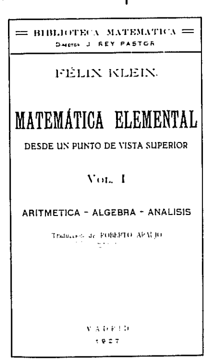
SUMA 21
febrero 1996

Klein y la enseñanza de las matemáticas

MATEMÁTICA ELEMENTAL DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR
Felix Klein
Traducida del alemán al español por Roberto Araujo, Catedrático de la Facultad de Ciencias de Valencia, (volumen I), y por R. Fontanilla (volumen II)
Berlín. Ed. Springer, 1926-27. 2 vols.
Publicada en la Biblioteca Matemática (Dirigida por Julio Rey Pastor)
Madrid, 1945.

La obra de Felix Klein, *Matemática Elemental...*, tiene el mérito de ser el primer libro de texto que se propone, en Alemania, para conseguir «una formación adecuada de los aspirantes al magisterio que responda a todas las necesidades actuales de la Ciencia».

El peso de la personalidad del autor, por sus importantísimos trabajos en Matemáticas, su programa de Erlangen,... hizo, y hace, que la enseñanza de las matemáticas haya estado, y esté, todavía bajo su influencia directa: prioridad en el pensamiento matemático para las nociones de función, transformación (geométrica) y sus grupos. Mal interpretadas las ideas del propio autor, como veremos más adelante, (enseñanza de las matemáticas contemplativas en la que los problemas de existencia, de estructuración,...) escamotean la construcción y manipulación de los seres matemáticos que lo único que piden es ser revividos en la enseñanza y estar vivos en las mentes.


BIBLIOTECA MATEMÁTICA
J. REY PASTOR
FÉLIX KLEIN
MATEMÁTICA ELEMENTAL
DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR
VOL. I
ARITMETICA - ALGEBRA - ANALISIS

Influencia tanto más persistente cuanto, prácticamente, ningún matemático de gran talla se dedicó, antes que él, además de al estudio de los problemas matemáticos, a los de su enseñanza.

Felix Klein nació en 1849 en Düsseldorf. Estudió en las Universidades de Bonn (con Plücker), Götingen, Berlín y París. Enseñó en las Universidades de Erlangen (1872-75), Munich (1875-80), Leipzig (1880-86) y Götingen (1886-1913), donde fundó el Instituto de Matemáticas Aplicadas, y fue el editor de los *Mathematische Annalen*, así como el fundador de la *Enzyclopädie der mathematische Wissenschaften*.

La obra que nos ocupa recoge las lecciones impartidas por Klein, en los primeros años de este siglo durante dos semestres: en el primero, Aritmética, Álgebra y Análisis, en el segundo, Geometría; escritas hacia 1906-08, y publicadas como una de sus obras póstumas.

Los que quieran leer la obra habrán de buscarla en alguna biblioteca, pues la edición española está hace años agotada, y no parece que se vaya a reeditar. Para los que pretendan sólo

RECENSIONES

aproximarse a través de estas líneas, haremos una breve exposición de las ideas de Klein, no tanto de los aspectos matemáticos, que se pueden encontrar presentados de un modo más actual en obras más recientes, como de sus ideas referidas a la enseñanza de las matemáticas, siguiendo fundamentalmente las palabras del autor. El lector podrá ver hasta qué punto la situación descrita por Klein y algunas de las soluciones que proponía, están, en mi opinión, todavía vigentes y que en cuestiones de enseñanza «se hace el camino al andar».

(En estas líneas nos vamos a referir, únicamente, al primer volumen, dejando el segundo, para un próximo número).

Comienza Klein su introducción diciendo que

...se cultivaba en la Universidad exclusivamente la ciencia superior, sin tener en cuenta para nada las necesidades de la Escuela, y sin cuidarse lo más mínimo de establecer un enlace con la enseñanza de la Matemática en ésta.

¿Cuál es la consecuencia? El estudiante al comenzar sus estudios universitarios se encuentra ante problemas que no le recuerdan nada de las cosas que hasta entonces le habían ocupado y, naturalmente, olvida pronto y por completo todas ellas.

Pero después de aprobar sus estudios pasa al profesorado y se ve obligado de pronto a enseñar la Matemática elemental y como no puede realizar esta labor estableciendo el enlace debido con la Matemática aprendida en la Universidad, pronto acepta la enseñanza tradicional y, de los estudios realizados solo le queda un recuerdo, pero no ejerce ni la más remota influencia en el desempeño de su ministerio.

En la Introducción, después de recomendar y comentar una bibliografía (hecho que se repite en todos los capítulos), expone algunas de sus ideas sobre como tratar los temas abordados en la escuela, es decir, sus «preocupaciones didácticas»:

La exposición en la escuela debe ser psicológica, no sistemática. El maestro debe ser algo diplomático; ha de conocer la psicología de los niños para poder captar su interés, y esto solo podrá lograrlo si acierta a presentar las cosas bajo una forma intuitiva fácilmente asimilable. Sólo en las clases superiores se puede revestir la doctrina de forma abstracta.

Pongamos un ejemplo: Al niño le es imposible comprender, cuando se le explican los números axiomáticamente, él asocia a los números conceptos absolutamente reales: conjuntos de cosas y sólo bajo esa forma concreta se les pueden presentar al principio. Pero esto, que aquí es evidente, debería de extenderse a toda la enseñanza, aún a la superior: siempre debería presentarse la matemática enlazada con todo aquello que al hombre pueda interesar y con lo que ha de ejercitar en su vida.

En cuanto a los límites del contenido de la Matemática en la Escuela, frente a otros autores a los que califica de conservadores, manifiesta:

Yo me siento progresista. Los llamados reformadores queremos colocar el centro de la enseñanza en el concepto de función, [...] siempre sobre la base del constante empleo de los métodos gráficos, de la representación de cualquier ley en el plano de las variables (x,y). [...] Para facilitar esta renovación hay que prescindir de mucho de lo que hasta hoy ha constituido objeto de nuestra enseñanza, que aun cuando por sí mismo pueda ser muy interesante, aparece como menos esencial al relacionarlo con toda la cultura moderna.

...la situación descrita por Klein y algunas de las soluciones que proponía, están todavía vigentes...

Ante todo debe darse una gran importancia a una fuerte educación de la intuición espacial; después debe irse ascendiendo hasta llegar a los umbrales del cálculo infinitesimal, de modo que el naturalista o el técnico de Seguros saque ya de la Escuela el instrumento matemático que haya de necesitar en todos sus trabajos.

En el comienzo del Capítulo primero: EL CÁLCULO CON LOS NÚMEROS NATURALES, se pregunta:

Es natural empezar por el fundamento de toda la Aritmética, el cálculo con los números enteros y positivos: ¿Cómo deben de enseñarse en la Escuela?

Las propiedades de los números enteros y el cálculo con los mismos son cuestiones tales que el lograr hacerlas comprensibles a los niños, de modo que éstos lleguen a dominarlas por completo, es un problema extremadamente difícil, el cual exige la labor de varios años. El método a seguir es el intuitivo y genético: todo el edificio de la enseñanza se construye tomando como base cosas conocidas por los sentidos, elevándose después, poco a poco; y en esto radica su diferencia esencial con el método lógico y sistemático que predomina en la enseñanza superior.

Conviene señalar otro aspecto, precisamente porque se acostumbra descuidar en la enseñanza superior y es hacer resaltar las aplicaciones del cálculo a la vida práctica.

El fin de la enseñanza del cálculo persigue una seguridad, libre de toda vacilación, en el manejo de las reglas del cálculo, procurando un desarrollo paralelo de las diferentes facultades del espíritu que en ello intervienen sin que merezcan una expresa atención las que hacen referencia a las relaciones lógicas de los números con los que se opera.

He de llamar la atención aquí sobre la oposición entre los profesores que proceden de las Escuelas de Magisterio y los que proceden de las Facultades de Ciencias, resultando con ello una lamentable discontinuidad para el discípulo. Un pequeño ejemplo, el signo x de multiplicar, frente al punto • . Divergencias que podrían fácilmente allanarse si los universitarios se preocupasen más de los maestros y procuraran ponerse de acuerdo con ellos.

Notemos que desde el cuarto grado el cálculo comienza a vestirse con el elegante atavío de la matemática, y se ejecutan las reglas y operaciones del cálculo con estos números simbolizados por letras, con lo cual se elimina ya el contenido concreto e intuitivo de los números. Se da así un gran paso en el camino de la abstracción, pues puede decirse que la Matemática propiamente empieza con el cálculo literal. Claro es que este paso no puede realizarse súbitamente en la escuela, sino que el alumno tiene que ir acostumbrándose poco a poco a tan gran abstracción.

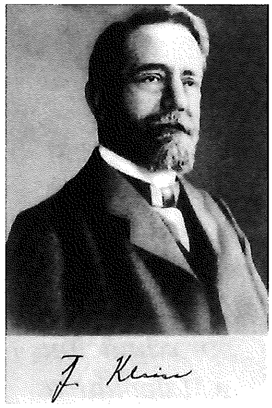
Respecto al concepto de número, su origen es extremadamente difícil de descubrir, hasta el punto que «se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación».

Después aborda diferentes interpretaciones del concepto de número, relacionando en cada caso a los filósofos y matemáticos más importantes que la representan, a las que añade sus observaciones:

La tendencia a desligarse de la intuición y a mantenerse siempre en un terreno puramente lógico, nos parece impracticable de un modo absoluto. Un resto, un mínimum de intuición, tiene que quedar siempre en el fondo.

El profesor Thomae de Jena ha calificado a los que se ocupan casi exclusivamente en investigaciones abstractas y lógicas sobre entes que nada significan y principios que nada dicen como pensadores sin pensamiento.

Se ha dicho que la matemática debe enseñarse deductivamente, pero este procedimiento no corresponde al proceso evolutivo de la matemática, que se ha desarrollado como un árbol, que no solo crece hacia arriba, sino que al mismo tiempo que desarrolla sus ramas y hojas, sus raíces penetran más y más en el suelo.



Felix Klein

Las relaciones puramente lógicas deben quedar como el esqueleto del organismo de las matemáticas, pero lo vivo de las matemáticas, su eficacia externa, sus estímulos estriban siempre en sus aplicaciones, es decir en las correlaciones entre los entes puramente lógicos y todos los demás dominios del saber.

A continuación pasa a ocuparse de cosas más concretas como la práctica del cálculo. Párrafos de los que destacamos el siguiente:

En la existencia de las máquinas de calcular se ve una confirmación de que para el cálculo, lo que importa no es lo que signifiquen los números enteros, sino únicamente las reglas formales. Así Leibniz, fue, al mismo tiempo, el padre de la Matemática formal y el inventor de la primera máquina de calcular. [...] Quisiera yo que todo maestro estuviese familiarizado con el uso de las máquinas de calcular y, aún más, que, a ser posible, no saliese de nuestras escuelas ningún alumno sin que, siquiera una vez, hubiese manejado una máquina de calcular.

Respecto de la introducción de los números negativos dice:

A pesar de todos los ejemplos, no puede desconocerse la gran dificultad de su introducción en la escuela, pues se encuentra el alumno con algo que no tiene nada que ver con la imagen sensible que se ha forjado de número, y tiene que operar con ellos aunque las operaciones hayan perdido la significación clara e intuitiva que tenían. Se presenta así por primera vez el paso de la matemática práctica a la formal, para cuya completa comprensión se precisa en alto grado la capacidad de abstracción.

En Europa los negativos se introdujeron de manera muy lenta y después de totalmente realizado el paso al cálculo literal, hecho logrado por Vieta en su In artem analyticam isagoge, 1591. Desde este momento histórico se posee la regla de los paréntesis.

Observemos que con la introducción de los negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta, nos sentimos inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares. Es el principio de Permanencia de las leyes formales, enunciado por H. Hankel.

Los reparos y prejuicios contra ellos, a lo largo de la historia, sólo quedaron aclarados cuando, en el siglo XIX, se observó que no se trataba de una necesidad lógica de los nuevos conceptos, ni, por consiguiente de demostrar la regla de los signos, sino simplemente de reconocer que tales nuevos conceptos son lógicamente admisibles, aunque sean arbitrarios y, lo mismo que el principio de permanencia, obedezcan a una simple razón de comodidad. Consideraciones de las que se desprende que, a veces, las cosas parecen más razonables que los hombres.

En general, la lógica solo puede actuar en la formación de los nuevos conceptos regulándolos, pero nunca dando por sí misma el principio director. [...]

En la escuela se observa el frecuente error de seguir con el empeño de los antiguos matemáticos de demostrar la necesidad lógi-

ca de la regla de los signos. [...] Es indudable que el alumno no puede entender esto al oírlo por primera vez, pero puede llegar a creerlo, y si no se le da en los grados superiores el complemento necesario para tal comprensión, no es raro que adquiera el convencimiento de que todo aquello debe ser algo místico e incomprensible.

Después de una explicación sobre números fraccionarios e irracionales y los límites de las mediciones, citando, como exageración de decimales apreciados, la composición de las aguas de los balnearios, establece «la división de la matemática en dos partes: Matemática de la aproximación y Matemática de la precisión».

En el capítulo III dedicado a la teoría de números hace una advertencia sobre la división de la circunferencia en n partes iguales con regla y compás, «se trata de un problema de matemática de precisión, que pierde toda importancia cuando se tratan aplicaciones prácticas». La misma opinión le merece el estudio de π. A continuación divide a los matemáticos en dos grupos respecto a su posición sobre la teoría de números:

...los entusiastas, para los que si la Matemática es la reina de las ciencias, la teoría de números es la reina de las matemáticas, como dice Gauss, y los indiferentes, que la dejan de lado en todas sus investigaciones. La razón de esta división reside en que, por una parte la teoría de números es fundamental para todas las investigaciones matemáticas profundas; por otra, la teoría de números pura es una cosa sumamente abstracta. Por ello, la teoría de números sería mucho más asequible y despertaría mucho mayor interés si fuese expuesta utilizando elementos intuitivos y figuras apropiadas, porque se facilitaría mucho su comprensión con tales recursos.

Dedica luego un tiempo a presentar una importante demostración de imposibilidad (la construcción con regla y compás del heptágono regular), claro está que con teoría de números y ecuaciones, «con mayor razón cuanto que en el gran público existe una casi total incomprensión de tal clase de demostraciones».

Algunas de las ideas más interesantes de Klein, pueden encontrarse en el «Intermedio: sobre el moderno desarrollo y la construcción de la matemática», distinguiendo dos procesos diferentes, que para simplificar llama A y B, «que tan pronto se desarrollan con absoluta separación como, sin perder su independencia, corren paralelos o, finalmente se entrecruzan mutuamente». De nuevo dejamos hablar a Klein:

PROCESO A (hoy usual en la enseñanza secundaria y en los tratados elementales:

I. Encabezado por la teoría formal de ecuaciones, por las operaciones con funciones racionales enteras y el estudio de los casos en los que las ecuaciones algebraicas se pueden resolver por radicales.

II. Estudio sistemático del concepto de potencia y sus inversos, para derivar los logaritmos.

III. Aparece la geometría, (hasta aquí apartada) para suministrar las primeras definiciones de la segunda clase de funciones trascendentes: las trigonométricas.

...establece la división de la matemática en dos partes: Matemática de la aproximación y Matemática de la precisión.

IV. Análisis algebraico, desarrollos en series infinitas de las funciones más sencillas; fórmula del binomio generalizado, función logarítmica, y su inversa la exponencial, las funciones trigonométricas. De aquí surgen las sorprendentes conexiones entre las llamadas funciones elementales trascendentes y, en particular, la célebre fórmula de Euler.

V. Teoría de variable compleja, fuera ya de la enseñanza secundaria, orientada por Weierstrass.

PROCESO B: (Domina en él, el pensamiento de la geometría analítica que reclama una fusión de los conceptos de número y espacio):

I. Representación gráfica de las funciones más sencillas: polinomios, funciones racionales de una variable. Los puntos de intersección de las curvas con el eje de abscisas evidencian los ceros del polinomio, a esto se une de modo natural la resolución de ecuaciones por medio de aproximaciones.

II. Las representaciones geométricas de curvas son el origen natural intuitivo de los conceptos de cociente diferencial y de integral; al primero conduce la pendiente de la curva, al segundo el área de la superficie encerrada por la curva.

III. Cuando no se puede integrar, da origen a nuevas funciones; que así se introducen de modo natural: la cuadratura de la hipérbola define el logaritmo, y la del círculo a la función inversa del seno; por un proceso análogo se llega a las funciones elípticas.

IV. Ahora el desarrollo en serie de las funciones obtenidas se realiza siguiendo un método general, la fórmula de Taylor.

V. Como prolongación del método aparece la teoría de funciones de variable compleja de Cauchy-Riemann.

En resumen, la base del proceso A es una concepción particularista de la ciencia que trata de descomponer todo el campo de la misma en una serie de regiones bien delimitadas, en cada una de las cuales se opera evitando todo lo posible acudir a los recursos que se pueden obtener de las regiones próximas; su ideal es una bella y lógica cristalización de cada una de estas regiones en un cuerpo de doctrina aislado.

Al contrario, el proceso B da capital importancia al enlace orgánico entre las diferentes regiones de la ciencia y los numerosos recursos que mutuamente se prestan, y prefiere los métodos que le permiten abarcar, desde un punto de vista único, la comprensión simultánea de varias regiones; su ideal es la concepción de toda la ciencia matemática como un todo.

Todavía hay una tercera fase, (proceso C) que desempeña un papel importante en los dos procesos: el algoritmo (proceso formal de cálculo). El procedimiento algorítmico es una fuerza impulsiva interna de las fórmulas, independiente de la intención y de los conocimientos del matemático y frecuentemente, contraria a sus deseos. A veces estos procesos algorítmicos se consideran los cimientos del edificio matemático.

Para apreciar mejor el contraste entre estos dos procesos acudimos a la Historia: La ciencia griega pertenecía al proceso tipo A; no obstante hay tendencias y métodos del proceso B. La matemática de la India y de los árabes pertenece al proceso C. El desarrollo de la matemática en el siglo XVI corresponde al proceso A. En el siglo XVII toda la orientación es B (primero la Geometría Analítica de Descartes que crea el enlace fundamental para toda la matemática, entre el número y el espacio, y después el Cálculo Diferencial e Integral). Entonces aparece en escena Newton que da la serie del binomio general, dentro del proceso C. La formación del cálculo infinitesimal con Leibniz y Newton es de nuevo proceso B, con una marcada influencia en Leibniz del proceso C. El siglo XVIII sigue la misma dirección: ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, junto a la geometría analítica y mecánica analítica. Errores y contradicciones en el proceso B, llevaron a Euler y otros a abandonarlo. Más radical fue Lagrange en su Théorie des fonctions analytiques, 1797 dejando el Cálculo infinitesimal como un conjunto de reglas formales aplicables a ciertas funciones especiales. Considera solo series de potencias enteras, la derivada es definida así de un modo puramente formal. En el siglo XIX se busca una base sólida para el Análisis por medio de los criterios de convergencia: Cauchy da la definición rigurosa de la derivada y de la integral como límites de cocientes y sumas infinitas y sobre ellas construye una sistematización lógica del cálculo infinitesimal, estamos en el proceso A. En otros lugares, en el siglo XIX se da la orientación B: Geometría proyectiva, Física matemática y Teoría de funciones de variable compleja, iniciadas por franceses.

Desgraciadamente, muchas de sus ideas o proposiciones están lejos de realizarse, y muchas de sus quejas sobre la Universidad o sobre la enseñanza de las matemáticas poseen una actualidad sorprendente.

A lo que sigue una pequeña digresión sobre el estilo de la exposición matemática:

En Euclides aparece todo cristalizado bajo el esquema: «hipótesis, tesis, demostración», (proceso A); pero en el siglo XIX con los franceses citados se forma una nueva forma artística de exposición matemática, integrada por una serie de deducciones ingeniosamente eslabonadas (Monge, Picard), que se leen como una novela de magnífico estilo y de atrayente argumento, estilo apropiado a la orientación B.

Con Weierstrass en 1860 aparece de nuevo el método A, y lo mismo cabe decir de las investigaciones sobre las axiomáticas de la geometría.

La consecuencia que se puede sacar es que las dos direcciones fundamentales de pensamiento matemático se han mostrado igual de fecundas; actuando muchas veces alternativamente, y otras simultáneamente, haciendo surgir de esa conjunción los más grandes progresos de la matemática.

La matemática presentará un desarrollo armónico en todas direcciones siempre que ninguna de las dos orientaciones sea preterida o despreciada. Cada matemático debe pues trabajar en la dirección que le señalan sus dotes y su idiosincrasia intelectual.

En la Enseñanza secundaria, desgraciadamente desde hace largo predomina la dirección A. Todo movimiento de reforma que se pueda mirar como saludable debe dar una entrada más amplia al sistema B. Que se penetre la enseñanza del espíritu que encarna el proceso genético, que se acentúe la intuición espacial como tal y para dar el concepto de función, con la fusión de los conceptos espacio y número.

Destacamos de nuevo el punto de vista «actual» de Klein a comienzos de siglo. Desgraciadamente, muchas de sus ideas o proposiciones están lejos de realizarse, y muchas de sus quejas sobre la Universidad o sobre la enseñanza de las matemáticas poseen una actualidad sorprendente.

Merece la pena señalar que en la Segunda parte, dedicada al Álgebra, su propósito esencial es aplicar los métodos gráficos y, en general, los métodos geométricamente intuitivos a la resolución de ecuaciones: ecuaciones con un parámetro, con dos y tres parámetros y sus líneas, curvas o superficies asociadas. En la tercera parte dedicada al Análisis, lo más importante serán las funciones trascendentes elementales, destacando que en la definición del número e como el límite de la sucesión $(1+1/n)^n$, se omite lo más característico y necesario, procedente de su desarrollo histórico, en el que aparece el logaritmo natural como el área bajo la curva $1/x$, entre los puntos 1 y t, o como serie de potencias. Respecto al cálculo infinitesimal señala:

Nuestro deseo es que los conceptos representados por los símbolos, $y = f(x)$, dy/dx, $\int ydx$ lleguen a ser familiares a los alumnos con esas denominaciones y no como una nueva disciplina abstracta, sino enlazados orgánicamente dentro de la enseñanza total, a lo cual puede llegarse ascendiendo poco a poco, partiendo de los ejemplos más simples. La necesidad inaplazable de tales reformas se funda en que afecta a la formación de conceptos matemáticos que hoy se utilizan constantemente en las aplicaciones de la matemática a todas las ramas de la Ciencia, y sin las cuales, todos los estudios en la enseñanza superior quedarían completamente en el aire. La enseñanza del Cálculo infinitesimal debe basarse en cuatro puntos: 1) Exposición intuitiva de consideraciones abstractas por medio de representaciones gráficas, 2) Resaltar el enlace entre las teorías próximas, como el Cálculo con diferencias y el de la interpolación y también con las investigaciones de los filósofos, 3) Dar importancia a la evolución histórica de los conocimientos científicos, 4) Presentación de algunos ejemplos de libros populares para caracterizar la diferencia entre los conceptos del gran público influidos por tales obras, y los de los matemáticos profesionales.

Todo ello debe ser conocido por los aspirantes al magisterio secundario, pues al llegar a la práctica de la enseñanza tropezarán con que los conceptos de los alumnos son aquellos vulgares, y si no conocen bien los elementos intuitivos de la Matemática, así como las relaciones vivas entre las distintas ramas de ésta, y entre ella y las demás ciencias, y sobre todo, si no conocen el desarrollo histórico, les fallará siempre el terreno en que pisen y una de dos: volverán su atención al campo de la matemática pura y no serán entendidos por sus discípulos o sucumbirán en la lucha, olvidando cuanto aprendieron en los cursos superiores y cayendo en la rutina de siempre. Precisamente en el campo del cálculo infinitesimal es donde la discontinuidad en la enseñanza alcanza un grado máximo.

No debemos olvidar, en ningún momento, el público al que iba destinada la obra y con qué propósito: formar profesores de enseñanza primaria y secundaria. La educación secundaria, a principios de siglo, estaba orientada exclusivamente hacia la posterior formación universitaria de sus alumnos; por tanto, lo que en ella encontramos son los temas matemáticos justificados internamente, sirviendo en especial para asentar intuitivamente las bases para su posterior desarrollo formal en la enseñanza superior. Hoy la educación secundaria tiene una orientación más amplia, por ello nuestra utilización de las ideas de Klein debe ir hacia los aspectos más intuitivos y concretos.

No debemos olvidar, en ningún momento, el público al que iba destinada la obra y con qué propósito: formar profesores de enseñanza primaria y secundaria.

Finalmente, quiero añadir un punto débil que encuentro en la obra: las aplicaciones a la física u otros campos de actividad científica apenas aparecen, únicamente se refiere, en la tercera parte, a la teoría de las pequeñas oscilaciones y a la acústica.

Índice de la obra

Volumen I: ARITMÉTICA - ÁLGEBRA- ANÁLISIS

PRIMERA PARTE: ARITMÉTICA

CAPÍTULO I: El cálculo con los números naturales

1. Introducción de los números en la escuela. 2. Leyes fundamentales del cálculo. 3. Los fundamentos lógicos de los números enteros. Observaciones sobre la enseñanza de la Matemática y la formación del Profesorado. 4. Práctica del cálculo con números enteros.

CAPÍTULO II: Las primeras generalizaciones del concepto de número

1. Los números negativos. Historia de los números negativos 2. Los números fraccionarios. 3. Los números irracionales. Matemática de precisión y matemática de aproximación.

CAPÍTULO III: De las propiedades especiales de los números enteros

1. Lugar de la teoría de los números en la Escuela y en la Universidad. 2. Sobre algunas cuestiones de la teoría de números. 3. Números primos. Descomposición en factores. 4. Transformación de fracciones ordinarias en decimales. 4. Fracciones continuas. 5. Números pitagóricos. Teorema de Fermat. 6. El problema de la división de la circunferencia. 7. Demostración de la imposibilidad de construcción del heptágono regular.

CAPÍTULO IV: Los números complejos

1. Los números complejos ordinarios. 2. Números complejos superiores y, en particular, cuaternios. observaciones sobre el cálculo de vectores. 3. Multiplicación de cuaternios y giros de segmentos en el espacio. Significación en el espacio de tres dimensiones. 4. Los números complejos en la enseñanza.

INTERMEDIO: Sobre el moderno desarrollo y la construcción de la Matemática

1. Construcción del Análisis elemental mediante dos procesos paralelos de distinto carácter. 2. Ojeada histórica sobre la historia de las Matemática.

SEGUNDA PARTE: ÁLGEBRA

Nuestro objeto: Aplicación de los métodos geométricos intuitivos a la resolución de ecuaciones.

CAPÍTULO I: Ecuaciones de coeficientes y raíces reales

1. Ecuaciones con un parámetro. 2. Ecuaciones con dos parámetros. Clasificación atendiendo al número de raíces reales. 3. Ecuaciones con tres parámetros. Un aparato para la resolución numérica de ecuaciones. Superficie discriminante de la ecuación bicuadrática.

CAPÍTULO II: Ecuaciones en el campo de los números complejos

A. El teorema fundamental del Álgebra. B. Ecuaciones con un parámetro complejo; su estudio por medio de la representación conforme de dos esferas. Ejemplos: 1. La ecuación pura. 2. La ecuación diédrica. 3. Ecuaciones tetraédrica, octaédrica o icosaédrica. 4. Continuación: Establecimiento de las ecuaciones normales. 5. Sobre la resolución de las ecuaciones normales. 6. Uniformización de las ecuaciones normales por medio de funciones transcendentes. Resolución trigonométrica de la ecuación cúbica. 7. Resolubilidad por radicales. 8. Reducción de las ecuaciones generales a ecuaciones normales. Sobre la teoría de la ecuación de quinto grado.

TERCERA PARTE

CAPÍTULO I: El logaritmo y la función exponencial

1. Sistemática del análisis algebraico. 2. desarrollo histórico de la teoría. Neper y Burgi. La ecuación de diferencias. Siglo XVII: Logaritmos hiperbólicos. Euler y Lagrange: Análisis algebraico. Siglo XIX: Funciones de variable compleja. 3. Algo sobre la enseñanza de los logaritmos. 4. Punto de vista de la Teoría de funciones. El paso al límite de la función potencial a la exponencial.

CAPÍTULO II: Funciones goniométricas

1. Teoría de las funciones goniométricas. 2. Tablas trigonométricas. A. Tablas trigonométricas naturales. B. Tablas logaritmo-trigonométricas. 3. Aplicaciones de las funciones goniométricas. A. Trigonometría; en particular trigonometría esférica. B Teoría de las pequeñas oscilaciones. (Cálculo infinitesimal disfrazado). C. Representación de las funciones periódicas por series de funciones goniométricas. Aproximación por series infinitas. El fenómeno de Gibbs. Excursión sobre el concepto general de función. Significación histórica de las series trigonométricas; trabajos de Fourier.

CAPÍTULO III: Del cálculo infinitesimal propiamente dicho

1. Principios generales del cálculo infinitesimal. Orígenes intuitivos. Fundamentación lógica por medio del concepto de límite; construcción partiendo de la «diferencial». Los infinitésimos actuales. La reacción: el cálculo de derivadas de Lagrange. Forma y significación del cálculo infinitesimal en la enseñanza. 2. El teorema de Taylor. Las primeras parábolas osculatrices. Crecimiento del orden. Evaluación del resto de Cauchy. Excursión histórica (Taylor y MacLaurin). 3. Consideraciones históricas y pedagógicas acerca del cálculo infinitesimal. Características de nuestro criterio.

APÉNDICE:

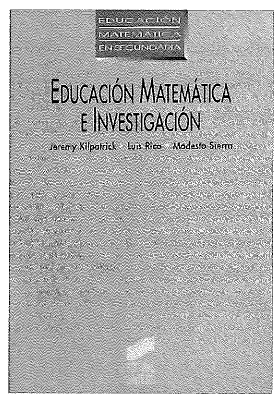
I. TRASCENDENCIA DE e y π.

Historia. Demostración de la trascendencia de e y π. Números trascendentes y números algebraicos.

II. TEORÍA DE LOS CONJUNTOS.

1. Potencia de los conjuntos. 2. Ordenación de los elementos de un conjunto.

Florencio Villarroya



EDUCACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN
Jeremy Kilpatrick, Luis Rico y Modeto Sierra
Editorial Síntesis, Madrid, 1994
ISBN: 84-7738-228-X
207 páginas

La colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje» de la editorial Síntesis ha constituido en los últimos años, a través de su treintena de títulos, el mayor esfuerzo editorial en el campo de la didáctica especial de una sola disciplina en los niveles de primaria y secundaria obligatoria.

Una vez finalizada esta colección, la misma editorial ha iniciado otra, esta vez dirigida a secundaria y, sobre todo, a bachillerato, titulada «Educación matemática en secundaria», dirigida por Miguel de Guzmán y Luis Rico. Aun cuando ya han aparecido varios títulos, *Educación matemática e Investigación*, constituye el primero de la serie donde se ha querido, como dicen los autores en la introducción «...comenzar por la historia de nuestro campo de trabajo, ya que el conocimiento de lo que ha sido y lo que ha hecho nuestra comunidad de profesores de matemáticas en períodos anteriores es uno de los signos de identificación de la propia comunidad».

El libro tiene dos partes claramente diferenciadas, pero complementarias, una referida al ámbiro internacional y la otra dirige su atención a la realidad española.