SUMA 21
febrero 1996, pp. 73-80

Medida del área de un recinto por procedimientos mecánicos. Fundamentos matemáticos del planímetro

Víctor Arenzana Hernández

ARTÍCULOS

El presente trabajo, sobre los fundamentos matemáticos del planímetro, viene a continuar la tarea emprendida en 1990 cuando, con un grupo de trabajo que se formó en el IB Félix de Azara de Zaragoza durante el curso 1990-91, se constituyó un grupo de Investigación Educativa subvencionado por el MEC para trabajar en lo que podría constituir una matemática pretécnica. En este proyecto, entre otros temas, nos dedicamos a la construcción de aparatos de medida, estudiando sus fundamentos matemáticos y sus aplicaciones. El estudio de los fundamentos matemáticos del planímetro, por su nivel, caía fuera de lo que se podría explicar a los alumnos de bachillerato, pero puede resultar interesante para despertar la curiosidad de los profesores, como nos ocurrió a nosotros.

El objetivo fundamental de este trabajo es aportar los fundamentos matemáticos de unos instrumentos que permiten medir el área de una superficie, denominados planímetros polares, que pueden ser construidos en una clase de taller de matemáticas y comprendidas sus bases teóricas por alumnos del último curso del Bachillerato. El conocimiento del funcionamiento y fundamentación del planímetro tiene, además de un intrínseco valor histórico, un importante valor formativo, ya que proporciona un ejemplo de la utilización práctica de las áreas orientadas. El aparato comenzó a utilizarse en el segundo tercio del siglo XIX, pero hoy día se siguen construyendo y utilizando en trabajos topográficos, aunque con cuentavueltas digitalizados.

¿Qué es un planímetro?

El hombre ha inventado diversos aparatos de medida para conocer el valor de las magnitudes que le podían interesar. En física se utilizan dinamómetros, voltímetros o amperímetros, que miden sobre un limbo graduado el tamaño de una magnitud. Se han diseñado aparatos para medir cosas tan variadas que van desde la graduación alcohólica de un licor hasta la intensidad de emisión radiactiva de una determinada sustancia. Muchas veces los instrumentos de medida se utilizan para controlar el correcto funcionamiento de algunas máquinas.

En matemáticas existen aparatos para medir magnitudes básicas como longitudes y áreas de un modo más cómodo que el de llevar la unidad de medida sobre la magnitud que se desea medir. Para la medida de longitudes se utilizan, entre otros aparatos, el calibre para magnitudes pequeñas y longímetros o anteojos estadimétricos para medir longitudes mayores, y para medir áreas se emplean otros que se conocen con el nombre genérico de integradores que se fundamentan en el cálculo integral.

Los *planímetros* son unos aparatos que permiten medir el área de un recinto plano y finito determinado recorriendo su contorno. En realidad lo que hacen es calcular una integral definida asociada a ese contorno. Los planímetros se emplean en las oficinas de los catastros y en trabajos de topografía para medir las extensiones de las fincas sobre un mapa.

El planímetro se puede utilizar sin conocer más que su manejo e ignorando por completo sus fundamentos científicos. En este trabajo intentaremos aportar las bases teóricas de tales aparatos que no son otras que las del cálculo de integrales curvilíneas de segunda especie.

Existen varios aparatos de estas características, que tienen diferentes nombres según el objetivo fundamental para el que están diseñados:

- *Intégrafos.* Trazan la curva integral de una función mediante su gráfica.
- *Planímetros.* Miden el área de una superficie plana cerrada recorriendo su contorno.
- *Integradores.* Miden áreas, momentos estáticos y momentos de inercia de un recinto.

Los suizos Hoppikofer (1827) y Amsler (1854), el británico Kelvin (1880) y el norteamericano Vannevar Buch (1925) diseñaron diferentes modelos de planímetros e integradores.

Medida del área de un recinto recorriendo su contorno

Descripción de cómo se mide el área de un recinto con el planímetro de Amsler

El planímetro de Amsler consta de una varilla AB que se desplaza permaneciendo constantemente paralela al plano de apoyo. En A tiene un trazador mediante el cual se puede recorrer el contorno de la figura que se desee medir, en B está articulada con otra varilla móvil OB.

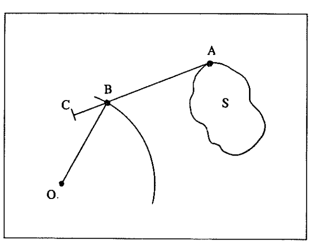


Figura 1

La varilla OB está sujeta mediante una aguja al plano de apoyo en el punto O, en torno al cual puede girar. En la prolongación de la varilla AB, en C, está colocada una ruedecilla graduada que se apoya sobre el plano y gira en torno al eje AB. La medida de un recinto S se calcula con este planímetro multiplicando la medida de la ruedecilla graduada por una constante que se llama constante del planímetro.

Los planímetros son unos aparatos que permiten medir el área de un recinto plano y finito determinado recorriendo su contorno.

En los apartados sucesivos se expondrán los fundamentos matemáticos esenciales de su funcionamiento, así como un descripción de sus mecanismos para poder proceder a su construcción.

El área como magnitud orientada. Signo de un área

Introducción

Cuando se pretende medir el área del recinto limitado entre una función real de variable real continua y positiva y = f(x) definida en un intervalo [a,b], el eje OX y las ordenadas de los puntos x = a y x = b, se tiene una fórmula global del cálculo del área

$$\int_a^b f(x)dx$$

en la que el área tendrá signo positivo y el número que indica el valor del área se obtiene sumando elementos de área positivos.

Análogamente, si la función y = f(x) fuera negativa en [a,b] la integral anterior sería negativa. Pero no es este el signo que nos interesa asignar al área limitada por una curva cerrada, ya que en estos casos el signo del área depende del sistema coordenado.

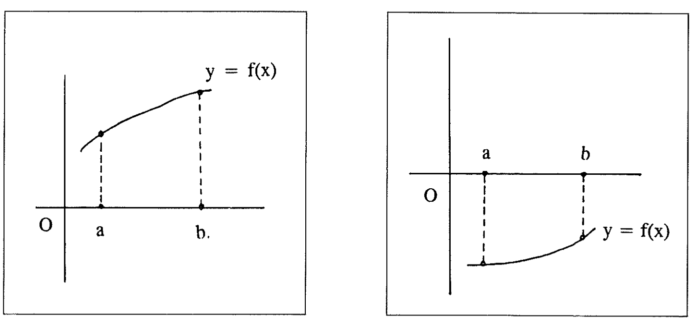


Figura 2

Cuando se habla de área orientada limitada por una curva cerrada C lo que se expresa es que el área será una magnitud independiente de la representación paramétrica de la curva, así como del sistema coordenado elegido y que tendrá signo negativo o positivo según que la curva C sea recorrida en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.

La representación de una curva cerrada no es posible hacerla mediante una sola función, para representar una curva arbitraria se utiliza la representación paramétrica.

Sea una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde $t \in [\alpha,\beta]$, y $x=x(t)$, $y=y(t)$ son funciones continuas, verificando, que $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$, por lo que es una curva cerrada. Supondremos, además, que sus derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas salvo quizás en un número finito de puntos en los que tenga discontinuidades de salto finito en los que presentará ángulos.

Resultados matemáticos fundamentales en los que se basa el funcionamiento del planímetro

Los fundamentos matemáticos del funcionamiento del planímetro son teoremas sobre áreas orientadas que se resumen en el siguiente enunciado global:

Si una curva cerrada C está dada en paramétricas por las ecuaciones $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde $t \in [\alpha,\beta]$ con $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$ y cumple las condiciones anteriores, entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')\,dt$$

a A le llamaremos integral fundamental *y cumple las siguientes propiedades:*

1.ª) *Las tres expresiones de la integral A son efectivamente iguales.*

2.ª) *La integral fundamental A no depende del sistema coordenado elegido.*

Los fundamentos matemáticos del funcionamiento del planímetro son teoremas sobre áreas orientadas...

3.ª) *La integral fundamental A no depende del parámetro elegido.*

4.ª) *Si se invierte la orientación en el recorrido de la curva C, entonces A cambia de signo.*

5.ª) *La integral A es aditiva en el sentido que si dividimos C en arcos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se tiene que $A_C = A_{C1} + A_{C2} + \ldots + A_{Cn}$.*

6.ª) *La integral fundamental A tiene el significado geométrico de área.*

Las demostraciones se pueden desarrollar del siguiente modo:

1.º) *Las tres expresiones de la integral A son efectivamente iguales.*

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = x(t)y(t)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta yx'\,dt$$

Como $t \in [\alpha,\beta]$ y $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ se tiene

$$x(\beta)\,y(\beta) - x(\alpha)\,y(\alpha) = 0.$$

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt$$

la semisuma de las dos expresiones de A permite obtener la tercera.

2.º) *La integral fundamental A no depende del sistema coordenado elegido.*

Para ello sometamos la integral fundamental que expresa A a un cambio genérico de coordenadas en el plano, que vendrá dado por un giro seguido de una traslación cuya expresión analítica es la siguiente:

$$x = X\cos p - Y\operatorname{sen} p + a \qquad x' = X'\cos p - Y'\operatorname{sen} p$$

$$y = X\operatorname{sen} p + Y\cos p + b \qquad y' = X'\operatorname{sen} p + Y'\cos p$$

de donde:

$$xy' - x'y = X'Y' - X'Y - aY' - bX'$$

cuando $a = 0$ y $b = 0$ se verifica que

$$xy' - x'y = XY' - X'Y$$

lo que prueba que el integrando es invariable por giros, pero como la curva es cerrada se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta (aY'+bX')\,dt = 0$$

por ser la curva cerrada se cumple que:

$$\int_\alpha^\beta (xy'-x'y)\,dt = \int_\alpha^\beta (XY'-X'Y)\,dt$$

Lo que demuestra la invarianza del valor de la integral fundamental por un cambio de sistema coordenado.

3.°) *La integral fundamental A no depende del parámetro elegido.*

Sea una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas x=x(t), y=y(t) donde t ∈ [a,b] y hagamos el cambio de variable u = u(t), que verifica p = u(t_0) y q = u(t_1), haciendo este cambio a la integral fundamental se cumple:

$$-\int_p^q y\frac{dx}{du}du = -\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{du}\frac{du}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt = A$$

Por lo que la integral fundamental permanece inalterable por cualquier cambio de parámetro. Como, además, tampoco depende del sistema de coordenadas elegido, tal y como se ha visto en el apartado anterior, la integral fundamental sólo dependerá de la curva y se podrá escribir:

$$A = -\int_C ydx$$

4.°) *Si se invierte la orientación en el recorrido de la curva C, entonces A cambia de signo.*

Si una curva C de puntos simples dada por las ecuaciones paramétricas x=x(t), y=y(t) donde t ∈ [α,β] y se realiza la integral de un punto P_0(x(α), y(α)) a otro P_1((x(β), y(β)) en ese sentido la integral fundamental valdrá:

$$A = \int_\alpha^\beta xy'dt = -\int_\alpha^\beta yx'dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt$$

y si se realiza la integración de P_1((x(β), y(β)) a P_0(x(α), y(α)) su valor será:

$$A = \int_\beta^\alpha xy'dt = -\int_\beta^\alpha yx'dt = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha (xy'-yx')dt$$

lo que supone un cambio de signo para A, como deseábamos probar.

5.°) *La integral de A es aditiva en el sentido que si dividimos C en arcos C_1, C_2,... C_n, y mantenemos en ellos la misma orientación que tenía C se tiene que*

$$A_C = A_{C1} + A_{C2} + \ldots + A_{Cn}.$$

En efecto, ya que la partición de C se corresponde con una partición del intervalo [α,β] en n subintervalos

$$\alpha \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n = \beta.$$

El carácter aditivo de la integral nos lleva al resultado expresado.

6.°) *La integral fundamental para curvas es un área.*

Se puede calcular la integral curvilínea a lo largo de un curva cerrada C y representaremos el resultado de la misma con A_C por el simple procedimiento de dividir la curva C en trozos igualmente orientados, integrando sobre cada uno de los arcos obtenidos y sumando.

Consideremos en primer lugar un recinto plano Ω limitado por y=g(x), y=f(x) y las ordenadas x=a, x=b, que denominaremos celda orientada. Su frontera C se puede considerar orientada en sentido contrario a las agujas del reloj, formada por la unión de los arcos C_1, C_2, C_3, C_4. En las curvas C_2 y C_4 no hay variación de *x*, que tomamos como parámetro, por consiguiente

$$A_C = Ac_1 + AC_2 =$$

$$= -\int_b^a g(x)dx - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

que es el área del recinto Ω.

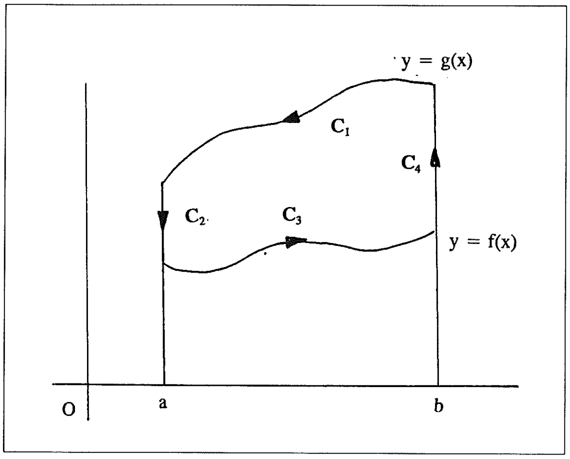


Figura 3

Es, por lo tanto, lo mismo que

$$A = -\int_C ydx$$

Si queremos determinar el área de un recinto general Ω lo dividiremos en celdas orientadas Ω_1, Ω_2,... Ω_n con fronteras respectivas $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$,... $\partial\Omega_n$ podemos expresar el área de la siguiente forma (véase la figura 4 de la página siguiente):

$$A_\Omega = \sum_1^n A_{\Omega i} =$$

$$= \sum_1^n \left(-\int_{\partial\Omega i} ydx\right) - \int_{\partial\Omega} ydx$$

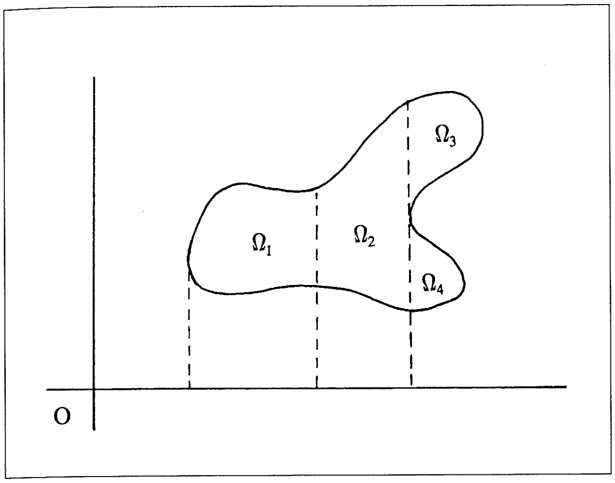


Figura 4

El teorema de Green y las áreas orientadas

Los resultados anteriores se podrían haber deducido de la fórmula de Green, que relaciona la integral a lo largo de una curva cerrada con una integral doble extendida al recinto que comprende.

Teorema de Green. Sean P(x,y) y Q(x,y) campos escalares con derivadas parciales acotadas en un abierto S del plano xy. Sea C una curva de Jordan regular a trozos y sea Ω la unión de C con su interior. Supongamos que $\Omega \subset S$, entonces se verifica la identidad

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \iint_\Omega \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dxdy$$

Que suele escribirse de forma resumida en la forma:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega (Q_x - P_y)dxdy$$

A partir de esta fórmula se pueden obtener distintas expresiones integrales que relacionan el área de un recinto plano con una integral curvilínea recorrida a lo largo de su frontera, así:

Si $P_y = -1$ y $Q_x = 0$ la fórmula se transforma en:

$$-\int_C ydx = \iint_\Omega dxdy$$

El fundamento matemático del planímetro se basa en el cálculo del área que barre un segmento rectilíneo.

cuyo segundo miembro es el área del recinto Ω.

Si $P_y = 0$ y $Q_x = 1$ la fórmula se transforma en:

$$\int_C xdy = \iint_\Omega dxdy$$

que es el área del recinto.

Si $P_y = -1$ y $Q_x = 1$ la fórmula se transforma en:

$$\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \iint_\Omega dxdy$$

Lo que demuestra la equivalencia de las fórmulas

$$A = \int_\alpha^\beta xy'\,dt = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (xy'-yx')dt$$

Área de barrido

A continuación se van a aplicar los teoremas anteriores al cálculo del área de la figura que barre una curva que se desplaza por el plano. El fundamento matemático del planímetro se basa en el cálculo del área que barre un segmento rectilíneo. Esta noción de área de barrido de un arco de curva se matiza a continuación.

Sea un arco de curva de extremos A_0B_0 que se mueve en el plano cartesiano de manera continua hasta una posición A_1B_1. El punto A_0 describirá en su movimiento una curva A_0A_1, el B_0 trazará en su desplazamiento la curva B_0B_1. En total queda en el plano la figura $A_0B_0B_1A_1$ que determina un recinto.

Sea AB una posición intermedia de la curva en su desplazamiento continuo y consideremos otra posición infinitamente próxima A'B'. El área total del recinto $A_0B_0B_1A_1$ se puede calcular conociendo las ecuaciones de A_0B_0, B_0B_1, B_1A_1, A_1A_0 mediante la fórmula:

$$\int_{A_0B_0B_1A_1} \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

Ya que las posiciones inicial y final del arco de curva A_0B_0, A_1B_1 junto con las trayectorias descritas por sus extremos A_0A_1 y B_0B_1 constituyen una curva cerrada en el plano que delimita un recinto cuya área, llamada área de barrido, se puede calcular mediante una integral curvilínea calculada a lo largo de la frontera del mismo que no es otra que la curva $A_0B_0B_1A_1$ a la que se dotará de una orientación conveniente. (Figura 5).

En el caso de que el arco de curva A_0B_0 se moviera en el plano cartesiano de manera continua hasta una posición A_1B_1 coincidente con A_0B_0, el punto A_0 describirá en su trayecto una curva cerrada A_0A_1 que supondremos simple, mientras que el extremo B_0 trazará en su desplazamiento otra curva cerrada B_0B_1, que supondremos simple igualmente. El área de barrido se calculará en este caso mediante la suma de las áreas, con el signo que les corresponda según la orientación de la curva cerrada descrita de los recintos delimitados por las curvas cerradas que describen A_0 y B_0, que denotaremos R_1 y R_2 respectivamente, en el desplazamiento del arco de curva A_0B_0, según se esquematiza en la figura 6.

Si uno de los extremos, por ejemplo B_0, describiera un arco simple de curva no cerrado, el área sería la de R_1, ya que el área de la figura plana que encierra la curva descrita por B_0 sería nula. La figura 7 ilustra la situación.

Para calcular el área, suponiendo que A recorre una curva simple de Jordan cerrada, que B recorre un arco y que AB vuelve a su posición inicial, supongamos que AB y A'B' sean dos posiciones infinitamente próximas, tal y como se indica en la figura 8, donde α es al ángulo que forma en cada punto la tangente al arco de curva que describe B con la barra trazadora AB cuando A describe el recinto que se desea medir.

$$d\sigma = \mathrm{AB}\,ds\,\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2\,d\theta$$

Para calcular el área de la figura barrida por el segmento AB, cuando este segmento parte de una posición determinada y vuelve a la misma se ha de integrar. Al realizar esa integración, el primer sumando se integrará a lo largo de la curva descrita por A y el segundo entre dos valores idénticos de θ por lo que la integral se anulará y quedará:

$$\sigma = \int_C \mathrm{AB}\,ds\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Mecanismos de un planímetro

Supongamos que una ruedecilla se apoya en un plano rugoso y que su eje permanece paralelo al plano. La ruedecilla posee un plano de simetría perpendicular a ese plano llamado plano de la ruedecilla. La intersección del plano de la ruedecilla con el plano de apoyo se denomina traza de la ruedecilla. El punto de contacto de la ruedecilla con el plano describe una línea llamada trayectoria de la ruedecilla.

Cuando la ruedecilla se pone en movimiento sobre el plano describe alrededor de su eje una cierta rotación, medida con un ángulo, la longitud del arco de este ángulo medido sobre la circunferencia de la ruedecilla se llama rodadura.

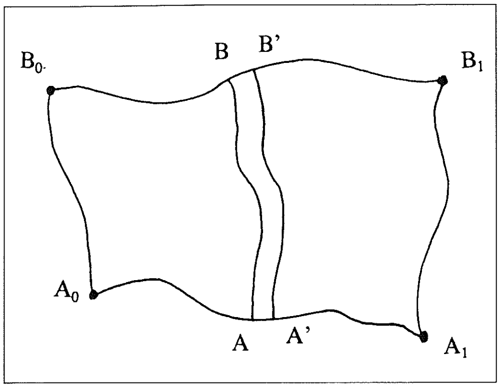


Figura 5

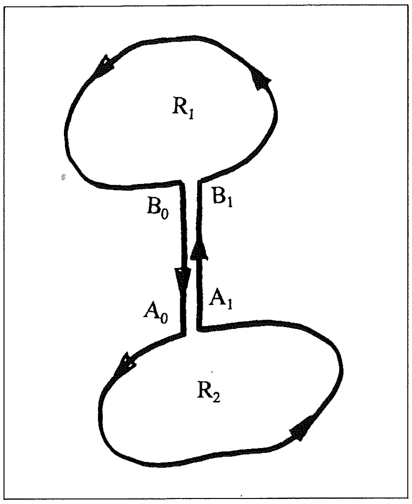


Figura 6

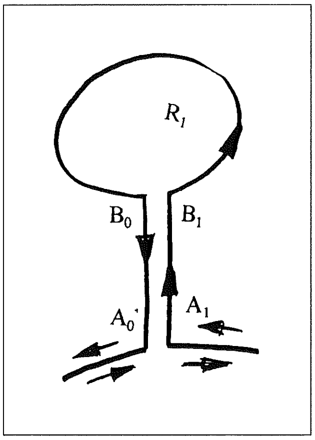


Figura 7

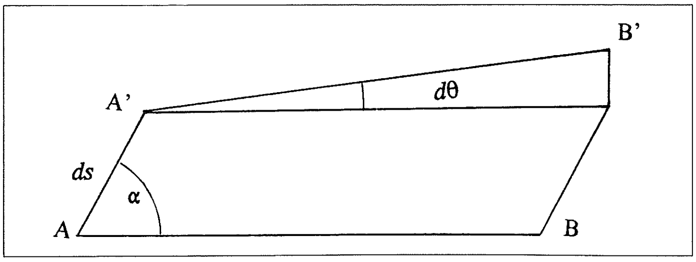


Figura 8

Al girar la ruedecilla se pueden dar los casos siguientes:

1) Giro en torno a la normal al plano en el punto de apoyo: rodadura nula.
2) Traslación en el sentido del eje de la ruedecilla: rodadura nula.
3) Traslación siguiendo la traza de la ruedecilla: hay sólo giro sin deslizamiento, la rodadura es igual a la trayectoria rectilínea descrita.
4) Una traslación siguiendo una línea recta que forma un ángulo determinado con la traza de la ruedecilla. En este caso el movimiento se puede considerar descompuesto en la rodadura que será la proyección de la trayectoria de la ruedecilla sobre la traza de la misma y en una traslación según el eje de la ruedecilla.

Llamando α al ángulo que determina la trayectoria rectilínea con el eje de la ruedecilla, que es, según se ha dicho anteriormente en las áreas de barrido, el ángulo que forma en cada punto la tangente al arco de curva que describe A con la barra trazadora AB cuando B describe el recinto que se desea medir.

Si la rueda realiza un desplazamiento infinitamente pequeño describiendo un arco de curva ds = RR' en este desplazamiento la rueda habrá rodado, pero también habrá tenido un deslizamiento. Las posiciones del eje de la rueda se pueden suponer paralelas en R y R'. La rodadura infinitesimal se medirá sobre una dirección perpendicular al eje de la rueda y vendrá dada en este último caso por:

$$RR_1 = RR' \operatorname{sen}\alpha$$

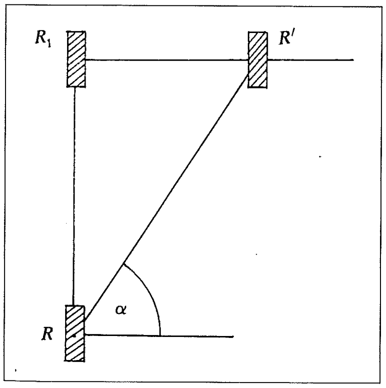


Figura 9

El planímetro de Amsler consta de una varilla que se desplaza paralela al plano de apoyo.

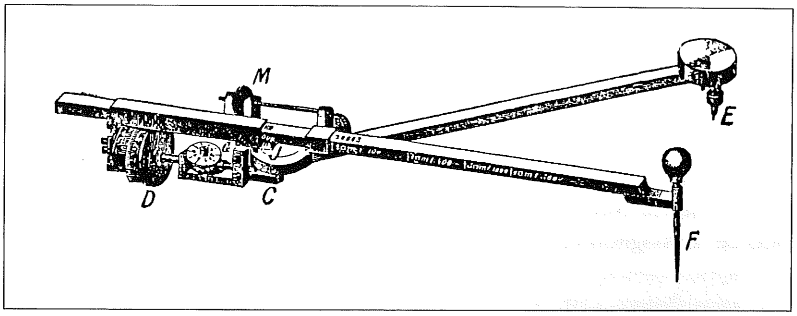
Con estos supuestos resulta fácil evaluar la rodadura cuando se describe una trayectoria cualquiera. Cada desplazamiento elemental de la ruedecilla, ds, puede descomponerse en: ds senα que es la rodadura y en un giro alrededor de la normal al plano de apoyo en el punto de contacto de rodadura nula. La rodadura será, por consiguiente:

$$\int \operatorname{sen}\alpha \, ds$$

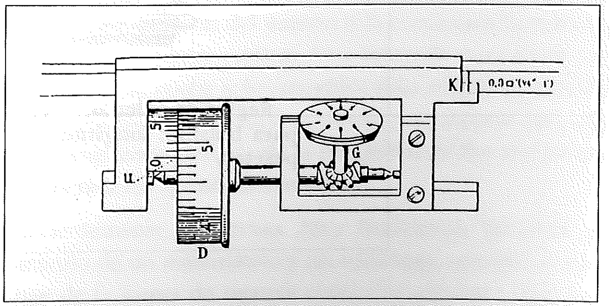
integral que será evaluada a lo largo de la trayectoria descrita por el punto B.

El planímetro de Amsler

El planímetro de Amsler consta de una varilla AB que se desplaza permaneciendo constantemente paralela al plano de apoyo. En el extremo A tiene un trazador mediante el cual se puede recorrer el contorno de la figura que se desee medir, en B está articulada con otra varilla móvil OB.



Planímetro de Amsler



Detalle del tambor y contador del planímetro de Amsler

La varilla OB está sujeta mediante una aguja al plano de apoyo. En la prolongación de la varilla AB, en C, está colocada una ruedecilla graduada que puede girar en torno a si eje AB. La ruedecilla se apoya en el plano y puede girar libremente cuando el extremo A describe la figura que se desea medir (véase figura 1).

Por lo expuesto anteriormente el área del recinto σ viene dada, cuando B describe un arco de circunferencia, por

$$\sigma = AB\ \Delta.$$

Para medir con las unidades adecuadas es preciso que cada planímetro mida una superficie de medida conocida como, por ejemplo, un centímetro cuadrado, que provocará en la ruedecilla una medida de rodadura Δ_0, entonces:

$$\sigma = \int \operatorname{sen} \alpha \, ds$$

El planímetro de Petersen

El fundamento del planímetro de Petersen es el mismo que el de Amsler, la diferencia fundamental estriba en que la ruedecilla que mide los ángulos en el segundo se reemplaza por una corredera en el de Petersen. La modificación realizada se comprende con el siguiente razonamiento. En la fórmula

$$ds = AB\ ds\ \operatorname{sen}\alpha + (1/2)AB^2\ d\theta$$

AB senα representa la componente normal a la varilla AB del desplazamiento de C (la ruedecilla). Por lo tanto, si C recorre una barra DE manteniéndose normal a AB (figura 10), sin que la corredera tenga desplazamiento en el sentido de su longitud el punto C se desplazará

$$\sigma = AB\ \frac{\Delta}{\Delta_0}$$

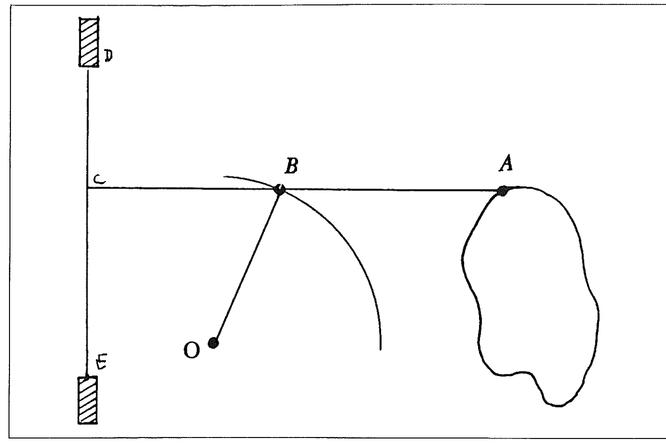


Figura 10

Víctor Arenzana
IES Félix de Azara
Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de
Profesores de Matemáticas
Pedro S. Ciruelo

Bibliografía

ÁLVAREZ VALDÉS, L. (1945): *Topografía, instrumentos métodos y aplicaciones*, Dossat, Madrid.

COURANT, R. y F. JOHN (1971): *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa-Wiley, México.

REY PASTOR, J., P. PI CALLEJA, y C. A. TREJO (1969): *Análisis matemático. Análisis algebraico, teoría de ecuaciones, cálculo infinitesimal de una variable*, Tomo I, Kapelusz, Buenos Aires.

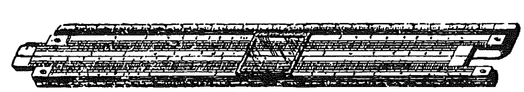


Fig. 58. — Regla de cálculo

Reglas de cálculo.—Núm. 285. — De madera con placa celuloide, para bolsillo: longitud 14 cm., con folleto explicativo; ejemplar, 17 pesetas.

Regla de cálculo
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)