SUMA 21
febrero 1996, pp. 103-106

Hiperelipses

Vicente Ibáñez Orts

Las hiperelipses son una familia de curvas cuya ecuación generaliza la de la elipse. Se usan en el diseño de múltiples objetos por la suavidad y armonía de sus formas. Combinan de manera equilibrada lo rectilíneo y lo curvo.
En el artículo se presentan varios ejemplos de hiperelipses enfrentándolas a soluciones construidas mediante la combinación de rectas y curvas. También se incluye un programa de ordenador que las genera automáticamente.

MISCELÁNEA

Desde épocas remotas, el mundo que llamamos occidental, cuyo origen está en las civilizaciones griega y latina, se encuentra representado fundamentalmente por la línea recta. Este hecho se traduce, desde el punto de vista del urbanismo, en amplias avenidas trazadas a cordel que se cruzan perpendicularmente entre sí. Se trata de una concepción intelectual del mundo que de alguna manera se opone a la hebrea y árabe, caracterizadas por una preferencia hacia la línea curva y los callejones tortuosos, angostos y frescos. La pugna soterrada que se libra entre estas grandes civilizaciones nos da una pista sobre la oposición básica que existe entre las formas geométricas elementales, el cuadrado y por extensión el rectángulo, frente al círculo y su derivación, la elipse. La lucha que tiene lugar entre la rigidez del cuadrado y la pureza del círculo representa la confrontación entre una forma de pensar lógica, ortogonal y racional frente a otra subjetiva, curva y humana.

Al intentar diseñar jardines, fuentes y plazas, muchos ingenieros se han topado con la dificultad de encontrar una forma geométrica adecuada a sus gustos y que armonice con el entorno al que la obra va dirigida. Normalmente, las figuras geométricas más empleadas han sido, por una parte y entre las lineales, el cuadrado y el rectángulo, y por otra, las formas geométricas derivadas de las secciones cónicas, es decir el círculo y la elipse. De nuevo nos encontramos en esta parcela del arte de la jardinería, la decoración y el urbanismo, ante la oposición básica ya comentada del mundo cartesiano, perpendicular y lineal frente al mundo mágico, imaginativo y curvo.

La familia de curvas empleadas por el ingeniero danés Piet Heint en el año 1959 para diseñar la plaza Sergel (Sergel Torg) de Estocolmo, forman un nexo de unión armonioso y equilibrado entre las dos concepciones del mundo citadas y aparentemente tan distantes, aunque el primer investigador matemático en estudiar dichas ecuaciones fue el físico francés del siglo XIX Gabriel Lamé, quien escribió sobre ellas en 1818.

Piet Heint, investigador original e intuitivo, partiendo de la ecuación básica de la elipse centrada en el origen:

$$\left(\left|\frac{X}{a}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{Y}{b}\right|\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

que si a=b=1, se transforma en:

$$Y = \pm\left(1 - |X|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

que incluye como caso particular el circulo cuando los parámetros *a* y *b* son iguales a la unidad (2), propuso la familia de curvas que se recogen en la ecuación (3). En ésta las barras verticales indican, al igual que la ecuación (1) y (2), que los términos *X* e *Y* se toman en valor absoluto, y el exponente *N* pertenece al conjunto de los números reales, pudiendo, por tanto, tomar cualquier valor entre cero e infinito:

$$\left(\left|\frac{X}{a}\right|\right)^N + \left(\left|\frac{Y}{b}\right|\right)^N = 1 \qquad (3)$$

Despejando queda:

$$Y = \pm\frac{b}{a}\left(a^N - |X|^N\right)^{\frac{1}{N}} \qquad (4)$$

A partir de aquí obtuvo todo un conjunto nuevo de formas dotadas de elegancia y simetría, que podríamos decir que han sido como arrancadas del mundo desconocido de las ideas platónicas. El punto de partida de Piet Heint es muy sencillo, pues fijados los tamaños de *a* y *b*, que dependerán de las dimensiones de la plaza, del jardín o de la fuente, basta con ir asignando sucesivos valores al exponente *N* para obtener toda una familia de curvas cerradas, centradas en el origen, de una gran regularidad en la forma, que permiten modelar adecuadamente el contorno del objeto diseñado y que además se encastran perfectamente entre sí como si se tratara de una colección de muñecas rusas.

Basta un sencillo programa de ordenador, o incluso una simple calculadora de bolsillo para obtener tan cualificada familia de curvas, utilizando para ello la ecuación (4). Dando al exponente *N* el valor cero, las curvas degeneran en dos rectas en cruz, los propios ejes. Para valores de *N* comprendidos entre cero y uno, se obtienen curvas cóncavas, conocidas en los ambientes matemáticos como «astroides». Para el valor uno, el resultado es un paralelogramo y a medida que el exponente alcanza valores entre uno y dos, se obtienen óvalos puntiagudos. El valor dos nos da el círculo o la elipse, según que los dos semiejes *a* y *b* sean iguales o no. A medida que *N* crece por encima de dos, aparecen las superelipses, tomando progresivamente formas que no son ni círculos ni cuadrados, pero que están dotadas de una. extraña belleza y que, en el caso límite de que *N* se acerque al infinito, se transforman en un cuadrado perfecto.

Como ejemplo de todo lo anterior, en la figura 1 presentamos, hechas a mano alzada y suponiendo a = b =1, las curvas obtenidas para *N* igual a 0,5; l; 2 (círculo) y π (3,1415...). Esta última condición, además de asociar un mayor interés matemático al posible diseño, prácticamente divide por la mitad la superficie encerrada entre la circunferencia inscrita y el cuadrado que la contiene.

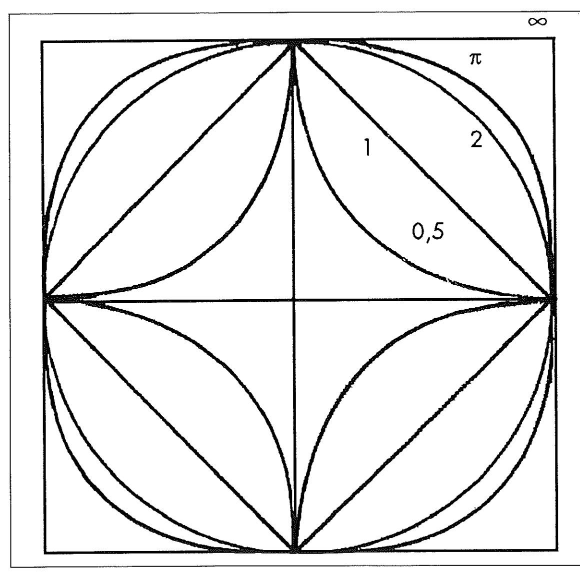

Figura 1. Curvas de Piet Hein para distintos valores de *n* y a = b = 1.

En la figura 2 hemos superpuesto la hiperelipse de exponente 2,2 y con una relación de semiejes a/b=4/3, junto con una figura clásica para resolver este tipo de problemas que consta de cuatro tramos curvos unidos por otros tantos rectos, que se suelen emplear como adorno en baldosas y para dar forma achatada a las pantallas de televisión.

La figura 3 representa las curvas anteriores, concéntricas unas en otras. Este dibujo permite apreciar mejor la armonía que aparece en la figura 4, en la que se disponen, unas dentro de otras, hiperelipses de exponente 2,5. En estos dos últimos dibujos, los semiejes *a* y *b* guardan entre sí la relación 4/3, y los valores dibujados son los siguientes:

a	*b*
10	7'5
8	6
6	4'5
4	3

Las figuras comentadas constituyen una opción para los diseñadores que buscan modelos nuevos, dado que al emplear las hiperelipses de Piet Heint unen en un mismo diseño la armonía de estas nuevas formas geométricas al hecho de emplear interesantes relaciones matemáticas.

Seguidamente se lista el breve programa escrito en Q-Basic que dibuja en colores la familia de curvas descrita. Este lenguaje de programación viene con cada sistema operativo DOS 6.0 de Microsoft, que se encuentra instalado en la mayoría de los ordenadores. Su explicación es la siguiente: en la sentencia 20, la instrucción CLS borra la pantalla, SCREEN especifica la resolución del monitor, en este caso VGA, y WINDOW delimita el espacio físico del dibujo en la pantalla. En la sentencia 30 se inicia el bucle que da valores al exponente *N*, y en la 40 este mismo exponente *N* se utiliza para modificar el color de las curvas, mediante el truco de redondearlo a un número entero, utilizando para ello la expresión CINT y la variable auxiliar C. En la línea 50, mediante la expresión LOCATE se sitúan en la esquina superior izquierda de la pantalla los valores *N* y *C* (posición 1,1), para que no entorpezcan la visión

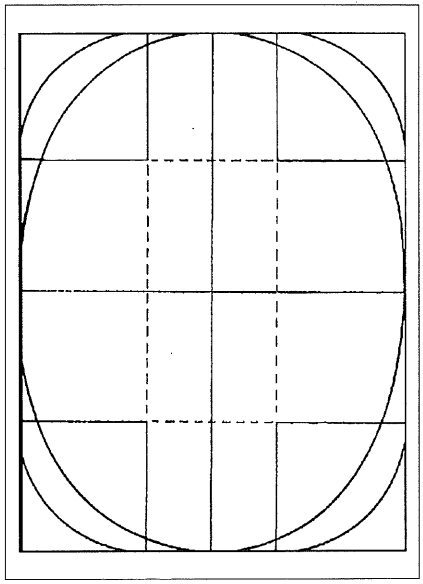

Figura 2. Hiperelipse de exponente n = 2,2 y a = 8, b = 6 fente a una figura de cuatro tramos curvos y cuatro tramos rectos

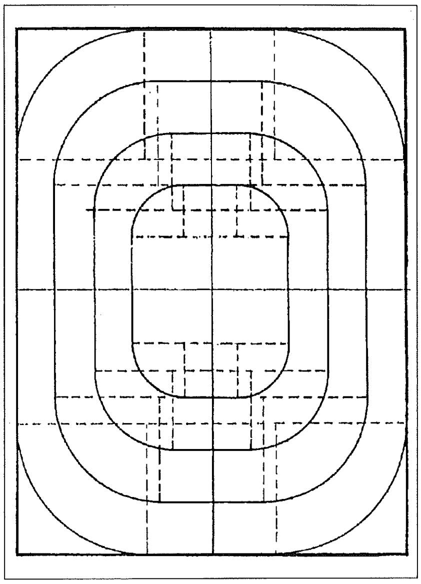

Figura 3. Diseño encastrado formado por cuatro tramos curvos y cuatro rectos

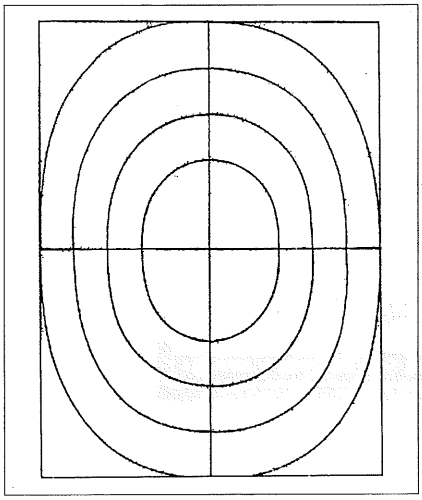

Figura 4. Hiperelipses encastradas de exponente n = 2,5

del dibujo. En la línea 60 comienza el bucle que realiza el trazado de una curva, y variando la amplitud del paso se puede aumentar o disminuir la precisión del dibujo a costa de la velocidad de ejecución. En la instrucción 70 se calcula el valor de *Y* según la ecuación propuesta. Las sentencias 80 y 90 se encargan mediante la instrucción PSET de ir colocando en pantalla los puntos previamente calculados en la línea anterior y de asignarles el color especificado mediante la variable *C*. Dado que anteriormente hemos definido una zona concreta para el dibujo, el ordenador realiza automáticamente el proceso de adecuar las coordenadas que le suministramos a dicho espacio. La línea 100 finaliza el doble bucle y el programa.

```
10  REM HIPERELIPSES
20  CLS: SCREEN 12: WINDOW (-1.3,-1.3) - (1.3, 1.3)
30  FOR N=O.25 TO 3 STEP 0.25
40      C=CINT(2.25*N)
so      LOCATE 1,1: PRINT N,C
60      FOR X=O TO 1 STEP 0.001
70          Y=(1-ABS(X)^N)^(1/N)
80          PSET (X,Y),C: PSET(X,-Y),C
90          PSET (-X,Y),C: PSET(-X,-Y),C
100 NEXT X,N
```

Como idea central se ha partido del artículo del matemático y gran divulgador americano Martin Gardner, «Las superelipses de Piet Heint». En él, no sólo desarrolla con mayor amplitud todo lo aquí expuesto, sino que además introduce también las ecuaciones que corresponden a las superficies geométricas en tres dimensiones, basta para ello añadir un término en *Z*, mediante las cuales se obtienen lo que denomina superelipsoides o superhuevos de Piet Heint. Estas figuras geométricas, al estar dotadas de volumen, presentan la peculiar propiedad matemática de que al colocarlas verticalmente sobre uno de sus extremos mantienen permanentemente el equilibrio. Por este motivo son muy adecuadas como objetos de decoración y como recuerdo. Recomendamos vivamente el libro citado para aquellos que busquen un poco de solaz en estos temas.

Es sorprendente cómo un matemático está en la base de los originales diseños nórdicos, que permiten modelar desde platos, vasos y mesas , hasta jardines, plazas, fuentes, piscinas, objetos de cuartos de baño, ventanas, cuadros y hasta envases para yoghourt, uniendo en una sola figura y una sola concepción dos mundos aparentemente tan alejados entre sí como lo recto y lo curvo, y que coloreados forman un auténtico carnaval matemático. Además, por tratarse de dibujos simétricos y armoniosos, resulta especialmente agradable verlos formarse lentamente en la pantalla del ordenador.

Vicente Ibáñez
Sociedad de Educación
Matemática de la
Comunidad Valenciana
Al Kwharizmi

Bibliografía

GARDNER, M. (1987): «La superelipse de Piet Heint», en M. GARDNER, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

Construcciones de cuerpos geométricos
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A.
(Gerona, 1928)