SUMA 21
febrero 1996, pp. 63-71

...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

ARTÍCULOS

La identificiación entre las operaciones y sus algoritmos ha hecho olvidar que estos últimos no son únicos y, además, que están muy alejados (por lo refinados) de los números, operaciones y propiedades implicadas. Al hilo de estas consideraciones se plantean una serie de preguntas y alguna respuesta, que no siendo una lista completa, permiten contemplar una infinidad de posibilidades didácticas que quedan abiertas cuando las calculadoras ya casi no están obligadas a luchar por su implantación en el aula.

Hay metáforas que están más cerca de la realidad que ella misma. Esta podría ser un buen ejemplo. Recoge Georges Ifrah en su libro *Las cifras* el siguiente párrafo: «Un amigo mío, durante un reciente viaje a la Unión Soviética, quiso un día cambiar francos franceses por rublos y vio, sorprendido, que el funcionario de la oficina de cambio efectuaba sus cálculos con una calculadora moderna y comprobaba después los resultados con un marcador» (p. 119). Eran los últimos rescoldos vivos de una guerra que mantuvo discretamente entretenida a la humanidad durante varios siglos: «En realidad la disputa entre Abacistas y Algoristas duró varios siglos. El ábaco se siguió utilizando incluso después de la victoria de los nuevos métodos. Todavía se enseñaba en el siglo XVIII, y la gente, por prudencia, siguió comprobando todos los cálculos efectuados a pluma repitiéndolos en la tabla de fichas» (p. 299). «En cualquier caso, [...], los entusiastas del cálculo moderno fueron cada vez más numerosos y la balanza empezó a inclinarse sensiblemente a su favor. Era el inicio de la democratización del cálculo en Europa. Sin embargo la batalla estaba aún muy lejos de ser ganada [...]. Los calculadores profesionales de la época que practicaban las operaciones en el ábaco, querían, en efecto, guardar celosamente los arcanos de este arte: preocupados por preservar su monopolio y al ver amenazado su medio de vida, no querían ni oír hablar de estos métodos revolucionarios que ponían las operaciones aritméticas al alcance de cualquiera» (p. 296).

El paralelismo con la época actual es claro, pero como parece difícil aprender de la historia el lector sacará las conclusiones que estime más oportunas. En mi caso quisiera hacer hincapié en la resistencia que presentan algunas instituciones a los cambios aunque (o porque) vengan avalados por el progreso científico y técnico. Teniendo la virtud de asumirlos muchos siglos después de haberlo hecho la sociedad que los gestó. En este sentido la escuela se ha comportado siempre como la institución más conservadora.

De hecho, hace ya tantos años que uno ni se acuerda de ello, aparecieron las calculadoras de bolsillo, mal llamadas de cuatro operaciones. Ahora su uso está generalizado, las regalan con la compra del detergente o de las galletas,... ni siquiera llevan pilas. La escuela, algunas escuelas, son el único sitio en el que se prohibe su uso. ¿Por qué tantas reticencias? ¿A qué se tiene miedo?, ¿a quedarnos sin «programa»?, o a «democratizar» la enseñanza de las cuatro operaciones y tener que dejar de considerar fracasados a los estudiantes que no saben hacer multiplicaciones o divisiones con muchos dígitos? ¿Se intenta salvar «la estética» del algoritmo de la frialdad del calculo rápido y preciso? ¿Será quizás que seguimos prisioneros de una especie de síndrome de Estocolmo según el cual el valor de las cosas es directamente proporcional al sufrimiento que cuesta conseguirlas y en el que determinados cálculos y adiestramientos, que sólo se hacen en la escuela, no pasan de ser, y sólo se justifican como meras «destrezas de supervivencia escolar» como les llama Maier en aquel famoso artículo de *Arithmetic Teacher* de septiembre de 1987?

Creo que, nos guste o no, el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas. Creo que es hora de tener superado el debate sobre cuál debe ser el uso de la calculadora en clase, llevamos más de diez años diciendo que no puede reducirse a un mero uso funcional, que la calculadora ha de usarse como generador de problemas, como potenciador del cálculo mental, como profundizador del sentido y razón de ser de las operaciones y algoritmos, etc. Incluso creo que no tiene sentido plantearse eternamente reflexiones como «La revolución frustrada» que nos ofrecía la revista *Micromath* en 1992. Y no porque su uso lo recomiende el *Informe Cockcroft* (1982) o porque esté incluida como material didáctico en los nuevos programas, ni siquiera porque la realidad se imponga por sí misma o porque la bibliografía surgida durante los últimos años sea riquísima en recursos didácticos basados en el uso de la calculadora, sino porque los únicos que de verdad establecen los currículos reales, los únicos a los que se atribuye, y en quien se delega, autoridad suficiente para ello, las editoriales, están incluyendo en los textos muchos de los problemas, juegos e investigaciones que llenaban a rebosar la bibliografía al uso sobre utilización didáctica de la calculadora.

Lo que no va a pasar de moda ni puede ser superado ni separado de los currículos es el concepto de operación como relación entre números, porque forma parte inseparable de las propiedades y por lo tanto de la conceptualización de los mismos. Pero llevamos demasiado tiempo confundiendo operación con algoritmo y divinizando a éste como dios único y verdadero. Entronizados en su esencia de brevedad, infalibilidad, universalidad, efectividad y permanencia, se han automatizado sin entender las razones que encierra su proceso. Se desconoce por ejemplo que ni son universales ni únicos, sorprende saber que en Italia se multiplica con un algoritmo diferente al que nosotros usamos, como sucede con la división en EE.UU. por poner dos ejemplos. Y que no siempre se ha operado de la misma manera, de forma y modo que, olvidando que a veces lo mejor es enemigo de lo bueno, nuestros algoritmos que son los más refinados y sintéticos que hayamos podido conseguir están, por esa misma razón, lejos de ser didácticamente los más adecuados al estar alejados del sentido último de la operación que efectúan y de las propiedades de los números implicados en ellas, pues como los seres humanos ya metidos en años, ocultan más de lo que enseñan.

...nos guste o no, el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas.

Quizás sea el momento de replanteárselo todo, más que nada porque siempre es un buen momento para hacerlo y en este sentido este artículo pretende ser una invitación a la duda sistemática, a poner en entredicho la evidencia, a discrepar de la obviedad, a cuestionar las buenas costumbres, a repensar lo impensable, a poner en tela de juicio lo intocable, lo admitido, lo establecido, lo estandarizado, lo básico... Pretende iniciar un paseo por los trillados caminos de los algoritmos de las cuatro operaciones, con detenimiento, con paciencia, redescubriendo rincones inadvertidos, paisajes agazapados a la sombra de otros paseos más monótonos y rutinarios, caminos nunca explorados, inaccesibles a la prisa y a la efectividad. A recorrerlos con libertad y sin miedos, solazándonos a la sombra de la duda permanente. Agazapados al acecho de lo intangible, de lo inútil o lo inaccesible. Seguros de que importa más el viaje que el destino.

Es por ello por lo que quizás convenga comenzar por plantear algunas preguntas ingenuas de esas que haría un niño y cuya respuesta lejos de ser obvia entraña mil trampas y desconciertos. Las preguntas y respuestas ni son todas ni son únicas, y tanto unas como otras dan pie a muy diversas formas de algoritmo y a otras tantas formas de entender la operación en sí misma. El interés didáctico es cambiante en cada momento y la transposición al aula como las respuestas quedan (como no podría ser de otro modo) a cargo del lector.

Suma

- ¿Por qué se empieza a sumar por la derecha?
- ¿Cómo sería el algoritmo empezando por la izquierda?
- ¿Por qué las que se llevan se escriben sobre las cifras siguientes?
- ¿Por qué no se pone siempre el número grande arriba?
- Escribe todas las reglas que definen el algoritmo estándar de la suma.
- ¿Qué presenta y qué oculta este algoritmo sobre el concepto de suma?
- A la hora de sumar decimales, ¿por qué se alinean los números respecto de la coma?
- ¿Qué es sumar? ¿En todos los casos tiene la suma el mismo sentido? ¿Qué diferentes problemas sobre la misma se pueden presentar?

	7	8	9
+	5	9	6
1	2	0	0
	1	7	0
		1	5
1	3	8	5

	7	8	9
	5	9	6
	1 / 2	1 / 7	1 / 5
1	3	8	5

¿Qué es sumar? ¿En todos los casos tiene la suma el mismo sentido?

700	+	80	+	9	
500	+	90	+	6	
1200	+	170	+	15	
1000 + 300 + 80	+	5			

7c	+ 8d	+	9u	
5c	+ 9d	+	6u	
12c	+ 17d	+	6u	
13c	+ 8d	+	5u	

+	7	8	9	
5	1	2		
9		1	7	
6			1	5
	1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
	12	17	15
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
		1	5
	1	7	
1	2		
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
1	2		
	1	7	
		1	5
1	3	8	5

	7	8	9
+	5	9	6
	1	7	
		1	5
1	2		
1	3	8	5

	~~7~~	~~8~~	9
	5	~~9~~	~~6~~
1	~~8~~	5	~~8~~
	~~6~~	~~9~~	~~9~~
	~~9~~	~~9~~	~~8~~
+	6	~~9~~	2
5	6	3	2

		7	8	9
	+	5	1	6
	1	0	1	
		2	9	5
		1		
	1	2	0	5
	1	3	0	5

789 + 475 = 1100+89+75 = 1300–11–25 = 1275–11 = 1264

789 + 475 = 789 + 50025 = 1289 – 25 = 1264

789 + 475 = 790 + 474 = 800 + 464 = 1264

Pero esto ya no es un algoritmo, podría ser un semialgoritmo, incluso un heurístico.

Resta

- ¿Qué propiedad sustenta el algoritmo de las resta «con llevadas»? ¿Por qué se suman las que «se llevan» al sustraendo y no al minuendo? ¿Por qué nunca nos llevamos dos?
- ¿Por qué se empieza a restar por la derecha? ¿Se podrían elaborar algoritmos que comenzasen por la izquierda?... ¿o por el centro?
- Haz una resta mentalmente, ¿qué algoritmo has utilizado? ¿Has usado mentalmente la grafía de los números?
- ¿Por qué se coloca el mayor arriba y el menor abajo? ¿Podría hacerse de otro modo?
- ¿Por qué sólo se restan números de dos en dos, cosa que no sucede en la suma por ejemplo? ¿Podríamos generar algoritmos que lo hicieran posible?
- ¿Por qué no se estudian las tablas de restar? Construye una, ¿qué propiedades de la resta se ponen de manifiesto de forma evidente? Por cierto que pasear por ella ascendiendo y descendiendo puede ayudar a entender la resta con llevadas.
- ¿Cómo se restarían dos números enormes, pongamos de 16 cifras, con la calculadora?
- Incluso podríamos plantearnos el escribir uno a uno todos los pasos que conforman el algoritmo y analizar qué aspectos de la operación muestra y cuáles oculta. O hacer una resta en base 3 o 6 para entender las dificultades que tiene su aprendizaje.
- Por cierto, ¿por qué se empieza por la suma y no por la resta, la multiplicación o la división?

Pues bien, sírvanse considerar algunos posibles algoritmos diseñados para restar, por si usted no gusta de usar calculadora, hay eclipse de sol o gusta de coleccionar utensilios didácticos. Pero todos ellos sirven para restar y a buen seguro que los encontrará mejor emparentados que el tradicional con la operación que se pretende.

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 2 & 3 \\ & - & 7 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \\ & & - & 5 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 2 & 3 \\ & - & 7 & 5 \\ \hline & 3 & 0 & 0 \\ & - & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 0 \\ & & - & 2 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 4 & 8 \\ - & 5 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

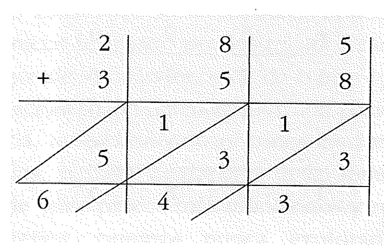
¿Cómo se restarían dos números enormes, pongamos de 16 cifras, con la calculadora?

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 0 & 0 \\ - & 4 & 5 & 2 \\ \hline & 6 & 4 & 8 \\ - & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 7 & 2 & 3 \\ - & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 1 & 8 \\ - & 4 & 7 & 0 \\ \hline & 6 & 4 & 8 \\ - & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 285 \\ + \\ \hline 643 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 285 \\ +\,358 \\ \hline 643 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5\ {\scriptstyle 14}\ 3 \\ -\,2\ 8\ 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5\ {\scriptstyle 13}\ {\scriptstyle 13} \\ -\,2\ 8\ 5 \\ \hline 3\ 5\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 643 \\ -\,285 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 6\ 4\ {\scriptstyle 13} \\ -\,2\ 9\ 5 \\ \hline 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 6\ {\scriptstyle 14}\ {\scriptstyle 13} \\ -\,3\ 9\ 5 \\ \hline 3\ 5\ 8 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 742 \\ -\,397 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 397 \\ 400 \\ \boxed{742} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 342 \\ \boxed{345} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 742 \\ 700 \\ 400 \\ \boxed{397} \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ 300 \\ 3 \\ \boxed{345} \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
623 \\
-485 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{r}
628 \\
-490 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{r}
638 \\
-500 \\
\hline
138
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
623 \\
-485 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{r}
620 \\
-482 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{r}
600 \\
-462 \\
\hline
138
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r}
7483 & 5895 \\
\hline
-5000 & -5000 \\
2483 & 895 \\
-483 & -483 \\
2000 & 412 \\
-400 & -400 \\
1600 & 12 \\
1590 & 2 \\
\boxed{1588} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
7c + 2d + 5u \\
-3c + 5d + 7u \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6c + 11d + 15u \\
-3c + 5d + 7u \\
\hline
3c + 6d + 7u
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
700 + 20 + 5 \\
-300 + 50 + 7 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
400 + 20 + 5 \\
-50 + 7 \\
\hline
350 + 13 + 5 = 368
\end{array}
$$

Se pueden generar otros tres sencillos algoritmos quitando, separando o complementando que tienen un soporte simbólico o físico sobre la recta real e infinidad más de ellos que a buen seguro se le ocurrirán al lector al hilo de esta prolija muestra de variaciones sobre un mismo tema.

¡Pero ¿qué me dice Vd.!... ¡que algunos no son algoritmos propiamente dichos!, ¡que son seudoalgoritmos, heurísticos quizás!. Pues claro, pero es que ya no necesito *un* algoritmo, ni mucho menos que sea único ni estandarizado, para eso tengo el de la calculadora que cumple además a la perfección las condiciones de rapidez y sencillez máximas. Ya no me preocupa el algoritmo, ¡en absoluto!, me preocupa la operación y las propiedades numéricas y la decena y el operar mental y la profundidad con que los mismos se instalen en la mente y la permanencia de esa profundidad. ¡Pero el algoritmo, el que nuestra tradición cultural considera como tal, me importa tanto como cualquiera de estos, incluso menos, su importancia es simplemente histórica!

Y podríamos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad, y releer a Descartes cuando escribe: «...no admitir jamás como verdadera cosa alguna sin conocer con evidencia que lo era; es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención y no comprender, en mis juicios, nada más que lo que se presentase a mi espíritu tan clara y distintamente que no tuviese motivo alguno para ponerlo en duda» y que viene a ser algo tan contradictorio y placentero como solazarse a la sombra de la duda (más o menos). No cabe duda que la frase de Descartes encierra una inconmensurable confianza en el género humano, no menos que la que vamos a demostrar nosotros en vuestra paciencia planteándoos algunas cuestiones maliciosas sobre la multiplicación y la división y sometiendo a vuestro juicio y buen entender algún que otro cuasialgoritmo, lo llamaremos así para no sufrir las duras críticas que habrá de soportar quien se desviase lo más mínimo del buen criterio y juicio veraz que impone una rutina bien establecida (la de algoritmo sin ir más lejos).

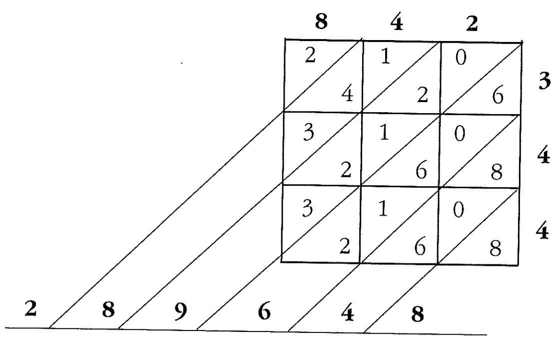
Multiplicación

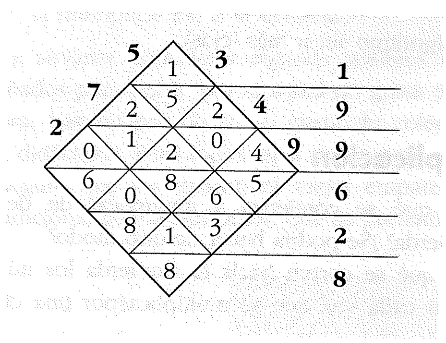
- ¿Por qué se comienza a multiplicar de derecha a izquierda? ¿Se podría hacer de otro modo?
- ¿Por qué se corren hacia la izquierda los números a sumar cada vez que se multiplica por una cifra diferente?
- ¿Por qué cuando se multiplica por la unidad seguida de ceros se corre la coma hacia la derecha o se añaden ceros?
- ¿Cómo se haría la multiplicación «con decimales» si hubiese que conservar la coma a lo largo de toda ella?
- Por cierto, ¿por qué se pone la coma justo en el sitio en el que se pone al acabar una multiplicación con decimales? Y justo antes de colocarla ¿qué tenemos: unidades, decenas, décimas,..., depende...?
- Una simpleza... ¿por qué $3 \times 0 = 0$?
- ¿Por qué sólo se multiplican los números de dos en dos? Dicho de otro modo ¿qué significado tiene, desde el punto de vista de lo que significa multiplicar $2 \times 3 \times 4$? ¿Cómo sería un algoritmo que multiplicase los factores

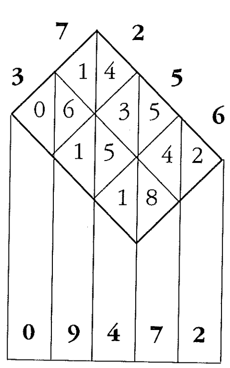
¿Por qué se comienza a multiplicar de derecha a izquierda? ¿Se podría hacer de otro modo?

de tres en tres? Puestos a buscar sentido a expresiones, ¿cuál es el de esta: 234?

- ¿Por que se ajustan los factores a derecha, uno debajo de otro, antes de comenzar la multiplicación e independientemente de la coma? ¿Por qué se multiplica por el de abajo?
- Si pudiéramos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad y releer a Descartes, si multiplicamos decenas por centenas ¿qué sale? ¿Y metros por metros?
- ¿Cómo funciona y en qué se fundamenta la prueba de los nueves?
- Parece bastante claro que siempre que multiplicamos aumenta el resultado, ¿hay algún caso en que no sea así?







El producto hindú

Si pudiéramos seguir planteándonos preguntas ingenuas que pongan en entredicho la obviedad y releer a Descartes, si multiplicamos decenas por centenas ¿qué sale? ¿Y metros por metros?

x 1	157
~~2~~	~~314~~
~~4~~	~~628~~
~~8~~	~~1256~~
16	2512
32	5024
49	7693

−1	−157
+10	+1570
~~20~~	~~3140~~
+40	+6280
49	7693

x 1	49	157
0	24	314
0	12	628
0	6	1256
1	3	2512
1	1	5024
		7693

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 8 \\ \times\quad 7\ 3 \\ \hline 1\ 7\ 1\ 0\ 4 \end{array}$$

256 x 37 = 37000 : 4 + 6 x 37 = 9250 + 370 : 2 + 37 = 9250 + 135 + 37 = 9472

= 7680 + 768 + 256 = 7680 + 1536 + 256 = 9472...

x	200	50	7	
40	8000	2000	280	**10280**
9	1800	450	63	**2313**
	9800	**2450**	**343**	**12593**

		1	5	7
		x	3	8
	0	4	5	
		8	0	6
0	1	2		
	3	5	1	
	5	9	6	6

		2	6	8
		x	4	7
0	2	3		
	8	4	2	
	1	4	5	
		4	2	6
1	2	5	9	6

		2	5	6
		x	3	7
			4	2
		3	5	
	1	4		
	1	7	9	2
		1	8	
	1	5		
0	6			
	9	4	7	2

		2	5	6
		x	3	7
			4	2
		3	5	0
	1	4	0	0
		1	8	0
	1	5	0	0
	6	0	0	0
	9	4	7	2

Multiplicación italiana

¿Se propone un problema para profundizar en el concepto de multiplicación, por ejemplo, o simplemente para automatizar la tabla, el algoritmo o determinada estrategia de cálculo?

Y este sería un buen momento, para reflexionar sobre *materiales didácticos* (multicubos, ábacos, regletas, dominós, vasos de yogur...):

- ¿Cómo introducirlos en el aula?
- ¿Qué grado de abstracción supone el uso de cada uno de ellos?
- ¿Qué aportan y qué ocultan acerca de la operación que estemos tratando en ese momento o de su algoritmo?

Sobre las propias *operaciones*:

- ¿Qué relaciones numéricas hay implicadas en cada una de ellas?
- ¿Qué enunciados de problema se les puede asociar? ¿Qué implican en cuanto a diferentes puntos de vista e interpretaciones de la operación?

Sobre los distintos *tipos de juegos*:

- ¿Cuáles emplear en cada momento?
- ¿Se pretende con ellos una automatización de rutinas o descubrir una estrategia?

Sobre los *problemas y ejercicios*:

- ¿Se propone un problema para profundizar en el concepto de multiplicación, por ejemplo, o simplemente para automatizar la tabla, el algoritmo o determinada estrategia de cálculo?

Un buen momento, en definitiva, para pensar en las múltiples cosas que pasamos por alto cada vez que operamos, que para nosotros pueden ser simples y para nuestros alumnos un abismo. Por ejemplo, a veces: *pesetas* x *caramelos* = *caramelos*. En otras ocasiones: *pesetas* x *caramelos* = *pesetas*. Pero en otras ocasiones: *camisas* x *pantalones* = *trajes*, como *décimas* x *centésimas* = *milésimas*. Pero, *pesetas* x *pesetas* = *pesetas*, mientras que *metros* x *metros* = m^2 y x x x = x^2 que parece lo mismo pero no es igual. Y *números* x *números* dan *números* pero *números* x *pesetas* siempre son *pesetas*. Demasiadas concepciones implícitas dentro de la misma notación como para pasarlas por alto alegremente.

Llegados a este punto esperamos haber tranquilizado a aquellos espíritus inquietos que quizás temían al empezar a leer el artículo que la incorporación del algoritmo de la calculadora nos había dejado sin programa en primaria. Es cierto que libera una gran cantidad de tiempo susceptible de ser aprovechado para trabajar la geometría, la probabilidad o la estadística ausentes hasta ahora de los programas, pero será necesario utilizar buena parte de él para profundizar en el sentido de las operaciones y en los conceptos relacionales que las sustentan.

La división

- ¿Por qué se colocan dividendo y divisor en horizontal y no en vertical, como sucede con los demás algoritmos?

- ¿Por qué se comienza por la izquierda y no por la derecha como sucede en la suma, resta y multiplicación?
- ¿Por qué el dividendo a la izquierda?
- ¿Por qué al dividir se toman tantas cifras del dividendo como contiene el divisor? ¿Por qué se «baja» la siguiente cifra? ¿Podrían bajarse dos? ¿Por qué se hace una resta y no una suma...?
- ¿Por qué no hay tablas de dividir?
- Al dividir van apareciendo diferentes restos ¿en que vienen dados (u, d, c...)?
- ¿Cuántos de estos prejuicios están severamente instalados en las mentes de nuestros alumnos, incluso en las nuestras:
  - Siempre se divide el grande entre el pequeño.
  - El cociente es más pequeño que el divisor.
  - El cociente es más pequeño que el dividendo.
  - El resto siempre es más pequeño que el cociente?
  - Centenas : unidades = ? Décimas : centenas =?
- ¿Por qué se dividen los números de dos en dos?
- ¿Hay llevadas en la división?
- ¿Por qué dividendo es igual a divisor por cociente más resto?
- ¿Por qué funciona la prueba de los nueves? ¿Es posible que la prueba esté bien y la división mal? ¿Se podría diseñar una prueba del 3 o del 5?
- Al dividir por la unidad seguida de ceros ¿por qué se corre la coma hacia la izquierda? ¿Se hace lo mismo si dividimos por 0,0001 por ejemplo?
- ¿Cómo se dividen dos números decimales manteniendo las comas a lo largo de todo el proceso?
- ¿Cómo se explica toda esta secuencia?:

1 2,5 2	2 , 4

1 2 5 2	2 4 0
5 2 0	5 , 2
3 0	

$$12{,}52 \neq 2{,}4 \times 5{,}2 + 30 = 42{,}48$$

Añadiremos algunos algoritmos más sobre la división, algunos surgieron en el aula ocupacional de Arnedo (La Rioja), cuando todavía existía (como funcionaba bien, el MEC pensó que había que cerrarla); y los usaban de forma natural sus alumnos. Aquellos chicos y chicas repudiados por el sistema educativo calculaban el volumen del icosaedro o la estrella de Kepler, hacían bolsos y marroquinería, operaban de forma natural según sus estrategias,..., calculadora en ristre bajo la sabia dirección de Ascen. Aquellos alumnos desahuciados que no sabían multiplicar, pero multiplicaban, que no sabían dividir pero dividían nos enseñaron que ese esfuerzo de creación de sus propios algoritmos, era una aventura mucho más interesante en sí misma que el puerto al que durante años sus profesores se habían empeñado en llevarles y en el que ellos nunca estuvieron dispuestos a recalar. Ellos nos ofrecieron, sin saberlo, la posibilidad de este paseo, para nosotros apasionante, por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones.

¿Por qué no hay tablas de dividir?

4c + 8d + 7u	13
48d	3d + 7u
39d	
9d + 7u	
91u	
6u	

487	13
130	10
260	20
390	30
455	35
481	**37**
6	

400	80	7	23
170			10
55	135	27	5
	20	**4**	5
			1
			21

487	: 13	1 *
–416	26	2
71	52	4 *
–52	104	8
19	208	16
–13	416	32 *
6		**37**

Aquellos alumnos desahuciados que no sabían multiplicar, pero multiplicaban, que no sabían dividir pero dividían nos enseñaron...

487	: 13	1 *
–351	26	2
136	39	3
–117	117	9 *
19	351	27 *
–13		**37**
6		

5632 : 23	= 244
23 x 1 = 23	5632
23 x 2 = 46 *	–4600
23 x 3 = 69	1032
23 x 4 = 92 *	–920
23 x 5 = 115	112
	–92
	20

8 6 4 1	2 3
– 6 9 2 3	3 0 1
1 7 1 8	7 0
– 1 6 1 0	4
1 0 8	**3 7 5**
– 9 2	
1 6	

Que podemos completar para divisiones exactas con cualquiera de los algoritmos de la multiplicación usados en sentido inverso.

Y si el amable lector ha sido capaz de llegar hasta aquí se merece que le obsequiemos, para terminar, con esta cita tomada del prólogo a la edición de 1911 de *En el reino del ingenio* y que su autor, E. I. Ignátiev, tituló «La importancia de la memoria en el estudio de las Matemáticas»:

No se empeñen en enseñarles a niños o jóvenes el estudio de las distintas «tablas», de sumar, restar, multiplicar; en la memorización mecánica de diferentes «reglas» y fórmulas, sino que, ante todo, acostúmbrenles a pensar con placer y conciencia. Lo demás se añadirá con el tiempo. No molesten a nadie con cálculos y ejercicios mecánicos muy largos y aburridos. Cuando a alguien le sean necesarios en la vida, él los hará por sí solo. Además ahora para ello hay distintas máquinas calculadoras, tablas y otros dispositivos».

Aunque parezca mentira, y haya quien piense que está tomado de alguno de los innumerables textos oficiales publicados en los últimos años, está escrito en 1911 en la Rusia de los zares. Para que luego nos jactemos de originalidad en las ideas.

Ángel Ramírez
Carlos Usón
IB Quintiliano
Calahorra (La Rioja)

N.° 206.—**Las cuatro tablas de Aritmética.** — En cuatro carteles, tamaño 88 por 65, impresos en rojo y negro. En papel, 2'60 pesetas; montadas sobre cartón, 10'50 pesetas.

Número 215.— D. C. P.—**Caja para la enseñanza gráfica de los quebrados.**- (Fig. 51). Formada por listones de madera, de diferentes colores, y con los cuales se da perfecta idea de cualquier quebrado propio, pudiéndose ver también intuitivamente la equivalencia de quebrados y la suma y resta de los mismos. Precio, 16 pesetas.

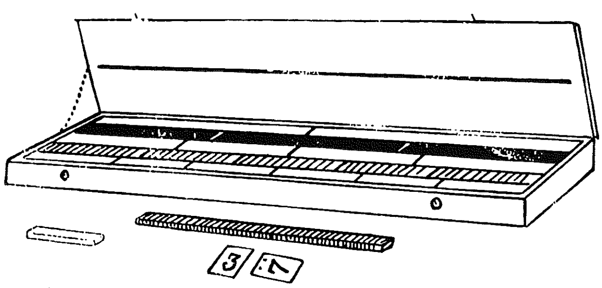


Fig. 51.—Caja para la enseñanza de los quebrados

Tablas de Aritmética
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)