, el número total de «macromovimientos» que permiten que la ficha de número *n* pase de la casilla *n* a la casilla 0 son:

$$2 + \frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n$$

Y recordando que cada «macromovimiento» consta de (n+1)/2 movimientos, el número total de movimientos será:

$$M_n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Obsérvese que, contrariamente a lo que parecía al principio, el factor *n* que figura en la producto anterior no corresponde al número de fichas sino al *número de «macromovimientos»* que hemos utilizado para obtener el número total de movimientos.

Además, M_n será el número total de movimientos necesarios por cuanto la ficha de número *n* ya está en su posición final después de realizar el menor número de movimientos posible. Cualquier otra posibilidad de que la ficha *n* ocupe la casilla 0 sería con un número de movimientos que fuese múltiplo

$$2 \times n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

puesto que hacen falta n(n+1)/2 movimientos para llevar la ficha *n* de la casilla 0 a la casilla *n*, y otros tantos, para que la ficha *n* regrese a la posición 0.

Argumentación 2: análisis de los recorridos

El modo en que puede razonar el alumno que haya optado por hacer un seguimiento de las posiciones que ocupa cualquiera de las fichas desde el inicio y el final del problema, se basará en las observaciones realizadas en sus trabajos con casos particulares. Por ejemplo, puede servir como referencia lo que ocurre con las fichas números 3 y 6 en el caso siguiente:

Casilla	0	1	2	3	4	5	6	7
Inicial	V	1	2	**3**	4	5	***6***	7
Final	7	***6***	5	4	**3**	2	1	V

Si se considera la casilla 0 como casilla par, y utilizando los resultados de los casos particulares anteriormente estudiados, se llegan a conclusiones del tipo siguiente:

— La ficha de número J que, inicialmente, ocupa la casilla de número J pasa a ocupar la posición final en la casilla de número n–J. Esto indica que las fichas que inicialmente ocupan casillas de número par finalizan ocupando casillas de número impar, mientras que las que inicialmente están en casillas de número impar terminan en casillas de número par. Hay, por tanto, un cambio de paridad respecto a las casillas que ocupa una ficha al inicio y al término de los movimientos.

— Si las fichas han de cambiar de paridad no pueden alcanzar su posición final a base de saltos ya que avanzan dos casillas y, por lo tanto, mantienen la paridad. En consecuencia, deben efectuar un desplazamiento. Este desplazamiento se hace en la casilla 0 para las fichas que ocupan casillas pares (todas han de llegar a esa casilla saltando) y en la casilla *n* para las fichas de casillas impares.

El trabajo que ahora se requiere es el de hacer un seguimiento de los movimientos que efectúa una ficha genérica que, inicialmente, está situada en la casilla J. Puesto que dependiendo de la paridad de esa casilla los movimientos iniciales son hacia la derecha o hacia la izquierda, vamos a estudiar las dos situaciones por separado:

J par

Recorrido:

Casilla J $\longrightarrow$ Casilla 0 $\longrightarrow$ Casilla 1 $\longrightarrow$ Casilla (n–J).

- Casilla J a casilla 0: se necesitan J/2 movimientos de tipo salto.
- Casilla 0 a casilla 1: hace falta 1 movimiento tipo desplazamiento.
- Casilla 1 a casilla (n-J): se precisan (n–1–J)/2 movimientos de tipo salto.

Cualquiera de estas dos argumentaciones son, a buen seguro, más cercanas al alumno que la demostración empleada... Sin embargo, tienen tanta validez como aquella, son verdaderas demostraciones en el sentido matemático.

El número de movimientos que son necesarios para que la ficha pase de la casilla J (J par) a la casilla n–J es:

$$\frac{J}{2} + 1 + \frac{n-1-J}{2} = \frac{n+1}{2}$$

J impar

Recorrido:

Casilla J $\longrightarrow$ Casilla n $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Casilla (n-1) $\longrightarrow$ Casilla (n-J)

- Casilla J a casilla *n*: se necesita (n–J)/2 movimientos de tipo salto.
- Casilla *n* a casilla n–1: hace falta 1 movimiento de tipo desplazamiento.
- Casilla n-1 a casilla n–J: son necesarios (J–1)/2 movimientos de tipo salto.

El número de movimientos que son necesarios para que la ficha pase de la casilla J (J impar) a la casilla n–J es:

$$\frac{n-J}{2} + 1 + \frac{J-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Vemos, por tanto, que con independencia de la paridad de la ficha J, hay un número de movimientos mínimos con los que se desplaza una de las fichas de la casilla inicial a la que ocupa finalmente. Teniendo en cuenta que hay *n* fichas que han de hacer el mismo número de movimientos para ir de la casilla inicial a la final, el número de movimientos que permite alcanzar el objetivo del juego es

$$M_n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Además, este es el menor número de movimientos necesarios puesto que los hemos contabilizado de manera que cada ficha realizase el desplazamiento de la casilla inicial a la casilla final sin reiterar ningún movimiento.

A diferencia de lo que ocurría en la argumentación 1, en este caso el factor *n* que aparece en la igualdad anterior sí que corresponde al *número de fichas que hay sobre el tablero*, mientras que el otro factor corresponde al número de movimientos que realiza cada ficha.

Cualquiera de estas dos argumentaciones son, a buen seguro, más cercanas al alumno que la *demostración* empleada en el teorema niriag. Sin embargo, tienen tanta validez como aquella, son verdaderas demostraciones en el sentido matemático. Pero son estas más próximas al alumno, son más «naturales», están basadas en las experiencias y observaciones del trabajo previamente realizado. Son, en suma, demostraciones que se pueden esperar de un alumno.

Esbozada la panorámica que se puede presentar a los alumnos y con independencia de los caminos que hayan seguido, lo que se pone de manifiesto es que los alumnos han *hecho* matemáticas, los alumnos han trabajado de manera similar a como lo hacen los matemáticos. Ahora tienen otros argumentos para entender que la matemática no es la ciencia perfecta y acabada que pertenece a unos pocos elegidos.

Además, los alumnos han visto la matemática como un mundo accesible en el que también pueden participar. De hecho, ya no tendrán que esperar acontecimientos para saciar sus inquietudes. Ahora ya disponen de herramientas y de métodos de trabajo propios de los profesionales de la creación matemática, ahora ya están en disposición de responder por sí mismos a la pregunta que formulábamos antes: ¿qué ocurre si n es par?

3. El trecho

Vemos, por tanto, que la demostración resulta accesible al alumno, la demostración no se muestra como el patrimonio de mentes privilegiadas, sino como el resultado de un proceso argumental en el que las manipulaciones iniciales sobre casos particulares sugieren pautas para la formulación de hipótesis. La lectura detenida de éstas, con el apoyo de conclusiones derivadas de los casos particulares, abre el camino hacia la demostración.

Es cierto que la instrucción se desarrolla en un contexto concreto en el que no se pueden olvidar los programas oficiales, los libros de texto, los exámenes de selectividad,... y también es cierto que la convicción del profesor sobre la enseñanza determina lo que hace cuando enseña. En consecuencia, es decisión del profesor optar por las matemáticas *dichas*, la tradicional presentación de los conocimientos matemáticos de acuerdo con el método deductivo, o por las matemáticas *hechas*, la apuesta por la educación matemática que considera como aspectos fundamentales del aprendizaje la creatividad, la resolución de problemas, la formulación de hipótesis, la verificación de conjeturas, la realización de pruebas confirmatorias y la búsqueda de contraejemplos.

> *...los alumnos han visto la matemática como un mundo accesible en él que también pueden participar.*
> *[...]*
> *Ahora ya disponen de herramientas y de métodos de trabajo propios de los profesionales de la creación matemática*

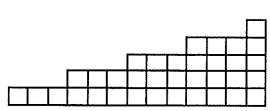
Una vez tomada esa decisión, el profesor deberá adecuar los trabajos de los alumnos de acuerdo con las capacidades y conocimientos que tengan, de acuerdo con su condición de aprendiz de matemático. Los diez cursos que, como mínimo, componen la formación matemática obligatoria de nuestros jóvenes estudiantes permiten programar un aprendizaje en el que tengan oportunidades de vivir experiencias en todas las facetas del quehacer matemático, y entre las que incluimos las de hacer demostraciones de resultados matemáticos. De este modo, los alumnos se forjarán unas concepciones sobre las matemáticas basadas en sus vivencias como profesionales de la creación científica.

No queremos terminar este trabajo sin antes señalar algunas de las variaciones que se producirán al pasar de un sistema escolar que apuesta por unas matemáticas *dichas* a un sistema escolar que apuesta por unas matemáticas *hechas*:

La presentación de los contenidos

El profesor no utilizará como fuente prioritaria de información los manuales escolares. Deberá buscar situaciones problemáticas desde las que el alumno alcance el resultado que se quiere mostrar. Por ejemplo, la suma de los términos de una progresión aritmética se pueden afrontar desde propuestas de trabajo del tipo siguiente:

- Se quieren construir escaleras de cualquier número de peldaños. Calcular el número de bloques cúbicos que se necesitan si las citadas escaleras tienen la forma que indica el gráfico adjunto.
- Sobre un plano hay n puntos sin que 3 de ellos estén alineados. Calcular los segmentos que se obtienen al unir cada dos de esos puntos.



Es de este modo que para el profesor la decisión no se limita a presentar tal o cual contenido, sino que, además, se amplia en el sentido de decidir cuál o cuáles de las formulaciones son las que va a proponer a los alumnos para presentar el contenido matemático que quiere tratar.

Las nuevas tareas

Al modificar la presentación de los conocimientos y llevar al alumno a aprender la forma de trabajo de los matemáticos se producirán momentos de balbuceo, de desorientación, de ansiedad... Por tanto, las tareas que proponga el profesor deberán ser ajustadas a las capacidades y conocimientos de los alumnos; además, y desde su papel de tutor del aprendizaje, debe animar a proseguir la tarea, debe formular preguntas que orienten en el trabajo, debe ayudar a salvar obstáculos o vías muertas...

La comunicación

En la forma habitual de transmisión de conocimientos matemáticos es el profesor el que introduce las palabras y expresiones propias del lenguaje técnico, después son los alumnos los que deben esforzarse para interpretarlas.

Pero si son los alumnos los que van construyendo las matemáticas el lenguaje imperante en el aula será el de los estudiantes. Y ahora será el profesor el que deba interpretar el conocimiento matemático que se oculta en el lenguaje más natural que emplean sus alumnos. La nueva situación exige que sea el profesor el que articule la búsqueda de expresiones comunes a todos los alumnos y el que deba establecer puentes con las expresiones habituales del lenguaje matemático.

La gestión de las conclusiones

De cada problema que se presente a los alumnos pueden derivarse diferentes modos de razonamiento y distinta presentación de los resultados, puesto que, como se ha mostrado en este trabajo, cada vía de resolución está condicionada a la observación de unas características determinadas. Es más, presumiblemente estos resultados no se formularán en la misma forma en que aparecen en los manuales escolares, ya que éstos se recogen en la forma que demanda la ortodoxia, aunque para ello, y como ocurre en el ejemplo del teorema niriag, estos resultados se alcancen empleando un grado mayor de abstracción.

Es evidente que no todas las situaciones problemáticas ofertarán tan amplio abanico de interpretaciones como ocurre en el caso del teorema de Pitágoras, del que Loomis (1972) recoge 270 demostraciones diferentes. Pero sí es factible que en un aula aparezcan algunas presentaciones del resultado que sean, aparentemente, distintas. El profesor, por tanto, tendrá que habilitar medios adecuados para patentizar la equivalencia entre estos resultados que, en principio, parecen diferentes, así como para que todos los alumnos puedan enriquecerse con las aportaciones de otros compañeros.

Bibliografía

ARANA, J. y otros (1985): *Análisis socio-educativo de los alumnos de Enseñanzas Medias de Zaragoza*, ICE, Zaragoza.

BLANCO, L. J. y C. RUIZ (1995): «Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado», en BLANCO, J. L. y MELLADO, V. (coord.): *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, Universidad de Extremadura, Badajoz.

BORASI, R. (1990): «The Invisible Hand Operating in Mathematics Instruction: Students´ Conceptions and Expectations», en COONEY, T. J. y HIRSCH, C. R. (edit.): *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook)*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia

CAMACHO, M. (1995): Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la Matemática y su enseñanza, en BLANCO, L. J. y MELLADO, V. (coord.): *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, Universidad de Extremadura, Badajoz

CORBALÁN, F., J, M. GAIRÍN, J. M. y E. PALACIÁN, E. (1984): *Las Matemáticas al finalizar la EGB*: Opinión de los alumnos, ICE, Zaragoza.

CORBALÁN, F. y J. M. GAIRÍN (1986): *Problemas a mí 1. Cosas de números*, Edinumen, Madrid.

DAVIS, P. J. y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor, Barcelona.

FISCHBEIN (1990): *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht.

GUZMAN, M. (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.

KLINE, M. (1976): *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, Madrid.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*, Alianza Universidad, Madrid.

LAVE, J., S. SMITH y M. BUTLER (1988): «Problem Solving as Everyday Practice», en RANDALL, I. y E. A. SILVER (edit.): *The Teaching and assessing of Mathematical Problem Solving*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

LOOMIS, E. S. (1972): The Pythagorean Proposition, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics, Reston, Virginia

POLYA, G. (1966): Matemáticas y razonamiento plausible, Tecnos, Madrid.

SILVER, E. A. (1990): Contributions of Research to Practice: Applying Findings, Methods, and Perspectives, en Cooney, T. J. y C. R. Hirsch (edit.): Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

STEFFE, L. P. (1990): Adaptive Mathematics Teching, en Cooney, T. J. y C. R. Hirsch (edit.): Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

José María Gairín
E U Profesorado de EGB
Universidad de Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
Pedro Sánchez Ciruelo

SUMA 21
febrero 1996, pp. 55-62

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿qué ha cambiado?

M. Pedro Huerta

ARTÍCULOS

El análisis de algunos ejemplos, extraídos de influyentes manuales escolares españoles de los siglos XIX y XX, muestra como el contenido geométrico ha estado organizado. Y esta organización ha perdurado a lo largo del tiempo, dando la sensación de ser un producto totalmente acabado que tan sólo admite la contemplación. Se muestra además cómo, desde la consideración de las posibles relaciones significativas entre los cuadriláteros, podemos organizar los conceptos implicados de manera alternativa, siendo ésta más propicia a la actividad matemática.

Introducción

Hace ya algunos años, casi 25, en su libro *Mathematics as an Educational Task*, Freudenthal (1973) consideró conveniente introducir un capítulo que hablase sobre la geometría escolar. Lo tituló «El caso de la Geometría» (pp. 401 y ss.) y lo hizo de esta manera porque consideró que, en aquel momento, la geometría estaba siendo sometida a juicio, acusada por algunos de no ser un sistema axiomático con una estructura deductiva perfecta y que, por esta causa, debería abandonarse su enseñanza. Hablamos claro está de la geometría de Euclides, de la geometría tradicional, que durante los años y siglos anteriores había sido la *prima donna* de los programas escolares. La geometría tradicional que, según Freudenthal, estaba siendo sometida a una especie de juicio sumarísimo en el que no hubo demasiados defensores y sí una sentencia culpatoria casi predeterminada.

Ciertamente surgieron alternativas a la geometría de Euclides, los sistemas axiomáticos de Pasch y Hilbert, seguramente mucho más perfectos desde el punto de vista deductivo pero, como decía Freudenthal, lo único que se podía hacer con ellos era investigar en sus fundamentos, pero ni se podía hacer geometría *dentro* de ellos y, en cualquier caso, ni se podía enseñar la geometría *con* ellos (p. 402).

Así pues, ¿el problema era la propia geometría, sus fundamentos, o había otros problemas latentes, derivados de ellos y que dificultaban su enseñanza? Freudenthal no creyó que el problema estuviese en que la geometría no fuera lo suficientemente deductiva y que, por eso, fracasase su enseñanza, sino que el problema estaba en que la deductividad no era enseñada como reinvención, al modo socrático y que, desde luego para él, la geometría era algo más que deductividad.

Si el problema no estaba en los fundamentos, los cuales ya se veían imperfectos, ¿en qué geometría estaba pensando Freudenthal? En el nivel más alto de enseñanza, dice, la geometría es algo organizado axiomáticamente. En el nivel más bajo, la geometría es comprender el espacio: espacio vivencial del niño, en el que vive, crece y se mueve; el espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para vivir, crecer y moverse mejor en él. Esta visión de la geometría escolar entroncaba con su idea de que las matemáticas, y en este caso la geometría, debería estar atada a la realidad cuando de lo que se trata es de aprenderlas.

En los último años, el estudio de los polígonos de tres y cuatro lados, los triángulos y los cuadriláteros[1] y algunas generalidades sobre polígonos, ha constituido una parte importante del contenido de la geometría escolar elemental. Pronto los niños se encuentran con formas geométricas básicas de tres y cuatro lados que han de ser reconocidas, analizadas, en fin, estudiadas. En esta parte, desde diferentes enfoques, el objetivo ha sido, citando palabras de Vallejo (1825), «averiguar las relaciones y propiedades de la extensión[2], en cuanto terminada o figurada» (p. 2). La diferencia fundamental, en cuanto al enfoque, ha estado y está en el modo en el que se averiguan las relaciones y propiedades de una extensión figurada y, en cuanto figurada, cómo se entiende.

Pretendemos a lo largo de este artículo presentar unos cuantos ejemplos, tomados de algunos libros de texto (del siglo XIX y del siglo XX), en los que se puede observar si han existido diferencias en cuanto a la manera en la que se organiza el contenido geométrico (por razones de utilidad y comodidad hemos escogido cuadriláteros) y cómo esta organización ha perdurado con los años llegando hasta la actualidad, aun cuando es posible concebir otra forma de organizar ese mismo contenido geométrico.

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX

A principios del siglo XIX y en plena discusión, por parte de los geómetras de la época, sobre la veracidad o no de algunos de los axiomas de Euclides y de la propia construcción de la geometría euclidiana, los cuadriláteros apenas ocupaban un par de páginas de un tratado elemental de geometría (Vallejo, 1825) o de un compendio general de matemáticas (Vallejo, 1840).

Definido el concepto de cuadrilátero, se introducían las clases en las que podrían encontrarse divididas las «figuras terminadas por cuatro líneas». Eran tres: el trapezoide, el trapecio y el paralelogramo, definidas por la disposición de las líneas: ninguna paralela a otra, dos paralelas entre sí y las cuatro paralelas dos a dos, respectivamente. Estas definiciones, que podrían darnos la impresión de ser cerradas y aceptadas de un modo generalizado, no lo son ni lo fueron en su día. En este sentido, recordemos lo que Vallejo cita, en un pie de página, en relación con las definiciones y nombres que él presentaba:

> *Develey dice que a los* trapecios *se les podría llamar paralelogramos truncados o triángulos truncados.*
>
> *Mr. Leslie llama* trapezoide *al cuadrilátero que tiene dos lados paralelos; y trapecio al que tiene dos de sus lados paralelos, y los otros dos son iguales aunque no paralelos.*
>
> *Con este motivo, diremos que Leslie, Legendre y Cresswell critican con mucho fundamento las definiciones que se dan en los libros de Geometría a las diversas especies de cuadriláteros; y me cabe la mayor satisfacción en ver que las que yo doy, y he dado desde luego en todas mis obras, están exentas de cuantos defectos expresan dichos autores* (p. 122).

Podemos ver como en esta época establecer una definición para las diferentes formas geométricas era crucial. A partir de ellas, comenzaba un razonamiento deductivo que conducía a las clasificaciones y a las proposiciones. Así, por ejemplo, dentro de las clases de paralelogramos, se presentaban el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*. Las definiciones aportadas, en nada hacían suponer posibles relaciones entre dichas clases pues estaban dadas de un modo exclusivo. Citemos, por ejemplo las del rombo, rectángulo[3] y cuadrado:

> *Cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son desiguales, e iguales los lados adyacentes a un mismo ángulos, se llama* rombo, *cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son iguales y los lados adyacentes a un mismo ángulo desiguales, se llama* rectángulo; *y cuando los lados contiguos a un mismo ángulo son iguales, y los ángulos contiguos o adyacentes a un mismo lado también son iguales, recibe el nombre de* cuadrado (Vallejo, 1825, 122).

Por tanto, nunca un cuadrado podría ser considerado como una clase especial de rectángulo ya que el primero exigía la igualdad de lados y ángulos,

...dentro de las clases de paralelogramos, se presentaban el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado. Las definiciones aportadas, en nada hacían suponer posibles relaciones entre dichas clases pues estaban dadas de un modo exclusivo.

1 No siempre los triángulos y cuadriláteros han sido considerados como polígonos. Vallejo (1825) llama polígono a « una figura que está terminada por más de cuatro líneas» (p. 125).

2 Término utilizado por Vallejo (1825), entendiéndolo como «el espacio que ocupa un cuerpo» (p. 2).

3 Llamado por algunos en aquella época *cuadrilongo*.

mientras que el segundo exigía la desigualdad de los lados cuando éstos eran adyacentes a un mismo ángulo.

Pocas eran las proposiciones que se establecían en relación con la mencionada obtención de propiedades de las figuras. Principal y casi exclusivamente, aquellas que hacían referencia a ciertas propiedades de los paralelogramos en general.

Los cuadriláteros a comienzos del siglo XX

Cuando el enfoque en el que se inscribía la enseñanza de la geometría potenció la intuición frente a la lógica, la presentación del contenido que había de enseñarse y de estudiarse, presentó algunos matices de cambio.

Rey Pastor y Puig Adam (1928)[4] presentaban los cuadriláteros en dos lecciones. Aparte de distinguir, aunque de soslayo, cuadriláteros convexos y cóncavos, distinción que Vallejo no hizo, las lecciones se dividían en «El paralelógramo[5] y el rectángulo», como primera lección de cuadriláteros, y «El rombo, el cuadrado y el trapecio», como segunda y última lección.

Las grandes familias, paralelogramos, trapecios y trapezoides se presentaban de manera idéntica a como lo hacía Vallejo un siglo antes: tener o no lados[6] paralelos.

Las propiedades generales de los paralelogramos también se introdujeron siguiendo la misma secuencia que siguió Vallejo, aunque el lenguaje utilizado fuese más intuitivo que el de éste y las demostraciones (las que se presentaban) sin el rigor formal que en el siglo pasado se demandaba, aunque no exentas de la deductividad necesaria.

Pero algo parecía cambiar. De una parte, el lenguaje usado. De otra, lo ya comentado de las demostraciones y, finalmente, la manera de averiguar aquellas propiedades y relaciones entre las figuras de las que hablábamos en párrafos anteriores. Rey Pastor y Puig Adam (1928) introducían así el rectángulo, el rombo y el cuadrado:

Si uno de los ángulos de un paralelógramo es recto, lo serán los otros tres (por el paralelismo de lados) y el paralelógramo recibe el nombre de rectángulo (p. 100).

Si un paralelógramo tiene dos lados contiguos iguales tiene también iguales a ellos sus opuestos, los otros dos; es decir, los cuatro lados son iguales, *y el paralelógramo se llama* rombo (p. 103).

Si se construye un rombo con un ángulo recto, es decir, rectángulo, se obtiene un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos también iguales por ser rectos. Esta figura se llama cuadrado *y tiene,* naturalmente, *reunidas las propiedades del rombo y del rectángulo* (p. 104).

Podemos observar como, de un modo «natural», el cuadrado se presentaba como una clase especial de rombos y de rectángulos y, por tanto, nadie podría extrañarse si se hubiesen definido así las cosas: «Cuadrado es un rombo con ángulos iguales» o «Cuadrado es un rectángulo de lados iguales», por tanto, no sólo la inclusividad se presentaba como algo normal entre las diferentes clases de cuadriláteros, a diferencia de la exclusividad del siglo anterior, sino que algunas clases de cuadriláteros se podrían construir a partir de otras introduciendo alguna condición particular.

...no sólo la inclusividad se presentaba como algo normal entre las diferentes clases de cuadriláteros, a diferencia de la exclusividad del siglo anterior, sino que algunas clases de cuadriláteros se podrían construir a partir de otras introduciendo alguna condición particular.

Los cuadriláteros a finales del siglo XX

De todos es conocido el penoso estatus que se otorgó a la geometría durante la mayor parte del siglo XX y del que ya hemos hablado en la introducción. Su «degradación» escolar obligó a los renovadores curriculares del último tercio de siglo a hablar de una recuperación necesaria de la geometría y de una devolución de su estatus (no ya de privilegio como había ocurrido en siglos anteriores) como área curricular importante en la formación de los alumnos.

No obstante, la geometría no podía presentarse del mismo modo que se había hecho en el pasado. De esta forma, el papel de las definiciones, proposiciones, demostraciones, etc. tan usual en las geometrías escolares anteriores, pierde su protagonismo. El lenguaje riguroso en el que se enuncian, prácticamente desaparece. Las demostraciones dejan de tener presencia en la geometría escolar elemental; las definiciones rara vez se establecen sino que, en todo caso, se construyen. Las proposiciones se descubren en términos de propiedades, etc. Palabras como reconocer, analizar, deducir informalmente..., son de uso común en la enseñanza actual de la geometría (Corberán, Huerta y otros, 1994). El profesor puede disponer de marcos generales sobre el aprendizaje de la geometría, la teoría de los niveles de van Hiele (Corberán, Huerta y otros, 1989), por ejemplo, como punto de referencia para organizar la enseñanza. Esta teoría distingue cinco niveles

4 La primera edición es del año 1928, aunque la referencia que se cita más tarde es del año 1959.

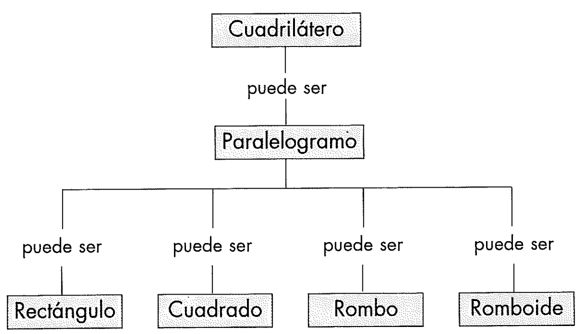
5 Hemos respetado la acentuación original de la palabra paralelogramo tal como aparece en el texto que se cita.

6 Lados ahora, líneas entonces.

jerárquicos de razonamiento[7] en los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de geometría, que van desde la manipulación, observación y razonamiento sobre formas geométricas discretas y aisladas, en el nivel más bajo, hasta el razonamiento deductivo formal, en el nivel más alto, pasando por el razonamiento sobre las propiedades de la formas geométricas y el razonamiento deductivo informal sobre las relaciones entre las formas y sus propiedades, en los niveles intermedios. Esta forma de razonar en los estudiantes tiene implicaciones a lo hora de organizar la enseñanza de una materia que está organizada, a su vez, de una manera jerárquica.

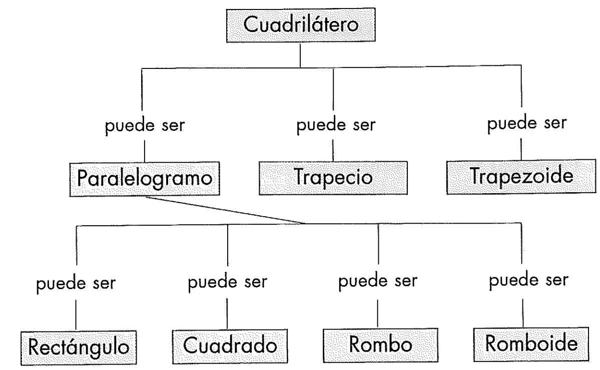
Los cuadriláteros en los libros de texto de la Enseñanza Primaria

La presentación de los cuadriláteros como clases de figuras geométricas que se incluyen unas dentro de otras, comienza, por lo general en 3.° de Enseñanza Primaria. Así, en este nivel, únicamente se consideran los cuadriláteros convexos, los cuales contienen una clase especial de cuadriláteros llamada paralelogramos que, a su vez, contiene a los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Esta presentación de los primeros cuadriláteros se organiza, por tanto, del modo siguiente*:

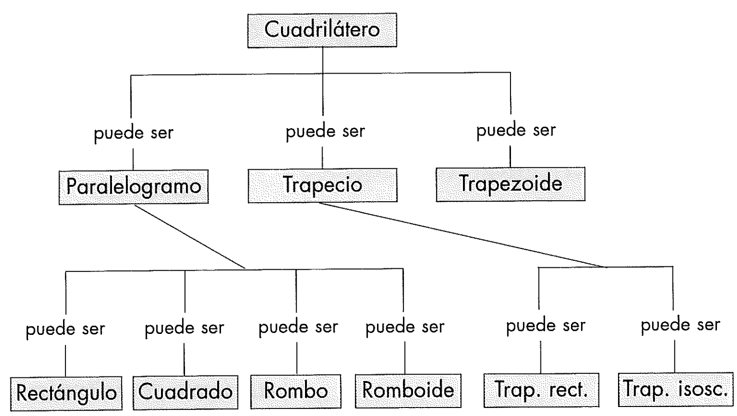


Observemos como, en esta forma de organizar los cuadriláteros paralelogramos, no aparecen relaciones entre conceptos que están en un mismo nivel jerárquico y, por lo tanto, no introduce nuevas jerarquías (¿porque así lo manda la tradición?). Ello supone que los cuadriláteros son presentados de forma exclusiva, sujetos a definiciones (en algunos casos) o ejemplos (en otros casos), que hacen imposible que puedan establecerse relaciones posibles: los cuadrados no son una clase especial de rectángulos pues éstos tienen dos lados más largos que los otros dos y el cuadrado los tienen los cuatro iguales.

En el curso siguiente suelen introducirse dos nuevas clases de cuadriláteros: los trapecios y los trapezoides, los cuales se integran en la organización anterior como clases disjuntas sin tener relación con los ya existentes (por ejemplo, tener dos pares de lados paralelos, un solo par de lados paralelos o ningún par de lados paralelos, ¿también como manda la tradición?):



La incorporación de dos nuevas subclases de cuadriláteros en el curso siguiente, el trapecio rectángulo y el trapecio isósceles, lo que provoca no es la construcción de nuevas relaciones con los cuadriláteros ya existentes, sino la inclusión en la clase de los trapecios de las dos subclases mencionadas de una manera disjunta con los ya existentes:

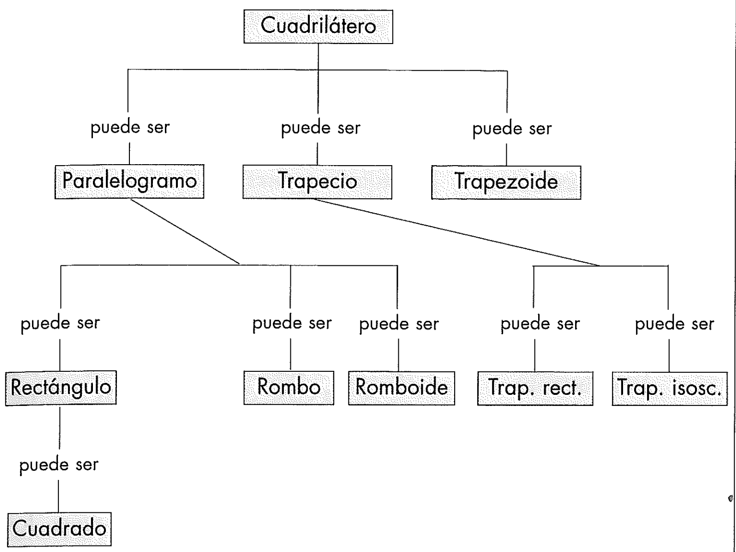


Pocos intentos hay en los libros de texto de relacionar los conceptos que están en un mismo nivel jerárquico entre sí, lo que posibilitaría la construcción de una nueva estructura jerárquica más compleja que la anterior. No obstante, hay libros de texto que definen el rectángulo como «paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos», indicando a continuación que «si además tiene sus cuatro lados iguales, es un cuadrado», lo que modifica la organización de los cuadriláteros incluyendo un nivel jerárquico más. En este caso se

7 Actualmente existe bastante información sobre la teoría de niveles de van Hiele en castellano. Ver, por ejemplo, Jaime y Gutiérrez (1990).

* Hemos utilizado el nexo «puede ser» como sinónimo de «se divide en» o «se clasifica en» u otros similares, como medio de unificación de términos equivalentes. La lectura de arriba a abajo supone la inclusión de una clase de cuadriláteros del nivel (jerárquico) inferior en la/s clase/s de cuadrilátero/s del nivel superior. El no conectar dos o más clases de cuadriláteros supone la no existencia de relaciones entre ellas, es decir, ambas clases de cuadriláteros no se relacionan.

puede formar el diagrama de la figura siguiente.



Situaciones como las anteriores dan por sentado las relaciones inversas en el que el tipo de nexo que une dos conceptos pertenecientes a la familia de los cuadriláteros es, ahora, del tipo «es», lo que supone la inclusión total de una clase en otra. Relaciones éstas que no se establecen de una manera explícita por parte de los libros de texto, sino que subyacen de una manera implícita al introducir los conceptos ya organizados jerárquicamente del modo o modos señalados.

...aunque no lo mande la tradición, un trapecio puede ser un paralelogramo especial con sólo considerar que el primero pueda tener más de un par de lados paralelos.

Los cuadriláteros y sus relaciones

Si enseñar significa, en esencia, iniciar a una actividad, enseñar matemáticas (geometría) no puede consistir en mostrar al alumno un producto acabado, estático. Situar al alumno en el interior de un edificio bello, armoniosamente estructurado, y mostrarle cuáles son los mecanismos que le permitirían su recorrido y cuáles los recursos que le permitirán la corrección o incorrección de sus acciones, puede resultar un ejercicio hermoso de contemplación estética, pero si toda comprensión real supone necesariamente la reinvención por parte del sujeto del objeto de su estudio, bien poco habremos conseguido. Matematizar, organizar matemáticamente una cierta materia y sistematizar los conocimientos progresivamente construidos, va más allá de lo verbal; implica la acción comprensiva, la experimentación, el recurso a la intuición y a la inducción, en definitiva la creación (Corberán, Huerta y otros, 1989).

Tal vez, como parecen mostrar los ejemplos históricos anteriores, la tradición ha mandado en la enseñanza de la geometría. Los conceptos parece que únicamente admitan una definición y de ellas sólo puedan establecerse un tipo de relaciones. Es decir, el producto acabado y estático. Pero la enseñanza actual de la geometría debería combatir esta sensación de producto acabado y estático en el que nada haya que decirse porque todo está dicho ya. Pero ciertamente, y aunque no lo mande la tradición, un trapecio puede ser un paralelogramo especial con sólo considerar que el primero pueda tener más de un par de lados paralelos.

Relaciones entre cuadriláteros

Con estas consideraciones previas, uno se puede preguntar ¿cuántas relaciones significativas puedo considerar para los conceptos relativos a cuadriláteros mencionados más arriba? ¿Únicamente aquéllas que establecen los libros de texto?

Si enfrentamos un concepto con los restantes, en el sentido que aquí se muestra, relacionándolos mediante la inclusión de los nexos apropiados en la línea de puntos:

	....	Cuadrilátero
	....	Cuadrado
	....	Rectángulo
	....	Rombo
	....	Romboide
Trapecio	....	Paralelogramo
	....	Cuadrilátero convexo
	....	Cuadrilátero cóncavo
	....	Trapecio rectángulo
	....	Trapecio isósceles
	....	Trapezoide

aparecen 11 relaciones entre el concepto Trapecio y los once restantes conceptos. Como tenemos 12 conceptos, el resultado de las relaciones posibles es de 11x12=132. Eso significa que entre los conceptos de cuadrilátero mencionados con anterioridad es posible construir un total de 132 proposiciones del tipo «es», «no es» o «puede ser».

¿Cuántas de ellas son de las que podemos llamar significativas, es decir, del tipo «es» o «puede ser»?

Para responder a esta cuestión, es necesario que consideremos la distinción entre inclusividad y exclusividad a la hora de ver los conceptos relativos a cuadriláteros. En el primero de los casos, el número total de relaciones es de 96, de las cuales 55 son del tipo «puede ser» y 41 son del tipo «es». En el segundo de los casos, hay 52 relaciones posibles de las cuales, 26 son del tipo «puede ser» y 26 son, obviamente, del tipo «es».

Por ejemplo, y en función de cómo definamos el concepto de trapecio, podemos establecer dos clases de relaciones:

a) Las relaciones con carácter exclusivo:
   - TRAPECIO es CUADRILÁTERO.
   - TRAPECIO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
   - TRAPECIO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES.
   - TRAPECIO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO.
   - TRAPECIO ISÓSCELES es TRAPECIO.
   - TRAPECIO RECTÁNGULO es TRAPECIO.

b) Las relaciones con carácter inclusivo, que además de las anteriores, incluyen las siguientes:
   - TRAPECIO puede ser ROMBOIDE.
   - TRAPECIO puede ser PARALELOGRAMO.
   - TRAPECIO puede ser ROMBO.
   - TRAPECIO puede ser RECTÁNGULO.
   - TRAPECIO puede ser CUADRADO.
   - ROMBOIDE puede ser TRAPECIO.
   - PARALELOGRAMO es TRAPECIO.
   - ROMBO es TRAPECIO.
   - RECTÁNGULO es TRAPECIO.
   - CUADRADO es TRAPECIO.

Algunas justificaciones

Podemos justificar, a modo de ejemplo, alguna de estas relaciones, no ya sólo en términos de ejemplos, sino también en términos de propiedades deducidas a partir de las definiciones consideradas. Así, por ejemplo, definimos:

ROMBO: Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos y lados iguales. Paralelogramo de lados iguales.

TRAPECIO: Cuadrilátero con, al menos, un par de lados paralelos.

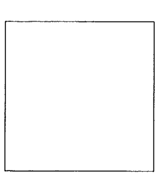
Establecemos las proposiciones:

1) TRAPECIO *puede ser* ROMBO.

2) ROMBO *es* TRAPECIO.

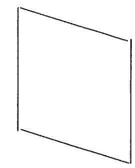
Justificación a través de ejemplos:

1) TRAPECIO *puede ser* ROMBO.



Cuadrado como ejemplo de trapecio que es rombo

2) ROMBO *es* TRAPECIO.



Ejemplo genérico de rombo que lo es de trapecio

Justificación a través de propiedades:

1) TRAPECIO puede ser ROMBO. Si A es la clase de los trapecios, A tiene, por lo menos, un par de lados paralelos. Entonces A puede tener dos pares de lados paralelos. En consecuencia A puede tener los lados iguales dos a dos, que, a su vez, pueden ser iguales. En consecuencia, A puede ser un Rombo porque puede tener los lados paralelos dos a dos y los lados iguales.

2) ROMBO es TRAPECIO. Si A es ahora un Rombo, A tiene los lados paralelos dos a dos, por lo tanto tiene más de un par de lados paralelos, por lo que A es un Trapecio.

Las relaciones del tipo «puede ser»

Decimos que una clase de cuadriláteros de nombre A «puede ser» una clase de cuadriláteros de nombre B, si tenemos uno o más de un ejemplo de los cuadriláteros llamados A que es, también, ejemplo de los cuadriláteros llamados B. Así, por ejemplo, la clase de cuadriláteros llamados Paralelogramos contiene ejemplos de cuadriláteros que son ejemplos de la clase de cuadriláteros llamados Cuadrado, lo que nos permite establecer la relación siguiente: «PARALELOGRAMOS «pueden ser» CUADRADOS». Si esta relación, entre las clases Paralelogramo y Cuadrado, tratamos de justificarla en términos de propiedades, deberemos actuar del modo siguiente: La clase PARALELOGRAMO puede definirse como: «cuadrilátero con lados paralelos dos a dos», de la que se derivan una serie de propiedades: diagonales que se bisecan, lados iguales dos a dos, ángulos iguales dos a dos, etc. Esas propiedades, que adquieren generalidad para toda la clase de los cuadriláteros llamados PARALELOGRAMOS, adquieren particularidad en las distintas subclases de los llamados paralelogramos, recibiendo, entonces, dichas subclases, nombres diferentes. Así, para el CUADRADO, las propiedades generales de los paralelogramos se particularizan en: lados iguales dos a dos se convierte en cuatro lados iguales; ángulos iguales dos a dos se convierte en cuatro ángulos iguales; diagonales que se bisecan se convierte en diagonales que se bisecan perpendicularmente, etc., permaneciendo como invariante la propiedad general lados paralelos dos a dos. Esta propiedad general compartida es la que hace que la clase menos inclusiva (aquella que tiene propiedades particulares de otras más generales), CUADRADO, sea una subclase de la más inclusiva PARALELOGRAMO y que justifique que un PARALELOGRAMO «pueda ser» un CUADRADO.

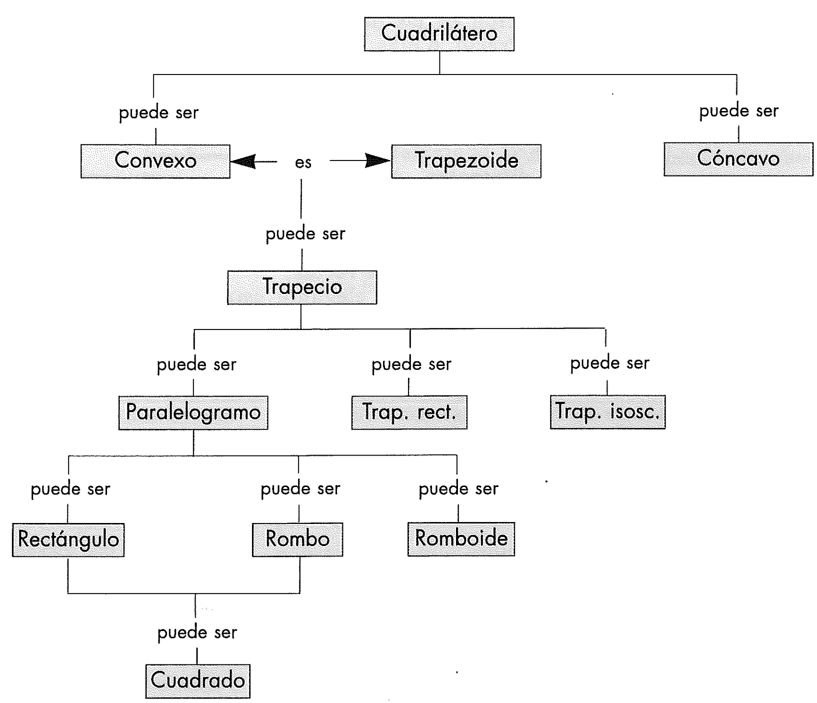
Consideremos otro ejemplo. La clase de cuadriláteros llamada RECTÁNGULO «puede ser» la clase de cuadriláteros llamada ROMBO. Para que una relación de este tipo adquiera sentido, debemos considerar las clases mencionadas en versión inclusiva. Así, en término de ejemplos, sólo sería válida en tanto que el cuadrado, como ejemplo de rectángulo, sea, a su vez, ejemplo de rombo lo cual parece no presentar demasiada dificultad. El problema está en establecer qué propiedades hacen que esta relación pueda quedar justificada. Deberemos restringirnos a la clase de rectángulos que da el ejemplo válido para establecer la relación, es decir, aquel rectángulo que tiene los lados iguales, lo que obliga a particularizar propiedades generales de los rectángulos, lados iguales dos a dos, por ejemplo, a la de su subclase, lados iguales, permaneciendo las demás intactas excepto aquellas que se derivan de esa particularización. Si por ROMBO entendemos aquel cuadrilátero con lados iguales, la relación está establecida porque hay rectángulos que tienen lados iguales (propiedad restringida) y que por tanto son rombos (propiedad general que los caracteriza). En consecuencia, decimos que RECTÁNGULO «puede ser» ROMBO porque hay una propiedad restringida de los rectángulos, lados iguales, que junto a otra u otras generales, ángulos iguales o lados paralelos dos a dos, por ejemplo, se convierten en generales del ROMBO, lados iguales, y/o particulares del ROMBO, ángulos iguales, por ejemplo.

...hemos pretendido mostrar cómo la tradición ha influido en la enseñanza de la geometría elemental.

En el primero de los casos descritos, a la relación A «puede ser» B, le sigue la relación B «es» A, con lo que la justificación es más fácil porque la particularización de la propiedad es en una de las clases, la menos inclusiva; mientras que en el segundo ejemplo, a la relación A «puede ser» B le sigue la relación B «puede ser» A, por lo que la particularización de las propiedades se produce en las dos clases de cuadriláteros que se quieren relacionar, simultáneamente.

Conclusión a modo de resumen

En este artículo hemos pretendido mostrar cómo la tradición ha influido en la enseñanza de la geometría elemental. Los ejemplos reseñados manifiestan una única organización posible de los conceptos de cuadriláteros y, por tanto, de un producto acabado del que nada puede decirse porque todo está dicho ya. Pero esta tendencia puede modificarse si se consideran otras posibilidades de organizar matemáticamente los conocimientos progresivamente construidos. ¿Por qué no considerar, por ejemplo, que los cuadriláteros convexos se organizan, desde la perspectiva jerárquica, del modo que se muestra y actuar en consecuencia?



Referencias bibliográficas

CORBERÁN, R., M. P. HUERTA y otros (1989): *Didáctica de la geometría: modelo de van Hiele*, Universitat de València. Valencia.

CORBERÁN, R., M. P. HUERTA y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*, CIDE, MEC, Madrid.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, Holanda.

JAIME, A. y A. GUTIÉRREZ (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele», en LLINARES y SÁNCHEZ (Eds.) (1990): *Teoría y práctica de la Educación Matemática*, Alfar, Sevilla.

REY PASTOR, J. y P. PUIG ADAM (1959): *Elementos de Geometría*, Colección Elemental Intuitiva, Madrid.

VALLEJO, J. M. (1825): *Tratado Elemental de Matemáticas. Tomo primero, parte segunda: la geometría*, Madrid.

VALLEJO, J. M. (1840): *Compendio de Matemática (puras y mixtas). Tomo I*, Madrid.

M. Pedro Huerta
Departament de Didàctica
de la Matemàtica.
Universitat de València

Estuches de compases "Escolar" D. C. P.

Núm. 1750.—D. C. P.—**Estuche de compases "Escolar"** (figura 236), de metal niquelado, conteniendo compás completo de 12 cm. de largo (lápiz, tinta, medidas), mango, tiralíneas de tinta, llave y minas de recambio. Precio, 3'50 ptas.

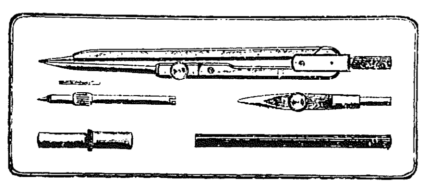


Fig. 236. - D. C. P. - Estuche compases «Escolar»

N.° 1752.-D. C. P. **Estuche de compases "Escolar"**, (fig. 237), en clase mejor, compás de 13 centímetros, con articulación en las dos piernas. Precio, 6 ptas.

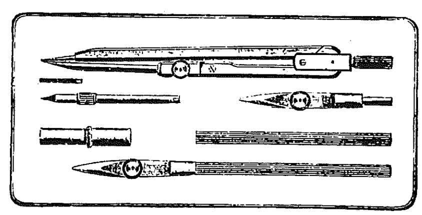


Fig. 237. - D. C. P. - Estuche compases «Escolar»

N.° 1754.—D. C. P.—**Estuche de compases "Escolar"** (fig. 238), de metal blanco, conteniendo 8 piezas diferentes: compás de puntas de 13 cm. largo, compás para tinta y lápiz, mango de madera, tiralíneas de tinta para rectas, llave y minas. En elegante estuche forrado de terciopelo, 8 ptas

Compases
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

SUMA 21
febrero 1996, pp. 63-71

...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

ARTÍCULOS

La identificiación entre las operaciones y sus algoritmos ha hecho olvidar que estos últimos no son únicos y, además, que están muy alejados (por lo refinados) de los números, operaciones y propiedades implicadas. Al hilo de estas consideraciones se plantean una serie de preguntas y alguna respuesta, que no siendo una lista completa, permiten contemplar una infinidad de posibilidades didácticas que quedan abiertas cuando las calculadoras ya casi no están obligadas a luchar por su implantación en el aula.

Hay metáforas que están más cerca de la realidad que ella misma. Esta podría ser un buen ejemplo. Recoge Georges Ifrah en su libro *Las cifras* el siguiente párrafo: «Un amigo mío, durante un reciente viaje a la Unión Soviética, quiso un día cambiar francos franceses por rublos y vio, sorprendido, que el funcionario de la oficina de cambio efectuaba sus cálculos con una calculadora moderna y comprobaba después los resultados con un marcador» (p. 119). Eran los últimos rescoldos vivos de una guerra que mantuvo discretamente entretenida a la humanidad durante varios siglos: «En realidad la disputa entre Abacistas y Algoristas duró varios siglos. El ábaco se siguió utilizando incluso después de la victoria de los nuevos métodos. Todavía se enseñaba en el siglo XVIII, y la gente, por prudencia, siguió comprobando todos los cálculos efectuados a pluma repitiéndolos en la tabla de fichas» (p. 299). «En cualquier caso, [...], los entusiastas del cálculo moderno fueron cada vez más numerosos y la balanza empezó a inclinarse sensiblemente a su favor. Era el inicio de la democratización del cálculo en Europa. Sin embargo la batalla estaba aún muy lejos de ser ganada [...]. Los calculadores profesionales de la época que practicaban las operaciones en el ábaco, querían, en efecto, guardar celosamente los arcanos de este arte: preocupados por preservar su monopolio y al ver amenazado su medio de vida, no querían ni oír hablar de estos métodos revolucionarios que ponían las operaciones aritméticas al alcance de cualquiera» (p. 296).

El paralelismo con la época actual es claro, pero como parece difícil aprender de la historia el lector sacará las conclusiones que estime más oportunas. En mi caso quisiera hacer hincapié en la resistencia que presentan algunas instituciones a los cambios aunque (o porque) vengan avalados por el progreso científico y técnico. Teniendo la virtud de asumirlos muchos siglos después de haberlo hecho la sociedad que los gestó. En este sentido la escuela se ha comportado siempre como la institución más conservadora.

De hecho, hace ya tantos años que uno ni se acuerda de ello, aparecieron las calculadoras de bolsillo, mal llamadas de cuatro operaciones. Ahora su uso está generalizado, las regalan con la compra del detergente o de las galletas,... ni siquiera llevan pilas. La escuela, algunas escuelas, son el único sitio en el que se prohibe su uso. ¿Por qué tantas reticencias? ¿A qué se tiene miedo?, ¿a quedarnos sin «programa»?, o a «democratizar» la enseñanza de las cuatro operaciones y tener que dejar de considerar fracasados a los estudiantes que no saben hacer multiplicaciones o divisiones con muchos dígitos? ¿Se intenta salvar «la estética» del algoritmo de la frialdad del calculo rápido y preciso? ¿Será quizás que seguimos prisioneros de una especie de síndrome de Estocolmo según el cual el valor de las cosas es directamente proporcional al sufrimiento que cuesta conseguirlas y en el que determinados cálculos y adiestramientos, que sólo se hacen en la escuela, no pasan de ser, y sólo se justifican como meras «destrezas de supervivencia escolar» como les llama Maier en aquel famoso artículo de *Arithmetic Teacher* de septiembre de 1987?

Creo que, nos guste o no, el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas. Creo que es hora de tener superado el debate sobre cuál debe ser el uso de la calculadora en clase, llevamos más de diez años diciendo que no puede reducirse a un mero uso funcional, que la calculadora ha de usarse como generador de problemas, como potenciador del cálculo mental, como profundizador del sentido y razón de ser de las operaciones y algoritmos, etc. Incluso creo que no tiene sentido plantearse eternamente reflexiones como «La revolución frustrada» que nos ofrecía la revista *Micromath* en 1992. Y no porque su uso lo recomiende el *Informe Cockcroft* (1982) o porque esté incluida como material didáctico en los nuevos programas, ni siquiera porque la realidad se imponga por sí misma o porque la bibliografía surgida durante los últimos años sea riquísima en recursos didácticos basados en el uso de la calculadora, sino porque los únicos que de verdad establecen los currículos reales, los únicos a los que se atribuye, y en quien se delega, autoridad suficiente para ello, las editoriales, están incluyendo en los textos muchos de los problemas, juegos e investigaciones que llenaban a rebosar la bibliografía al uso sobre utilización didáctica de la calculadora.

Lo que no va a pasar de moda ni puede ser superado ni separado de los currículos es el concepto de operación como relación entre números, porque forma parte inseparable de las propiedades y por lo tanto de la conceptualización de los mismos. Pero llevamos demasiado tiempo confundiendo operación con algoritmo y divinizando a éste como dios único y verdadero. Entronizados en su esencia de brevedad, infalibilidad, universalidad, efectividad y permanencia, se han automatizado sin entender las razones que encierra su proceso. Se desconoce por ejemplo que ni son universales ni únicos, sorprende saber que en Italia se multiplica con un algoritmo diferente al que nosotros usamos, como sucede con la división en EE.UU. por poner dos ejemplos. Y que no siempre se ha operado de la misma manera, de forma y modo que, olvidando que a veces lo mejor es enemigo de lo bueno, nuestros algoritmos que son los más refinados y sintéticos que hayamos podido conseguir están, por esa misma razón, lejos de ser didácticamente los más adecuados al estar alejados del sentido último de la operación que efectúan y de las propiedades de los números implicados en ellas, pues como los seres humanos ya metidos en años, ocultan más de lo que enseñan.

...nos guste o no, el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas.

Quizás sea el momento de replanteárselo todo, más que nada porque siempre es un buen momento para hacerlo y en este sentido este artículo pretende ser una invitación a la duda sistemática, a poner en entredicho la evidencia, a discrepar de la obviedad, a cuestionar las buenas costumbres, a repensar lo impensable, a poner en tela de juicio lo intocable, lo admitido, lo establecido, lo estandarizado, lo básico... Pretende iniciar un paseo por los trillados caminos de los algoritmos de las cuatro operaciones, con detenimiento, con paciencia, redescubriendo rincones inadvertidos, paisajes agazapados a la sombra de otros paseos más monótonos y rutinarios, caminos nunca explorados, inaccesibles a la prisa y a la efectividad. A recorrerlos con libertad y sin miedos, solazándonos a la sombra de la duda permanente. Agazapados al acecho de lo intangible, de lo inútil o lo inaccesible. Seguros de que importa más el viaje que el destino.

Es por ello por lo que quizás convenga comenzar por plantear algunas preguntas ingenuas de esas que haría un niño y cuya respuesta lejos de ser obvia entraña mil trampas y desconciertos. Las preguntas y respuestas ni son todas ni son únicas, y tanto unas como otras dan pie a muy diversas formas de algoritmo y a otras tantas formas de entender la operación en sí misma. El interés didáctico es cambiante en cada momento y la transposición al aula como las respuestas quedan (como no podría ser de otro modo) a cargo del lector.

Suma

- ¿Por qué se empieza a sumar por la derecha?
- ¿Cómo sería el algoritmo empezando por la izquierda?
- ¿Por qué las que se llevan se escriben sobre las cifras siguientes?
- ¿Por qué no se pone siempre el número grande arriba?
- Escribe todas las reglas que definen el algoritmo estándar de la suma.
- ¿Qué presenta y qué oculta este algoritmo sobre el concepto de suma?
- A la hora de sumar decimales, ¿por qué se alinean los números respecto de la coma?
- ¿Qué es sumar? ¿En todos los casos tiene la suma el mismo sentido? ¿Qué diferentes problemas sobre la misma se pueden presentar?

	7	8	9
+	5	9	6
1	2	0	0
	1	7	0
		1	5
1	3	8	5

	7	8	9
	5	9	6
	1 / 2	1 / 7	1 / 5
1	3	8	5

¿Qué es sumar? ¿En todos los casos tiene la suma el mismo sentido?

700	+	80	+	9
500	+	90	+	6
1200	+	170	+	15
1000 + 300	+	80	+	5

7c	+	8d	+	9u
5c	+	9d	+	6u
12c	+	17d	+	6u
13c	+	8d	+	5u

+	7	8	9	
5	1	2		
9		1	7	
6			1	5
	1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
	12	17	15
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
		1	5
	1	7	
1	2		
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
1	2		
	1	7	
		1	5
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
	1	7	
		1	5
1	2		
1	3	8	5

	~~7~~	~~8~~	9
	5	~~9~~	~~6~~
1	~~8~~	5	~~8~~
	~~6~~	~~9~~	~~9~~
	~~9~~	~~9~~	~~8~~
+	6	~~9~~	2
5	6	3	2

	7	8	9
+	5	1	6
1	0	1	
	2	9	5
	1		
1	2	0	5
1	3	0	5

789 + 475 = 1100+89+75 = 1300–11–25 = 1275–11 = 1264

789 + 475 = 789 + 50025 = 1289 – 25 = 1264

789 + 475 = 790 + 474 = 800 + 464 = 1264

Pero esto ya no es un algoritmo, podría ser un semialgoritmo, incluso un heurístico.

Resta

- ¿Qué propiedad sustenta el algoritmo de las resta «con llevadas»? ¿Por qué se suman las que «se llevan» al sustraendo y no al minuendo? ¿Por qué nunca nos llevamos dos?
- ¿Por qué se empieza a restar por la derecha? ¿Se podrían elaborar algoritmos que comenzasen por la izquierda?... ¿o por el centro?
- Haz una resta mentalmente, ¿qué algoritmo has utilizado? ¿Has usado mentalmente la grafía de los números?
- ¿Por qué se coloca el mayor arriba y el menor abajo? ¿Podría hacerse de otro modo?
- ¿Por qué sólo se restan números de dos en dos, cosa que no sucede en la suma por ejemplo? ¿Podríamos generar algoritmos que lo hicieran posible?
- ¿Por qué no se estudian las tablas de restar? Construye una, ¿qué propiedades de la resta se ponen de manifiesto de forma evidente? Por cierto que pasear por ella ascendiendo y descendiendo puede ayudar a entender la resta con llevadas.
- ¿Cómo se restarían dos números enormes, pongamos de 16 cifras, con la calculadora?
- Incluso podríamos plantearnos el escribir uno a uno todos los pasos que conforman el algoritmo y analizar qué aspectos de la operación muestra y cuáles oculta. O hacer una resta en base 3 o 6 para entender las dificultades que tiene su aprendizaje.
- Por cierto, ¿por qué se empieza por la suma y no por la resta, la multiplicación o la división?

Pues bien, sírvanse considerar algunos posibles algoritmos diseñados para restar, por si usted no gusta de usar calculadora, hay eclipse de sol o gusta de coleccionar utensilios didácticos. Pero todos ellos sirven para restar y a buen seguro que los encontrará mejor emparentados que el tradicional con la operación que se pretende.

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 2 & 3 \\ & - & 7 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \\ & & - & 5 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 4 & 8 \\ - & 5 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 2 & 3 \\ & - & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 0 & 0 \\ & - & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 0 \\ & & - & 2 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

¿Cómo se restarían dos números enormes, pongamos de 16 cifras, con la calculadora?

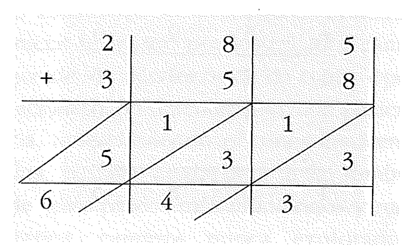
$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 0 & 0 \\ - & 4 & 5 & 2 \\ \hline & 6 & 4 & 8 \\ - & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

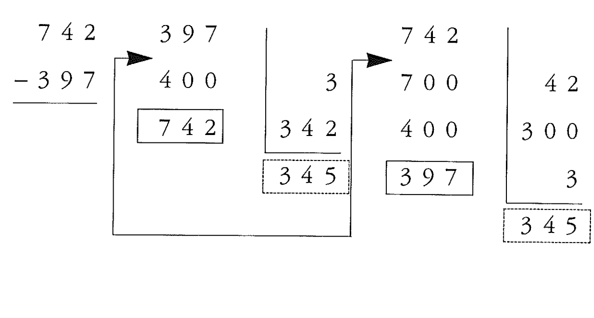
$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 1 & 8 \\ - & 4 & 7 & 0 \\ \hline & 6 & 4 & 8 \\ - & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 285 \\ + \\ \hline 643 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 285 \\ +\,358 \\ \hline 643 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 5\;14\;3 \\ -\,2\;8\;5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 5\;13\;13 \\ -\,2\;8\;5 \\ \hline 3\;5\;8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6\;4\;13 \\ -\,2\;9\;5 \\ \hline 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6\;14\;13 \\ -\,3\;9\;5 \\ \hline 3\;5\;8 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} 623 \\ -485 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 628 \\ -490 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 638 \\ -500 \\ \hline 138 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 623 \\ -485 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 620 \\ -482 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 600 \\ -462 \\ \hline 138 \end{array}$$

7483	5895
−5000	−5000
2483	895
−483	−483
2000	412
−400	−400
1600	12
1590	2
$\boxed{1588}$	

$$\begin{array}{r} 7c + 2d + 5u \\ -3c + 5d + 7u \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6c + 11d + 15u \\ -3c + 5d + 7u \\ \hline 3c + 6d + 7u \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 + 20 + 5 \\ -300 + 50 + 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 400 + 20 + 5 \\ -50 + 7 \\ \hline 350 + 13 + 5 = 368 \end{array}$$

Se pueden generar otros tres sencillos algoritmos quitando, separando o complementando que tienen un soporte simbólico o físico sobre la recta real e infinidad más de ellos que a buen seguro se le ocurrirán al lector al hilo de esta prolija muestra de variaciones sobre un mismo tema.

¡Pero ¿qué me dice Vd.!... ¡que algunos no son algoritmos propiamente dichos!, ¡que son seudoalgoritmos, heurísticos quizás!. Pues claro, pero es que ya no necesito *un* algoritmo, ni mucho menos que sea único ni estandarizado, para eso tengo el de la calculadora que cumple además a la perfección las condiciones de rapidez y sencillez máximas. Ya no me preocupa el algoritmo, ¡en absoluto!, me preocupa la operación y las propiedades numéricas y la decena y el operar mental y la profundidad con que los mismos se instalen en la mente y la permanencia de esa profundidad. ¡Pero el algoritmo, el que nuestra tradición cultural considera como tal, me importa tanto como cualquiera de estos, incluso menos, su importancia es simplemente histórica!

Y podríamos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad, y releer a Descartes cuando escribe: «...no admitir jamás como verdadera cosa alguna sin conocer con evidencia que lo era; es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención y no comprender, en mis juicios, nada más que lo que se presentase a mi espíritu tan clara y distintamente que no tuviese motivo alguno para ponerlo en duda» y que viene a ser algo tan contradictorio y placentero como solazarse a la sombra de la duda (más o menos). No cabe duda que la frase de Descartes encierra una inconmensurable confianza en el género humano, no menos que la que vamos a demostrar nosotros en vuestra paciencia planteándoos algunas cuestiones maliciosas sobre la multiplicación y la división y sometiendo a vuestro juicio y buen entender algún que otro cuasialgoritmo, lo llamaremos así para no sufrir las duras críticas que habrá de soportar quien se desviase lo más mínimo del buen criterio y juicio veraz que impone una rutina bien establecida (la de algoritmo sin ir más lejos).

Multiplicación

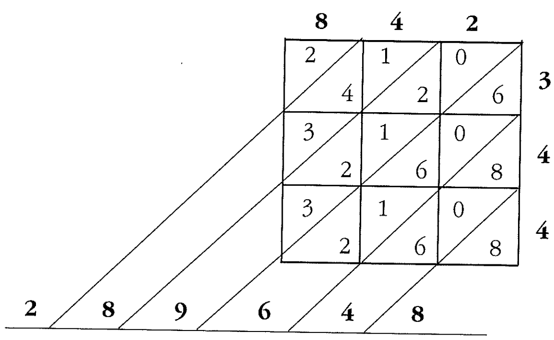
- ¿Por qué se comienza a multiplicar de derecha a izquierda? ¿Se podría hacer de otro modo?
- ¿Por qué se corren hacia la izquierda los números a sumar cada vez que se multiplica por una cifra diferente?
- ¿Por qué cuando se multiplica por la unidad seguida de ceros se corre la coma hacia la derecha o se añaden ceros?
- ¿Cómo se haría la multiplicación «con decimales» si hubiese que conservar la coma a lo largo de toda ella?
- Por cierto, ¿por qué se pone la coma justo en el sitio en el que se pone al acabar una multiplicación con decimales? Y justo antes de colocarla ¿qué tenemos: unidades, decenas, décimas,..., depende...?
- Una simpleza... ¿por qué $3 \times 0 = 0$?
- ¿Por qué sólo se multiplican los números de dos en dos? Dicho de otro modo ¿qué significado tiene, desde el punto de vista de lo que significa multiplicar $2 \times 3 \times 4$? ¿Cómo sería un algoritmo que multiplicase los factores

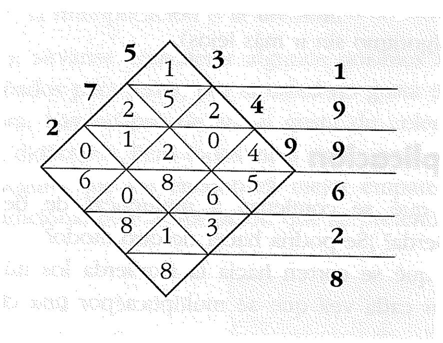
¿Por qué se comienza a multiplicar de derecha a izquierda? ¿Se podría hacer de otro modo?

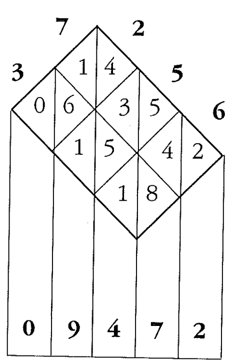
de tres en tres? Puestos a buscar sentido a expresiones, ¿cuál es el de esta: 234?

- ¿Por que se ajustan los factores a derecha, uno debajo de otro, antes de comenzar la multiplicación e independientemente de la coma? ¿Por qué se multiplica por el de abajo?
- Si pudiéramos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad y releer a Descartes, si multiplicamos decenas por centenas ¿qué sale? ¿Y metros por metros?
- ¿Cómo funciona y en qué se fundamenta la prueba de los nueves?
- Parece bastante claro que siempre que multiplicamos aumenta el resultado, ¿hay algún caso en que no sea así?

Si pudiéramos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad y releer a Descartes, si multiplicamos decenas por centenas ¿qué sale? ¿Y metros por metros?







El producto hindú

x 1	157
~~2~~	~~314~~
~~4~~	~~628~~
~~8~~	~~1256~~
16	2512
32	5024
49	7693

–1	–157
+10	+1570
~~20~~	~~3140~~
+40	+6280
49	7693

x 1	49	157
0	24	314
0	12	628
0	6	1256
1	3	2512
1	1	5024
		7693

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 8 \\ \times\quad 7\ 3 \\ \hline 1\ 7\ 1\ 0\ 4 \end{array}$$

256 x 37 = 37000 : 4 + 6 x 37 = 9250 + 370 : 2 + 37 = 9250 + 135 + 37 = 9472

= 7680 + 768 + 256 = 7680 + 1536 + 256 = 9472...

x	200	50	7	
40	8000	2000	280	**10280**
9	1800	450	63	**2313**
	9800	**2450**	**343**	**12593**

		1	5	7
		x	3	8
	0	4	5	
		8	0	6
0	1	2		
	3	5	1	
	5	9	6	6

		2	6	8
		x	4	7
0	2	3		
	8	4	2	
	1	4	5	
		4	2	6
1	2	5	9	6

		2	5	6
		x	3	7
			4	2
		3	5	
	1	4		
	1	7	9	2
		1	8	
	1	5		
0	6			
	9	4	7	2

	2	5	6
	x	3	7
		4	2
	3	5	0
1	4	0	0
	1	8	0
1	5	0	0
6	0	0	0
9	4	7	2

Multiplicación italiana

¿Se propone un problema para profundizar en el concepto de multiplicación, por ejemplo, o simplemente para automatizar la tabla, el algoritmo o determinada estrategia de cálculo?

Y este sería un buen momento, para reflexionar sobre *materiales didácticos* (multicubos, ábacos, regletas, dominós, vasos de yogur...):

- ¿Cómo introducirlos en el aula?
- ¿Qué grado de abstracción supone el uso de cada uno de ellos?
- ¿Qué aportan y qué ocultan acerca de la operación que estemos tratando en ese momento o de su algoritmo?

Sobre las propias *operaciones*:

- ¿Qué relaciones numéricas hay implicadas en cada una de ellas?
- ¿Qué enunciados de problema se les puede asociar? ¿Qué implican en cuanto a diferentes puntos de vista e interpretaciones de la operación?

Sobre los distintos *tipos de juegos*:

- ¿Cuáles emplear en cada momento?
- ¿Se pretende con ellos una automatización de rutinas o descubrir una estrategia?

Sobre los *problemas y ejercicios*:

- ¿Se propone un problema para profundizar en el concepto de multiplicación, por ejemplo, o simplemente para automatizar la tabla, el algoritmo o determinada estrategia de cálculo?

Un buen momento, en definitiva, para pensar en las múltiples cosas que pasamos por alto cada vez que operamos, que para nosotros pueden ser simples y para nuestros alumnos un abismo. Por ejemplo, a veces: *pesetas* x *caramelos* = *caramelos*. En otras ocasiones: *pesetas* x *caramelos* = *pesetas*. Pero en otras ocasiones: *camisas* x *pantalones* = *trajes*, como *décimas* x *centésimas* = *milésimas*. Pero, *pesetas* x *pesetas* = *pesetas*, mientras que *metros* x *metros* = m^2 y x x x = x^2 que parece lo mismo pero no es igual. Y *números* x *números* dan *números* pero *números* x *pesetas* siempre son *pesetas*. Demasiadas concepciones implícitas dentro de la misma notación como para pasarlas por alto alegremente.

Llegados a este punto esperamos haber tranquilizado a aquellos espíritus inquietos que quizás temían al empezar a leer el artículo que la incorporación del algoritmo de la calculadora nos había dejado sin programa en primaria. Es cierto que libera una gran cantidad de tiempo susceptible de ser aprovechado para trabajar la geometría, la probabilidad o la estadística ausentes hasta ahora de los programas, pero será necesario utilizar buena parte de él para profundizar en el sentido de las operaciones y en los conceptos relacionales que las sustentan.

La división

- ¿Por qué se colocan dividendo y divisor en horizontal y no en vertical, como sucede con los demás algoritmos?

- ¿Por qué se comienza por la izquierda y no por la derecha como sucede en la suma, resta y multiplicación?
- ¿Por qué el dividendo a la izquierda?
- ¿Por qué al dividir se toman tantas cifras del dividendo como contiene el divisor? ¿Por qué se «baja» la siguiente cifra? ¿Podrían bajarse dos? ¿Por qué se hace una resta y no una suma...?
- ¿Por qué no hay tablas de dividir?
- Al dividir van apareciendo diferentes restos ¿en que vienen dados (u, d, c...)?
- ¿Cuántos de estos prejuicios están severamente instalados en las mentes de nuestros alumnos, incluso en las nuestras:
  - Siempre se divide el grande entre el pequeño.
  - El cociente es más pequeño que el divisor.
  - El cociente es más pequeño que el dividendo.
  - El resto siempre es más pequeño que el cociente?
  - Centenas : unidades = ? Décimas : centenas =?
- ¿Por qué se dividen los números de dos en dos?
- ¿Hay llevadas en la división?
- ¿Por qué dividendo es igual a divisor por cociente más resto?
- ¿Por qué funciona la prueba de los nueves? ¿Es posible que la prueba esté bien y la división mal? ¿Se podría diseñar una prueba del 3 o del 5?
- Al dividir por la unidad seguida de ceros ¿por qué se corre la coma hacia la izquierda? ¿Se hace lo mismo si dividimos por 0,0001 por ejemplo?
- ¿Cómo se dividen dos números decimales manteniendo las comas a lo largo de todo el proceso?
- ¿Cómo se explica toda esta secuencia?:

1 2 ,5 2	2 , 4

1 2 5 2	2 4 0
5 2 0	5 , 2
3 0	

$$12{,}52 \neq 2{,}4 \times 5{,}2 + 30 = 42{,}48$$

Añadiremos algunos algoritmos más sobre la división, algunos surgieron en el aula ocupacional de Arnedo (La Rioja), cuando todavía existía (como funcionaba bien, el MEC pensó que había que cerrarla); y los usaban de forma natural sus alumnos. Aquellos chicos y chicas repudiados por el sistema educativo calculaban el volumen del icosaedro o la estrella de Kepler, hacían bolsos y marroquinería, operaban de forma natural según sus estrategias,..., calculadora en ristre bajo la sabia dirección de Ascen. Aquellos alumnos desahuciados que no sabían multiplicar, pero multiplicaban, que no sabían dividir pero dividían nos enseñaron que ese esfuerzo de creación de sus propios algoritmos, era una aventura mucho más interesante en sí misma que el puerto al que durante años sus profesores se habían empeñado en llevarles y en el que ellos nunca estuvieron dispuestos a recalar. Ellos nos ofrecieron, sin saberlo, la posibilidad de este paseo, para nosotros apasionante, por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones.

¿Por qué no hay tablas de dividir?

4c + 8d + 7u	13
48d	3d + 7u
39d	
9d + 7u	
91u	
6u	

487	13
130	10
260	20
390	30
455	35
481	**37**
6	

400	80	7	23
170			10
55	135	27	5
	20	**4**	5
			1
			21

487	: 13	1 *
−416	26	2
71	52	4 *
−52	104	8
19	208	16
−13	416	32 *
6		**37**

Aquellos alumnos desahuciados que no sabían multiplicar, pero multiplicaban, que no sabían dividir pero dividían nos enseñaron...

487	: 13	1 *
–351	26	2
136	39	3
–117	117	9 *
19	351	27 *
–13		**37**
6		

5632 : 23	= 244
23 x 1 = 23	5632
23 x 2 = 46 *	–4600
23 x 3 = 69	1032
23 x 4 = 92 *	–920
23 x 5 = 115	112
	–92
	20

8 6 4 1	2 3
– 6 9 2 3	3 0 1
1 7 1 8	7 0
– 1 6 1 0	4
1 0 8	**3 7 5**
– 9 2	
1 6	

Que podemos completar para divisiones exactas con cualquiera de los algoritmos de la multiplicación usados en sentido inverso.

Y si el amable lector ha sido capaz de llegar hasta aquí se merece que le obsequiemos, para terminar, con esta cita tomada del prólogo a la edición de 1911 de *En el reino del ingenio* y que su autor, E. I. Ignátiev, tituló «La importancia de la memoria en el estudio de las Matemáticas»:

«No se empeñen en enseñarles a niños o jóvenes el estudio de las distintas «tablas», de sumar, restar, multiplicar; en la memorización mecánica de diferentes «reglas» y fórmulas, sino que, ante todo, acostúmbrenles a pensar con placer y conciencia. Lo demás se añadirá con el tiempo. No molesten a nadie con cálculos y ejercicios mecánicos muy largos y aburridos. Cuando a alguien le sean necesarios en la vida, él los hará por sí solo. Además ahora para ello hay distintas máquinas calculadoras, tablas y otros dispositivos».

Aunque parezca mentira, y haya quien piense que está tomado de alguno de los innumerables textos oficiales publicados en los últimos años, está escrito en 1911 en la Rusia de los zares. Para que luego nos jactemos de originalidad en las ideas.

Ángel Ramírez
Carlos Usón
IB Quintiliano
Calahorra (La Rioja)

N.º 206.—**Las cuatro tablas de Aritmética.** — En cuatro carteles, tamaño 88 por 65, impresos en rojo y negro. En papel, 2'60 pesetas; montadas sobre cartón, 10'50 pesetas.

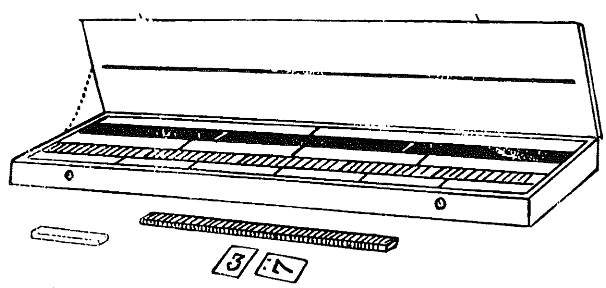


Fig. 51.—Caja para la enseñanza de los quebrados

Número 215.—D. C. P.—**Caja para la enseñanza gráfica de los quebrados.**—(Fig. 51). Formada por listones de madera, de diferentes colores, y con los cuales se da perfecta idea de cualquier quebrado propio, pudiéndose ver también intuitivamente la equivalencia de quebrados y la suma y resta de los mismos. Precio, 16 pesetas.

Tablas de Aritmética
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

SUMA 21
febrero 1996, pp. 73-80

Medida del área de un recinto por procedimientos mecánicos. Fundamentos matemáticos del planímetro

Víctor Arenzana Hernández

ARTÍCULOS

El presente trabajo, sobre los fundamentos matemáticos del planímetro, viene a continuar la tarea emprendida en 1990 cuando, con un grupo de trabajo que se formó en el IB Félix de Azara de Zaragoza durante el curso 1990-91, se constituyó un grupo de Investigación Educativa subvencionado por el MEC para trabajar en lo que podría constituir una matemática pretécnica. En este proyecto, entre otros temas, nos dedicamos a la construcción de aparatos de medida, estudiando sus fundamentos matemáticos y sus aplicaciones. El estudio de los fundamentos matemáticos del planímetro, por su nivel, caía fuera de lo que se podría explicar a los alumnos de bachillerato, pero puede resultar interesante para despertar la curiosidad de los profesores, como nos ocurrió a nosotros.

El objetivo fundamental de este trabajo es aportar los fundamentos matemáticos de unos instrumentos que permiten medir el área de una superficie, denominados planímetros polares, que pueden ser construidos en una clase de taller de matemáticas y comprendidas sus bases teóricas por alumnos del último curso del Bachillerato. El conocimiento del funcionamiento y fundamentación del planímetro tiene, además de un intrínseco valor histórico, un importante valor formativo, ya que proporciona un ejemplo de la utilización práctica de las áreas orientadas. El aparato comenzó a utilizarse en el segundo tercio del siglo XIX, pero hoy día se siguen construyendo y utilizando en trabajos topográficos, aunque con cuentavueltas digitalizados.

¿Qué es un planímetro?

El hombre ha inventado diversos aparatos de medida para conocer el valor de las magnitudes que le podían interesar. En física se utilizan dinamómetros, voltímetros o amperímetros, que miden sobre un limbo graduado el tamaño de una magnitud. Se han diseñado aparatos para medir cosas tan variadas que van desde la graduación alcohólica de un licor hasta la intensidad de emisión radiactiva de una determinada sustancia. Muchas veces los instrumentos de medida se utilizan para controlar el correcto funcionamiento de algunas máquinas.

En matemáticas existen aparatos para medir magnitudes básicas como longitudes y áreas de un modo más cómodo que el de llevar la unidad de medida sobre la magnitud que se desea medir. Para la medida de longitudes se utilizan, entre otros aparatos, el calibre para magnitudes pequeñas y longímetros o anteojos estadimétricos para medir longitudes mayores, y para medir áreas se emplean otros que se conocen con el nombre genérico de integradores que se fundamentan en el cálculo integral.

Los *planímetros* son unos aparatos que permiten medir el área de un recinto plano y finito determinado recorriendo su contorno. En realidad lo que hacen es calcular una integral definida asociada a ese contorno. Los planímetros se emplean en las oficinas de los catastros y en trabajos de topografía para medir las extensiones de las fincas sobre un mapa.

El planímetro se puede utilizar sin conocer más que su manejo e ignorando por completo sus fundamentos científicos. En este trabajo intentaremos aportar las bases teóricas de tales aparatos que no son otras que las del cálculo de integrales curvilíneas de segunda especie.

Existen varios aparatos de estas características, que tienen diferentes nombres según el objetivo fundamental para el que están diseñados:

- *Intégrafos*. Trazan la curva integral de una función mediante su gráfica.
- *Planímetros*. Miden el área de una superficie plana cerrada recorriendo su contorno.
- *Integradores*. Miden áreas, momentos estáticos y momentos de inercia de un recinto.

Los suizos Hoppikofer (1827) y Amsler (1854), el británico Kelvin (1880) y el norteamericano Vannevar Buch (1925) diseñaron diferentes modelos de planímetros e integradores.

Medida del área de un recinto recorriendo su contorno

Descripción de cómo se mide el área de un recinto con el planímetro de Amsler

El planímetro de Amsler consta de una varilla AB que se desplaza permaneciendo constantemente paralela al plano de apoyo. En A tiene un trazador mediante el cual se puede recorrer el contorno de la figura que se desee medir, en B está articulada con otra varilla móvil OB.

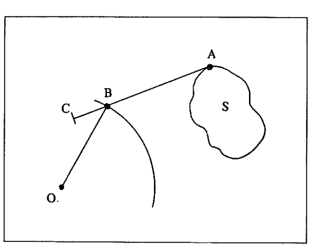


Figura 1

La varilla OB está sujeta mediante una aguja al plano de apoyo en el punto O, en torno al cual puede girar. En la prolongación de la varilla AB, en C, está colocada una ruedecilla graduada que se apoya sobre el plano y gira en torno al eje AB. La medida de un recinto S se calcula con este planímetro multiplicando la medida de la ruedecilla graduada por una constante que se llama constante del planímetro.

Los planímetros *son unos aparatos que permiten medir el área de un recinto plano y finito determinado recorriendo su contorno.*

En los apartados sucesivos se expondrán los fundamentos matemáticos esenciales de su funcionamiento, así como un descripción de sus mecanismos para poder proceder a su construcción.

El área como magnitud orientada. Signo de un área

Introducción

Cuando se pretende medir el área del recinto limitado entre una función real de variable real continua y positiva $y = f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, el eje OX y las ordenadas de los puntos $x = a$ y $x = b$, se tiene una fórmula global del cálculo del área

$$\int_a^b f(x)dx$$

en la que el área tendrá signo positivo y el número que indica el valor del área se obtiene sumando elementos de área positivos.

Análogamente, si la función $y = f(x)$ fuera negativa en $[a,b]$ la integral anterior sería negativa. Pero no es este el signo que nos interesa asignar al área limitada por una curva cerrada, ya que en estos casos el signo del área depende del sistema coordenado.

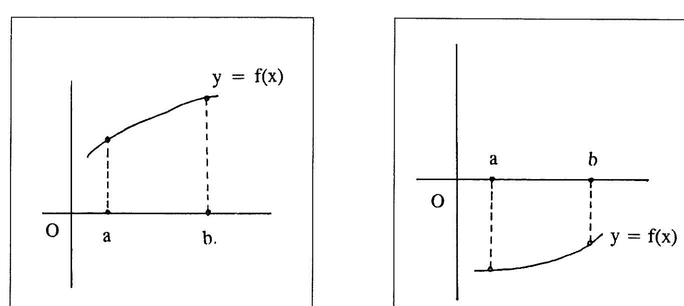


Figura 2

Cuando se habla de área orientada limitada por una curva cerrada C lo que se expresa es que el área será una magnitud independiente de la representación paramétrica de la curva, así como del sistema coordenado elegido y que tendrá signo negativo o positivo según que la curva C sea recorrida en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.

La representación de una curva cerrada no es posible hacerla mediante una sola función, para representar una curva arbitraria se utiliza la representación paramétrica.

Sea una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde $t \in [\alpha,\beta]$, y $x=x(t)$, $y=y(t)$ son funciones continuas, verificando, que $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$, por lo que es una curva cerrada. Supondremos, además, que sus derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas salvo quizás en un número finito de puntos en los que tenga discontinuidades de salto finito en los que presentará ángulos.

Resultados matemáticos fundamentales en los que se basa el funcionamiento del planímetro

Los fundamentos matemáticos del funcionamiento del planímetro son teoremas sobre áreas orientadas que se resumen en el siguiente enunciado global:

Si una curva cerrada C está dada en paramétricas por las ecuaciones $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde $t \in [\alpha,\beta]$ con $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$ y cumple las condiciones anteriores, entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt$$

a A le llamaremos integral fundamental *y cumple las siguientes propiedades:*

1.ª) *Las tres expresiones de la integral A son efectivamente iguales.*

2.ª) *La integral fundamental A no depende del sistema coordenado elegido.*

Los fundamentos matemáticos del funcionamiento del planímetro son teoremas sobre áreas orientadas...

3.ª) *La integral fundamental A no depende del parámetro elegido.*

4.ª) *Si se invierte la orientación en el recorrido de la curva C, entonces A cambia de signo.*

5.ª) *La integral A es aditiva en el sentido que si dividimos C en arcos C_1, C_2,..., C_n, se tiene que $A_C = A_{C1} + A_{C2} + \dots + A_{Cn}$.*

6.ª) *La integral fundamental A tiene el significado geométrico de área.*

Las demostraciones se pueden desarrollar del siguiente modo:

1.º) *Las tres expresiones de la integral A son efectivamente iguales.*

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = x(t)y(t)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta yx'\,dt$$

Como $t \in [\alpha,\beta]$ y $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ se tiene

$$x(\beta)\, y(\beta) - x(\alpha)\, y(\alpha) = 0.$$

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt$$

la semisuma de las dos expresiones de A permite obtener la tercera.

2.º) *La integral fundamental A no depende del sistema coordenado elegido.*

Para ello sometamos la integral fundamental que expresa A a un cambio genérico de coordenadas en el plano, que vendrá dado por un giro seguido de una traslación cuya expresión analítica es la siguiente:

$$x = X\cos p - Y\operatorname{sen} p + a \qquad x' = X'\cos p - Y'\operatorname{sen} p$$

$$y = X\operatorname{sen} p + Y\cos p + b \qquad y' = X'\operatorname{sen} p + Y'\cos p$$

de donde:

$$xy' - x'y = X'Y' - X'Y - aY' - bX'$$

cuando $a = 0$ y $b = 0$ se verifica que

$$xy' - x'y = XY' - X'Y$$

lo que prueba que el integrando es invariable por giros, pero como la curva es cerrada se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta (aY'+bX')dt = 0$$

por ser la curva cerrada se cumple que:

$$\int_\alpha^\beta (xy'-x'y)dt = \int_\alpha^\beta (XY'-X'Y)dt$$

Lo que demuestra la invarianza del valor de la integral fundamental por un cambio de sistema coordenado.

3.°) *La integral fundamental A no depende del parámetro elegido.*

Sea una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas x=x(t), y=y(t) donde $t \in [a,b]$ y hagamos el cambio de variable u = u(t), que verifica $p = u(t_0)$ y $q = u(t_1)$, haciendo este cambio a la integral fundamental se cumple:

$$-\int_p^q y\frac{dx}{du}du = -\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{du}\frac{du}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt = A$$

Por lo que la integral fundamental permanece inalterable por cualquier cambio de parámetro. Como, además, tampoco depende del sistema de coordenadas elegido, tal y como se ha visto en el apartado anterior, la integral fundamental sólo dependerá de la curva y se podrá escribir:

$$A = -\int_C ydx$$

4.°) *Si se invierte la orientación en el recorrido de la curva C, entonces A cambia de signo.*

Si una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas x=x(t), y=y(t) donde $t \in [\alpha,\beta]$ y se realiza la integral de un punto $P_0(x(\alpha), y(\alpha))$ a otro $P_1((x(\beta), y(\beta))$ en ese sentido la integral fundamental valdrá:

$$A = \int_\alpha^\beta xy'dt = -\int_\alpha^\beta yx'dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt$$

y si se realiza la integración de $P_1((x(\beta), y(\beta))$ a $P_0(x(\alpha), y(\alpha))$ su valor será:

$$A = \int_\beta^\alpha xy'dt = -\int_\beta^\alpha yx'dt = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha (xy'-yx')dt$$

lo que supone un cambio de signo para A, como deseábamos probar.

5.°) *La integral de A es aditiva en el sentido que si dividimos C en arcos C_1, C_2,... C_n, y mantenemos en ellos la misma orientación que tenía C se tiene que*

$$A_C = A_{C1} + A_{C2} + \ldots + A_{Cn}.$$

En efecto, ya que la partición de C se corresponde con una partición del intervalo $[\alpha,\beta]$ en n subintervalos

$$\alpha \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n = \beta.$$

El carácter aditivo de la integral nos lleva al resultado expresado.

6.°) *La integral fundamental para curvas es un área.*

Se puede calcular la integral curvilínea a lo largo de un curva cerrada C y representaremos el resultado de la misma con A_C por el simple procedimiento de dividir la curva C en trozos igualmente orientados, integrando sobre cada uno de los arcos obtenidos y sumando.

Consideremos en primer lugar un recinto plano Ω limitado por y=g(x), y=f(x) y las ordenadas x=a, x=b, que denominaremos celda orientada. Su frontera C se puede considerar orientada en sentido contrario a las agujas del reloj, formada por la unión de los arcos C_1, C_2, C_3, C_4. En las curvas C_2 y C_4 no hay variación de *x*, que tomamos como parámetro, por consiguiente

$$A_C = Ac_1 + AC_2 =$$

$$= -\int_b^a g(x)dx - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

que es el área del recinto Ω.

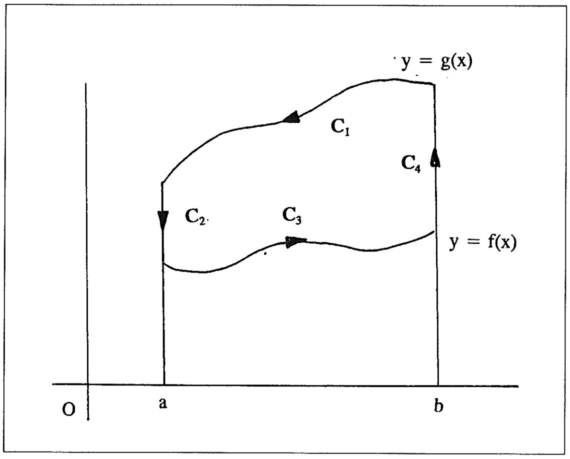


Figura 3

Es, por lo tanto, lo mismo que

$$A = -\int_C ydx$$

Si queremos determinar el área de un recinto general Ω lo dividiremos en celdas orientadas Ω_1, Ω_2,... Ω_n con fronteras respectivas $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$,... $\partial\Omega_n$ podemos expresar el área de la siguiente forma (véase la figura 4 de la página siguiente):

$$A_\Omega = \sum_1^n A_{\Omega i} =$$

$$= \sum_1^n \left(-\int_{\partial\Omega i} ydx\right) - \int_{\partial\Omega} ydx$$

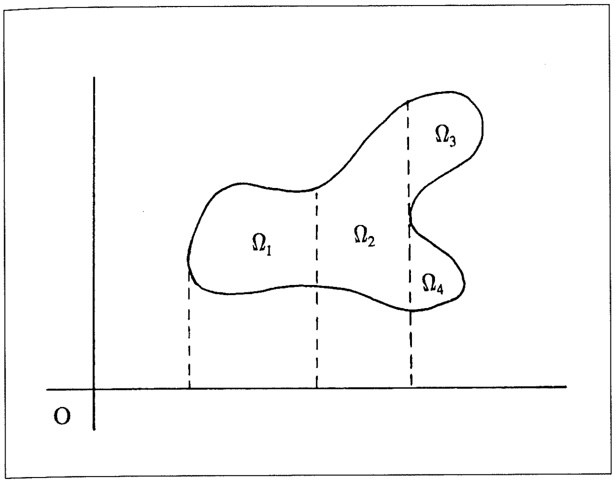


Figura 4

El teorema de Green y las áreas orientadas

Los resultados anteriores se podrían haber deducido de la fórmula de Green, que relaciona la integral a lo largo de una curva cerrada con una integral doble extendida al recinto que comprende.

Teorema de Green. Sean P(x,y) y Q(x,y) campos escalares con derivadas parciales acotadas en un abierto S del plano xy. Sea C una curva de Jordan regular a trozos y sea Ω la unión de C con su interior. Supongamos que Ω⊂ S, entonces se verifica la identidad

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \iint_\Omega \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dxdy$$

Que suele escribirse de forma resumida en la forma:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega (Q_x - P_y)dxdy$$

A partir de esta fórmula se pueden obtener distintas expresiones integrales que relacionan el área de un recinto plano con una integral curvilínea recorrida a lo largo de su frontera, así:

Si $P_y = -1$ y $Q_x = 0$ la fórmula se transforma en:

$$-\int_C ydx = \iint_\Omega dxdy$$

El fundamento matemático del planímetro se basa en el cálculo del área que barre un segmento rectilíneo.

cuyo segundo miembro es el área del recinto Ω.

Si $P_y = 0$ y $Q_x = 1$ la fórmula se transforma en:

$$\int_C xdy = \iint_\Omega dxdy$$

que es el área del recinto.

Si $P_y = -1$ y $Q_x = 1$ la fórmula se transforma en:

$$\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \iint_\Omega dxdy$$

Lo que demuestra la equivalencia de las fórmulas

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt$$

Área de barrido

A continuación se van a aplicar los teoremas anteriores al cálculo del área de la figura que barre una curva que se desplaza por el plano. El fundamento matemático del planímetro se basa en el cálculo del área que barre un segmento rectilíneo. Esta noción de área de barrido de un arco de curva se matiza a continuación.

Sea un arco de curva de extremos A_0B_0 que se mueve en el plano cartesiano de manera continua hasta una posición A_1B_1. El punto A_0 describirá en su movimiento una curva A_0A_1, el B_0 trazará en su desplazamiento la curva B_0B_1. En total queda en el plano la figura $A_0B_0B_1A_1$ que determina un recinto.

Sea AB una posición intermedia de la curva en su desplazamiento continuo y consideremos otra posición infinitamente próxima A'B'. El área total del recinto $A_0B_0B_1A_1$ se puede calcular conociendo las ecuaciones de A_0B_0, B_0B_1, B_1A_1, A_1A_0 mediante la fórmula:

$$\int_{A_0B_0B_1A_1} \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

Ya que las posiciones inicial y final del arco de curva A_0B_0, A_1B_1 junto con las trayectorias descritas por sus extremos A_0A_1 y B_0B_1 constituyen una curva cerrada en el plano que delimita un recinto cuya área, llamada área de barrido, se puede calcular mediante una integral curvilínea calculada a lo largo de la frontera del mismo que no es otra que la curva $A_0B_0B_1A_1$ a la que se dotará de una orientación conveniente. (Figura 5).

En el caso de que el arco de curva A_0B_0 se moviera en el plano cartesiano de manera continua hasta una posición A_1B_1 coincidente con A_0B_0, el punto A_0 describirá en su trayecto una curva cerrada A_0A_1 que supondremos simple, mientras que el extremo B_0 trazará en su desplazamiento otra curva cerrada B_0B_1, que supondremos simple igualmente. El área de barrido se calculará en este caso mediante la suma de las áreas, con el signo que les corresponda según la orientación de la curva cerrada descrita de los recintos delimitados por las curvas cerradas que describen A_0 y B_0, que denotaremos R_1 y R_2 respectivamente, en el desplazamiento del arco de curva A_0B_0, según se esquematiza en la figura 6.

Si uno de los extremos, por ejemplo B_0, describiera un arco simple de curva no cerrado, el área sería la de R_1, ya que el área de la figura plana que encierra la curva descrita por B_0 sería nula. La figura 7 ilustra la situación.

Para calcular el área, suponiendo que A recorre una curva simple de Jordan cerrada, que B recorre un arco y que AB vuelve a su posición inicial, supongamos que AB y A'B' sean dos posiciones infinitamente próximas, tal y como se indica en la figura 8, donde α es al ángulo que forma en cada punto la tangente al arco de curva que describe B con la barra trazadora AB cuando A describe el recinto que se desea medir.

$$d\sigma = \mathrm{AB}\,\mathrm{ds}\ \mathrm{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2\,d\theta$$

Para calcular el área de la figura barrida por el segmento AB, cuando este segmento parte de una posición determinada y vuelve a la misma se ha de integrar. Al realizar esa integración, el primer sumando se integrará a lo largo de la curva descrita por A y el segundo entre dos valores idénticos de θ por lo que la integral se anulará y quedará:

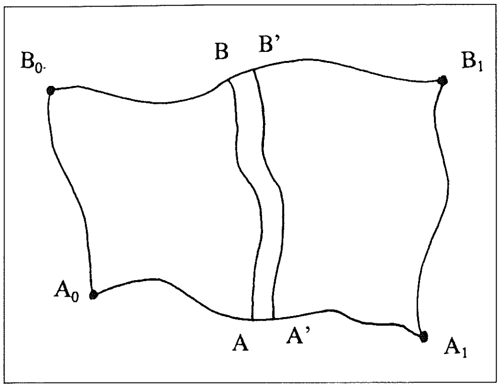
$$\sigma = \int_C \mathrm{AB}\,\mathrm{ds}\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

Mecanismos de un planímetro

Supongamos que una ruedecilla se apoya en un plano rugoso y que su eje permanece paralelo al plano. La ruedecilla posee un plano de simetría perpendicular a ese plano llamado plano de la ruedecilla. La intersección del plano de la ruedecilla con el plano de apoyo se denomina traza de la ruedecilla. El punto de contacto de la ruedecilla con el plano describe una línea llamada trayectoria de la ruedecilla.

Cuando la ruedecilla se pone en movimiento sobre el plano describe alrededor de su eje una cierta rotación, medida con un ángulo, la longitud del arco de este ángulo medido sobre la circunferencia de la ruedecilla se llama rodadura.

Figura 5



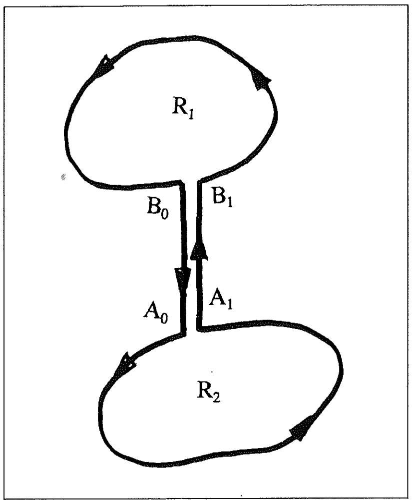
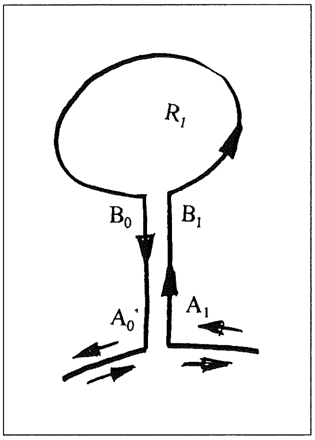


Figura 6

Figura 7



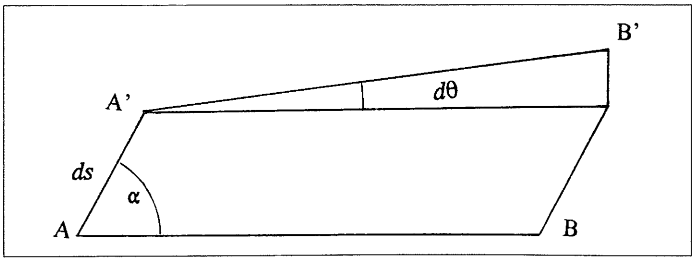


Figura 8

Al girar la ruedecilla se pueden dar los casos siguientes:

1) Giro en torno a la normal al plano en el punto de apoyo: rodadura nula.
2) Traslación en el sentido del eje de la ruedecilla: rodadura nula.
3) Traslación siguiendo la traza de la ruedecilla: hay sólo giro sin deslizamiento, la rodadura es igual a la trayectoria rectilínea descrita.
4) Una traslación siguiendo una línea recta que forma un ángulo determinado con la traza de la ruedecilla. En este caso el movimiento se puede considerar descompuesto en la rodadura que será la proyección de la trayectoria de la ruedecilla sobre la traza de la misma y en una traslación según el eje de la ruedecilla.

Llamando α al ángulo que determina la trayectoria rectilínea con el eje de la ruedecilla, que es, según se ha dicho anteriormente en las áreas de barrido, el ángulo que forma en cada punto la tangente al arco de curva que describe A con la barra trazadora AB cuando B describe el recinto que se desea medir.

Si la rueda realiza un desplazamiento infinitamente pequeño describiendo un arco de curva ds = RR' en este desplazamiento la rueda habrá rodado, pero también habrá tenido un deslizamiento. Las posiciones del eje de la rueda se pueden suponer paralelas en R y R'. La rodadura infinitesimal se medirá sobre una dirección perpendicular al eje de la rueda y vendrá dada en este último caso por:

$$RR_1 = RR'\operatorname{sen}\alpha$$

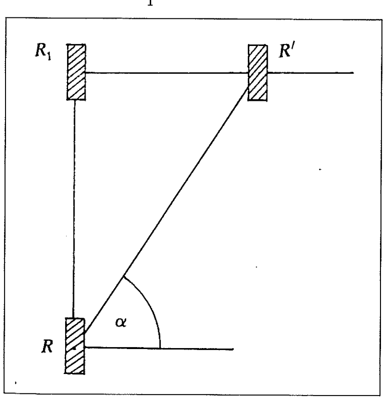


Figura 9

El planímetro de Amsler consta de una varilla que se desplaza paralela al plano de apoyo.

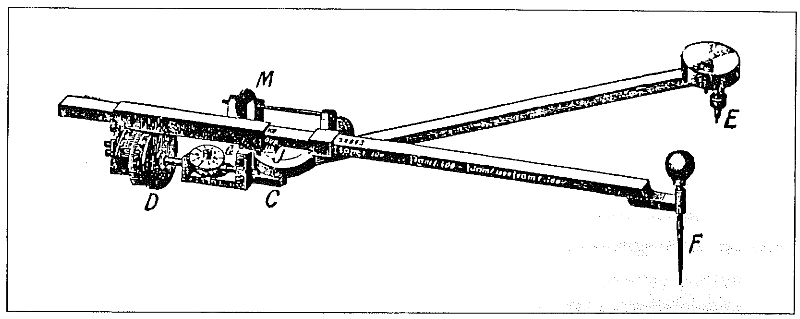
Con estos supuestos resulta fácil evaluar la rodadura cuando se describe una trayectoria cualquiera. Cada desplazamiento elemental de la ruedecilla, ds, puede descomponerse en: ds senα que es la rodadura y en un giro alrededor de la normal al plano de apoyo en el punto de contacto de rodadura nula. La rodadura será, por consiguiente:

$$\int \operatorname{sen}\alpha \, ds$$

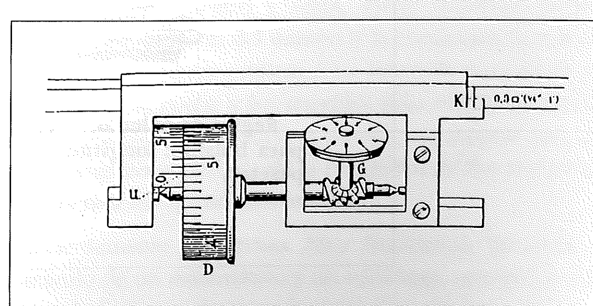
integral que será evaluada a lo largo de la trayectoria descrita por el punto B.

El planímetro de Amsler

El planímetro de Amsler consta de una varilla AB que se desplaza permaneciendo constantemente paralela al plano de apoyo. En el extremo A tiene un trazador mediante el cual se puede recorrer el contorno de la figura que se desee medir, en B está articulada con otra varilla móvil OB.



Planímetro de Amsler



Detalle del tambor y contador del planímetro de Amsler

La varilla OB está sujeta mediante una aguja al plano de apoyo. En la prolongación de la varilla AB, en C, está colocada una ruedecilla graduada que puede girar en torno a si eje AB. La ruedecilla se apoya en el plano y puede girar libremente cuando el extremo A describe la figura que se desea medir (véase figura 1).

Por lo expuesto anteriormente el área del recinto σ viene dada, cuando B describe un arco de circunferencia, por

$$\sigma = AB\,\Delta.$$

Para medir con las unidades adecuadas es preciso que cada planímetro mida una superficie de medida conocida como, por ejemplo, un centímetro cuadrado, que provocará en la ruedecilla una medida de rodadura Δ_0, entonces:

$$\sigma = \int \operatorname{sen}\alpha \, ds$$

El planímetro de Petersen

El fundamento del planímetro de Petersen es el mismo que el de Amsler, la diferencia fundamental estriba en que la ruedecilla que mide los ángulos en el segundo se reemplaza por una corredera en el de Petersen. La modificación realizada se comprende con el siguiente razonamiento. En la fórmula

$$ds = AB\, ds \operatorname{sen}\alpha + (1/2)AB^2\, d\theta$$

AB senα representa la componente normal a la varilla AB del desplazamiento de C (la ruedecilla). Por lo tanto, si C recorre una barra DE manteniéndose normal a AB (figura 10), sin que la corredera tenga desplazamiento en el sentido de su longitud el punto C se desplazará

$$\sigma = AB\,\frac{\Delta}{\Delta_0}$$

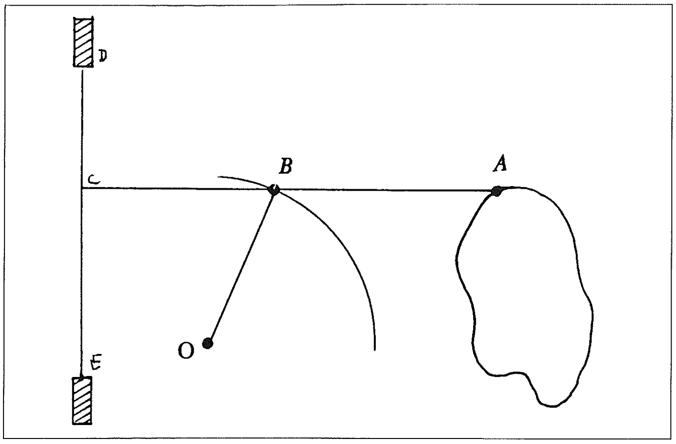


Figura 10

Víctor Arenzana
IES Félix de Azara
Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
Pedro S. Ciruelo

Bibliografía

ÁLVAREZ VALDÉS, L. (1945): *Topografía, instrumentos métodos y aplicaciones*, Dossat, Madrid.

COURANT, R. y F. JOHN (1971): *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa-Wiley, México.

REY PASTOR, J., P. PI CALLEJA, y C. A. TREJO (1969): *Análisis matemático. Análisis algebraico, teoría de ecuaciones, cálculo infinitesimal de una variable*, Tomo I, Kapelusz, Buenos Aires.

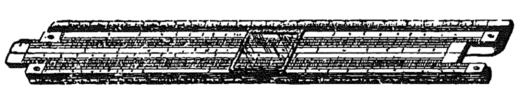


Fig. 58. — Regla de cálculo

Reglas de cálculo.—Núm. 285. — De madera con placa celuloide, para bolsillo: longitud 14 cm., con folleto explicativo; ejemplar, 17 pesetas.

Regla de cálculo
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

SUMA 21
febrero 1996, pp. 81-87

Papel pericial de las matemáticas. Los repartos

Lina María Cecilia Gámiz
Pablo Flores Martínez

IDEAS Y RECURSOS

¿Hay un matemático en la sala..?
Les Aventures d'Anselme Luturlu,
Jean-Pierre Petit

Con objeto de contextualizar la proporcionalidad, hemos planteado en diversos niveles de enseñanza de las matemáticas, el clásico problema de la herencia de camellos. En este artículo presentamos la solución y las reflexiones que ha realizado sobre el problema una estudiante para profesora de matemáticas de secundaria. Estas reflexiones nos han permitido profundizar sobre el significado matemático de reparto y sobre el papel pericial de las matemáticas.

En las matemáticas de enseñanza primaria y secundaria se suelen estudiar los repartos como aplicación de las propiedades y cálculos proporcionales. Los múltiples problemas relacionados con herencias, pagos, mezclas y aleaciones, grifos, jornales, etc. nos han servido para contextualizar la proporcionalidad directa o inversa. Los profesores estamos convencidos de que en estas situaciones se ha requerido una utilización pericial de las matemáticas, lo que da lugar a que el matemático se convierta en un Salomón que establece criterios objetivos de reparto.

Esta labor pericial de la matemática se restringe al aula, ya que los repartos proporcionales, realizados en los problemas reales similares a los planteados en clase, no siempre dejan contentos a los implicados, que pueden despreciar por simplista la solución matemática. La complicación real de los problemas de reparto hace que se pongan en juego otros datos y circunstancias que no siempre son reducibles a aplicaciones lineales. Así, los repartos de terrenos no pueden hacerse por simple división de la superficie, ya que, por ejemplo, la forma del terreno puede introducir aspectos no repartibles (acceso a un camino, orografía del terreno, etc.) (Alonso y otros, 1991). También pueden influir la vegetación del terreno o la conveniencia o no de partirse para poder edificar. Una herencia compuesta por una casa, un coche y los muebles sólo admite un reparto proporcional si se traduce en dinero y se reparte éste, con la consiguiente pérdida de la integridad de los bienes que los herederos quisieran conservar.

Recientemente, la revista *Muy Interesante* presenta un artículo de un matemático y un sociólogo, quienes se ocupan de la forma de repartir entre dos personas, tres, cuatro, etc., tartas y objetos reales, de manera que todos ellos se sientan satisfechos (Hively y Sardón, 1995). También está de actualidad el reparto del tiempo de publicidad gratuita a los partidos políticos en tiempo de elecciones, o el de los minutos dedicados a cada partido en los noticiarios.

En vista de la dificultad de afrontar en clase de matemáticas estos repartos, los profesores seguimos haciendo uso de los problemas tradicionales para hablar de repartos proporcionales. Pero la introducción del debate en clase, como forma de validar la resolución de problemas, vuelve a poner en evidencia lo incompleto de los procedimientos estándares de resolución.

En este artículo vamos a referirnos a problemas típicos de reparto, y cómo estos problemas han sido resueltos en diferentes niveles de enseñanza. Un enunciado que ha suscitado diversas respuestas, y ha llegado a interesar a los alumnos por la validez de cada una de ellas, se refiere al reparto de los gastos en una oficina. Por ejemplo:

Un abogado, un gestor y un contable comparten una oficina. El abogado la utiliza 5 días por semana, el gestor 3 y el contable 2. El alquiler semanal de la oficina es de 12.000 pts. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

La expectativa del profesor al plantear este problema es que los alumnos hagan un reparto proporcional, y efectivamente, algunos estudiantes lo resuelven sin dudar sumando días, dividiendo el precio entre la suma de días y multiplicando esta cantidad por el número de días que asiste cada uno. Esta respuesta tiene la ventaja de que la suma de lo que pagan los tres es 12.000 pts. y que las proporciones relativas entre las cantidades pagadas es la misma que existe entre los días que emplean la oficina (el abogado paga 5/3 de lo que paga el gestor, etc.).

Al plantear este problema en 1.° de BUP, algunos alumnos me preguntaron por el número de días en que coincidían dos o tres de los inquilinos. Esta pregunta, aparentemente improcedente, me hizo reflexionar sobre la interpretación que hacían los alumnos de las condiciones del problema y de los criterios de reparto. Sólo entonces caí en la cuenta de que el papel pericial del que se arropa el profesor de matemáticas choca a veces con la realidad de la situación. Pero, además, observé que, en general, el grupo de alumnos aceptaba como equitativas otras formas de reparto, en las que se consideraba que cada uno debería pagar menos el día que coincidía con otros que si iba solo.

Este problema lo he planteado también en cursos de formación inicial de profesores, tanto a estudiantes para profesor de enseñanza primaria, como a futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. En estos tres ámbitos han surgido cuestiones similares y, aunque en el caso de los estudiantes de los últimos cursos de la licenciatura de matemáticas la disposición inicial fue resolverlo por el reparto proporcional, no rechazaron de plano otras soluciones e interpretaciones posibles.

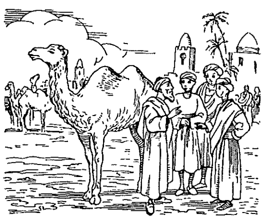


Ilustración del «problema de los camellos» que aparece en *Aritmética Segundo grado.* Editorial Luis Vives, Zaragoza, 1955.

Una situación similar se planteó con un problema típico, que ha tenido diversos enunciados: el *problema de los camellos:*

Un señor deja en herencia a sus tres hijos, 11 camellos. En su testamento manifiesta su voluntad de que el hijo mayor reciba la mitad de su fortuna, el segundo un cuarto de la misma y el tercero un sexto. ¿Cuántos camellos le corresponden a cada hijo?

Como no se pueden partir los camellos, el notario pide prestado un camello al vecino. De esta forma junta 12 camellos, la mitad de los cuales, 6, corresponden al hijo mayor, la cuarta parte, 3 camellos, corresponden al segundo hijo, y 2 camellos, un sexto de 12, corresponden al pequeño. Se han repartido así 6 +3 + 2 = 11 camellos, con lo que se puede devolver el camello prestado. ¿Cómo es posible que sobre este camello al hacer el reparto?

Al plantear este problema, mi expectativa, como profesor, es que los alumnos descubran que el reparto previsto por el difunto no es exhaustivo.

He planteado este problema también en los tres ámbitos descritos: primero de BUP, primero de Magisterio y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Se obtuvieron respuestas diversas. La primera reacción, de los alumnos de 1.° de BUP y algunos de Magisterio, fue el aceptar el reparto como perfecto, ya que: se repartían los 11 camellos, no tenía que intervenir el carnicero y se respetaban los criterios del padre. Algunos se limitaron a considerar que lo entendían, ya que habían comprendido que 6 es la mitad de 12, etc. Otros se extrañaban de un reparto en el que sobra justamente lo prestado, pero no llegaban a encontrar la razón. Los más aventajados de BUP y Magisterio, así como todos los estudiantes de la licenciatura de matemáticas, sumaron las fracciones y mostraron la incompletitud del reparto propuesto.

Sin embargo, una profesora de matemáticas de los cursos de formación propuso una solución original a la que había llegado junto con su hermano, graduado social. La naturaleza de la solución y las reflexiones que realizaron me ha parecido tan interesante que le sugerí a la autora que las generalizara y las escribiera para su publicación. El texto que aparece a continuación refleja este razonamiento de la profesora en formación. Posteriormente, establecemos unas conclusiones en relación con los repartos y a las soluciones propuestas.

El problema de los camellos

Este tipo de problemas «con truco» no dejan de ser curiosos e intrigantes para muchas mentes matemáticas y otras «no tan matemáticas». En este caso, resulta un tanto extraño el hecho de que haga falta pedir prestado un camello para poder repartir y, luego, sobre justamente ese camello. Es cierto que mediante este procedimiento se reparte toda la herencia y se supone que todos quedan conformes... ¿o no?

Socialmente, cabría plantearse si se ha respetado realmente la voluntad del difunto. Si no fuera así, alguno de los hermanos podría protestar. Pero ocurre que en este particular reparto todos salen ganando, porque se llevan un poco más de lo que les corresponde (6 camellos es más de la mitad de 11 camellos, etc.). Así, todos quedan contentos. Sin embargo, alguno podría plantearse si sus hermanos han ganado más o menos que él.

En teoría, las matemáticas deberían dar respuesta a cualquier problema de reparto. Entonces, habrá que justificar de algún modo el que los camellos se hallan distribuido de esa forma.

Estas son algunas de las reflexiones que surgieron al afrontar este problema. Primeramente, llegué a la conclusión de que las fracciones de la herencia propuestas por el padre no sumaban el total, que es la respuesta que se pretende obtener de los alumnos. Así, se explicaba el hecho de que al pedir un camello y realizar las divisiones correspondientes con doce camellos, sobrara uno. Es decir, como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

si tomamos estas proporciones de cualquier cantidad, siempre va a sobrar 1/12 de esa cantidad. En particular, para 11 camellos se tendría:

$$\frac{11}{12} + \frac{11}{4} + \frac{11}{6} = 11 \times \frac{11}{12} = \frac{121}{12}$$

Si tomamos un camello prestado, efectivamente se reparten los 11 camellos y sobra 1 (que es un doceavo de 12):

$$\frac{12}{2} + \frac{12}{4} + \frac{12}{6} = 6 + 3 + 2 = 11$$

Llegados a este punto, yo pensaba que el problema no estaba totalmente resuelto, que había que dar una respuesta más concreta sobre si el reparto final era justo o no. Fue entonces cuando se lo planteé a mi hermano, que tampoco quedó satisfecho con la respuesta anterior y, entre los dos, empezamos a discutir y a reflexionar sobre lo que ocurría en este reparto. Llegamos así a la conclusión de que era «relativamente justo», tal como pone de manifiesto la formalización matemática de este razonamiento, desarrollado a continuación.

Este tipo de problemas «con truco» no dejan de ser curiosos e intrigantes para muchas mentes matemáticas y otras «no tan matemáticas».

En principio, no se reparte la herencia como quiere el padre, puesto que esto es imposible sin que intervenga el carnicero. Además, ¿quién se lleva lo que sobra de la herencia? La solución está en intentar dividir el total de la herencia respetando en lo posible los deseos del padre.

Veamos primero cuánto le correspondería exactamente a cada hermano:

1.°: 11/2 = 5 + 1/2, 5 camellos y 1/2 de camello.

2.°: 11/4 = 2 + 3/4, 2 camellos y 3/4 de camello.

3.°: 11/6 = 1 + 5/6, 1 camellos y 5/6 de camello.

Como 11/2 + 11/4 + 11/6 = 121/12, sobraría

$$11 - \frac{121}{12} = \frac{11}{12}$$

de un camello o, lo que es lo mismo, un doceavo de la herencia. Lo más justo sería ahora dividir esta cantidad restante en la proporción especificada por el padre. De este modo, al primer hermano le correspondería (1/2)x(11/12), al segundo (1/4)x(11/12) y al tercero (1/6)x(11/12), además de lo que tenían (podemos apreciar que les faltaba justamente 1/2, 1/4 y 1/6 a cada uno para completar un camello, pero éstas son proporciones de 1, y no de 11/12, que es lo que sobra). En total, se tiene:

$$1.^{\circ}:\ 5 + \frac{1}{2} + \frac{11}{24} = 5 + \frac{23}{24}$$

$$2.^{\circ}:\ 2 + \frac{3}{4} + \frac{11}{48} = 2 + \frac{47}{48}$$

$$3.^{\circ}:\ 1 + \frac{5}{6} + \frac{11}{72} = 1 + \frac{71}{72}$$

Pero la herencia aún no se ha repartido del todo, puesto que, de los 11/12 sobrantes, sólo se han distribuido

$$\frac{1}{2}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12} = \frac{121}{144}$$

Quedan todavía

$$\frac{11}{12} - \frac{121}{144} = \frac{11}{144}$$

por repartir (un doceavo de 11/12).

Reiterando este proceso, vemos que siempre va a sobrar un doceavo de lo que se reparte, si lo hacemos según la fórmula inicial del testamento. Es fácil comprobar por inducción que en el n-ésimo reparto sobran $11/12^n$:

Para n=1, repartimos 11 camellos y sobran 11/12.

Supongamos que la n-ésima vez sobran $11/12^n$. Entonces, en la (n+1)-ésima vez hay que repartir dicha cantidad. Así:

$$\frac{1}{2}\times\frac{11}{12^n} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^n} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^n} = \frac{11}{12}\times\frac{11}{12^n}$$

y sobran

$$\frac{11}{12^n} - \frac{11^2}{12^{n+1}} = \frac{11}{12^{n-1}}$$

Observamos que, cuando n tiende a infinito, $11/12^n$ tiende a cero. Así, en un número infinito de pasos, se repartiría el total de la herencia de la manera adecuada. Veamos cuánto le correspondería a cada hermano, suponiendo realizado este reparto en sus infinitos pasos:

$$1.^{\circ}:\ \frac{11}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{2}\times\frac{11}{12^2} + \ldots = \frac{11}{2}\left(1 + \frac{11}{2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{11}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{11}{2}\times\frac{12}{11} = 6$$

$$2.^{\circ}:\ \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^2} + \frac{1}{4}\times\frac{11}{12^3} + \ldots = \frac{11}{4}\times\frac{12}{11} = 3$$

$$3.^{\circ}:\ \frac{11}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^2} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{12^3} + \ldots = \frac{11}{6}\times\frac{12}{11} = 2$$

La idea de «infinito actual» presente en este razonamiento no es fácilmente comprensible por personas no matemáticas.

Al primero le corresponderían justamente 6 camellos, al segundo 3 y al tercero 2. Por tanto, el reparto que se ha efectuado es *el que sería justo, después de un número infinito de pasos.* Podemos observar, por otro lado, que se conservan las proporciones relativas (el primero se lleva el doble que el segundo y el triple que el tercero, etc.).

La idea de «infinito actual» presente en este razonamiento no es fácilmente comprensible por personas no matemáticas. Mi hermano hizo un comentario curioso al respecto: según él, tal reparto era imposible de realizar, puesto que nosotros no podemos concebir el infinito como algo real; sólo podemos aceptarlo como justo si «creyéramos en el infinito», de la misma forma en que se tiene fe en Dios. Esto me hizo reflexionar sobre el concepto de infinito, que si a veces es difícil de comprender incluso para un matemático, más aún lo es para los que no lo son. De acuerdo con esta idea, sería probablemente una ardua tarea convencer a los tres hermanos del problema de que el reparto ha sido «lo más justo posible». Pero, al menos matemáticamente, se ha llegado al fondo del asunto.

No obstante, quedaría aún una cuestión por resolver en el aspecto matemático: ¿por qué funciona el «truco» de pedir prestado un camello? Este es el recurso práctico que se emplea para solucionar el problema de una manera sencilla y rápida. Pero hay que justificarlo.

En el caso que nos ocupa, se ve claro que, como 12 es múltiplo de 2, 4 y 6, se obtienen números enteros al repartir y, además, se reparten justamente 11, que son 11/12 de 12. Por otro lado, hemos demostrado que estos números coinciden con los «justos».

Pero, si inicialmente tuviéramos un número de camellos distinto de 11, ¿cuántos tendríamos que pedir prestados para que se repartieran de la forma adecuada? ¿Y si las proporciones exigidas por el padre fuesen otras distintas?

Nos estamos planteando, como es usual en matemáticas, la posibilidad de generalización de este problema. Si consideramos una cantidad genérica c de objetos cualesquiera, a repartir entre 3 personas, según unas proporciones $1/a_1$, $1/a_2$, 1/a3, de manera que su suma sea menor que 1, podríamos seguir el mismo proceso anterior para repartir totalmente c (evidentemente, c, a_1, a_2 y a_3 son números naturales):

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{m}{a_3}}{m} < 1$$

donde m= mcm (a_1, a_2, a_3).

Si denominamos s a la suma (que obviamente es un número entero), podemos escribir:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{s}{m}$$

La proporción sobrante es

$$1 - \frac{s}{m} = \frac{m-s}{m}$$

Por tanto, a la primera persona le correspondería:

$$\frac{c}{a_1} + \frac{c}{a_1} \times \frac{m-s}{m} + \frac{c}{a_1} \times \left(\frac{m-s}{m}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{c}{a_1} \times \left(1 + \frac{m-s}{m} + \left(\frac{m-s}{m}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{c}{a_1} \times \frac{1}{1 - \frac{m-s}{m}} = \frac{c}{a_1} \times \frac{m}{s}$$

Procediendo de forma análoga, la segunda persona se llevaría cm/a_2s y la tercera cm/a_3s.

Se ve fácilmente que la suma de las tres cantidades es c:

$$\frac{cm}{a_1s} + \frac{cm}{a_2s} + \frac{cm}{a_3s} = \frac{cm}{s} \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) = \frac{cm}{s} \times \frac{s}{m} = c$$

De este modo, se consigue repartir totalmente la cantidad inicial. Pero lo ideal sería que cada una de esas tres cantidades fuese un número entero, para poder resolver un caso análogo al de los camellos. Esto no siempre va a ocurrir. Únicamente será cierto si *cm* es múltiplo de a_1s, a_2s y a_3s. Para cantidades y proporciones que no verifiquen esto, no se podría resolver el problema por esta vía, sin tener que «partir» los objetos.

Busquemos, pues, condiciones para la cantidad inicial y para las proporciones del reparto. Consideremos la primera cantidad, cm/a_1s. Se tiene que cumplir que $a_1s \mid cm$, pero sabemos que $a_1 \mid m$, por definición. Entonces, lo que hay que imponer es que

$$s \mid c \times \frac{m}{a_1}$$

Igualmente, se ha de verificar que

$$s \mid c \times \frac{m}{a_2} \quad y \quad s \mid c \times \frac{m}{a_3}$$

Distinguimos dos casos:

1) Si s es un número primo, como $s \mid c(m/a_1)$, el teorema de Euclides afirma que $s \mid c$ o $s \mid (ma_1)$. Pero s no puede dividir a m/a_1 porque

$$s = \frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{m}{a_3} > \frac{m}{a_1}$$

luego, necesariamente, $s \mid c$. Considerando las otras dos cantidades se obtiene la misma condición. Esta condición es necesaria y suficiente, ya que

$$\text{si } s \mid c \Rightarrow s \mid c\frac{m}{a_1},\ s \mid c\frac{m}{a_2},\ s \mid c\frac{m}{a_3}$$

2) Si s no es primo, y $s \mid c(m/a_1)$, $s \mid c(m/a_2)$, $s \mid c(m/a_3)$, puede ser que s no divida a ninguno de los dos factores de cada producto. Supongamos que s no divide a c. Entonces, s tiene factores primos comunes con m/a_1, m/a_2, m/a_3 y c. Si llamamos p al producto de los factores de s comunes con c y q al producto del resto de los factores de s ($q \neq 1$, puesto que s no divide a c), tendríamos que $s = pq$, con $p \mid c$ y $q \mid (m/a_1)$, $q \mid (m/a_2)$ y $q \mid (m/a_3)$.

$$\text{Si } q \mid \frac{m}{a_1} \Rightarrow \frac{m}{a_1} \times a_1 = m \Rightarrow \frac{m}{q} \text{ es entero.}$$

Por otro lado

$$\text{si } q \mid \frac{m}{a_1} \Rightarrow a_1q \mid \frac{m}{a_1} \times a_1 \Rightarrow a_1 \mid \frac{m}{q}$$

Análogamente, se deduce que $a_2 \mid m/q$ y $a_3 \mid m/q$.

Pero esto es una contradicción, ya que m/q sería múltiplo de a_1, a_2 y a_3, y $m/q < m = \mathrm{mcm}(a_1, a_2, a_3)$. En consecuencia, se ha de cumplir que $s \mid c$.

En cualquier caso, se llega a que *c ha de ser múltiplo de s*. Es decir, la cantidad inicial a repartir debe ser divisible por el numerador de la suma de las proporciones. Esto se cumple en el caso particular de los camellos, en donde c = 11 y s = 11.

En la práctica, como ya he señalado, para hacer este reparto nos convendría saber cuántos objetos hemos de pedir prestados para dividir y obtener las cantidades adecuadas, de manera que se reparta sólo la cantidad inicial y podamos devolver lo prestado. Si notamos por *c'* a la nueva cantidad a repartir, debe verificarse lo siguiente:

$$\frac{c'}{a_1} = \frac{cm}{a_1 s} \qquad \frac{c'}{a_2} = \frac{cm}{a_2 s} \qquad \frac{c'}{a_3} = \frac{cm}{a_3 s}$$

Por estas igualdades, se tiene que

$$c' = \frac{cm}{s} = \frac{c}{s}m$$

Esto implica que *c' es múltiplo de m,* ya que c/s es un número entero, por la condición obtenida anteriormente.

El número de objetos que tendríamos que pedir sería la diferencia:

$$c' - c = \frac{cm}{s} - c = c\left(\frac{m}{s} - 1\right) = c\frac{m-s}{s} = \frac{c}{s}(m-s)$$

Es decir, el número buscado sería la diferencia entre el denominador y el numerador de la suma de las fracciones multiplicada por el número de veces que *c* contiene al numerador.

Así, en el caso de los camellos, c' = (11/11)x12 = 12 y c' – c = 1.

Veamos más ejemplos, variando el número de camellos y las proporciones:

1) Si $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 6$, necesitamos un *c* que sea múltiplo de 11, puesto que 1/2 + 1/4 + 1/6 = 11/12. En este caso, s = 11 y m = 12.

Tomemos c=2x11=22. Entonces, c'=(22/11)x12=2x12=24 y hay que pedir 2 camellos.

Si c=3x11=33 ⇒ c' = 3x12 = 36, hay que pedir 3 camellos.

Si c=4x11=44 ⇒ c' = 4x12 = 48, hay que pedir 4 camellos.

Se puede observar que si tomamos c = ns, con *n* un número natural, entonces c' = nm y c' – c = n(m–s), o sea, *todas las cantidades se multiplican por el mismo número.*

2) Si $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 6$, 1/2 + 1/5 + 1/6 = 26/30, luego s = 26 y m = 30 (no debemos simplificar la fracción porque el denominador dejaría de ser múltiplo de 2, 5 y 6, y no saldrían números enteros).

Tomemos distintos valores para *c*:

c = 26 ⇒ c' = (26/26)x30 = 30, hay que pedir 4.

c = 52 ⇒ c' = (52/26)x30 = 2x30 = 60, hay que pedir 8.

c = 78 ⇒ c' = (78/26)x30 = 3x30 = 90, hay que pedir 12.

El nivel de prefracción se caracteriza por la no exhaustividad de la partición o por obtener una partición desigual.

Aquí también se aprecia claramente que c, c' y c–c' se van multiplicando por el mismo número.

En resumen, será posible resolver un problema de este tipo si *partimos de una cantidad que sea múltiplo del numerador de la suma de las fracciones, y bastará con sumar a* c *tantas veces la diferencia entre el denominador y el numerador como* c *contiene al numerador, y luego dividir según las proporciones establecidas.*

Se puede seguir un procedimiento análogo para repartir una cantidad entre *n* personas, según *n* proporciones cualesquiera (considerando siempre fracciones irreducibles) con suma menor que 1. El razonamiento presenta ligeras variaciones en el caso de que algunas de las fracciones tengan numerador distinto de 1, pero las conclusiones son las mismas.

Conclusión

Hetú y Desjardins (1978) establecen tres niveles en el dominio de las fracciones. El nivel de prefracción se caracteriza por la no exhaustividad de la partición (figura 1) o por obtener una partición desigual (figura 2).

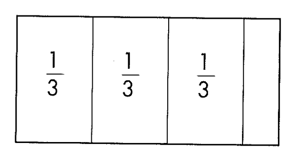


Figura 1

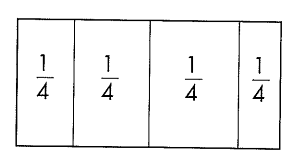


Figura 2

La proporcionalidad realiza los repartos de manera *exhaustiva, igualitaria* y *manteniendo las proporciones relativas,* con lo que salva simultáneamente tres exigencias:

- *Equitatividad de reparto* (las partes son una porción establecida de la cantidad total).
- *Exhaustividad* (la suma de las partes cubre el total a repartir).
- *Proporciones relativas* (los trozos resultantes guardan entre sí la misma relación que las fracciones que los definen).

Cuando el reparto tiene unas condiciones que impide la proporcionalidad, la matemática también puede ayudar a realizarlo salvando alguna de estas tres exigencias. Este estudio matemático es el que lleva a Hively y Sardón (1995) a proponer el reparto de «Salomón», que no es exhaustivo (ya que en el caso de repartos entre más de dos personas tienen que prescindir de porciones del total).

En el caso de los camellos, o bien el reparto no es exhaustivo (si se considera que el total a repartir son los 11 camellos más el prestado), o bien no respetan las proporciones (ya que 6 no es la mitad de 11, 3 no es la sexta parte, etc). Sin embargo, si se respeta la relatividad de las proporciones: 6 es el doble de 3, como 1/2 es el doble de 1/4, etc.

Sin embargo, el reparto propuesto por Lina mantiene la proporcionalidad relativa y le da exhaustividad en relación a la población de 11 camellos, aunque no respete las proporciones. Observamos, pues, que esta forma de entender el reparto ha mejorado la interpretación que hacemos en clase al plantear el dilema. Da un paso en la utilización de métodos matemáticos para la resolución de problemas de reparto, en aquellos casos en que es imposible hacerlo mediante la proporcionalidad. La generalización realizada le da una mayor profundización matemática.

Las reflexiones que se han suscitado en Lina son dignas de tener en cuenta en el contexto de formación de profesores por dos razones: primero porque muestran el papel que ha jugado el análisis de situaciones escolares (de reparto) para generar esas reflexiones; segundo, porque nos ha ayudado a criticar el papel pericial (reparto como proporcionalidad) de la matemática, llevándonos a profundizar en otros tipos de empleos de la matemática.

Lina M.ª Cecilia
Profesora de Secundaria en formación
Pablo Flores
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Bibliografía

ALONSO, C. y otros (1991): «Análisis de cuatro problemas», *Epsilon*, n.° 21, 89-127.

HETU, J. C. y M. DESJARDINS (1978): *L'activité mathematique dans l'enseignement des fractions*, Presses de l'Université de Quebec.

HIVELY, W. y A. SARDÓN (1995): «La fórmula de Salomón», *Muy Interesante*, n.° 171, 52-55.

PETIT, J. P. (1980): *Le Géométricon*, Belin, París.

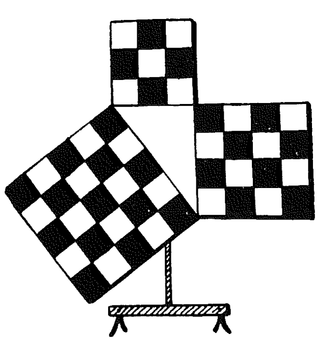


Fig. 65. — Aparato para la comprobación experimental del teorema de Pitágoras

N.° 340.—D. C. P.—(Fig. 65). — **Aparato para la comprobación experimental del teorema de Pitágoras.** — En madera, excelente presentación, 20 pesetas.

Núm 341. — D. C. P. — **Caja para la comprobación experimental de la relación que existe entre los volúmenes del cilindro, cono y esfera.** — Los sólidos, con la probeta graduada, en estuche de madera. Precio, 24 pesetas.

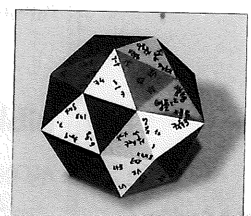
Núm. 343. — D. C. P. — **Modelo para la demostración del valor de π. del arco de círculo equivalente al diámetro.** En madera, con caja estuche, 10 ptas.

Teorema de Pitágoras
Catálogo del Material Escolar de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

SERVICIO DE PUBLICACIONES

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

IV OLIMPÍADA MATEMÁTICA NACIONAL ESPAÑOLA



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Recopilación de los problemas propuestos en las distintas fases provinciales, autonómicas y estatal de la «IV Olimpiada Matemática Nacional», organizada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Precio

Socios	1.000 pta
No socios	1.500 pta
Extranjero	$150 USA

OTRAS PUBLICACIONES

- **V Olimpiada Matemática Nacional**
  Socios: 1.250 pta
  No socios: 1.750 pta
  Extranjero: $175 USA

- **VI Olimpiada Matemática Nacional** (Próxima aparición)
  Reserve su ejemplar a un precio especial de lanzamiento (oferta válida hasta el 1 de abril de 1996)
  Socios: 1.250 pta
  No socios: 1.750 pta
  Extranjero: $175 USA

- **Actas V JAEM** (Próxima aparición)
  Reserve su ejemplar a un precio especial de lanzamiento (oferta válida hasta el 1 de abril de 1996)
  Socios: 1.000 pta
  No socios: 1.5000 pta
  Extranjero: $1550 USA

Solicitud de pedidos

(El envío se servirá contrarreembolso a los precios indicados más gastos)

Servicio de Publicaciones. FESPM. Apartado de Correos 1009. 03080 ALICANTE

SUMA 21
febrero 1996, pp. 89-96

El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización

Carlos Maza Gómez

IDEAS Y RECURSOS

La reforma educativa en Matemáticas alienta la utilización de problemas históricamente no matemáticos en origen y que reciben una progresiva matematización: el caso planteado es el del dibujo del embaldosado cuya técnica comienza en el siglo XIV y conoce importantes resultados matemáticos en el siglo XVI. Entre éstos se destacan por su importancia y su posible utilización en el aula las técnicas de 2/3, la de Alberti y la construcción actual de Della Francesca. El teorema de Vignola-Danti vendrá a culminar este proceso de matematización.

Historia y educación matemáticas

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza en el área de Matemáticas es el concepto del que se parte respecto de la naturaleza del conocimiento matemático. Como se afirma repetidamente en su texto básico (MEC, 1989) el conocimiento matemático se adquiere mediante un proceso que resulta clarificado por el estudio de la historia. Así, se sostiene que

La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (p. 479).

Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de las matemáticas, del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo (p. 480).

Estas consideraciones se entroncan en la línea característica de la filosofía de la matemática de la última mitad de este siglo, una línea que, inaugurada por Lakatos, considera su objeto de trabajo no tanto la naturaleza en sí del concepto matemático sino su génesis o, en otras palabras, el proceso de construcción del conocimiento matemático.

A partir de lo dicho en el documento básico de la reforma educativa se extraen inmediatamente unas consecuencias didácticas en torno a la forma que tiene que adoptar el aprendizaje del alumno en Matemáticas:

debe tenerse en cuenta, por una parte, que determinados conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y, por otra, que a menudo estos problemas no estrictamente matemáticos en su origen proporcionan la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos

a lo que se añade poco después que

Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías (p. 480).

lo que consigue completar en mayor medida el panorama sobre la relación entre historia y educación matemáticas: la forma de aprendizaje que el profesor debe fomentar entre sus alumnos de Matemáticas es un proceso constructivo del conocimiento matemático basado en todas las características que el enfoque actual de la historia señala, tal como ser un proceso acumulativo e interrelacionado, falible, originado en el contraste de unas teorías con otras a partir de un enfoque empírico-inductivo con una formalización posterior, con una forma de validación social, etc.

De esta forma la historia de la matemática no es un simple conjunto de problemas históricos que introducir en clase, unas anécdotas biográficas que motiven al alumno. No es un recurso ocasional sino uno de los fundamentos epistemológicos de la actual reforma curricular.

No obstante, para que la historia de la matemática responda a la importancia social hoy concedida (y que se traduce en su presencia constante en los congresos celebrados sobre educación matemática en nuestro país) debe cumplir una serie de condiciones:

1) Que alcance a constituirse como campo de trabajo e investigación, lo que requiere el análisis de los elementos que la constituyen y las relaciones que es posible establecer con el campo educativo (Maza, 1994). Ello debe generar el planteamiento de problemas susceptibles de ser investigados con todo rigor.
2) Que los profesores la puedan ver como un recurso didáctico de importancia y utilidad en su trabajo de aula. Este objetivo exige la transformación del saber encerrado en los libros de historia de la matemática en un saber que se debe enseñar por parte del profesor. Esta transposición del conocimiento debe ser un trabajo conjunto de los especialistas en la materia y de los profesores que van a poner en práctica este saber así generado.
3) Condición fundamental es la divulgación entre el profesorado de los contenidos de la historia de la matemática pero, al tiempo, una condición previa para ello es que los especialistas en este campo del saber orienten su labor, no sólo al estudio gratificante de la historia en sí misma, sino a su repercusión en las aulas. En otras palabras, si la élite de los estudiosos se orienta hacia el conocimiento en sí olvidando sus aspectos prácticos y su repercusión en la educación matemática podremos afirmar casi con seguridad que la historia de la matemática irá desapareciendo de los congresos paulatinamente y, lo que es más grave, que su consideración no afectará a la modificación y mejora de los procesos educativos en el aula de Matemáticas.

...la forma de aprendizaje que el profesor debe fomentar entre sus alumnos de Matemáticas es un proceso constructivo del conocimiento matemático basado en todas las características que el enfoque actual de la historia señala...

El dibujo del embaldosado: importancia histórica y didáctica

En la línea de todo lo dicho anteriormente se presenta en este artículo un estudio breve y fundamentalmente práctico sobre «un problema no estrictamente matemático en su origen» que, sin embargo, muestra cómo surge y se construye el proceso de matematización. Al tiempo, sus resultados son una muestra interesante de aplicación de los triángulos semejantes a la resolución de un problema histórico como ha sido la representación pictórica de los volúmenes y, en concreto, del dibujo en profundidad de un suelo embaldosado.

A comienzos del siglo XIV una nueva clase socio-económica emergía en la estructura social de la Edad Media occidental: la burguesía. Su inferioridad de clase frente a la aristocracia y su superioridad en aspectos comerciales impelía a los burgueses a buscar formas de dignificar su posición. Una de ellas sería la realización de encargos pictóricos en forma de retratos, paisajes urbanos, etc. Una de las características que se exigía, sin embargo, a estos encargos es que respetaran las bases científicas ancladas en la realidad en que esta burguesía basaba su crecimiento y posterior triunfo. En otras palabras, no se aceptaba que el punto de vista «interior» del pintor, fundamentalmente desde el punto de vista religioso, modificase la percepción de la realidad que pretendía tener el autor del encargo.

Se asiste así a una irrupción sistemática de intentos de dotar de volumen a un cuadro que, si bien son anteriores al siglo XIV, es en sus comienzos y, en particular, con las obras de Giotto (1267-1337) y Lorenzetti (1290-1348), cuando se registran las primeras aportaciones técnicas de importancia y, en particular, el establecimiento del «punto de fuga» y su aplicación al dibujo del suelo embaldosado de una habitación.

El punto de fuga y la regla de los dos tercios

En su *Anunciación* de 1344 Ambrosio Lorenzetti construye un pavimento de baldosas de forma que todas las rectas que van hacia el fondo convergen en un punto. Con una separación decreciente entre las rectas horizontales a la base del cuadro se consigue un efecto de profundidad respecto a los cuales se situan las figuras en tamaño decreciente. Tal como señala Maltese (1990):

El ajedrezado de la base de la escena constituye un sistema de coordenadas que proporciona una definición todavía aproximativa del tamaño de los objetos y de las distancias que los separan (p. 440).

Sin embargo, el empleo de esta técnica hace surgir diversos problemas, el principal de los cuales es la determinación de las distancias entre las separaciones horizontales. Es obvio que tales separaciones deben ser progresivamente menores pero ¿cuánto menores? Se puede registrar aquí una matematización intuitiva como la que caracteriza a la regla de 2/3. Si la separación inicial es arbitraria (llamémosla *a*), la siguiente será de 2a/3, a continuación 4a/9 (es decir, 2/3 de la separación anterior) y así sucesivamente. De esta manera, las separaciones formarían una progresión geométrica de valor inicial *a* y de razón 2/3 (figura 1).

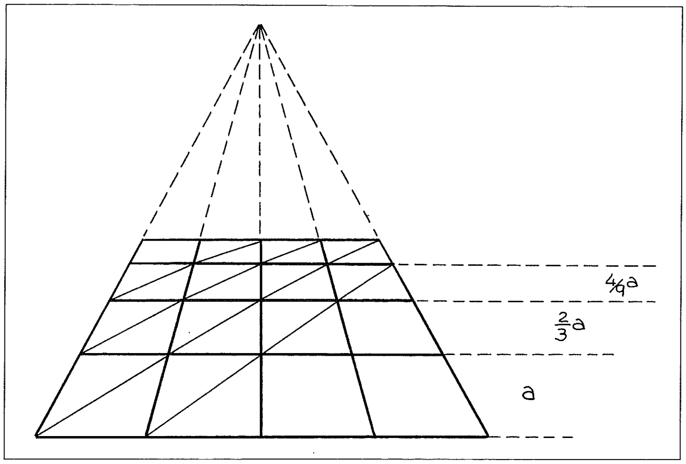


Figura 1

Ambrogio Lorenzetti. *Anunciación* (1344)

Como se puede observar en la figura 1, existe una limitación importante para esta regla: el hecho de que las diagonales de las baldosas cuadradas escogidas para el suelo no son convergentes sino que forman una figura aproximadamente espiral. Esto hace que el efecto visual, cuando el embaldosado es amplio en profundidad, resulte tosco y discrepe de lo esperado en la representación al utilizar el punto de fuga.

Pues bien, se puede considerar el caso de que la base del suelo esté dividida en cuatro partes iguales por los puntos D, C, O, A y B y se tomen como ejes de coordenadas la horizontal del suelo más cercana al observador y la recta perpendicular a la misma pasando por su centro O y por el punto de fuga F (figura 2). El problema consistirá en lo siguiente:

Si se toma F de coordenadas (0,c) y los puntos del eje X de coordenadas D (-2b,0), C (-b,0), A (b,0) y B (2b,0), probar:

1) En qué condiciones la regla de 2/3 es adecuada para que las diagonales correspondientes a las dos primeras separaciones estén alineadas.
2) De qué forma hay que elegir la razón de la progresión geométrica en función de la relación entre a y c para obtener el mismo resultado.
3) Que estas alineaciones no son válidas cuando se considera la tercera separación de baldosas.

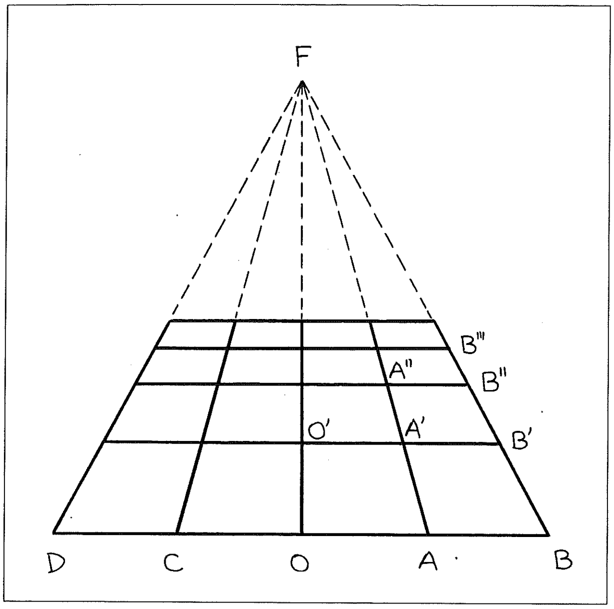


Figura 2

Vamos a responder a las dos primeras cuestiones. A partir de la figura 2 se obtienen las ecuaciones de

La recta FB: $x = (2bc - 2by)/c$

La recta FA: $x = (bc - by)/c$

de donde es posible obtener las coordenadas de los puntos situados sobre las rectas $y = a$, $y = ra$ siendo *ra* el valor obtenido al sumar las dos primeras separaciones (si la razón es de 2/3, $ra = a + 2a/3 = 5a/3$).

$$A' ((bc - ba)/c,\ a)$$

$$B'' ((2bc - 2abr)/c,\ ra)$$

Tras utilizar la intersección de rectas, el concepto más útil es el de pendiente de la recta. Se pueden comparar las pendientes de las rectas OA' y OB" (también A'B") que, para que las diagonales estén alineadas, deben ser iguales:

$$ac/(bc - ba) = rac/(2bc - 2abr)$$

de donde:

$$r(c + a) = 2c$$

que nos indica las relaciones entre *r*, *a* y *c* de manera que las diagonales entre los cuadrados de las dos primeras filas de baldosas estén alineadas.

Para $r = 5/3$ se obtiene $a = c/5$ que nos señala que la primera separación debe ser la quinta parte de la distancia del eje horizontal tomado al punto de fuga. Sólo en estas circunstancias las primeras diagonales están alineadas.

Para responder a la segunda cuestión, ¿qué sucederá si la distancia *a* se elige de otro modo? ¿Existe un valor de *r* que permite la alineación de estas primeras diagonales?

En efecto, el valor de *r* viene dado por:

$$r = 2c/(c + a)$$

Así, en caso de que elijamos situar A del eje horizontal a la cuarta parte de la distancia a F, *r* valdrá

$$r = 8/5$$

que nos viene a decir que la razón de la progresión sería de 3/5.

La tercera cuestión puede demostrarse comparando las pendientes de las rectas O'A" y O'B"', por ejemplo, y comprobando que estas pendientes no son iguales para ningún valor de *a* y *r* que se elija.

La solución de Alberti

Si la regla de los 2/3 es básicamente intuitiva y artesanal dentro de un primitivo proceso de matematización, la situación es similar pero más compleja en el caso de la solución aportada por León Battista Alberti (1404-1472) cuyo método se puede describir (figura 3) según defiende en su obra *De Pictura* (1436) del siguiente modo:

1) Dibujar las líneas desde el punto de fuga hasta todas las subdivisiones de la base del cuadro AB.
2) Trazar por F una línea paralela a AB que corte al eje del cuadro (perpendicular a AB) en N.
3) Extender FN hasta O de manera que la distancia ON sea la que media entre el observador y el cuadro.

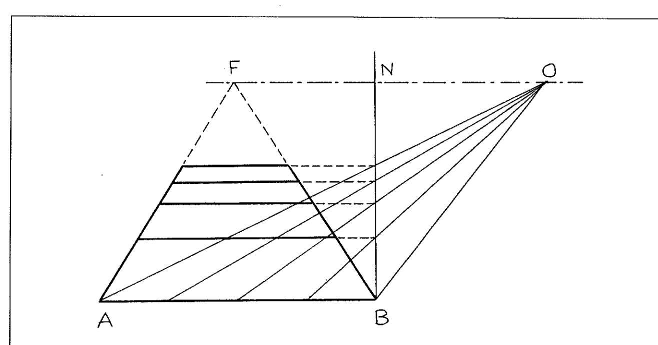


Figura 3

4) Trazar líneas desde O hasta todas las subdivisiones de la base del cuadro AB.

5) Por los puntos en que estas líneas cortan a BN trazar paralelas a la base del cuadro. Éstas serán las separaciones buscadas.

Alberti parece haber llegado a esta solución de manera fundamentalmente artesanal. Es evidente este hecho cuando habla de la superioridad de su método dado que las diagonales están en línea recta. Sin embargo, no percibe que todas las diagonales deben converger en un punto situado en la misma línea de fuga horizontal FN y ello tanto las diagonales inclinadas hacia la derecha como las contrarias (Kemp, 1984).

Métodos bifocales

Una de las construcciones perspectivas importantes en la solución del problema del embaldosado fue la *Navidad* de Paolo Ucello (1397-1475), donde se consideraban dos puntos O y O' a igual distancia del punto de fuga F, una distancia dada por la existente entre el cuadro y el observador. A continuación se trazan segmentos rectilíneos entre O, O' y todas las divisiones del embaldosado en la base del cuadro. El resultado es un procedimiento superabundante (como veremos inmediatamente) donde se obliga a todas las diagonales a alinearse y se admite ya el hecho (ignorado por Alberti) de que estas diagonales converjan en los puntos O y O' (figura 4).

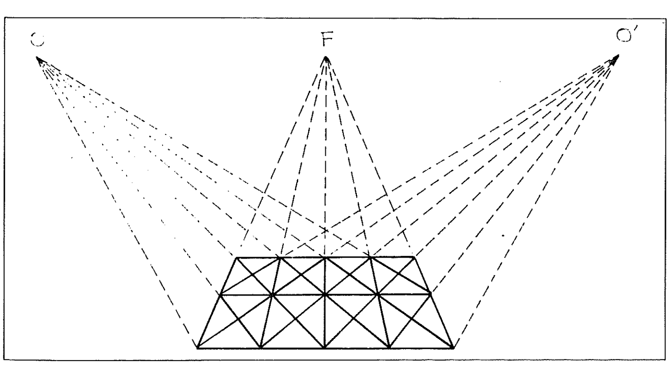


Figura 4

Paolo Ucello. *Natividad de la Virgen* (1435-40)

En aquella época la vida de pintores y arquitectos discurría entre los gremios profesionales que se transmitían de maestro a discípulos unas técnicas determinadas, entre otras las asociadas a la pintura en perspectiva. Los viajeros que visitaban Italia no eran frecuentes pero sí importantes en la exportación de estas técnicas al resto de Europa. Un ilustre viajero fue, por ejemplo, Alberto Durero (1471-1528), que extendió y amplió los estudios de perspectiva en toda Europa central. Otro viajero anterior fue Jean Pelérin (1445?-1522?), llamado Viator (el Viajero), canónigo de la catedral de Toul y secretario de Luis XI. Su libro, *De artificiali perspectiva*, impreso en 1505, consta de muy poco texto y muchas láminas y en él muestra aplicaciones de su método de «tres puntos», muy similar aunque más simple que el de Ucello.

Efigie de Durero. Xilografía de F. Schön (1527)

En efecto, considera el mismo punto de fuga F y dos puntos más equidistantes del anterior y alineados con él, O y O', a partir de los cuales se traza una sola oblicua al extremo opuesto de la base del cuadro (figura 5). En su intersección con las líneas concurrentes en el punto de fuga se forman dos puntos que definen en cada caso la separación paralela a la base del cuadro, pero sin necesidad de considerarla como tal paralela.

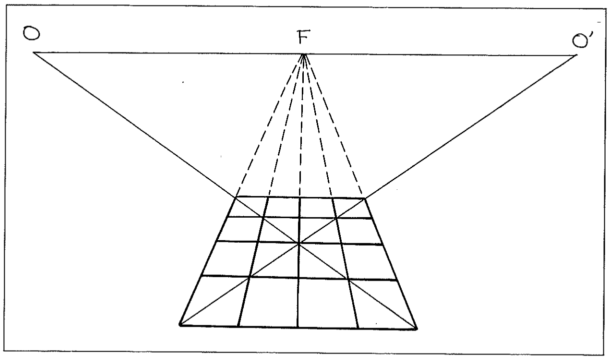
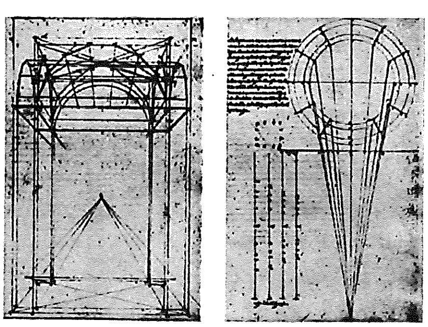


Figura 5

Construcción moderna por punto de distancia

Los procedimientos bifocales, si bien efectivos, utilizan un exceso de recursos para resolver el problema (Field, 1987). Piero della Francesca (1415-1492) escribió un tratado sobre perspectiva llamado *De prospectiva pingendi* donde, entre diversas y prolijas explicaciones geométricas, expone tres casos de dibujo de una figura rectilínea en perspectiva. El último de ellos (figura XXIII del libro I) ha pasado a la historia por constituir el actual método de representación de un rectángulo a través del «punto de distancia». Curiosamente el método, una vez enunciado por el maestro italiano, es aparcado en su obra y no lo vuelve a utilizar.



Diseños de Piero della Francesca que ilustran el *De prospectiva pingendi*

Las etapas de su construcción del embaldosado son las siguientes (figura 6):

1) Se dibujan las líneas que unen el punto de fuga F con las divisiones en la base del cuadro AB.
2) Se traza una línea paralela a la base del cuadro pasando por F.
3) Se toma en esta línea el punto O tal que la distancia FO sea igual a la que media entre cuadro y observador.
4) Se une O con A.
5) Por los puntos definidos por la intersección de OA con las líneas trazadas en 1) se trazan paralelas a AB.

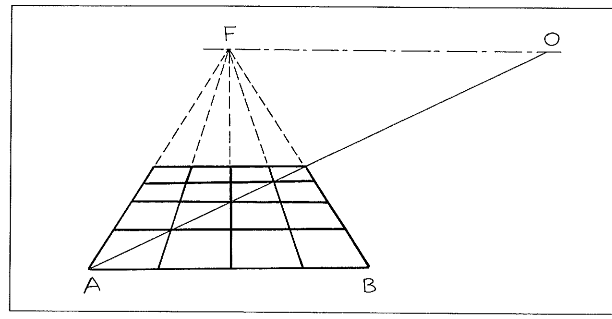


Figura 6

El teorema de Vignola-Danti

El método de Della Francesca es el más económico en los medios utilizados. La cuestión es que el método albertiano seguía gozando de un gran prestigio y los dos no son exactamente iguales pese a que sus resultados parezcan adecuados. El cómo llegó a demostrarse la equivalencia de ambos métodos constituye precisamente una de las cumbres en la geometrización de una técnica inicialmente artesanal como es la de la pintura en perspectiva.

La influencia euclidiana fue extendiéndose constantemente tanto a través de su obra geométrica clásica como de la óptica. Ya el propio Della Francesca definía la pintura como «el plano sobre el que el ojo con sus rayos visuales marca objetos proporcionalmente» (citado en Kemp, 1984, p. 95). En 1575 Federigo Commandino publica su tra-

Federigo Commandino publica su traducción de los *Elementos* de Euclides, mientras que la *Optica* se publicaría dos años antes en la traducción de Ignacio Danti. Otras traducciones (como la de Zamberto) eran del mismo siglo pero incluso anteriores. En general el campo estaba abonado para la matematización de estas técnicas.

En 1583 se publicaba en Roma *Le due regole della prospettiva pratica con i commentari del R.P.M. Egnatio Danti* donde este último comentaba y demostraba geométricamente diversos resultados dados por Jacobo Barozzi (llamado Vignola). Entre ellos se incluía un hermoso teorema en el que se demostraba la equivalencia de los métodos de Alberti y Della Francesca.

Su enunciado es el siguiente (figura 7):

> *Sean dados dos triángulos iguales y equiángulos [FOE y DRC], dispuestos entre dos líneas paralelas [FC y OR]. Si se trazan otras dos líneas [DA y CA] a partir de los dos extremos [D y C] de la base [DC] y hacia un mismo punto [A] de la línea paralela opuesta [OR], que cortan los dos lados del otro [FO y EO], la línea [GH] que pasa por las dos intersecciones [G y H] será paralela a la base de estos dos triángulos (citado en Bessot y Le Goff, 1993, p. 223).*

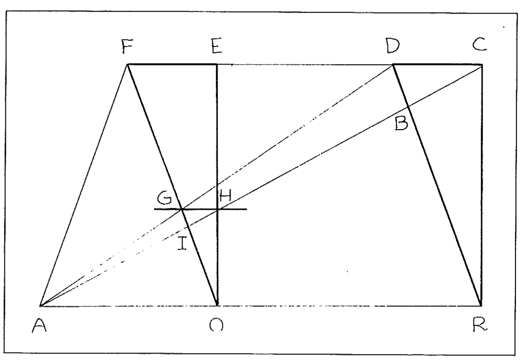


Figura 7

La demostración utiliza sistemáticamente la definición de triángulos semejantes y el hecho de que dos paralelas que cortan a dos rectas concurrentes forman dos triángulos de tal tipo.

Así, los triángulos RCB y OHI son semejantes por lo que

RB/OI = CB/HI

Es muy común que la historia de la matemática refleje una postura usual en los propios matemáticos frente a su obra: borrar las huellas dejadas por el proceso de construcción y refinamiento de un resultado.

Como los triángulos RBA y OIA también lo son, resultará

RB/OI = BA/IA

de donde obtenemos la igualdad:

BA/IA = CB/HI

A ello le unimos el hecho de que, al ser los triángulos ABD y AIG semejantes,

BA/IA = BD/IG

De todo lo visto hasta ahora se concluye en que

BD/IG = CB/HI

Pero como el ángulo GIH es igual al ángulo DBC por cortar la recta AC a dos paralelas, se concluye que los triángulos GIH y DBC son semejantes. De ahí que los ángulos IGH y BDC sean iguales y, por tanto, se concluya con el paralelismo de GH y DC.

Se puede apreciar que este elegante resultado aplica varios resultados euclídeos culminando un proceso de matematización de las técnicas pictóricas artesanales comenzadas en el siglo XIV. Así resulta ser un ejemplo, no sólo de aplicación de la semejanza de triángulos, sino también de la matematización de la técnica o, en palabras de los proponentes de la reforma educativa, de un problema «no estrictamente matemático en su origen» que proporciona «la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos».

Final: un ejemplo de error histórico

Es muy común que la historia de la matemática refleje una postura usual en los propios matemáticos frente a su obra: borrar las huellas dejadas por el proceso de construcción y refinamiento de un resultado. Además, la propia actitud de los matemáticos de considerar su ciencia como un conjunto de conocimientos absolutos hace más fácil olvidar errores «injustificables» desde la perspectiva del rigor matemático. Sin embargo, la historia nos enseña que los errores existieron, a veces entre grandes matemáticos (recuérdese, si no, la distinción cartesiana entre curvas geométricas y mecánicas).

Uno de estos errores respecto a las reglas de dibujo del embaldosado y representación del rectángulo desde una perspectiva cónica corresponde a Sebastiano Serlio (Bessot y Le Goff, 1993). Este arquitecto del siglo XVI escribió un tratado donde incluía la siguiente regla para pintar las separaciones horizontales de un embaldosado.

Al igual que en el caso de Alberti se considera el triángulo FAO (figura 8), una vertical EO a la base AO y un punto C en la prolongación de FE y tal que la distancia EC sea la que separe al cuadro del espectador. La primera separación SG se obtiene de idéntico modo que en el método de Alberti. La diferencia de la regla de Serlio respecto de la de Alberti reside en el siguiente paso: se traza CS que corta a EO en un punto que marca la nueva separación a realizar. Este es el error.

¿Qué diferencias en cuanto a resultados prácticos se pueden registrar entre ambos métodos? Desde un punto de vista matemático, ¿qué consecuencias erróneas se pueden demostrar?. Estas son preguntas que dejamos al lector para que indague sobre ellas o consulte, en todo caso, sus soluciones a partir de las referencias aportadas.

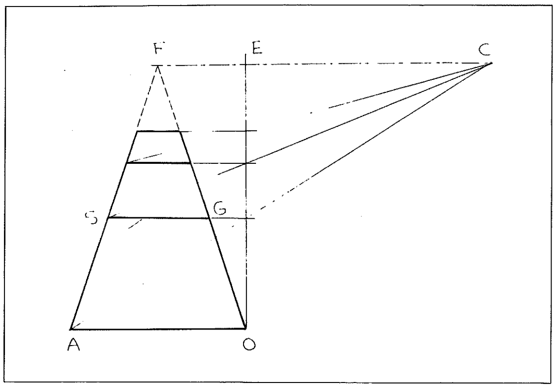


Figura 8

Referencias bibliográficas

BESSOT, D. y J. LE GOFF (1993): «Mais où est donc passée la troisième dimension?», en IREM: *Histoires de problèmes. Histoire des Mathèmatiques*, Marketing, París.

FIELD, J. V. (1987): «Linear perspective and the projective geometry of Girard Desargues», *Nuncius*, 2, 1-40.

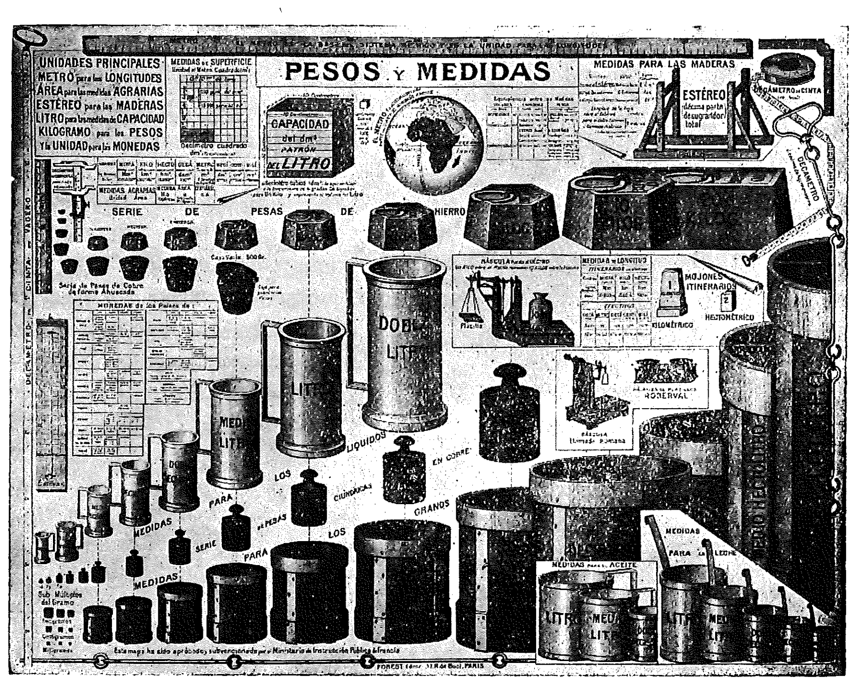
KEMP, M. (1984): «Geometrical perspective from Brunelleschi to Desargues: A pictorial means or an intellectual end?», *Proceedings of the British Academy*, 70, 89-132.

MALTESE, C. (1990): «Las técnicas artísticas», Cátedra. Madrid.

MAZA, C. (1994): «Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis», *Suma*, 17, 17-26.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base: Educación Secundaria Obligatoria II*, MEC, Madrid.

Carlos Maza
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales



Cuadro de pesas y medidas
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

SUMA 21

febrero 1996, pp. 97-101

La experiencia interdisciplinaria en la realidad educativa de hoy

María Victoria Ponza

Para los profesores que día a día enfrentamos en el aula las dificultades del aprendizaje, parece trivial todo lo que empleamos como metodología del trabajo. Sin embargo, muchas veces están justamente en ese ámbito, los recursos concretos y eficaces que todos buscamos y necesitamos. ¿Por qué no escribir entonces y dar a conocer lo que hacemos? ¿Por qué no ocupar un espacio en una de las tantas revistas de educación matemática? Los artículos de gran profundidad e importancia contribuyen a la formación de los profesores, pero existe una marcada necesidad de encontrar en las publicaciones y en eventos tales como congresos, ideas y elementos concretos que puedan *servir* en el trabajo diario.

Caracterización general

Sobre la tarea interdisciplinaria hay muchas teorías y pocas experiencias concretas. Por esta razón, surgió la idea de hacer la experiencia en 1993 trabajando con asignaturas de distintas áreas, Matemáticas, Castellano y Educación Plástica, con muy buenos resultados. En 1994 se amplió a siete materias: las tres anteriores y Música, Historia, Contabilidad y Educación Cívica. Desde Historia y basándose en el libro *Matemática Activa 1. Viaje por el espacio-tiempo* de Hernáiz y Ottolenghi, hicimos nuestro propio viaje por el espacio y el tiempo compartiendo con los alumnos la aventura del aprendizaje. Elaboramos nuestras propias estaciones: Feria de Ciencias, Prehistoria, Egipto y Grecia.

Se trabajó fundamentalmente en equipo, actuando los profesores como orientadores de la investigación y participación de los alumnos.

La dramatización y expresión corporal fueron fundamentales, y las matemáticas formaron parte activa de las obras

Experiencia interdisciplinar que abarca las asignaturas de Historia, Matemáticas, Castellano, Educación Artísitica, Música, Contabilidad y Educación Cívica, basada en la dramatización y expresión corporal. Las matemáticas actúan como parte activa e integradora. Se llevó a cabo en Argentina con alumnos del primer ciclo del Secundario (12-13 años) durante todo el curso.

de teatro integradoras del trabajo manual. La experiencia se efectuó con alumnos del primer año secundario (12-13 años), en escuela pública, y durante todo el periodo de clases.

Entre nuestros objetivos figuran que el alumno logre:

a) Mejorar la capacidad de transferencia a partir de la relación interdisciplinaria.
b) Desarrollar la capacidad de observación, análisis, discusión y síntesis, necesarias en el estudio de todas las disciplinas.
c) Desarrollar la creatividad y la imaginación.

Ecuaciones y la civilización griega

Estación: Grecia

Fecha: Septiembre. (En Argentina el año de clases se extiende de marzo a noviembre). A esta altura del año, las asignaturas han desarrollado ciertos contenidos, con los que se pueden relacionar las matemáticas.

Historia: Grecia.

Música: Instrumentos musicales relacionados con los dioses.

Educación Cívica: La educación en Grecia. Influencia de los Juegos Olímpicos.

Educación Plástica: Estilos arquitectónicos. La Acrópolis.

Castellano: Lectura de mitos griegos. Narración con ecuaciones.

Contabilidad: Actividad comercial en la civilización cretense. Narración de tragedias con documentos comerciales.

Matemáticas: Ecuaciones en general. Ecuaciones en la vida cotidiana.

En clase de matemáticas se plantean y resuelven problemas de integración, como los siguientes:

1) A los dioses del Olimpo se atribuía la invención de los instrumentos musicales. A Apolo, dios de la música y de la poesía se le representaba con la lira. ¿Cómo está construida una lira?

   Averigüemos el número de cuerdas que generalmente tenía con el siguiente problema: si al doble de un número de tres le resto cuatro, se obtiene menos dos. ¿Cuál es ese número?

   Pero hay también liras con 7, 8 y 10 cuerdas. Inventa una ecuación cuyo resultado sea alguno de estos números y muéstrasela a la profesora de música.

2) Lee el párrafo de la estación Grecia referido a los Juegos Olímpicos y responde:
   a) ¿Qué tipo de juegos eran?
   b) ¿En qué aspecto de la vida griega influían especialmente?
   c) ¿Cuántos eran los elementos más importantes que influían en la educación? Te propongo que lo averigües con el siguiente problema:

      Si divido un número por 5 y le resto 2, obtengo -1. ¿Cuál es ese número?
   d) Nombra esos elementos.

La dramatización y expresión corporal fueron fundamentales, y las matemáticas formaron parte activa de las obras de teatro integradoras del trabajo manual

3) Al construir una obra, Fidias dio estas indicaciones a sus arquitectos con respecto a las columnas: «El triple del número de canales menos 15 es igual a 45».
   a) Escribe la ecuación que plantea Fidias y resuélvela.
   b) ¿A qué estilo de columnas se refería?
   c) ¿Qué obra arquitectónica se estaba construyendo?

4) Lee en tu guía de trabajo de castellano el relato *El hilo de Ariadna*. Verás que el doble del número de personajes que aparecen es igual a 12. ¿Cuántos son esos personajes?

   ¿Cómo describe el laberinto. Plantea y resuelve una ecuación cuyo resultado sea el número de vueltas del mismo.

5) Eurípides compró pan, bizcochos y facturas para entrar al laberinto de documentos comerciales. Se encontró con Teseo y le vendió la mitad de lo que llevaba, entregándole un documento. Eurípides gastó 9,60$ y vendió ganando 2,40$. Responde:
   a) ¿Qué documentos comerciales se utilizaron?
   b) ¿Quién recibió el original y quién el duplicado?
   c) Escribe la ecuación que plantea la operación comercial y resuélvela.

   Has entrado en el laberinto de documentos comerciales. Utilizando otros personajes y documentos, sigue el viaje en contabilidad.

Recuerda: todo lo que hicimos está relacionado con la materia... Historia.

Matemáticas y teatro

Si, como se ve, las matemáticas pueden integrar con ecuaciones los contenidos de otras seis materias, ¿por qué no intentar un poema con contenidos matemáticos, una historia y desde ahí una obra de teatro?

Los alumnos responden a la invitación y comienzan a escribir y a pensar matemáticas en teatro. A lo largo del año se escriben cuentos que, pasando a diálogos teatrales, se dramatizan. Mientras tanto, también en clase de matemáticas, trabajamos el cuerpo para la representación final, aprovechando la oportunidad para descubrir y formar ángulos, triángulos, formar propiedades, etc.

Sin que se les proponga como actividad en sí, los chicos descubren que necesitan los contenidos de otras asignaturas que les son útiles, desde la arquitectura y los vestidos en Grecia, hasta los conocimientos en matemáticas, música, educación, comercio, las personas y los tiempos en que vivieron.

Y es muy fácil, entonces, ver que todo está incluido en la materia Historia y que cuando intentan escribir, pueden dar forma a lo que vuelcan al papel gracias a lo aprendido en castellano. A partir de este momento, sólo queda coordinar las ideas de todos los grupos de trabajo y decidir en qué ámbito histórico es más conveniente que se desarrolle la obra. Por ejemplo, la maravillosa Biblioteca de Alejandría.

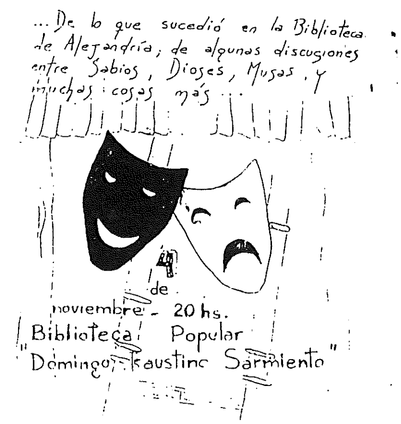
¡Arriba el telón!

Así, en la Biblioteca de Alejandría, con personajes contemporáneos y un poco de imaginación, se van integrando las siete asignaturas, con la participación de todos los alumnos.

La función específica de cada uno, en la representación de la obra de teatro final, puede verse en el programa que se reproduce en esta misma página.

Y todos participaron en la escritura de la obra. Transcribo a continuación parte de la misma.

...¿por qué no intentar un poema con contenidos matemáticos, una historia y desde ahí una obra de teatro?



Actores (por orden de aparición):
Coro:Néstor Bosio, Gustavo, Martínez, Cintia Aubery y Mariana Catalá.
Melpómene: Inés Pereyra
María: Verónica Gebhardt
Euclides: David Sagario
Contador: Fernando Picatto.
Corego: César Bigo.
Hipócrates: Leandro Novello
Bailarina: Marina Tavella
Tersícore: Sacrina Biasin
Atenea: Daniela Tabano
Eratóstenes: Mariano Torriglia
Urania: Elizabeth Requena
Fidias: María E. Loza
Romario: IvonBuljubasich
Maestro: Diego Gómez
Alumno: Norberto García
Policleto: Hugo Bracamonte
Sigma: Cira Rodríguez

Asistentes de dirección: Eugenia Zorrilla y Débora Abalos
Iluminación: Juan P. Peralta
Apuntador: Melina Rivata
Escenografía: Corina Cárdenas, Oviedo María del V, Casas Garay y Patricia Nazer
Utileros: Valeria Ferreyra,Valeria Montivero, Paula Estigarribia e Ivana Juárez
Control de telón: Raúl Torres
Acomodadores: Walter Omine, Gustavo Carnelutto,Rubén Farias y Gustavo Sartorio
Autor, Dirección y Producción: 1.° año, 1.ª división

Asignaturas y profesoras:
Historia: Andrea Luque
Educación Cívica: Elba Milicevich
Castellano: Susana Vannelli
Contabilidad: Graciela Vannelli
Matemática: M. Victoria Ponza
Música: Ana M. del Vó
Educación Plástica: Cristina Bosio y Ana M. Imaz

Filmación: Darío Cárdenas

«...De lo que sucedió en la Biblioteca de Alejandría, de algunas discusiones entre sabios, dioses, musas, y muchas cosas más...» (año 1994)

Con el telón corrido, un coro de cuatro alumnos recita

CORO.—¡Oh Melpómene, musa de la tragedia, inspíranos!

MELPÓMENE.—*(Detrás del telón.)* ¡Voy, espérenme...!

CORO.—¡Oh Melpómene, inspíranos!

MELPÓMENE.—*(Arreglándose el cabello, muy coqueta.)* ¿Me llamaron?

CORO.—*(Intrigados.)* No sé... ¿Vos quién sos? *(Uno del coro le dice a otro en voz baja)* ¿Es esta Melpómene?

MELPÓMENE.—*(Medio enojada.)* ¿No me reconocen? Soy Melpómene y voy a ayudarlos.

CORO.—Bueno, entonces te vamos a explicar qué pasa. *(Le hablan al oído.)* ¿Entendés?

MELPÓMENE.—*(Con suficiencia.)* Soy la persona ideal para ayudarlos. ¡Que empiece la función!

Se abre el telón poco a poco, las luces se dirigen a un rincón donde está María

MARÍA.—*(Con desesperación.)* ¡Si alguien me pudiera explicar los principios de la partida doble! ¡Y mañana tengo la prueba! ¡Y ahora qué hago! ¡Espero que alguien me ayude!

De repente, las luces se apagan

MARÍA.—*(Grita un poco asustada, se incorpora y camina por el lugar. La luz va aumentando poco a poco y se ve un estante con rollos perfectamente acomodados.)* ¿Dónde me encuentro?

Un hombre está ante una mesa revisando unos papeles, levanta la vista y la mira intrigado.

EUCLIDES.—¿Quién eres? ¿Y por qué gritas?

MARÍA.—Pedí que alguien me explicara los principios de la partida doble y... ¡Aquí me encuentro! A propósito, ¿dónde estoy?

EUCLIDES.—*(Haciendo un ademán que abarca la sala.)* Estás en la gran Biblioteca de Alejandría, que contiene 700.000 volúmenes. ¿Qué es eso de la partida doble?

MARÍA.—Por ejemplo: «Todo lo que entra es igual a lo que sale...».

EUCLIDES.—*(Complacido.)* Ah, es parecido a mis axiomas 2 y 3: «Si a cosas iguales se le agregan cosas iguales, se obtienen cosas iguales, y si a cosas iguales se le quitan cosas iguales, se obtienen cosas iguales».

MARÍA.—¡Ay, Hermes! Y... ¿qué pasa con «todo lo que entra por una cuenta sale por la misma»?

EUCLIDES.—Y, eso podría relacionarse con mis axiomas 1 y 4, «cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí» y «cosas que pueden superponerse son iguales».

Euclides.—...*Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí. El todo es mayor que cualquiera de las partes.* (Hace una pausa.) *Y también escribí el libro de los Elementos, 13 tomos. Y tú ¿qué estás haciendo?*

Aparece un nuevo personaje, el contador del futuro.

CONTADOR.—*(Aplaudiendo.)* ¡Bravo, Euclides!, has explicado muy bien la relación entre ambos.

EUCLIDES.—*(Intrigado.)* ¿Y tú quién eres?

CONTADOR.—Soy un contador del futuro y he venido en la máquina del tiempo. *(Se acerca a María y la toma de la mano.)* Ven María, te voy a explicar más ampliamente cómo funciona la contabilidad...

Aparecen Atenea y la Musa de la Danza

TEPSÍCORE.—Dime, Atenea, ¿has repartido tu sabiduría entre los hombres para que adelanten en las ciencias?

ATENEA.—Sólo en parte, pues mi sabiduría es infinita. Pero debo ser misericordiosa con los mortales. A algunos les he iluminado con mis conocimientos. Escucha a éstos que andan en la biblioteca. *(Se esconden.)*

Euclides está buscando material para sus estudios, se levanta y tropieza con Eratóstenes. Los rollos que tenía Euclides ruedan por el suelo, mientras ambos se llevan por delante.

ERATÓSTENES y EUCLIDES.—*(Al unísono.)* ¡Perdón!

ERATÓSTENES.—*(Palmeando a EUCLIDES.)* ¿Cómo estás, Euclides? ¿Siempre trabajando?

EUCLIDES.—¿Eres tú el sabio que pretende descubrir algo nuevo?

ERATÓSTENES.—Ya he descubierto muchas cosas. Y tú ¿que estás investigando?

EUCLIDES.—*(Toma algunos elementos de la mesa para explicar.)* Yo estoy reafirmando mis conocimientos sobre la Geometría. *(Mueve las manos señalando los objetos.)* Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí. El todo es mayor que cualquiera de las partes. *(Hace una pausa.)* Y también escribí el libro de los Elementos, 13 tomos. Y tú ¿qué estás haciendo?

ERATÓSTENES.—*(Entusiasmado.)* Voy a hacer una experiencia en la cual demostraré la redondez de la Tierra, y una vez que la demuestre, voy a seguir con mis descubrimientos. He observado que el 21 de junio, al mediodía en Siena, los rayos del sol no producen sombras en la tierra, es decir, que caen perpendicularmente. En Alejandría, el mismo día y a la misma hora, no sucede lo mismo. Si la Tierra fuese plana, los rayos del sol deberían caer con igual inclinación en todos lados porque, aunque el sol emite sus rayos oblícuos, como están tan lejos, se puede decir que llegan perpendiculares.

EUCLIDES.—¡Qué interesante! ¿Demostrarás solamente eso?

ERATÓSTENES.—(*Para explicar se vale de gráficos y otros elementos.*) También trataré de calcular el radio terrestre, si es que mi hipótesis anterior es verdadera. El 21 de junio al mediodía pondré aquí, en Alejandría, una estaca clavada en el piso que nos dejará ver la sombra que produce el Sol. La longitud de la sombra irá disminuyendo hacia el mediodía. Según mi hipótesis, no desaparecerá; pero en Siena, desaparecerá por completo. Ya sé que la distancia Alejandría-Siena es de 800 km y mediré el ángulo que forman los rayos de sol con la estaca. Relacionando estas medidas con 360° podré calcular el radio terrestre.

EUCLIDES.—¡Genial! Pero... se me ocurre algo más. Responde a este acertijo: ¿Qué relación existe entre el ángulo que tú mencionas y el formado por los radios terrestres correspondientes a Siena y Alejandría?

ERATÓSTENES.—(*Con aire triunfal.*) ¡Son congruentes! ¿Ves como uso tus teorías?

EUCLIDES.—(*Invitándolo a la mesa donde estaba estudiando.*) ¡Exacto! ¡Vamos a demostrarlo!

Evaluación de la experiencia

Los padres, presentes en la representación, opinan:

- «Esto debe ser publicado».
- «El proyecto debe seguir y la escuela debe apoyar su continuidad».
- «Desde el inicio de la preparación de la obra de teatro, nuestros hijos comenzaron a nombrar compañeros que nunca antes habían mencionado».
- «Todas las preguntas que hicimos sobre contenidos fueron respondidas correctamente. Los que no estudiamos lo suficiente para preguntar fuimos nosotros».
- «Es una muy buena representación teatral, y aquí se pone en práctica algo poco común en estos días: la solidaridad».

Los alumnos, en su propia evaluación, dicen:

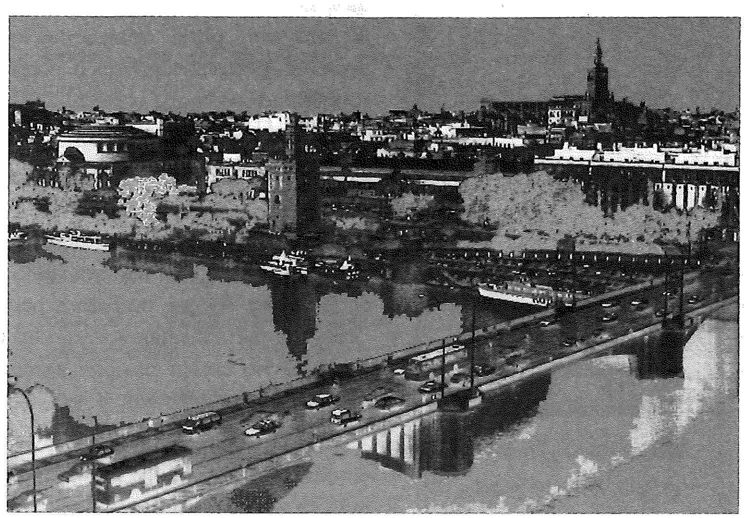
- «Los chicos más tímidos pudieron expresarse libremente».
- «¡Qué pena que ya termina el año. Si hubiera más clases, sería lindo repetir la muestra de teatro».
- «Trabajar en esta forma nos unió. No nos habíamos dado cuenta de que podíamos hacer tanto».
- «Nuestros padres están sorprendidos porque han visto algo que no creían posible: aprender de una manera que no sea tan sólo leer y repetir».

Los profesores, cansados pero felices, concluimos:

- «Empleando esta metodología se trabaja con mucho esfuerzo y poco apoyo, pero con felicidad. En una situación sociocultural llena de contradicciones, en la que por supuesto está inmersa la escuela, la coherencia en la planificación y la transmisión de un único y claro mensaje del equipo de docentes, se refleja en la actitud de los alumnos. En las condiciones actuales de la escuela pública en Argentina, consideramos un logro importante que los alumnos sientan pena por la finalización del año de clases».

María Victoria Ponza
Escuela Mariano Moreno.
Río Ceballos. Córdoba.
Argentina

Segundo Anuncio



ICME 8
SEVILLA 1996

8° Congreso Internacional de Educación Matemática

Sevilla, España
14 al 21 de Julio de 1996

Para información más detallada puede consultarse el n.° 20 de SUMA, pp. 119-125

SUMA 21
febrero 1996, pp. 103-106

Hiperelipses

Vicente Ibáñez Orts

MISCELÁNEA

Las hiperelipses son una familia de curvas cuya ecuación generaliza la de la elipse. Se usan en el diseño de múltiples objetos por la suavidad y armonía de sus formas. Combinan de manera equilibrada lo rectilíneo y lo curvo.
En el artículo se presentan varios ejemplos de hiperelipses enfrentándolas a soluciones construidas mediante la combinación de rectas y curvas. También se incluye un programa de ordenador que las genera automáticamente.

Desde épocas remotas, el mundo que llamamos occidental, cuyo origen está en las civilizaciones griega y latina, se encuentra representado fundamentalmente por la línea recta. Este hecho se traduce, desde el punto de vista del urbanismo, en amplias avenidas trazadas a cordel que se cruzan perpendicularmente entre sí. Se trata de una concepción intelectual del mundo que de alguna manera se opone a la hebrea y árabe, caracterizadas por una preferencia hacia la línea curva y los callejones tortuosos, angostos y frescos. La pugna soterrada que se libra entre estas grandes civilizaciones nos da una pista sobre la oposición básica que existe entre las formas geométricas elementales, el cuadrado y por extensión el rectángulo, frente al círculo y su derivación, la elipse. La lucha que tiene lugar entre la rigidez del cuadrado y la pureza del círculo representa la confrontación entre una forma de pensar lógica, ortogonal y racional frente a otra subjetiva, curva y humana.

Al intentar diseñar jardines, fuentes y plazas, muchos ingenieros se han topado con la dificultad de encontrar una forma geométrica adecuada a sus gustos y que armonice con el entorno al que la obra va dirigida. Normalmente, las figuras geométricas más empleadas han sido, por una parte y entre las lineales, el cuadrado y el rectángulo, y por otra, las formas geométricas derivadas de las secciones cónicas, es decir el círculo y la elipse. De nuevo nos encontramos en esta parcela del arte de la jardinería, la decoración y el urbanismo, ante la oposición básica ya comentada del mundo cartesiano, perpendicular y lineal frente al mundo mágico, imaginativo y curvo.

La familia de curvas empleadas por el ingeniero danés Piet Heint en el año 1959 para diseñar la plaza Sergel (Sergel Torg) de Estocolmo, forman un nexo de unión armonioso y equilibrado entre las dos concepciones del mundo citadas y aparentemente tan distantes, aunque el primer investigador matemático en estudiar dichas ecuaciones fue el físico francés del siglo XIX Gabriel Lamé, quien escribió sobre ellas en 1818.

Piet Heint, investigador original e intuitivo, partiendo de la ecuación básica de la elipse centrada en el origen:

$$\left(\left|\frac{X}{a}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{Y}{b}\right|\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

que si a=b=1, se transforma en:

$$Y = \pm\left(1 - |X|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

que incluye como caso particular el circulo cuando los parámetros a y b son iguales a la unidad (2), propuso la familia de curvas que se recogen en la ecuación (3). En ésta las barras verticales indican, al igual que la ecuación (1) y (2), que los términos X e Y se toman en valor absoluto, y el exponente N pertenece al conjunto de los números reales, pudiendo, por tanto, tomar cualquier valor entre cero e infinito:

$$\left(\left|\frac{X}{a}\right|\right)^N + \left(\left|\frac{Y}{b}\right|\right)^N = 1 \qquad (3)$$

Despejando queda:

$$Y = \pm\frac{b}{a}\left(a^N - |X|^N\right)^{\frac{1}{N}} \qquad (4)$$

A partir de aquí obtuvo todo un conjunto nuevo de formas dotadas de elegancia y simetría, que podríamos decir que han sido como arrancadas del mundo desconocido de las ideas platónicas. El punto de partida de Piet Heint es muy sencillo, pues fijados los tamaños de a y b, que dependerán de las dimensiones de la plaza, del jardín o de la fuente, basta con ir asignando sucesivos valores al exponente N para obtener toda una familia de curvas cerradas, centradas en el origen, de una gran regularidad en la forma, que permiten modelar adecuadamente el contorno del objeto diseñado y que además se encastran perfectamente entre sí como si se tratara de una colección de muñecas rusas.

Basta un sencillo programa de ordenador, o incluso una simple calculadora de bolsillo para obtener tan cualificada familia de curvas, utilizando para ello la ecuación (4). Dando al exponente N el valor cero, las curvas degeneran en dos rectas en cruz, los propios ejes. Para valores de N comprendidos entre cero y uno, se obtienen curvas cóncavas, conocidas en los ambientes matemáticos como «astroides». Para el valor uno, el resultado es un paralelogramo y a medida que el exponente alcanza valores entre uno y dos, se obtienen óvalos puntiagudos. El valor dos nos da el círculo o la elipse, según que los dos semiejes a y b sean iguales o no. A medida que N crece por encima de dos, aparecen las superelipses, tomando progresivamente formas que no son ni círculos ni cuadrados, pero que están dotadas de una. extraña belleza y que, en el caso límite de que N se acerque al infinito, se transforman en un cuadrado perfecto.

Como ejemplo de todo lo anterior, en la figura 1 presentamos, hechas a mano alzada y suponiendo a = b =1, las curvas obtenidas para N igual a 0,5; l; 2 (círculo) y π (3,1415...). Esta última condición, además de asociar un mayor interés matemático al posible diseño, prácticamente divide por la mitad la superficie encerrada entre la circunferencia inscrita y el cuadrado que la contiene.

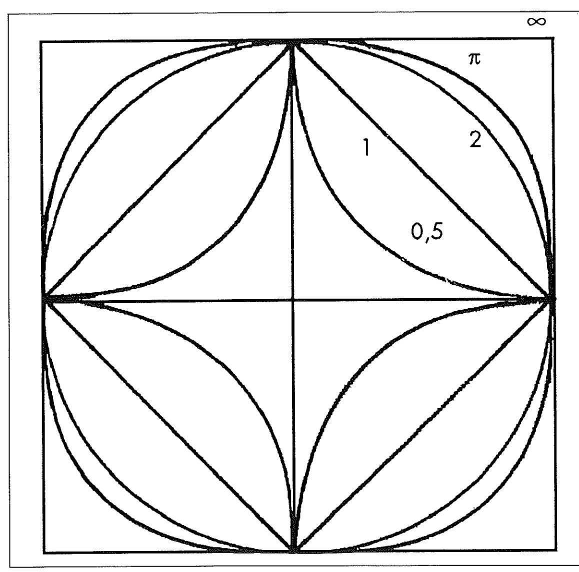


Figura 1. Curvas de Piet Hein para distintos valores de n y a = b = 1.

En la figura 2 hemos superpuesto la hiperelipse de exponente 2,2 y con una relación de semiejes a/b=4/3, junto con una figura clásica para resolver este tipo de problemas que consta de cuatro tramos curvos unidos por otros tantos rectos, que se suelen emplear como adorno en baldosas y para dar forma achatada a las pantallas de televisión.

La figura 3 representa las curvas anteriores, concéntricas unas en otras. Este dibujo permite apreciar mejor la armonía que aparece en la figura 4, en la que se disponen, unas dentro de otras, hiperelipses de exponente 2,5. En estos dos últimos dibujos, los semiejes *a* y *b* guardan entre sí la relación 4/3, y los valores dibujados son los siguientes:

a	*b*
10	7'5
8	6
6	4'5
4	3

Las figuras comentadas constituyen una opción para los diseñadores que buscan modelos nuevos, dado que al emplear las hiperelipses de Piet Heint unen en un mismo diseño la armonía de estas nuevas formas geométricas al hecho de emplear interesantes relaciones matemáticas.

Seguidamente se lista el breve programa escrito en Q-Basic que dibuja en colores la familia de curvas descrita. Este lenguaje de programación viene con cada sistema operativo DOS 6.0 de Microsoft, que se encuentra instalado en la mayoría de los ordenadores. Su explicación es la siguiente: en la sentencia 20, la instrucción CLS borra la pantalla, SCREEN especifica la resolución del monitor, en este caso VGA, y WINDOW delimita el espacio físico del dibujo en la pantalla. En la sentencia 30 se inicia el bucle que da valores al exponente *N*, y en la 40 este mismo exponente *N* se utiliza para modificar el color de las curvas, mediante el truco de redondearlo a un número entero, utilizando para ello la expresión CINT y la variable auxiliar C. En la línea 50, mediante la expresión LOCATE se sitúan en la esquina superior izquierda de la pantalla los valores *N* y *C* (posición 1,1), para que no entorpezcan la visión

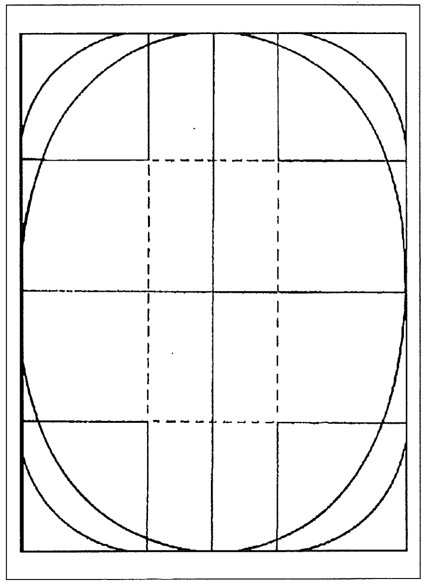


Figura 2. Hiperelipse de exponente n = 2,2 y a = 8, b = 6 fente a una figura de cuatro tramos curvos y cuatro tramos rectos

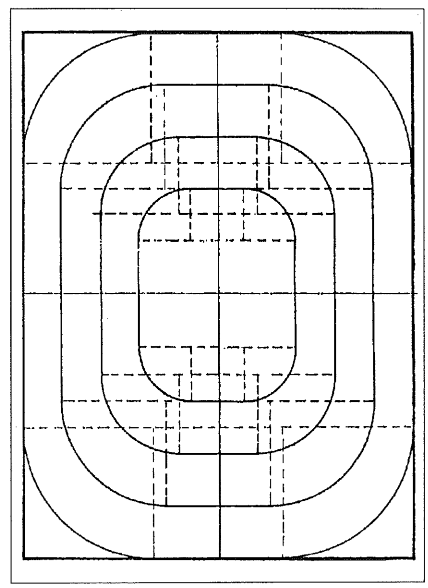


Figura 3. Diseño encastrado formado por cuatro tramos curvos y cuatro rectos

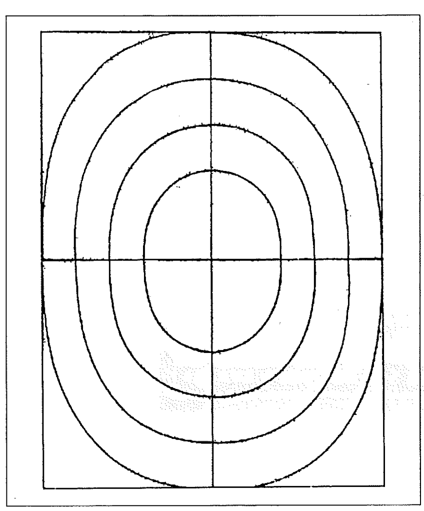


Figura 4. Hiperelipses encastradas de exponente n = 2,5

del dibujo. En la línea 60 comienza el bucle que realiza el trazado de una curva, y variando la amplitud del paso se puede aumentar o disminuir la precisión del dibujo a costa de la velocidad de ejecución. En la instrucción 70 se calcula el valor de *Y* según la ecuación propuesta. Las sentencias 80 y 90 se encargan mediante la instrucción PSET de ir colocando en pantalla los puntos previamente calculados en la línea anterior y de asignarles el color especificado mediante la variable *C*. Dado que anteriormente hemos definido una zona concreta para el dibujo, el ordenador realiza automáticamente el proceso de adecuar las coordenadas que le suministramos a dicho espacio. La línea 100 finaliza el doble bucle y el programa.

```
10  REM HIPERELIPSES
20  CLS: SCREEN 12: WINDOW (-1.3,-1.3) - (1.3, 1.3)
30  FOR N=O.25 TO 3 STEP 0.25
40      C=CINT(2.25*N)
so      LOCATE 1,1: PRINT N,C
60      FOR X=O TO 1 STEP 0.001
70              Y=(1-ABS(X)^N)^(1/N)
80              PSET (X,Y),C: PSET(X,-Y),C
90              PSET (-X,Y),C: PSET(-X,-Y),C
100 NEXT X,N
```

Como idea central se ha partido del artículo del matemático y gran divulgador americano Martin Gardner, «Las superelipses de Piet Heint». En él, no sólo desarrolla con mayor amplitud todo lo aquí expuesto, sino que además introduce también las ecuaciones que corresponden a las superficies geométricas en tres dimensiones, basta para ello añadir un término en *Z*, mediante las cuales se obtienen lo que denomina superelipsoides o superhuevos de Piet Heint. Estas figuras geométricas, al estar dotadas de volumen, presentan la peculiar propiedad matemática de que al colocarlas verticalmente sobre uno de sus extremos mantienen permanentemente el equilibrio. Por este motivo son muy adecuadas como objetos de decoración y como recuerdo. Recomendamos vivamente el libro citado para aquellos que busquen un poco de solaz en estos temas.

Es sorprendente cómo un matemático está en la base de los originales diseños nórdicos, que permiten modelar desde platos, vasos y mesas , hasta jardines, plazas, fuentes, piscinas, objetos de cuartos de baño, ventanas, cuadros y hasta envases para yoghourt, uniendo en una sola figura y una sola concepción dos mundos aparentemente tan alejados entre sí como lo recto y lo curvo, y que coloreados forman un auténtico carnaval matemático. Además, por tratarse de dibujos simétricos y armoniosos, resulta especialmente agradable verlos formarse lentamente en la pantalla del ordenador.

Vicente Ibáñez
Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al Kwharizmi

Bibliografía

GARDNER, M. (1987): «La superelipse de Piet Heint», en M. GARDNER, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

Construcciones de cuerpos geométricos
Catálogo del Material Escolar de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A.
(Gerona, 1928)

SUMA 21
febrero 1996

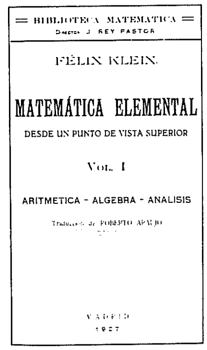
Klein y la enseñanza de las matemáticas

RECENSIONES

MATEMÁTICA ELEMENTAL DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR
Felix Klein
Traducida del alemán al español por Roberto Araujo, Catedrático de la Facultad de Ciencias de Valencia, (volumen I), y por R. Fontanilla (volumen II)
Berlín. Ed. Springer, 1926-27. 2 vols.
Publicada en la Biblioteca Matemática (Dirigida por Julio Rey Pastor)
Madrid, 1945.

La obra de Felix Klein, *Matemática Elemental...*, tiene el mérito de ser el primer libro de texto que se propone, en Alemania, para conseguir «una formación adecuada de los aspirantes al magisterio que responda a todas las necesidades actuales de la Ciencia».

El peso de la personalidad del autor, por sus importantísimos trabajos en Matemáticas, su programa de Erlangen,... hizo, y hace, que la enseñanza de las matemáticas haya estado, y esté, todavía bajo su influencia directa: prioridad en el pensamiento matemático para las nociones de función, transformación (geométrica) y sus grupos. Mal interpretadas las ideas del propio autor, como veremos más adelante, (enseñanza de las matemáticas contemplativas en la que los problemas de existencia, de estructuración,...) escamotean la construcción y manipulación de los seres matemáticos que lo único que piden es ser revividos en la enseñanza y estar vivos en las mentes.



BIBLIOTECA MATEMATICA
Director J. REY PASTOR

FÉLIX KLEIN

MATEMÁTICA ELEMENTAL
DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR

VOL. I

ARITMETICA - ALGEBRA - ANALISIS

1927

Influencia tanto más persistente cuanto, prácticamente, ningún matemático de gran talla se dedicó, antes que él, además de al estudio de los problemas matemáticos, a los de su enseñanza.

Felix Klein nació en 1849 en Düsseldorf. Estudió en las Universidades de Bonn (con Plücker), Götingen, Berlín y París. Enseñó en las Universidades de Erlangen (1872-75), Munich (1875-80), Leipzig (1880-86) y Götingen (1886-1913), donde fundó el Instituto de Matemáticas Aplicadas, y fue el editor de los *Mathematische Annalen*, así como el fundador de la *Enzyclopädie der mathematische Wissenschaften*.

La obra que nos ocupa recoge las lecciones impartidas por Klein, en los primeros años de este siglo durante dos semestres: en el primero, Aritmética, Álgebra y Análisis, en el segundo, Geometría; escritas hacia 1906-08, y publicadas como una de sus obras póstumas.

Los que quieran leer la obra habrán de buscarla en alguna biblioteca, pues la edición española está hace años agotada, y no parece que se vaya a reeditar. Para los que pretendan sólo aproximarse a través de estas líneas, haremos una breve exposición de las ideas de Klein, no tanto de los aspectos matemáticos, que se pueden encontrar presentados de un modo más actual en obras más recientes, como de sus ideas referidas a la enseñanza de las matemáticas, siguiendo fundamentalmente las palabras del autor. El lector podrá ver hasta qué punto la situación descrita por Klein y algunas de las soluciones que proponía, están, en mi opinión, todavía vigentes y que en cuestiones de enseñanza «se hace el camino al andar».

(En estas líneas nos vamos a referir, únicamente, al primer volumen, dejando el segundo, para un próximo número).

Comienza Klein su introducción diciendo que

...se cultivaba en la Universidad exclusivamente la ciencia superior, sin tener en cuenta para nada las necesidades de la Escuela, y sin cuidarse lo más mínimo de establecer un enlace con la enseñanza de la Matemática en ésta.

¿Cuál es la consecuencia? El estudiante al comenzar sus estudios universitarios se encuentra ante problemas que no le recuerdan nada de las cosas que hasta entonces le habían ocupado y, naturalmente, olvida pronto y por completo todas ellas.

Pero después de aprobar sus estudios pasa al profesorado y se ve obligado de pronto a enseñar la Matemática elemental y como no puede realizar esta labor estableciendo el enlace debido con la Matemática aprendida en la Universidad, pronto acepta la enseñanza tradicional y, de los estudios realizados solo le queda un recuerdo, pero no ejerce ni la más remota influencia en el desempeño de su ministerio.

En la Introducción, después de recomendar y comentar una bibliografía (hecho que se repite en todos los capítulos), expone algunas de sus ideas sobre como tratar los temas abordados en la escuela, es decir, sus «preocupaciones didácticas»:

La exposición en la escuela debe ser psicológica, no sistemática. El maestro debe ser algo diplomático; ha de conocer la psicología de los niños para poder captar su interés, y esto solo podrá lograrlo si acierta a presentar las cosas bajo una forma intuitiva fácilmente asimilable. Sólo en las clases superiores se puede revestir la doctrina de forma abstracta.

Pongamos un ejemplo: Al niño le es imposible comprender, cuando se le explican los números axiomáticamente, él asocia a los números conceptos absolutamente reales: conjuntos de cosas y sólo bajo esa forma concreta se les pueden presentar al principio. Pero esto, que aquí es evidente, debería de extenderse a toda la enseñanza, aún a la superior: siempre debería presentarse la matemática enlazada con todo aquello que al hombre pueda interesar y con lo que ha de ejercitar en su vida.

En cuanto a los límites del contenido de la Matemática en la Escuela, frente a otros autores a los que califica de conservadores, manifiesta:

Yo me siento progresista. Los llamados reformadores queremos colocar el centro de la enseñanza en el concepto de función, [...] siempre sobre la base del constante empleo de los métodos gráficos, de la representación de cualquier ley en el plano de las variables (x,y). [...] Para facilitar esta renovación hay que prescindir de mucho de lo que hasta hoy ha constituido objeto de nuestra enseñanza, que aun cuando por sí mismo pueda ser muy interesante, aparece como menos esencial al relacionarlo con toda la cultura moderna.

...la situación descrita por Klein y algunas de las soluciones que proponía, están todavía vigentes...

Ante todo debe darse una gran importancia a una fuerte educación de la intuición espacial; después debe irse ascendiendo hasta llegar a los umbrales del cálculo infinitesimal, de modo que el naturalista o el técnico de Seguros saque ya de la Escuela el instrumento matemático que haya de necesitar en todos sus trabajos.

En el comienzo del Capítulo primero: EL CÁLCULO CON LOS NÚMEROS NATURALES, se pregunta:

Es natural empezar por el fundamento de toda la Aritmética, el cálculo con los números enteros y positivos: ¿Cómo deben de enseñarse en la Escuela?

Las propiedades de los números enteros y el cálculo con los mismos son cuestiones tales que el lograr hacerlas comprensibles a los niños, de modo que éstos lleguen a dominarlas por completo, es un problema extremadamente difícil, el cual exige la labor de varios años. El método a seguir es el intuitivo y genético: todo el edificio de la enseñanza se construye tomando como base cosas conocidas por los sentidos, elevándose después, poco a poco; y en esto radica su diferencia esencial con el método lógico y sistemático que predomina en la enseñanza superior.

Conviene señalar otro aspecto, precisamente porque se acostumbra descuidar en la enseñanza superior y es hacer resaltar las aplicaciones del cálculo a la vida práctica.

El fin de la enseñanza del cálculo persigue una seguridad, libre de toda vacilación, en el manejo de las reglas del cálculo, procurando un desarrollo paralelo de las diferentes facultades del espíritu que en ello intervienen sin que merezcan una expresa atención las que hacen referencia a las relaciones lógicas de los números con los que se opera.

He de llamar la atención aquí sobre la oposición entre los profesores que proceden de las Escuelas de Magisterio y los que proceden de las Facultades de Ciencias, resultando con ello una lamentable discontinuidad para el discípulo. Un pequeño ejemplo, el signo x de multiplicar, frente al punto • . Divergencias que podrían fácilmente allanarse si los universitarios se preocupasen más de los maestros y procuraran ponerse de acuerdo con ellos.

Notemos que desde el cuarto grado el cálculo comienza a vestirse con el elegante atavío de la matemática, y se ejecutan las reglas y operaciones del cálculo con estos números simbolizados por letras, con lo cual se elimina ya el contenido concreto e intuitivo de los números. Se da así un gran paso en el camino de la abstracción, pues puede decirse que la Matemática propiamente empieza con el cálculo literal. Claro es que este paso no puede realizarse súbitamente en la escuela, sino que el alumno tiene que ir acostumbrándose poco a poco a tan gran abstracción.

Respecto al concepto de número, su origen es extremadamente difícil de descubrir, hasta el punto que «se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación».

Después aborda diferentes interpretaciones del concepto de número, relacionando en cada caso a los filósofos y matemáticos más importantes que la representan, a las que añade sus observaciones:

La tendencia a desligarse de la intuición y a mantenerse siempre en un terreno puramente lógico, nos parece impracticable de un modo absoluto. Un resto, un mínimum de intuición, tiene que quedar siempre en el fondo.

El profesor Thomae de Jena ha calificado a los que se ocupan casi exclusivamente en investigaciones abstractas y lógicas sobre entes que nada significan y principios que nada dicen como pensadores sin pensamiento.

Se ha dicho que la matemática debe enseñarse deductivamente, pero este procedimiento no corresponde al proceso evolutivo de la matemática, que se ha desarrollado como un árbol, que no solo crece hacia arriba, sino que al mismo tiempo que desarrolla sus ramas y hojas, sus raíces penetran más y más en el suelo.

Felix Klein

Las relaciones puramente lógicas deben quedar como el esqueleto del organismo de las matemáticas, pero lo vivo de las matemáticas, su eficacia externa, sus estímulos estriban siempre en sus aplicaciones, es decir en las correlaciones entre los entes puramente lógicos y todos los demás dominios del saber.

A continuación pasa a ocuparse de cosas más concretas como la práctica del cálculo. Párrafos de los que destacamos el siguiente:

En la existencia de las máquinas de calcular se ve una confirmación de que para el cálculo, lo que importa no es lo que signifiquen los números enteros, sino únicamente las reglas formales. Así Leibniz, fue, al mismo tiempo, el padre de la Matemática formal y el inventor de la primera máquina de calcular. [...] Quisiera yo que todo maestro estuviese familiarizado con el uso de las máquinas de calcular y, aún más, que, a ser posible, no saliese de nuestras escuelas ningún alumno sin que, siquiera una vez, hubiese manejado una máquina de calcular.

Respecto de la introducción de los números negativos dice:

A pesar de todos los ejemplos, no puede desconocerse la gran dificultad de su introducción en la escuela, pues se encuentra el alumno con algo que no tiene nada que ver con la imagen sensible que se ha forjado de número, y tiene que operar con ellos aunque las operaciones hayan perdido la significación clara e intuitiva que tenían. Se presenta así por primera vez el paso de la matemática práctica a la formal, para cuya completa comprensión se precisa en alto grado la capacidad de abstracción.

En Europa los negativos se introdujeron de manera muy lenta y después de totalmente realizado el paso al cálculo literal, hecho logrado por Vieta en su In artem analyticam isagoge, 1591. Desde este momento histórico se posee la regla de los paréntesis.

Observemos que con la introducción de los negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta, nos sentimos inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares. Es el principio de Permanencia de las leyes formales, enunciado por H. Hankel.

Los reparos y prejuicios contra ellos, a lo largo de la historia, sólo quedaron aclarados cuando, en el siglo XIX, se observó que no se trataba de una necesidad lógica de los nuevos conceptos, ni, por consiguiente de demostrar la regla de los signos, sino simplemente de reconocer que tales nuevos conceptos son lógicamente admisibles, aunque sean arbitrarios y, lo mismo que el principio de permanencia, obedezcan a una simple razón de comodidad. Consideraciones de las que se desprende que, a veces, las cosas parecen más razonables que los hombres.

En general, la lógica solo puede actuar en la formación de los nuevos conceptos regulándolos, pero nunca dando por sí misma el principio director. [...]

En la escuela se observa el frecuente error de seguir con el empeño de los antiguos matemáticos de demostrar la necesidad lógi-

ca de la regla de los signos. [...] Es indudable que el alumno no puede entender esto al oírlo por primera vez, pero puede llegar a creerlo, y si no se le da en los grados superiores el complemento necesario para tal comprensión, no es raro que adquiera el convencimiento de que todo aquello debe ser algo místico e incomprensible.

Después de una explicación sobre números fraccionarios e irracionales y los límites de las mediciones, citando, como exageración de decimales apreciados, la composición de las aguas de los balnearios, establece «la división de la matemática en dos partes: Matemática de la aproximación y Matemática de la precisión».

...establece la división de la matemática en dos partes: Matemática de la aproximación y Matemática de la precisión.

En el capítulo III dedicado a la teoría de números hace una advertencia sobre la división de la circunferencia en n partes iguales con regla y compás, «se trata de un problema de matemática de precisión, que pierde toda importancia cuando se tratan aplicaciones prácticas». La misma opinión le merece el estudio de π. A continuación divide a los matemáticos en dos grupos respecto a su posición sobre la teoría de números:

...los entusiastas, para los que si la Matemática es la reina de las ciencias, la teoría de números es la reina de las matemáticas, como dice Gauss, y los indiferentes, que la dejan de lado en todas sus investigaciones. La razón de esta división reside en que, por una parte la teoría de números es fundamental para todas las investigaciones matemáticas profundas; por otra, la teoría de números pura es una cosa sumamente abstracta. Por ello, la teoría de números sería mucho más asequible y despertaría mucho mayor interés si fuese expuesta utilizando elementos intuitivos y figuras apropiadas, porque se facilitaría mucho su comprensión con tales recursos.

Dedica luego un tiempo a presentar una importante demostración de imposibilidad (la construcción con regla y compás del heptágono regular), claro está que con teoría de números y ecuaciones, «con mayor razón cuanto que en el gran público existe una casi total incomprensión de tal clase de demostraciones».

Algunas de las ideas más interesantes de Klein, pueden encontrarse en el «Intermedio: sobre el moderno desarrollo y la construcción de la matemática», distinguiendo dos procesos diferentes, que para simplificar llama A y B, «que tan pronto se desarrollan con absoluta separación como, sin perder su independencia, corren paralelos o, finalmente se entrecruzan mutuamente». De nuevo dejamos hablar a Klein:

PROCESO A (hoy usual en la enseñanza secundaria y en los tratados elementales:

I. Encabezado por la teoría formal de ecuaciones, por las operaciones con funciones racionales enteras y el estudio de los casos en los que las ecuaciones algebraicas se pueden resolver por radicales.

II. Estudio sistemático del concepto de potencia y sus inversos, para derivar los logaritmos.

III. Aparece la geometría, (hasta aquí apartada) para suministrar las primeras definiciones de la segunda clase de funciones trascendentes: las trigonométricas.

IV. Análisis algebraico, desarrollos en series infinitas de las funciones más sencillas; fórmula del binomio generalizado, función logarítmica, y su inversa la exponencial, las funciones trigonométricas. De aquí surgen las sorprendentes conexiones entre las llamadas funciones elementales trascendentes y, en particular, la célebre fórmula de Euler.

V. Teoría de variable compleja, fuera ya de la enseñanza secundaria, orientada por Weierstrass.

PROCESO B: (Domina en él, el pensamiento de la geometría analítica que reclama una fusión de los conceptos de número y espacio):

I. Representación gráfica de las funciones más sencillas: polinomios, funciones racionales de una variable. Los puntos de intersección de las curvas con el eje de abscisas evidencian los ceros del polinomio, a esto se une de modo natural la resolución de ecuaciones por medio de aproximaciones.

II. Las representaciones geométricas de curvas son el origen natural intuitivo de los conceptos de cociente diferencial y de integral; al primero conduce la pendiente de la curva, al segundo el área de la superficie encerrada por la curva.

III. Cuando no se puede integrar, da origen a nuevas funciones; que así se introducen de modo natural: la cuadratura de la hipérbola define el logaritmo, y la del círculo a la función inversa del seno; por un proceso análogo se llega a las funciones elípticas.

IV. Ahora el desarrollo en serie de las funciones obtenidas se realiza siguiendo un método general, la fórmula de Taylor.

V. Como prolongación del método aparece la teoría de funciones de variable compleja de Cauchy-Riemann.

En resumen, la base del proceso A es una concepción particularista de la ciencia que trata de descomponer todo el campo de la misma en una serie de regiones bien delimitadas, en cada una de las cuales se opera evitando todo lo posible acudir a los recursos que se pueden obtener de las regiones próximas; su ideal es una bella y lógica cristalización de cada una de estas regiones en un cuerpo de doctrina aislado.

Al contrario, el proceso B da capital importancia al enlace orgánico entre las diferentes regiones de la ciencia y los numerosos recursos que mutuamente se prestan, y prefiere los métodos que le permiten abarcar, desde un punto de vista único, la comprensión simultánea de varias regiones; su ideal es la concepción de toda la ciencia matemática como un todo.

Todavía hay una tercera fase, (proceso C) que desempeña un papel importante en los dos procesos: el algoritmo (proceso formal de cálculo). El procedimiento algorítmico es una fuerza impulsiva interna de las fórmulas, independiente de la intención y de los conocimientos del matemático y frecuentemente, contraria a sus deseos. A veces estos procesos algorítmicos se consideran los cimientos del edificio matemático.

Para apreciar mejor el contraste entre estos dos procesos acudimos a la Historia: La ciencia griega pertenecía al proceso tipo A; no obstante hay tendencias y métodos del proceso B. La matemática de la India y de los árabes pertenece al proceso C. El desarrollo de la matemática en el siglo XVI corresponde al proceso A. En el siglo XVII toda la orientación es B (primero la Geometría Analítica de Descartes que crea el enlace fundamental para toda la matemática, entre el número y el espacio, y después el Cálculo Diferencial e Integral). Entonces aparece en escena Newton que da la serie del binomio general, dentro del proceso C. La formación del cálculo infinitesimal con Leibniz y Newton es de nuevo proceso B, con una marcada influencia en Leibniz del proceso C. El siglo XVIII sigue la misma dirección: ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, junto a la geometría analítica y mecánica analítica. Errores y contradicciones en el proceso B, llevaron a Euler y otros a abandonarlo. Más radical fue Lagrange en su Théorie des fonctions analytiques, 1797 dejando el Cálculo infinitesimal como un conjunto de reglas formales aplicables a ciertas funciones especiales. Considera solo series de potencias enteras, la derivada es definida así de un modo puramente formal. En el siglo XIX se busca una base sólida para el Análisis por medio de los criterios de convergencia: Cauchy da la definición rigurosa de la derivada y de la integral como límites de cocientes y sumas infinitas y sobre ellas construye una sistematización lógica del cálculo infinitesimal, estamos en el proceso A. En otros lugares, en el siglo XIX se da la orientación B: Geometría proyectiva, Física matemática y Teoría de funciones de variable compleja, iniciadas por franceses.

Desgraciadamente, muchas de sus ideas o proposiciones están lejos de realizarse, y muchas de sus quejas sobre la Universidad o sobre la enseñanza de las matemáticas poseen una actualidad sorprendente.

A lo que sigue una pequeña digresión sobre el estilo de la exposición matemática:

En Euclides aparece todo cristalizado bajo el esquema: «hipótesis, tesis, demostración», (proceso A); pero en el siglo XIX con los franceses citados se forma una nueva forma artística de exposición matemática, integrada por una serie de deducciones ingeniosamente eslabonadas (Monge, Picard), que se leen como una novela de magnífico estilo y de atrayente argumento, estilo apropiado a la orientación B.

Con Weierstrass en 1860 aparece de nuevo el método A, y lo mismo cabe decir de las investigaciones sobre las axiomáticas de la geometría.

La consecuencia que se puede sacar es que las dos direcciones fundamentales de pensamiento matemático se han mostrado igual de fecundas; actuando muchas veces alternativamente, y otras simultáneamente, haciendo surgir de esa conjunción los más grandes progresos de la matemática.

La matemática presentará un desarrollo armónico en todas direcciones siempre que ninguna de las dos orientaciones sea preterida o despreciada. Cada matemático debe pues trabajar en la dirección que le señalan sus dotes y su idiosincrasia intelectual.

En la Enseñanza secundaria, desgraciadamente desde hace largo predomina la dirección A. Todo movimiento de reforma que se pueda mirar como saludable debe dar una entrada más amplia al sistema B. Que se penetre la enseñanza del espíritu que encarna el proceso genético, que se acentúe la intuición espacial como tal y para dar el concepto de función, con la fusión de los conceptos espacio y número.

Destacamos de nuevo el punto de vista «actual» de Klein a comienzos de siglo. Desgraciadamente, muchas de sus ideas o proposiciones están lejos de realizarse, y muchas de sus quejas sobre la Universidad o sobre la enseñanza de las matemáticas poseen una actualidad sorprendente.

Merece la pena señalar que en la Segunda parte, dedicada al Álgebra, su propósito esencial es aplicar los métodos gráficos y, en general, los métodos geométricamente intuitivos a la resolución de ecuaciones: ecuaciones con un parámetro, con dos y tres parámetros y sus líneas, curvas o superficies asociadas. En la tercera parte dedicada al Análisis, lo más importante serán las funciones trascendentes elementales, destacando que en la definición del número e como el límite de la sucesión $(1+1/n)^n$, se omite lo más característico y necesario, procedente de su desarrollo histórico, en el que aparece el logaritmo natural como el área bajo la curva $1/x$, entre los puntos 1 y t, o como serie de potencias. Respecto al cálculo infinitesimal señala:

Nuestro deseo es que los conceptos representados por los símbolos, $y = f(x)$, dy/dx, $\int ydx$ lleguen a ser familiares a los alumnos con esas denominaciones y no como una nueva disciplina abstracta, sino enlazados orgánicamente dentro de la enseñanza total, a lo cual puede llegarse ascendiendo poco a poco, partiendo de los ejemplos más simples. La necesidad inaplazable de tales reformas se funda en que afecta a la formación de conceptos matemáticos que hoy se utilizan constantemente en las aplicaciones de la matemática a todas las ramas de la Ciencia, y sin las cuales, todos los estudios en la enseñanza superior quedarían completamente en el aire. La enseñanza del Cálculo infinitesimal debe basarse en cuatro puntos: 1) Exposición intuitiva de consideraciones abstractas por medio de representaciones gráficas, 2) Resaltar el enlace entre las teorías próximas, como el Cálculo con diferencias y el de la interpolación y también con las investigaciones de los filósofos, 3) Dar importancia a la evolución histórica de los conocimientos científicos, 4) Presentación de algunos ejemplos de libros populares para caracterizar la diferencia entre los conceptos del gran público influidos por tales obras, y los de los matemáticos profesionales.

Todo ello debe ser conocido por los aspirantes al magisterio secundario, pues al llegar a la práctica de la enseñanza tropezarán con que los conceptos de los alumnos son aquellos vulgares, y si no conocen bien los elementos intuitivos de la Matemática, así como las relaciones vivas entre las distintas ramas de ésta, y entre ella y las demás ciencias, y sobre todo, si no conocen el desarrollo histórico, les fallará siempre el terreno en que pisen y una de dos: volverán su atención al campo de la matemática pura y no serán entendidos por sus discípulos o sucumbirán en la lucha, olvidando cuanto aprendieron en los cursos superiores y cayendo en la rutina de siempre. Precisamente en el campo del cálculo infinitesimal es donde la discontinuidad en la enseñanza alcanza un grado máximo.

No debemos olvidar, en ningún momento, el público al que iba destinada la obra y con qué propósito: formar profesores de enseñanza primaria y secundaria. La educación secundaria, a principios de siglo, estaba orientada exclusivamente hacia la posterior formación universitaria de sus alumnos; por tanto, lo que en ella encontramos son los temas matemáticos justificados internamente, sirviendo en especial para asentar intuitivamente las bases para su posterior desarrollo formal en la enseñanza superior. Hoy la educación secundaria tiene una orientación más amplia, por ello nuestra utilización de las ideas de Klein debe ir hacia los aspectos más intuitivos y concretos.

No debemos olvidar, en ningún momento, el público al que iba destinada la obra y con qué propósito: formar profesores de enseñanza primaria y secundaria.

Finalmente, quiero añadir un punto débil que encuentro en la obra: las aplicaciones a la física u otros campos de actividad científica apenas aparecen, únicamente se refiere, en la tercera parte, a la teoría de las pequeñas oscilaciones y a la acústica.

Índice de la obra

CAPÍTULO II: Ecuaciones en el campo de los números complejos
A. El teorema fundamental del Álgebra. B. Ecuaciones con un parámetro complejo; su estudio por medio de la representación conforme de dos esferas. Ejemplos: 1. La ecuación pura. 2. La ecuación diédrica. 3. Ecuaciones tetraédrica, octaédrica o icosaédrica. 4. Continuación: Establecimiento de las ecuaciones normales. 5. Sobre la resolución de las ecuaciones normales. 6. Uniformización de las ecuaciones normales por medio de funciones transcendentes. Resolución trigonométrica de la ecuación cúbica. 7. Resolubilidad por radicales. 8. Reducción de las ecuaciones generales a ecuaciones normales. Sobre la teoría de la ecuación de quinto grado.

TERCERA PARTE

CAPÍTULO I: El logaritmo y la función exponencial
1. Sistemática del análisis algebraico. 2. desarrollo histórico de la teoría. Neper y Burgi. La ecuación de diferencias. Siglo XVII: Logaritmos hiperbólicos. Euler y Lagrange: Análisis algebraico. Siglo XIX: Funciones de variable compleja. 3. Algo sobre la enseñanza de los logaritmos. 4. Punto de vista de la Teoría de funciones. El paso al límite de la función potencial a la exponencial.

CAPÍTULO II: Funciones goniométricas
1. Teoría de las funciones goniométricas. 2. Tablas trigonométricas. A. Tablas trigonométricas naturales. B. Tablas logaritmo-trigonométricas. 3. Aplicaciones de las funciones goniométricas. A. Trigonometría; en particular trigonometría esférica. B Teoría de las pequeñas oscilaciones. (Cálculo infinitesimal disfrazado). C. Representación de las funciones periódicas por series de funciones goniométricas. Aproximación por series infinitas. El fenómeno de Gibbs. Excursión sobre el concepto general de función. Significación histórica de las series trigonométricas; trabajos de Fourier.

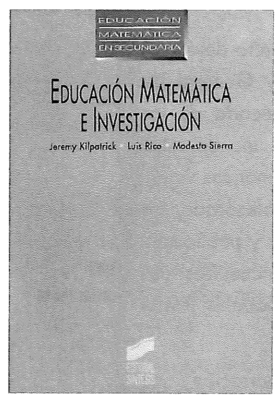
CAPÍTULO III: Del cálculo infinitesimal propiamente dicho
1. Principios generales del cálculo infinitesimal. Orígenes intuitivos. Fundamentación lógica por medio del concepto de límite; construcción partiendo de la «diferencial». Los infinitésimos actuales. La reacción: el cálculo de derivadas de Lagrange. Forma y significación del cálculo infinitesimal en la enseñanza. 2. El teorema de Taylor. Las primeras parábolas osculatrices. Crecimiento del orden. Evaluación del resto de Cauchy. Excursión histórica (Taylor y MacLaurin). 3. Consideraciones históricas y pedagógicas acerca del cálculo infinitesimal. Características de nuestro criterio.

APÉNDICE:

I. TRASCENDENCIA DE e y π.
Historia. Demostración de la trascendencia de e y π. Números trascendentes y números algebraicos.

II. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS.
1. Potencia de los conjuntos. 2. Ordenación de los elementos de un conjunto.

Florencio Villarroya



EDUCACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN
Jeremy Kilpatrick, Luis Rico y Modeto Sierra
Editorial Síntesis, Madrid, 1994
ISBN: 84-7738-228-X
207 páginas

La colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje» de la editorial Síntesis ha constituido en los últimos años, a través de su treintena de títulos, el mayor esfuerzo editorial en el campo de la didáctica especial de una sola disciplina en los niveles de primaria y secundaria obligatoria.

Una vez finalizada esta colección, la misma editorial ha iniciado otra, esta vez dirigida a secundaria y, sobre todo, a bachillerato, titulada «Educación matemática en secundaria», dirigida por Miguel de Guzmán y Luis Rico. Aun cuando ya han aparecido varios títulos, *Educación matemática e Investigación,* constituye el primero de la serie donde se ha querido, como dicen los autores en la introducción «...comenzar por la historia de nuestro campo de trabajo, ya que el conocimiento de lo que ha sido y lo que ha hecho nuestra comunidad de profesores de matemáticas en períodos anteriores es uno de los signos de identificación de la propia comunidad».

El libro tiene dos partes claramente diferenciadas, pero complementarias, una referida al ámbiro internacional y la otra dirige su atención a la realidad española.

En la primera, «Historia de la investigación en educación matemática», Kilpatrick comienza estableciendo las raíces de la investigación en educación matemática en relación, en primer lugar, con las propias matemáticas (simplificando, qué contenidos matemáticos se enseñan y se aprenden) y, en segundo lugar, con la psicología (volviendo a simplificar, cómo el contenido es enseñado y aprendido).

Una vez descritas las raíces, se discute la investigación realizada durante los dos primeros tercios de siglo por aquellas personas que han llegado a denominarse educadores matemáticos. A continuación, se describe la formación durante el siguiente decenio de una comunidad internacional de investigadores en educación matemática, y la narración sigue hasta comienzo de los ochenta, con un bosquejo de algunos de los retos y respuestas actuales en este campo.

La segunda parte del volumen, «Educación matemática en la España del siglo XX», corre a cargo de los profesores españoles Rico y Sierra. En este estudio se traza el recorrido histórico y los logros de la comunidad de educadores matemáticos en nuestro país.

Se divide el estudio en cuatro periodos: primer tercio del siglo, desde la guerra civil hasta la ley Villar, la Ley General de Educación y los años setenta y, finalmente,la década de los ochenta y comienzos de los noventa. Para cada uno de estos periodos se estudia los planes de estudio de Matemáticas vigentes en primaria y secundaria, la formación del profesorado, las aportaciones hechas desde la universidad, revistas y publicaciones, asociaciones y movimientos de profesores, encuentros, jornadas y congresos y algunas aportaciones individuales interesantes.

En conjunto, este trabajo es una muy valiosa aportación, que viene a llenar un hueco en historia de la educaciónen lo que atañe a la historia de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Emilio Palacián

EL UNIVERSO DE LAS MATEMÁTICAS
William Dunham
Ed. Pirámide, Madrid, 1995
ISBN: 84-368-0896-7
444 páginas

En *El Universo de las matemáticas* su autor nos propone un recorrido alfabético por el mundo de las matemáticas: un capítulo para cada una de las letras del abecedario desde la A a la Z. No es una idea original a la hora de abordar un libro de divulgación. Hay otro libro anterior y próximo (tanto en la edición española –Tusquets, 1993–, como en la original norteamericana de 1991; la edición norteamericana de Dunham es de 1994) estructurado de la misma forma: *Más allá de los números*, de J. A. Paulos. A él se refiere Dunham en el prólogo de su libro cuando dice que «con múltiples artículos dedicados a algunas letras, ha conseguido una mayor amplitud de cobertura. Escribiendo menos ensayos, pero más largos, he optado por una mayor profundidad en los temas. Espero que nuestros dos libros coexistan pacíficamente como variaciones de un mismo formato alfabético».

¿A quién puede interesar un libro como este? En primer lugar hay que decir que es de lectura amena y sin grandes complicaciones matemáticas en general, con la facilidad añadida de estar estructurado en capítulos cortos, independientes y que se pueden leer en cualquier orden, y cuyo tema se conoce de antemano por el título. También es apropiado para los enseñantes, porque en él encontrarán bastante historia y algo del presente de las matemáticas; disquisiciones (tales como los capítulos «La personalidad de los Matemáticos» o «Utilidad»), discutibles en muchos casos, problemas (algunos bien conocidos y otros no tanto, al menos por quien esto escribe) y demostraciones de resultados elementales y populares, pero que no se suelen encontrar en los libros (por ejemplo, la fórmula de Herón para el área de un triángulo, que hace a partir de la más general de Brahmagupta; la expresión del área de una esfera o que nos hay más que un triplete de números primos gemelos que difieren en dos unidades: 3, 5 y 7, a diferencia de las quizás infinitas parejas de los mismos números); también hay múltiples anécdotas y bastantes consideraciones generales sobre diferentes aspectos de las matemáticas.

Asimismo, es interesante este libro para el alumnado de enseñanza media o de universidad. Para los primeros como banderín de enganche a las matemáticas, y para que puedan leer y comentar (porque, ¿no es conveniente que en esos niveles educativos se hagan también comentarios de textos matemáticos y no sólo de materias de «letras3?). Para los segundos, como auxiliar que les permita situar histórica y socialmente su materia de estudio, que no son sólo epsilones, algoritmos y teoremas de existencia, así como consideraciones conexas a la teoría en estado puro.

Una vez dicho todo lo anterior, también hay (o yo al menos así lo considero) algunos defectos, más allá de la siempre discutible elección de unos temas y no de otros. Hay en el libro mucha historia y poco presente y futuro (como ya pasaba en el anterior libro del autor Viaje a través de los genios, y que era motivo de crítica por bastantes de mis alumnos que lo leyeron), lo que puede contribuir a interiorizar todavía más esa percepción social de las matemáticas como algo añejo, casi arqueológico. También, un cierto aire o tono distante y profesoral, poco próximo al ciudadano de a pie (lo que, sin embargo, para algunos puede ser una virtud). Si hubiera que elegir, yo desde luego encuentro más vivo y más proyectado hacia el futuro el libro de Paulos; pero creo que no es necesaria la elección, sino que pueden coexistir perfectamente y es conveniente que lo hagan. Y para acabar, hay que felicitarse de que los libros de divulgación matemática se editen y se vendan en nuestro país, como lo prueba la rápida traducción del que comentamos (el original es de 1994), en una colección que ya cuenta con otros libros de este tipo.

Fernando Corbalán

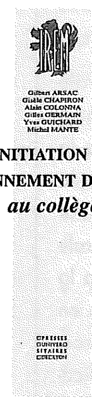
BIOGRAFÍAS DE MATEMÁTICOS ÁRABES QUE FLORECIERON EN ESPAÑA
José Antonio Sánchez Pérez
Edición facsímil
Estudio Preliminar: Rafael Pérez Gómez
El legado andalusí, Sevilla, 1995
ISBN: 84-87004-50-4
XXIII + 163 páginas

Siempre resulta gozosa la aparición de la edición facsimilar de un libro. Y ello por un doble motivo, porque se suelen reproducir ediciones muy cuidadas con una bella tipografía y porque se pone al alcance de todos, obras que, aparte de poder consultar en buenas bibliotecas, sólo se pueden conseguir, con suerte, en el catálogo de librerías especializadas de anticuariado dentro del epígrafe de «libros raros, curiosos y agotados».

En esta ocasión se reproduce una memoria de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, publicada en el año 1917 con ocasión de un concurso sobre el tema «Monografías histórico-científicas de matemáticos españoles anteriores al siglo XIX».

La monografía de Sánchez Pérez constituye un repertorio de casi dos centenares de fichas sobre otros tantos «andalusíes que, entre otras ramas del conocimiento, también se ocuparon de lo que hoy llamamos matemáticas». Esta última expresión entrecomillada describe el contenido mucho mejor que el título asignado por el autor, según se señala en el estudio introductorio en el que se presenta la edición, escrito por Rafael Pérez –entre otras cosas primer director de nuestra revista SUMA–, en el que, de forma muy documentada y erudita, centra el tema y realiza algunas críticas a la obra.

Emilio Palacián



INITIATION AU
RAISONNEMENT DÉDUCTIF
au collège

INITIATION AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF AU COLLÈGE
Gilbert Arsac y otros
Presses Universitaires de Lyon, Lyon, 1992
ISBN: 2-7297-0422-1
188 páginas

Entre los objetivos generales que se proponen para el área de Matemáticas en los Diseños Curriculares Base de la Educación Secundaria Obligatoria elaborados por el MEC, figura el siguiente: «Al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria los alumnos habrán desarrollado la capacidad de utilizar las formas del pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas». La consecución de este objetivo supone, entre otras cosas, que el profesor de matemáticas de esta etapa deberá plantear situaciones didácticas que pongan de manifiesto algunas de las reglas lógicas del discurso matemático para que el alumno empiece a familiarizarse con ellas. Este libro se ocupa de ese tema, iniciando en la argumentación matemática a niños de 11-12 años a través de varias situaciones didácticas que se describen con mucha precisión. Aun cuando estas situaciones están pensadas para el sistema de enseñanza francés, son perfectamente transportables a nuestro país y, en este sentido y dada la escasez de publicaciones en castellano que aborden estos problemas, sería muy deseable que algún organismo oficial se plantease su traducción.

Los autores del libro, basándose en su experiencia docente, eligen aquellas reglas del discurso lógico-matemático que, debido a su diferencia con las reglas de la argumentación común, producen dificultades en los niños. Así pues, el objetivo que se plantean es la creación de dispositivos didácticos que faciliten a los alumnos la aceptación de las siguientes reglas del razonamiento matemático:

- Un enunciado matemático sólo puede ser verdadero o falso.
- Un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado.
- La argumentación matemática se apoya sobre un cierto número de propiedades y definiciones claramente enunciadas sobre las cuales existe acuerdo previo.
- No se puede decidir sobre la validez de un enunciado apoyándose en el hecho de que la mayor parte de las personas presentes están persuadidas de que el enunciado es verdadero.
- La existencia de ejemplos que verifican un enunciado no es suficiente para probar su validez.
- Una constatación hecha sobre un gráfico no es suficiente para probar que un enunciado de geometría es verdadero.

Al objetivo anterior se añade una concepción del aprendizaje basada en que «la adquisición de un conocimiento pasa, en un primer momento, por la toma de conciencia del alumno de la insuficiencia de sus conocimientos anteriores». Esto supone la búsqueda de «situaciones que permitan a los alumnos utilizar sus propios conocimientos, tomar conciencia de que son insuficientes y adquirir conocimientos nuevos mejor adaptados a la situación». Pero los conocimientos iniciales de los alumnos en materia de demostraciones son familiares a cualquier profesor: en los enunciados numéricos comprueban algún caso particular y, a partir de ahí, deducen la veracidad del enunciado, mientras que en los enunciados geométricos se limitan a mirar el dibujo o, en todo caso, a efectuar alguna medida sobre el mismo, y deducen propiedades basándose en la particular idiosincrasia de dicho dibujo. Por tanto, se trata de definir situaciones didácticas en las que los niños puedan utilizar sus formas iniciales de demostración, pero que en el transcurso de las mismas se ponga de manifiesto que estas formas son insuficientes y se vean obligados, por imperativos de la propia situación, a modificar sus reglas iniciales de razonamiento.

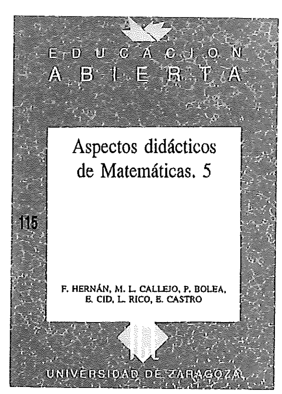
Las situaciones elegidas por los autores del libro son las siguientes:

- En la expresión $n^2 - n+11$ si se reemplaza n por cualquier número natural se obtiene siempre un número primo.
- Si n es un número par entonces n^2 es un número par.
- ¿Existe un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 9 cm y 4 cm?
- Trazar un rectángulo ABCD tal que AB=8 cm y BC=5 cm. Dibujar un punto E sobre AC de forma que AE=3 cm. Trazar la paralela a AD que pasa por E; ella corta a AB en N y a DC en L. Trazar la paralela a AB que pasa por E; ella corta a AD en M y a BC en K. Entre los dos rectángulos EMDL y ENBK ¿cuál es el que tiene mayor área?
- La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

La gestión de cada situación se lleva a cabo en tres fases: un primer tiempo de trabajo individual para que cada niño pueda pensar por su cuenta en el problema propuesto y tomar decisiones, una segunda fase de trabajo en pequeños grupos que obliga a los niños a comentar y discutir sus propuestas particulares y a ponerse de acuerdo para escribir las conclusiones del grupo en un cartel y, por último, una tercera fase en la que toda la clase, ayudada por el profesor, realiza un debate sobre la validez de las conclusiones obtenidas por cada grupo.

La cuidadosa descripción que el libro hace de las situaciones y su desarrollo, así como el análisis detallado de los resultados y de las dificultades surgidas en su puesta en práctica, permite a cualquier profesor tener la suficiente información para controlar lo que suceda en su propia clase e, incluso, diseñar nuevas situaciones de introducción al razonamiento deductivo. Creemos, por tanto, que este libro ofrece una propuesta didáctica bien fundamentada y útil para los profesores de la Educación Secundaria Obligatoria.

Eva Cid



ASPECTOS DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS. 5
F. Hernán y otros
ICE, Zaragoza, 1995
ISBN: 84-7791-121-5
182 páginas

Las cinco ponencias que encontramos en este libro abordan aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de notable interés.

En *Estilos de enseñanza. Territorio y límites de la claridad*, el ensayo de Francisco Hernán, el autor emplea un símil para analizar la enseñanza de las matemáticas, basado en el problema de tres cuerpos, que le permite observar el pasado reciente como una sucesión de momentos en los que el centro de gravedad del sistema formado por el qué enseñamos, a quién y cómo ha ido basculando de uno de los «cuerpos» al otro. El trabajo constituye una reflexión crítica sobre los problemas de una profesión, la de profesor de matemáticas, que nunca acaba de resolver sus interrogantes. Termina exponiendo su deseo de entrar, en los próximos años, en lo que denomina «el momento de la claridad», en el que la reflexión sobre el lugar, las condiciones y las fronteras de la claridad debe conducir a decisiones educativas de caracter práctico, lo que muestra en algunos ejemplos.

Mª Luz Callejo en *Evaluación de los alumnos en resolución de problemas: tres estudios de casos*, reconoce que, siendo la finalidad de la evalución el conocimiento de los progresos de los alumnos en la resolución de problemas, es una difícil tarea, sobre todo porque esos progresos se van haciendo realidad a largo plazo. Nos acerca a través de ejemplos de diseño de baremos, escalas, protocolos y planes de evaluación concretos a la práctica evaluativa en este campo.

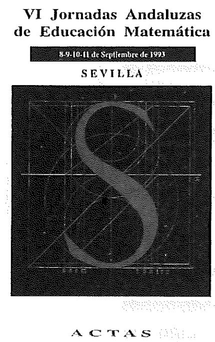
Pilar Bolea, partiendo del concepto de transposición didáctica, analiza en su ponencia *La transposición didáctica de la geometría elemental* los cambios que han transformado el saber geométrico matemático en la geometría escolar.

La hipótesis de que el conocimiento aritmético adquirido previamente por los alumnos es la causa principal de los errores que éstos cometen en el paso al álgebra, es el punto de partida del texto de Eva Cid titulado *De la aritmética al álgebra: obstaculos epistemológicos y didácticos.* En él, además de desarrollar algunos conceptos teóricos de didáctica fundamental, proporciona propuestas didácticas muy precisas para iniciar el aprendizaje algebraico.

Luis Rico y Encarnación Castro en el último trabajo de este libro, *Pensamiento numérico en educación secundaria obligatoria,* presentan un modelo teórico para caracterizar el pensamiento numérico y a través del mismo analizan el bloque de números y operaciones del diseño curricular base de la educación secundaria obligatoria.

En conjunto estas actas, que dan fe de los encuentros bianuales del ICE de Zaragoza sobre educación matemática en secundaria, vuelven a responder al interés con que son acogidas por los muchos profesores y profesoras que asisten a las sesiones y esto es, sobre todo, por responder a temas candentes en la profesión.

Julio Sancho



VI JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Manuel Iglesias (Edit.)
SAEM «Thales», Sevilla, 1995
ISBN: 84-920056-0-2
483 páginas

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» organiza bianualmente unas jornadas cuyo interés trasciende las fronteras de la comunidad andaluza. Este libro recoge las actas de la sexta edición, celebrada en Sevilla en septiembre de 1993.

Además de los resúmenes de las conferencias plenarias aparecen los textos completos de cerca del medio centenar de comunicaciones presentadas a las jornadas, buen síntoma de la vitalidad de la «Thales» y de las propias jornadas. Estas comunicaciones están agrupadas en los siguientes temas:

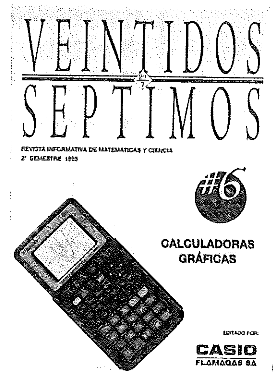
- El laboratorio de matemáticas.
- Calculadoras en el aula.
- Resolución de problemas.
- Evaluación en matemáticas.
- Matemáticas y medios de comunicación.
- Comentario de texto en matemáticas.
- Enseñanza de las matemáticas en la universidad.
- Formación del profesorado.
- Software en matemáticas.
- Comunicaciones libres.

Obviamente, la calidad de los trabajos es irregular, como no puede ser de otra forma en una publicación colectiva de este tipo.

Es de resaltar la diligencia e interés con que la sociedad «Thales» edita sus actas. En todo congreso, encuentro, jornadas... lo que queda es eso, las actas, y se debería seguir el ejemplo de la misma, para que no quedase un acontecimiento de este tipo sin que llevase aparejado la publicación correspondiente.

Emilio Palacián

VEINTIDÓS SÉPTIMOS
Revista informativa de matemáticas y ciencia
Varios autores
N.° 6, segundo semestre 1995
Flamagás, SA, División didáctica
30 páginas



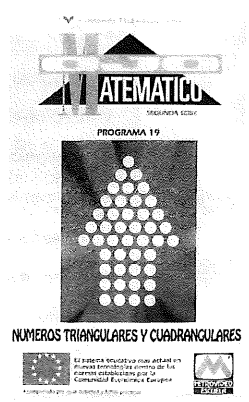
Nos hacemos eco de esta publicación, editada con fines publicitarios, que hemos recibido recientemente, puesto que pensamos que en su contenido aparecen algunas aportaciones de interés para la incorporación de las calculadoras al aula. De hecho, creemos que la mejor publicidad que puede hacer la marca es demostrar las posibilidades didácticas de estos instrumentos. No sabemos que tipo de difusión tiene y cómo es posible recibirla con periodicidad en los centros de enseñanza, aunque sospechamos que es dirigiéndose a los distribuidores locales.

Este número, del que damos noticia, centra su interés en las calculadoras gráficas, muy en sintonía con lo que está ocurriendo en su incipiente implantación, así como con la aparición de numerosos artículos sobre el tema en revistas didácticas.

Destacaríamos los trabajos «La estadística y la calculadora gráfica», «matrices y sistemas de ecuaciones» y la traducción de la primera parte del artículo «Isometrías en el plano cartesiano».

Julio Sancho

NÚMEROS TRIANGULARES
Y CUADRANGULARES
Serie: Ojo matemático. Programa 19
Producción: Yorkshire TV, 1992
Distribución:
Metrovídeo Española
C/ Torres Quevedo 1
28760 Tres Cantos
Tfno.: 8032142
VHS, 20 minutos



Existen muchos tópicos sobre los vídeos didácticos de contenido matemático. El primero, muy extendido entre el profesorado de esta materia, es que no existen. El segundo es que, aunque haya alguno, sus contenidos no se ajustan a los currículos que se desarrollan en clase. El tercero es que, aunque traten un tema que tenga que ver con los contenidos que estamos dando en clase, el vídeo no es un recurso serio, que el profesoro profesora lo cuenta mucho mejor y, por tanto, es ese material que se les «pone» a los alumnos en esos días terribles, después de las evaluaciones, la semana antes de las vacaciones, cuando están cansados... Ya se sabe: «el audiovisual amansa a las fieras...».

Esta serie de vídeo «Ojo Matemático» viene a desmontar de un plumazo estos tópicos y alguno más que, por la brevedad, he omitido pero que están en la mente de todos.

La serie consta de 20 vídeos didácticos, con títulos independientes que abarcan todos los bloques del actual currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria: *Área y Volumen, Ecuaciones y fórmulas, Fracciones y porcentajes, Gráficos, Lógica y resolución de problemas, Números, Probabilidad, Razón y escala, Formas y ángulos, Simetría, Círculos, Decimales, Líneas y redes, Mapas y coordenadas, Medidas, Cálculos aproximados, Números de Fibonacci y números primos, Estadística, Números triangulares y cuadrangulares* y *Cómo abordar los problemas.*

En cada vídeo los contenidos se presentan en bloques de corta duración, marcados por pausas para que los alumnos investiguen sobre cuestiones planteadas por el propio vídeo o por las fichas de actividades que acompañan a la guía didáctica.

No presentan los contenidos de forma cerrada sino que más bien pretende que sea el propio alumno el que vaya construyendo los conceptos y extrayendo sus propias conclusiones sobre los temas planteados. La presentación de los contenidos se basa, por tanto, en una metodología constructivista en la que más que ofrecer respuesta se plantean interrogantes para que sea el alumno el que construya sus propios conocimientos.

Pero, tan interesante como los propios vídeos es la guía didáctica que los acompaña, en la que de una manera clara y precisa se le brinda al profesor una información valiosa sobre la metodología de la utilización del vídeo en la clase. En esta guía, y para cada uno de los programas, se presenta al profesor:

- Por una parte los aspectos didácticos relacionados con el vídeo: Ideas generales tratadas en la película, unas fichas de prácticas para fotocopiar y entregar a los alumnos con problemas e investigaciones de carácter abierto relacionado con los contenidos del vídeo, y un apartado de Ideas complementarias para extensión de prácticas.

- Por otra, un sumario detallado del programa con indicación de minutado y pausas y los puntos de discusión que se pueden tratar al hilo del visionado, formulados en forma de preguntas concretas.

El programa 19 de esta serie es el vídeo Números triangulares y cuadrangulares. Es un material muy apropiado para desarrollar, con una metodología activa y de investigación por los propios alumnos, uno de los contenidos del segundo ciclo de la ESO: las regularidades numéricas.

El vídeo, de 20 minutos de duración, diversifica los tipos de imágenes,, lo que le confiere una agilidad que mantiene de forma constante el interés de los alumnos. Cuenta con imagen real (dramatizaciones con agradables toques de humor, pero presentando problemas matemáticos –el humor no está reñido con las matemáticas–, situaciones de investigación matemática práctica realizadas por alumnos en clase), dibujos animados, animaciones con infografía, gráficos de refuerzo de las ideas... y pausas para separar bloques y proporcionar tiempo a los alumnos para meditar sus respuestas.

Comienza el vídeo con una situación simpática: un empleado de un supermercado derriba una pirámide de rollos de papel. La encargada (estos vídeos tienen un tratamiento muy positivo sobre la educación en valores: planteamiento no sexista en la asignación de roles, marco de convivencia interracial...) le conmina a que reconstruya la pirámide lo que genera una situación de investigación que vertebra todo el documento. ¿La pirámide era triangular o cuadrada? ¿Cuántos rollos tenía la base?...

A partir de esta situación se introducen los números triangulares y diversas situaciones en las que aparecen regularidades numéricas: envases de dulces de forma triangular, suma de los números del 1 al 100, número de apretones de manos entre un número determinado de personas, etc.

De una manera natural, y huyendo de la combinatoria, nos introduce en el frondoso campo de las relaciones numéricas que se dan en el triángulo de Pascal, para descubrirnos que en una de sus líneas paralelas a un lado aparecen los números triangulares, pero que en la siguiente aparecen, ¡sorpresa!, el número de elementos que forman pirámides triangulares.

En la segunda parte, el vídeo aborda las relaciones entre los números triangulares y los números cuadrados y, ¿por qué no?, la relación entre pirámides triangulares y cuadrangulares. Todo ello planteado de una forma ágil y nada formal, ya que son los alumnos los que van descubriendo estas relaciones numéricas, de forma inductiva y gráfica y sin tener que recurrir a herramientas algebraicas en ningún momento.

El vídeo «engancha» desde el primer momento, no sólo a los alumnos, sino también al profesor que se puede ver tentado a desarrollar sus propias investigaciones del siguiente estilo:

- ¿Qué fórmula nos proporciona el número de elementos de una pirámide triangular en función del número de pisos? ¿Y los de una cuadrada?
- ¿Qué pasa en el triángulo de Pascal si cambiamos los unos de uno de los lados por doses? ¿Qué números aparecen en las paralelas al lado de los doses?

Por cierto, al final el empleado del supermercado con los rollos de la pirámide que había tirado construye no una sino dos pirámides.

Sabiendo que había más de 100 rollos ¿podrías decir cuántos había?, ¿cómo son las pirámides que ha construido?, ¿cómo era la original?

Si lo descubres, sin mirar el vídeo, encontrarás no sólo la solución a un problema no rutinario, sino algo mucho más importante: las ventajas del aprendizaje basado en situaciones reales de investigación matemática por parte de los alumnos. Eso es lo que pretende el vídeo.

Antonio Pérez Sanz

SAEM THALES

EDICIÓN ESPECIAL EPSILON
DEDICADO A LA ALHAMBRA

Segunda edición (1995) de un número monográfico dedicado a las relaciones entre Arte y Matemáticas, que gira en torno a las matemáticas de la Alhambra de Granada. Se completa con un artículo dedicado a la mezquita de Córdoba. Es un libro de indudable éxito que estaba agotado y que ha habido que reeditar por su enorme demanda. Ilustraciones de color.

PVP. España: 2.000 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 20$USA.

Otras publicaciones

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS 10 AÑOS DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Incluye las soluciones a los problemas propuestos en las fases provincial y regional en los diez primeros años de existencia de la Olimpiada Matemática Thales (competición estudiantil dirigida a alumnos de 8.° de EGB y 2.° de ESO). Aunque las soluciones han sido realizadas por los editores, se han incluido muchas realizadas por algunos de los más de treinta mil alumnos participantes. 212 páginas. Impresión a dos tintas.
PVP. España: 1.300 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 13$USA.

UNIDADES DIDÁCTICAS DE MATEMÁTICAS
Editado en septiembre de 1995. Contiene cinco unidades didácticas completas seleccionadas entre las presentadas a un concurso público convocado por la SAEM Thales a tal efecto. Incluye abundantes actividades dispuestas para su aplicación directa al aula con sus correspondientes consideraciones para el profesor. 170 páginas. Ilustraciones en blanco y negro.
PVP. España: 2.000 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 20$USA.

Pedidos: SAEM THALES. Facultad de Matemáticas. Apartado de Correos 1160. 41080 SEVILLA.

SUMA 21
febrero 1996

ProfMat 95
Investigación en el aula

CRÓNICAS

Jornadas Nacionales de la Associaçao de Profesores de Matemática de Portugal

Durante los días 8 al 11 de noviembre pasado, se han celebrado en Évora las ProfMat 95, con la asistencia de unos 1.500 profesores. La APM de Portugal tiene más de 3.000 socios y firmó el año anterior un convenio con nuestra Federación, para estimular el intercambio de trabajos y publicaciones, así como la asistencia a seminarios y congresos de los profesores españoles y portugueses en total igualdad.

Este año se cumplía el X aniversario de las ProfMat, al que se dedicó una sesión plenaria, coordinada por los profesores Henrique Guimaraes y Eduardo Veloso. Otras conferencias plenarias corrieron a cargo del Prof. Luis Rico Romero, de la Universidad de Granada, sobre «Línea de investigación del Pensamiento Numérico»; Prof. María de Lurdes Serrazina, de Lisboa, sobre «Enseñar/Aprender Matemática», y la de clausura del Prof. Eduardo Sebastiani, de la Universidad de Campinas, S. Paulo –Brasil– que disertó sobre «Otra vez: Por qué la Historia de las Matemáticas en el aula».

Hubo una representación española, especialmente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, que dispuso de un stand para exponer sus publicaciones, material didáctico y el Segundo Anuncio del ICME-8. También presentó una exposición de fotografía matemática, realizada por alumnos de todos los niveles educativos.

En nombre de nuestra Federación, de la SAEM Thales y de la organización del ICME-8, intervino en una sesión plenaria el Presidente de Honor de la Federación y Presidente de «Thales», Prof. Gonzalo Sánchez Vázquez, invitando a los profesores portugueses al congreso de Sevilla con las siguientes palabras:

«En primer lugar, en nombre de los profesores españoles, me complace felicitar a la APM de Portugal y al Comité Organizador de ProfMat 95 por el éxito rotundo de su celebración. Estoy gratamente sorprendido por la fuerza creciente y la gran calidad del movimiento portugués de profesores de matemáticas. Y aprovecho este momento para destacar que prestigiosos profesores de vuestro país, como Paulo Abrantes, Eduardo Veloso, Joao Ponte, Henrique Guimaraes y otros, que impulsaron vuestra Associaçao, también colaboraron con nuestra Sociedad Andaluza Thales en años anteriores.

La SAEM Thales pertenece a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que agrupa a todas las sociedades de profesores regionales. Por designación del máximo organismo mundial, el ICMI (Comisión Internacional de Instrucción Matemática), «Thales» organiza el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), en Sevilla, del 14 al 21 de julio de 1996.

Los ICME tienen lugar cada cuatro años y constituyen el más importante evento para el estudio y mejora de la educación matemática, orientando su enseñanza en más de cien países. Por primera vez, se celebra en una nación iberoamericana, será idioma oficial el español, junto con el inglés tradicional en estos congresos y, también por primera vez, los profesores de aula tendrán muchas oportunidades de participar, con sus experiencias, al lado de los más prestigiosos líderes universales de la didáctica de las matemáticas.

Desde este ProfMat 95, queremos reiterar la invitación a los colegas portugueses, a su potente y bello movimiento de enseñanza de las matemáticas, para que asistan activamente al ICME-8. Actualmente, la Associaçao portuguesa y la Federación española tienen acordado un convenio (único país con el que se ha firmado), que permite a sus profesores miembros acceder a todas las actividades y publicaciones en igualdad de condiciones. En estos momentos, hay ya más de 400 profesores españoles y casi 100 portugueses inscritos en el ICME-8, y varios grupos preparan proyectos, ponencias y comunicaciones en los dos países.

Esta mutua cooperación tiene ya precedentes. Los profesores portugueses tuvieron una presencia activa (casi 100) en el I CIBEM, Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que se celebró en Sevilla en 1990, en que fueron oficiales los idiomas portugués y español. También nos han acompañado en las Jornadas Nacionales de la Federación y en las Andaluzas de la Sociedad Thales, como por ejemplo en las de Córdoba de 1995. Por otra parte, los profesores españoles están cada vez más interesados en las reuniones y actividades portuguesas. Asistieron en los últimos años a las ProfMat de Viana do Costelo y de Leiria, y a la AlgartMat de Vila Real do Santo Antonio.

Debemos reforzar esta colaboración, sin duda positiva para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en ambos países, y en este sentido, el ICME-8 constituye una plataforma extraordinaria para que los dos movimientos de profesores muestren sus progresos ante la comunidad internacional.

E agora, con muita osadía, para terminar vou tentar falar en portugués agradecendo à Organizaçao do PorfMat 95, en nome dos participantes espanhois, a sua atençao e facilidades concedidas durante a nossa estadia na bela cidade de Évora.

Amigos portugueses: esperámo-vos de braços abertos em Sevilha, em 1996! Muito obrigado!».

Gonzalo Sánchez Vázquez
Presidente de la SAEM Thales

Investigación en el aula de Matemáticas

La SAEM Thales de Granada y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada han organizado, con gran éxito de participación e interés, unas jornadas sobre investigación en el aula de las matemáticas, que han tenido lugar en Granada los días 23 a 25 de noviembre y 14 a 16 de diciembre de 1995. Con la vista puesta en el próximo ICME-8, los organizadores han pretendido sentar un punto de encuentro entre profesores e investigadores en el que se valoren las experiencias que se están llevando a cabo en las aulas de matemáticas, a la vez que se pongan en común estas experiencias y se anime a participar en procesos innovadores.

El encomiable esfuerzo de la directiva de la SAEM Thales de Granada y la fructífera colaboración con el Departamento de Didáctica de la Matemática ha hecho que las jornadas, celebradas en dos fines de semana, con sesiones de tarde jueves y viernes y de mañana los sábados, hayan sido un completo éxito en número de participantes y en el interés que han suscitado en los mismos. Este éxito se ve refrendado por la publicación que recoge las ponencias y comunicaciones de dichas jornadas y que fue entregada a todos los participantes al término de las mismas.

Las jornadas fueron ofrecidas de manera gratuita a los socios de la SAEM Thales de Granada, con lo que el número de inscripciones fue muy elevado, registrándose una asistencia considerable, pese a la incomodidad del horario y la coincidencia de las fechas con el final del trimestre escolar.

Se presentaron cinco ponencias:

- La investigación matemática en y desde el aula, a cargo del profesor Salvador Guerrero Hidalgo, asesor de Matemáticas del CEP de Málaga.
- El seminario de profesores como estrategia para la investigación en el aula de Matemáticas, impartida por el profesor Luis Rico Romero, catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Sevilla.
- El alumno como investigador. Materiales para el aprendizaje de las Matemáticas, por Luis Berenguer Cruz, profesor de Educación General Básica.
- Metodología de la investigación en Educación Matemática. Perspectivas para el profesor, a cargo del profesor Antonio Fernández Cano, del Departamento de Métodos de Investigación en Educación de la Universidad de Granada.
- La investigación en el aula de matemáticas. Su participación en el ICME-8, presentada por el profesor Gonzalo Sánchez Vázquez, presidente de la SAEM Thales.

Asimismo se presentaron una docena de comunicaciones de manera individual o colectiva.

De acuerdo con la propuesta realizada en la ponencia del Dr. Rico, el Seminario Currículo e Investigación en Educación Matemática presentó cuatro de sus trabajos en los que se muestra la tarea investigadora realizada en el marco de un seminario de profesores.

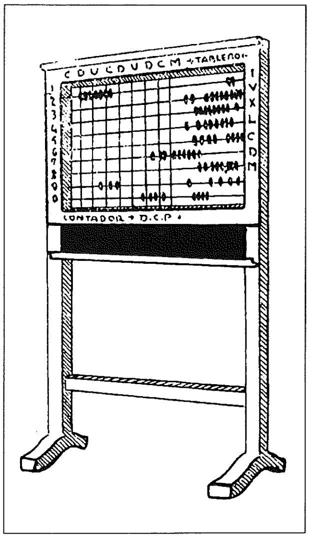
Otro trabajo colectivo fue el presentado por María José Moreno, Miguel A. Cano y otros compañeros de Jaén, en el que ofrecieron una muestra de talleres de geometría.

Los trabajos individuales abarcaron todos los niveles educativos, tanto la enseñanza primaria como la secundaria y la enseñanza e investigación realizada en la universidad por diversos profesores del Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

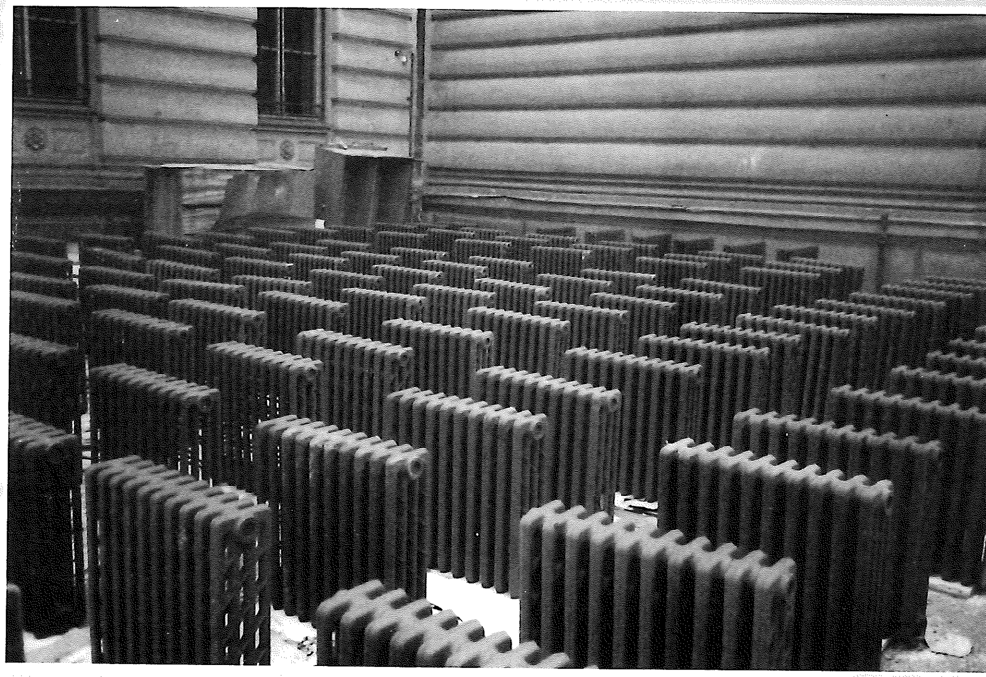
Se han publicado las actas de las jornadas, en colaboración entre el Departamento de Didáctica de las Matemáticas, que ha financiado la publicación, y la Sociedad Thales, que ha corrido con la edición.

Finalmente, se cerraron las jornadas con la Asamblea provincial de la SAEM Thales de Granada, en la que se aprobó la gestión de la directiva y se le reiteró la confianza mediante la prórroga para un nuevo mandato. Una copa de vino permitió brindar por el éxito de estos encuentros y pensar en la realización de futuras jornadas en años próximos.

Pablo Flores



Tablero contador
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)



"Radiación en paralelo". *Gloria Jiménez Moro.* 1995

4º Concurso de Fotografía Matemática

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas

Emma Castelnuovo

Apartado 14.610
28080 MADRID

Plazo de presentación: hasta el 30 de Marzo de 1996

SUMA 21
febrero 1996

IV Concurso de fotografía
III Reunión... en el Cono Sur
ICME-8

IV Concurso-exposición de fotografía matemática

El objetivo de este concurso, convocado y organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo», es el de resaltar la presencia de las matemáticas, en todas sus ramas, a nuestro alrededor, poniendo de manifiesto su utilidad en la actividad personal y social cotidiana.

Se pueden presentar fotografías en una de las dos categorías siguientes:

- *Categoría I*: fotografías realizadas por un alumno o un grupo de alumnos. Éstas deberán haber sido realizadas en el marco de un trabajo de clase, siendo presentadas por el profesor coordinador de la actividad.
- *Categoría II*: libre.

El *tema* será libre, valorándose el contenido matemático explícito. Se podrán presentar series de varias fotografías sobre un mismo contenido matemático. La fotografía deberá ir acompañada de la ficha de presentación de trabajos, que se adjunta en el folleto anunciador, debidamente cumplimentada. En la categoría I, se añadirá a la ficha anterior, un breve informe sobre el trabajo de clase que ha dado lugar a dichas fotografías.

En las dos categorías, las fotografías se presentarán en blanco y negro o color, en un formato mínimo de 18x24, rodeadas con *passe partout* blanco de no más de 15 cm de ancho.

Se premiarán dos fotos en cada categoría con:

- *Categoría I.* Primer premio: 40.000 pta para el profesor coordinador y 20.000 pta en material fotográfico para el alumno o grupo de alumnos. Segundo premio: 25.000 pta para el profesor coordinador y 15.000 pta en material fotográfico para el alumno o grupo de alumnos.

• *Categoría II.* Primer premio: 30.000 pta. Segundo premio: 20.000 pta.

Los trabajos seleccionados se expondrán, dentro de la Comunidad de Madrid, en los lugares y fechas que determine la Junta Directiva de la SMPM «Emma Castelnuovo». Todos o parte de los trabajos presentados formarán parte de la exposición de fotografía que se realizará en el marco del ICME-8 que se celebrará en Sevilla del 14 al 21 de julio de 1996.

El plazo de recepción de trabajos finaliza el 30 de marzo de 1996. La dirección a la que deben enviarse los trabajos, así como solicitar las bases completas o cualquier información complementarias es SMPM «Emma Castelnuovo». Apartado de Correos 14610. 28080-Madrid.

III Reunión de Didáctica de la Matemática en el Cono Sur

Durante los días 31 de marzo al 3 de abril de 1996, se celebrará en la ciudad de Salta (Argentina) la III Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur.

Entre otros, se tratarán los siguientes temas: Cambios curriculares en educación matemática para el año 2000, Recuperación del pensamiento geométrico y Sobre la preparación necesaria para la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas.

Para conocer el programa completo y cualquier otro tipo de información: Ana Aragón, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, Buenos Aires 177-(CP. 4400) Salta, República Argentina, fax 54 87 255449,tno. 54 87 255408.

ICME 8

Ya ha sido hecho público el Segundo anuncio del 8.° Congreso Internacional de Educación Matemática, que se celebrará en Sevilla del 14 al 21 de julio de 1996.

Una síntesis del mismo, con la relación de los títulos de las conferencias, grupos de trabajo y grupos temáticos, así como sus responsables, puede verse en el n.° 20 de SUMA.

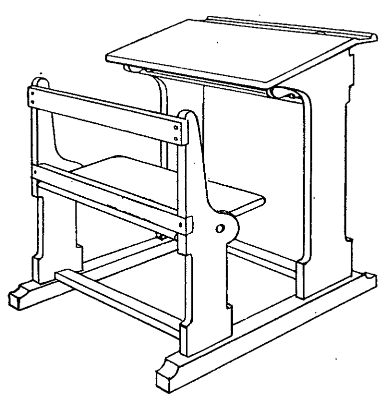


Fig. 8.—Mesa unipersonal «Haya»

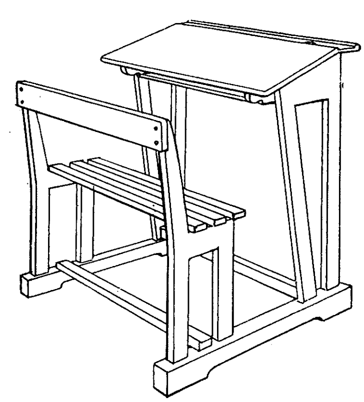


Fig. 9.—Mesa unipersonal «Económica»

Y para acabar... los pupitres
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS, o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM