SUMA 21
febrero 1996, pp. 41-54

Del dicho al hecho...

Jose María Gairín Sallán

ARTÍCULOS

Las vivencias personales como estudiante, las creencias sobre la disciplina científica, las concepciones sobre el trabajo de profesor y alumno, y las actitudes ante la asignatura forman un bucle que se retroalimenta a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
Este artículo pretende reflexionar acerca de las alteraciones que se producen en ese bucle al modificar las experiencias matemáticas de los estudiantes.

Para nuestros escolares la asignatura de matemáticas es materia de estudio obligatorio en todos los cursos de educación primaria y en buena parte de los de secundaria. Este «privilegio» lo disfrutan muy pocas disciplinas escolares, por lo que los estudiantes conceden a las asignaturas de matemáticas una importancia prioritaria en su currículum (Arana y otros, 1985). Y, claro está, una materia tan importante en el sistema escolar –a lo que no es ajena la creencia de la sociedad–, provoca que las asignaturas de matemáticas no sean anodinas para el alumno sino que despiertan reacciones positivas o reacciones negativas (Corbalán y otros, 1984). Además, y a lo largo de varios años, los alumnos viven la experiencia personal y directa de la adquisición de los conocimientos matemáticos en el contexto concreto de un sistema educativo determinado.

En este proceso formativo los estudiantes adquieren, de una parte, unos conocimientos científicos concretos sobre la ciencia matemática; además, los alumnos también van forjando sus propias creencias en torno a las matemáticas como disciplina científica. Estas creencias influirán en sus actitudes hacia la materia y determinarán el método de estudio. Por tanto, y como profesores de las asignaturas, resultan de gran interés preguntas como: ¿qué opinión se forman los alumnos de esta materia?, ¿qué caracterización dan los estudiantes a las matemáticas como disciplina científica? Encontramos respuestas en los trabajos de Borasi (1990), de los que entresacamos algunas de las opiniones que tienen los alumnos sobre las matemáticas:

- El conocimiento matemático ha existido siempre y es un producto terminado.
- En matemáticas no hay más alternativas que la certeza o la falsedad.
- Tanto en los hechos como en los procedimientos no hay lugar para los juicios personales.

- La actividad matemática, tanto de los profesionales como de los estudiantes, consiste en dar la respuesta correcta a problemas.
- Los problemas están siempre bien definidos y tienen una solución exacta y predeterminada.

Desde estas creencias resulta coherente que los estudiantes consideren que las asignaturas de matemáticas estén separadas en dos partes bien diferenciadas:

- Las matemáticas teóricas, las matemáticas de las definiciones, pruebas y demostraciones, que los alumnos perciben como actos rituales del profesorado de la materia, que valoran de poca utilidad para su trabajo en la asignatura y que escuchan sin participar.
- Las matemáticas prácticas, las matemáticas vistas como actividades de aplicación de los algoritmos adecuados a los problemas propuestos, las matemáticas en las que participa el alumno.

Esta doble perspectiva de las matemáticas delimita las condiciones del aprendizaje: los alumnos priorizan la memorización frente a la comprensión de los conceptos y métodos; a cambio, exigen de sus profesores que les hagan propuestas de trabajo claras y bien definidas –los buenos profesores son aquellos que nunca les provocan situaciones confusas.

Así queda perfilado un sistema escolar en el que el método de transmisión del conocimiento matemático forja en los alumnos unas creencias bien definidas. A su vez, estas creencias provocan en los alumnos unas actitudes concretas para el aprendizaje y definen los roles que corresponden tanto a los estudiantes como a sus profesores. De este modo, el proceso de enseñanza-aprendizaje queda plenamente orquestado para que el alumno viva nuevas experiencias que refuercen sus creencias acerca de la ciencia matemática y de su estudio.

Para reforzar con un ejemplo toda la argumentación anterior, y en el primer apartado de este trabajo, se revisa el tratamiento que dan los libros de texto al tópico matemático de las progresiones aritméticas. También se presenta un resultado matemático no habitual en los currícula escolares, el teorema que denominamos niriag, con la intención de que el lector pueda vivenciar experiencias similares a las que tan acostumbrados están nuestros estudiantes. Con estos materiales dispondremos de más información acerca del método habitual de transmisión de los conocimientos matemáticos, las que denominamos matemáticas *dichas*, así como de la influencia que ejerce el mismo sobre las concepciones que tienen los alumnos de las matemáticas.

Y una vez descrita la situación existente, ¿qué se puede hacer? Nuestra propuesta es la de variar las experiencias matemáticas de los alumnos, puesto que si no se modifican éstas tampoco variarán sus creencias sobre las matemáticas.

...los alumnos priorizan la memorización frente a la comprensión de los conceptos y métodos; a cambio, exigen de sus profesores que les hagan propuestas de trabajo claras y bien definidas...

Ahora bien, del estudio de Camacho (1995) se deduce que no es suficiente aumentar las exigencias sobre las que suelen llamarse matemáticas teóricas. En el mencionado estudio sobre las concepciones y actitudes hacia la matemática, se pone de manifiesto que las respuestas de los estudiantes de 5.° curso de la licenciatura de matemáticas y de los estudiantes del CAP –en su mayor parte licenciados en matemáticas– no son distintas de las que aparecen en el estudio de Borasi, anteriormente citado. Y eso que los estudiantes y licenciados en matemáticas tienen un mayor bagaje experiencial en formular y demostrar teoremas matemáticos, puesto que, en general, la evaluación de la matemática teórica tiene un importante peso en la calificación de las asignaturas universitarias.

Si, como como acabamos de indicar, el incremento de las matemáticas dichas no incide en la modificación de las concepciones de los estudiantes, habrá que optar por las matemáticas *hechas*, por las matemáticas que, como indica Fischbein (1990), construyan los alumnos. Entendiendo que construir las matemáticas significa sustituir la comunicación de conceptos y habilidades descontextualizadas y abstractas (matemáticas *dichas*) por la presentación de medios adecuados para desarrollar en los estudiantes los hábitos de pensamiento y los puntos de vista de los profesionales en este campo.

Esta nueva perspectiva exige la consideración de la matemática como creación de la mente humana, la matemática como resultado del trabajo real de unos profesionales que disponen de unas herramientas, un modo de pensar, un método artesanal de trabajo y una manera de presentar los resultados que son peculiares y característicos de la producción matemática. Y, claro está, la manera más adecuada de conocer una profesión es ejercerla.

Dedicando tiempo y esfuerzo se pueden hacer trabajos sencillos de cualquier profesión; aunque alcanzar la consideración de maestro artesano, de profesional prestigioso, exige, además, unas actitudes y capacidades más específicas. En consecuencia, con el debido tiempo y con los esfuerzos necesarios los estudiantes también pueden hacer trabajos como matemáticos, siempre y cuando se modifiquen los papeles y las relaciones del sistema escolar: el alumno ejerce el trabajo del aprendiz de una profesión (Silver, 1990; Lave y otros, 1988), el trabajo de la persona que, bajo la tutela del maestro, va paulatinamente adquiriendo los conocimientos del profesional. El profesor ocupa, entonces, la posición del maestro artesano, la del experto profesional, que tiene a su cargo a un colectivo de aprendices a los que va educando en la profesión; y el conocimiento matemático es el resultado de los trabajos que realizan los alumnos acompañados de su profesor.

En la segunda parte de este trabajo hay un ejemplo de matemáticas *hechas*, de cómo los alumnos pueden ir encadenando actividades matemáticas que les lleven desde el enunciado de un problema hasta la completa resolución del mismo. En la descripción de este trabajo se incluyen algunas consideraciones acerca del paso desde los resultados parciales a la formulación de hipótesis. Después, la confirmación de la hipótesis se presenta como una prolongación de los trabajos previos, como una reformulación de resultados ya obtenidos, como consecuencia de aplicar el pensamiento deductivo a situaciones ya conocidas; en suma, la demostración es un producto tangible para el alumno, no es un producto que se ha elaborado al margen de su propia experiencia.

1. El dicho

Sin entrar en la casuística particular, observemos una forma general de presentación de situación real de enseñanza tal y como se formula en distintos libros de texto. Y como núcleo de análisis elegimos el tema de progresiones aritméticas que es un tópico que se muestra por primera vez al alumnado.

Cuando no haya más preguntas de sus interlocutores la demostración se dará por explicada y pasará, se supone, a engrosar el conjunto de conocimientos de los estudiantes.

En los manuales consultados aparecen diferenciadas dos partes: tareas que son propias del profesor y tareas que corresponden al alumno.

Tareas del profesor

Es responsabilidad del profesor la presentación de los conocimientos. Y entre ellos, llama la atención la uniformidad con la que los distintos libros de texto presentan las demostraciones. Así, por ejemplo, el lector puede comprobar que no se encuentran variantes significativas en los distintos manuales escolares en la forma de presentar la demostración de, por ejemplo, la suma de los términos de una progresión aritmética limitada. Más o menos, se dice:

Sea la progresión $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

La suma de los términos de la progresión, S, será:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

o también:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando en columna:

$$2S = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + ... + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$$

Puesto que las sumas de cada paréntesis son iguales

$$S = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

El profesor, claro está, intercalará cuantos comentarios estime oportunos para que los alumnos puedan seguir los pasos de la demostración. Cuando no haya más preguntas de sus interlocutores la demostración se dará por explicada y pasará, se supone, a engrosar el conjunto de conocimientos de los estudiantes. Después del discurso del profesor al alumno queda convencido de la que la demostración es correcta. Además, también percibe el ingenio de quien haya utilizado tan sutiles argumentos y que, a buen seguro, a él no se le habrían ocurrido. Ahora ya sabe que su trabajo será recordar, de una parte, los pasos de la demostración (para el momento en que puedan evaluar su conocimiento) y, de otra parte, el resultado obtenido (para aplicarlo en los problemas que le serán propuestos).

Se puede suponer que los estudiantes han llegado a captar o comprobar cada paso de la demostración, pero también hay que suponer que no comprenden la razón de que así se haga, ni cuáles son las ideas básicas que hacen surgir esa idea, ni tampoco cuál es el método que se ha seguido hasta llegar a la demostración.

¿Y cuál ha sido la experiencia del alumno? Pues la de encontrar argumentos que fortalecen creencias sobre las matemáticas como las anteriormente mencionadas: el conocimiento matemático no se transmite más que como un producto terminado y que está revestido, eso sí, de argumentos que garantizan la validez del mismo. Además, tiene una nueva experiencia que le reafirma en su papel de espectador pasivo del quehacer matemático: no puede aportar opiniones personales ante resultados tan bien organizados que, a buen seguro, son patrimonio exclusivo del ingenio de quienes hacen las matemáticas.

Tareas de los alumnos

Los trabajos que han de realizar los alumnos se pueden clasificar en:

a) Ejercicios de aplicación directa de conceptos y procedimientos:

- Escribe los términos 3, 10, 15 y 20 de la sucesión

$$a_n = n/(n + 1)$$

- Dados $a_1 = 4$; $d = 2$; $n = 8$. Hallar a_n y S.

b) Problemas en los que un proceso de deliberación permite superar los obstáculos que ocultan el objetivo a alcanzar:

- Hallar el término general de la sucesión: 1/3, 4/11, 7/18, 10/25,...
- Calcula los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor mide 60°.
- ¿Cuántas campanadas dará un reloj durante un día entero si sólo toca las horas?

A la vista de esta práctica educativa, queda claro que las tareas de los alumnos, como ellos habían denunciado, son prioritariamente de aplicación, directa o indirecta, de algoritmos. Son muy escasas las tareas propuestas que demanden de los estudiantes un razonamiento inductivo (que los resultados de observaciones de casos particulares produzca la formulación de conjeturas), lo que reafirma la creencia de los alumnos acerca de la presentación de problemas bien definidos.

Y si decimos que la formulación de hipótesis es escasa, la confirmación de hipótesis (construyendo una demostración) o refutación de hipótesis (buscando un contraejemplo o demostrando su inviabilidad) no existen en los libros de texto consultados, no son tareas contempladas como propias de los alumnos. En suma, no se contemplan actividades en las que los estudiantes utilicen razonamiento de tipo deductivo.

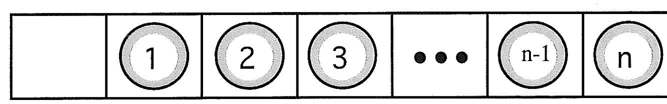
Una vez explicitado el trabajo que corresponde al alumno en este tema concreto de progresiones aritméticas, hay que admitir que su experiencia matemática es limitada: al alumno se le han *dicho* unos resultados matemáticos, pero no le han enseñado cómo conseguirlos. Tampoco la realización de ejercicios y problemas, como los que se le proponen, va a serle de utilidad en la comprensión de los resultados que le han explicado. Y, como al alumno se le cierra la posibilidad de conocer cómo actúan los que construyen el conocimiento matemático, resulta comprensible que vean a las matemáticas del modo que se mencionó anteriormente.

Son muy escasas las tareas propuestas que demanden de los estudiantes un razonamiento inductivo

A modo de experiencia personal

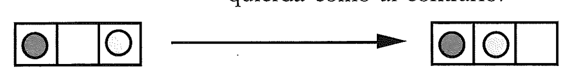
Personalmente no tengo recuerdos precisos de mis experiencias como alumno. Es posible que al lector le ocurra otro tanto. Aun cuando somos conscientes de las limitaciones que ello comporta, pensamos que buena parte del discurso anterior se hará más comprensible si el amable lector simula que actúa como alumno y que en el aula se vierte un discurso similar al que exponemos a continuación:

Teorema niriag. Se dispone de un tablero como el de la figura, en el que hay *n* (*n* impar) fichas numeradas y colocadas en la disposición que se indica:



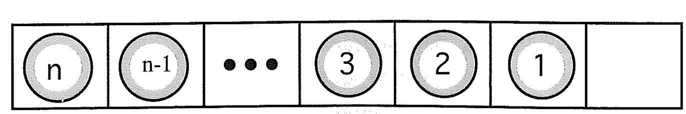
Si se cumplen las condiciones siguientes:

1. En cada casilla no puede haber más de una ficha.
2. Las fichas cambian de posición, hacen un movimiento, de una de las dos siguientes maneras:
   i. Desplazar una ficha a una casilla vacía, tanto de derecha a izquierda como al contrario:



   ii. Una ficha puede saltar por encima de otra ficha, siempre y cuando exista una casilla vacía

Entonces, el menor número de movimientos que permite pasar de la posición inicial a la posición final que indica el gráfico es $M_n = n(n+1)/2$



Demostración:

Obsérvese que para conseguir llegar a la posición final empleando el menor número de movimientos lo que hay que hacer es que las fichas salten todas las veces que sea posible, puesto que en cada salto se avanzan dos casillas, mientras que con un desplazamiento se avanza una sola casilla.

a) Contabilicemos, por tanto, el número de saltos. Comparando las posiciones inicial y final observamos que las fichas necesariamente han de saltar unas sobre otras. Para facilitar el trabajo, y puesto que no influye en el resultado, vamos a suponer que las fichas de número mayor saltan sobre las fichas de menor numeración, por ejemplo, la ficha de número 4 saltará por encima de las fichas de números 1, 2 y 3, y no efectuará ningún otro salto. De este modo, se tiene:

- La ficha de número *n* salta por encima de las n–1 de menor numeración.
- La ficha n–1 salta por encima de las n–2 fichas de numeración menor;.
- ....
- La ficha de número 2 salta por encima de la ficha número 1.
- La ficha número 1 no efectúa ningún salto.

Por tanto, el número total de saltos será:

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 =$$

$$= \frac{n-1+1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}(n-1) \quad (1)$$

b) Ahora bien, ¿es posible conseguir la posición final haciendo exclusivamente saltos?

Para responder a esta cuestión observemos en la tabla las posiciones inicial y final (las casillas están numeradas y V indica que la casilla está vacía):

N.° casilla	Posición inicial	Posición final
0	V	n
1	1	n–1
2	2	n–2
3	3	n–3
...	...	...
n–2	n–2	2
n–1	n–1	1
n	n	V

Se observa que la ficha que inicialmente ocupa la casilla de número k termina ocupando la posición n-k. Y teniendo en cuenta que *n* es *impar*, n-k será de paridad diferente a la de *k* (a la casilla de número 0 se le da la consideración de casilla par).

Ahora bien, cada vez que una ficha realiza un salto se desplaza dos casillas. Por tanto, después de un salto la ficha ocupa una casilla de la misma paridad que ocupaba. Pero si las fichas han de ir de una casilla de una determinada paridad a una casilla de paridad opuesta necesariamente han de hacer todos los saltos que puedan y, además, un *número impar* de desplazamientos, puesto que al hacer un desplazamiento cambia la paridad de la nueva casilla que ocupa la ficha desplazada.

Recordemos que el enunciado exige que el número de movimientos sea el menor posible. El número de saltos no puede ser menor que el obtenido en a), pues de lo contrario sería imposible alcanzar la posición final. Por tanto, el mínimo que buscamos se obtendrá si limitamos a 1 el desplazamiento que deba hacer cada una de las fichas. En consecuencia, el número total de desplazamientos será: *n* (2)

De los resultados indicados en (1) y (2) se obtiene el número total de movimientos:

$$M_n = \frac{n}{2}(n-1) + n = n\frac{n+1}{2}$$

Y éste es el número mínimo de movimientos necesarios para intercambiar la posición de las fichas puesto que ahora ya se han efectuado todos los saltos y desplazamientos necesarios. Si se efectúa cualquier nuevo movimiento se produciría alguna permutación en el orden de las fichas y ello obligaría a hacer nuevos movimientos para restituir la situación final. *c.q.d.*

Nota.- Por si resulta más comprensible: el argumento empleado para obtener el número de desplazamientos (apartado b), se puede sustituir por el siguiente:

Si hay *n* fichas (*n* impar) se pueden encadenar un máximo de (n–1)/2 saltos consecutivos; por ejemplo la ficha de la casilla número 2 pasa a la casilla de número 0, la ficha de la casilla número 4 pasa a la casilla de número 2,... y la ficha de la casilla número n–1 pasa a la casilla de número n–3. Después, es imprescindible hacer un desplazamiento; de lo contrario, el único salto posible nos llevaría a posiciones anteriores: la ficha de la casilla número n–3 volvería a la casilla número n–1. Por tanto, los desplazamientos que hay que efectuar en total serán:

$$\frac{n}{2}(n-1) : \frac{n-1}{2} = n$$

Y ahora, amable lector, de nuevo reclamo su atención como un alumno que, a buen seguro, ha seguido los razonamientos que se han expuesto y que incluso puede hacer una valoración de los mismos en cuanto a la validez y sutileza de la lógica empleada en la demostración; aunque también es posible que no haya alcanzado a comprender el origen de los métodos y razonamientos que se han utilizado. De hecho, pueden aparecerle algunas dudas razonables sobre los «entresijos» que permanecen ocultos y en los que se sustenta la demostración:

- ¿cómo se tienen que mover las fichas para alcanzar el resultado final?;
- ¿por qué n es impar?;
- ¿vale el mismo resultado si n es par?;
- ¿hay otro teorema para el caso de que n sea par?;
- ¿no hay resultados para el caso de ser n par?
- ....

La práctica habitual del sistema escolar deja al alumno la posibilidad de encontrar por sí mismo la respuesta a las preguntas anteriores; o la de esperar que entre los acontecimientos venideros aparezcan un nuevo teorema que contemple alguna de esas situaciones. Entre tanto, al alumno se le propone que realice las tareas apropiadas, después de mostrar un resultado matemático, y que serán similares a las siguientes:

a) Ejercicios:
   - Calcular M_n siendo n = 12; 27; 32.
   - Sabiendo que M_n = 171, ¿cuánto vale n?

b) Problemas:
   - Encontrar el número de fichas que hay sobre el tablero, sabiendo que si se duplica el número de las mismas, hay que hacer 40 movimientos más para invertir el orden de colocación de las fichas.
   - ¿En qué situación ocurre que triplicar el número de fichas produce que el número de movimientos se multiplique por 8?

Y aquí finalizaría el tratamiento habitual del *teorema niriag* tal y como hemos caracterizado la práctica educativa a través de los libros de texto. Ahora se pueden hacer valoraciones sobre la utilidad o sobre la estética de los resultados, se pueden analizar o memorizar aspectos totales o parciales de la demostración, se pueden hacer los ejercicios y los problemas,... Y, también, pueden hacerse otras preguntas de carácter más o menos material: ¿qué he aprendido?, ¿para qué me sirve conocer cómo se demuestra este «importante teorema»?, ¿qué me pueden preguntar para la evaluación?, ¿esta demostración me ayuda a modificar la imagen que tengo de las matemáticas?,...

2. El hecho

El teorema que hemos llamado niriag es un ejemplo de cómo la presentación de los conocimientos matemáticos incide en las concepciones que se formen los alumnos acerca de las matemáticas como disciplina científica. La presentación de la matemática en torno al esquema puramente deductivo de axioma-teorema-demostración-corolario, que ya fue criticada por matemáticos tan prestigiosos como Polya (1966), Lakatos (1978) o Kline (1976) es la que vivencian los estudiantes y es, en consecuencia, la que alimenta la visión de la matemática que tiene los escolares.

Es evidente que el profesor, al igual que el alumno, ha tenido que acceder a resultados matemáticos revestidos de un carácter de infalibilidad y que se muestran de manera arreglada, bien pulida y reorganizada de acuerdo con los cánones del método lógico-deductivo

Es evidente que el profesor, al igual que el alumno, ha tenido que acceder a resultados matemáticos revestidos de un carácter de infalibilidad y que se muestran de manera arreglada, bien pulida y reorganizada de acuerdo con los cánones del método lógico-deductivo (Davis y Hersh, 1988). También ha tenido experiencias frecuentes sobre aplicación de algoritmos. Y, sin embargo, la visión que tienen los alumnos de las matemáticas no suele coincidir con la que tienen sus profesores.

Ocurre que, en general, el profesorado ha tenido experiencias matemáticas más completas en su período de formación, en el ejercicio de sus tareas profesionales o en su mundo privado; el profesor ha *hecho* matemáticas, ha trabajado de acuerdo con el método matemático, ha tenido, en suma, que usar –de manera separada o en combinación– tanto del pensamiento inductivo como del pensamiento deductivo (NCTM, 1989). Y como las experiencias de los profesores no son iguales que las de los alumnos, también difieren sus concepciones sobre la matemática; del mismo modo que no son coincidentes las apreciaciones que tienen de la arquitectura aquellos que se limitan a ver las obras terminadas y quienes trabajan en su construcción.

Vamos a volver a tomar el caso del teorema niriag para ejemplificar una actuación de un profesor que quiere que sus alumnos hagan matemáticas (a la que el lector puede sumarse), y en la que se van intercalando aquellos comentarios que nos parecen oportunos.

Presentación del enunciado

El profesor no formula ningún resultado matemático, su trabajo se limita a hacer una propuesta: presenta el problema con *tres* fichas sobre el tablero, enuncia las reglas de actuación e indica los objetivos perseguidos.

El profesor abandona la pizarra y pasa a tutelar el trabajo de sus alumnos, orienta, responde a preguntas sobre aspectos parciales del trabajo, hace sugerencias,... pero, en ningún caso, da la respuesta a la tarea. Será la dinámica de la clase la que permita, con mayor o menor presteza, establecer el resultado: son 6 los movimientos mínimos.

Una nueva propuesta del profesor permite, porque el alumno ya está familiarizado con el trabajo, formular un enunciado sencillo para una nueva tarea: *averiguar los movimientos mínimos en el caso de 5 fichas.*

Nuevas formulaciones parciales con 7 fichas, 9 fichas,... permiten llegar a establecer el enunciado del problema inicial en términos más simples: *averiguar los movimientos mínimos en el caso de* n *fichas, siendo* n *impar.*

Cuando el profesor enuncia el problema en su totalidad el alumno dispone de información amplia sobre lo que está ocurriendo, el problema se le hace más familiar y, en consecuencia, tiene una idea muy precisa de lo que se quiere obtener.

Formulación de hipótesis

La nueva tarea propuesta exige analizar más o menos casos particulares con la intención de obtener los datos suficientes que permitan formular una hipótesis. La recogida de información puede sintetizarse en una tabla similar a la siguiente:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6
5	15
7	28
9	45
11	66
...	...

El profesor abandona la pizarra y pasa a tutelar el trabajo de sus alumnos, orienta, responde a preguntas sobre aspectos parciales del trabajo, hace sugerencias,... pero, en ningún caso, da la respuesta a la tarea.

A partir de los datos de la tabla hay que formular relaciones entre las dos columnas numéricas. Cada persona escribirá cuantas líneas estime oportunas como necesarias para lograr el objetivo propuesto. Es complicado, por tanto, que sea el profesor el que decida el número de datos que son adecuados para todos los alumnos de un aula.

Esta nueva tarea exige al alumno la búsqueda de relaciones entre dos secuencias numéricas. Debe emplear el pensamiento de tipo inductivo para «desenmascarar» esas relaciones numéricas que están ocultas; debe pasar del número entendido como una totalidad al número entendido como composición de otros números. Y teniendo en cuenta que las relaciones numéricas no son únicas, hay que esperar que las respuestas de los alumnos sean diferentes, por cuanto proceden de orígenes diversos. Con fines ejemplificadores he aquí alguna de las posibilidades:

HIPÓTESIS I. Relaciones multiplicativas

El número de movimientos aparece como un producto: el número de fichas iniciales multiplicado por un número, variable, que es un poco mayor que la mitad del número de fichas.

N.° fichas	N.° movimientos
3	6 = 3x2
5	15 = 5x3
7	28 = 7x4
9	45 = 9x5
11	66 = 11x6
...	...

De este modo se obtiene que el número de movimientos es $M_n = n(n+1)/2$

HIPÓTESIS II. Relaciones aditivas concatenadas

También pueden verse relaciones con resultados conocidos:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6
5	15 = 6+9
7	28 = 15+13
9	45 = 28+17
11	66 = 45+21
...	...

Aquí aparecen las igualdades:

$M_3 = 6$

$M_4 = 6 + 9 = M_3 + 9$

$M_5 = 15+13 = M_4 + 13 = M_3 + 9 + 13$

$M_6 = 28 + 17 = M_5 + 17 = M_3 + 9 + 13 + 17$

...

$M_N = M_3 + 9 + 13 + 17 + \ldots + (2n-1)$

Y teniendo en cuenta que se trata de una progresión geométrica de razón 4, se llega a

$$M_n = M_3 + \frac{2n-1+9}{2}\left(\frac{2n-1-9}{4} + 1\right) =$$

$$= 6 + (n-4)\left(\frac{n-3}{2}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

HIPOTESIS III. Relaciones aditivas independientes

El número de movimientos aparece como resultado de la suma de todos los números menores o iguales que el de fichas:

N.° fichas	N.° movimientos
3	6 = 1+2+3
5	15 = 1+2+3+4+
7	28 = 1+2+3+4+5+6+
9	45 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9
11	66 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11
...	...

En estas condiciones, el resultado se configura como la suma de los números naturales desde 1 hasta el número de fichas, la suma de una progresión aritmética. De este modo el número de movimientos es:

$$M_n = \frac{n-1+1}{2}(n-1) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Se observa que el punto de llegada, como era previsible, es igual en los tres casos, pero lo que queremos destacar es que el origen es muy distinto en cada caso. No es nuestro propósito estudiar toda la casuística que puede darse, lo que pretendemos es mostrar que una actuación del profesor, que se centre en la presentación de resultados únicos, está cercenando muchas iniciativas particulares de gran valor formativo para los alumnos.

Aún más, es posible que los alumnos no presenten los resultados en la forma simplificada en que lo hemos hecho nosotros, sino que cada uno adoptará el medio de comunicación que considere más oportuno. Por tanto, la tarea del profesor será la de interpretar los pensamientos del alumnado a través de modos de expresión particulares (que, a buen seguro, no coinciden con los razonamientos y expresiones del profesor), y consensuar la uniformidad en la presentación de los resultados.

Confirmar las hipótesis

Con el apartado anterior, formulación de hipótesis, el estudiante dará por concluido el trabajo, puesto que ya ha utilizado símbolos matemáticos para expresar sus resultados. Si, como postulamos, hay que aproximar al alumno al trabajo del matemático, hay que hacer notar que el profesional no termina su trabajo al formular la hipótesis, él es consciente de que la verdad matemática se ha de evidenciar a través de una demostración. La presentación de conjeturas sencillas de comprender, como las de Fermat o Goldbach (Corbalán y Gairín, 1986), pondrán de manifiesto ante los alumnos la necesidad de argumentar que la hipótesis es cierta en todos los casos. También resulta recomendable utilizar otras situaciones, como el juego que Guzmán (1984) llama la «Rana saltarina», en el que la hipótesis, formulada a partir del estudio de unos pocos casos particulares, se desvanece al estudiar un nuevo caso particular.

...lo que pretendemos es mostrar que una actuación del profesor, que se centre en la presentación de resultados únicos, está cercenando muchas iniciativas particulares de gran valor formativo para los alumnos.

Estos ejemplos pueden servir para situar el papel de la demostración matemática como herramienta habitual para determinar la validez de una hipótesis. Y esta es la invitación a los alumnos, dar el salto cualitativo en busca de argumentos lógicos que den respuestas a una situación cualquiera, que se tenga la certeza de conocer el número de movimientos necesarios en el caso de un tablero sobre el que se sitúan cualquier número de fichas.

El paso de la conjetura a la demostración no es automático, pero todo el trabajo desarrollado en la formulación de las conjeturas permite o facilita la demostración. De hecho, ya se conoce el aspecto más importante: el resultado que hay que probar. Ahora bien, ese resultado, obtenido mediante el estudio de casos particulares, se ha hecho analizando exclusivamente relaciones numéricas, se ha utilizado el pensamiento inductivo. La demostración utiliza el pensamiento deductivo para esgrimir argumentos que justifiquen el producto n(n+1)/2.

A primera vista parece que el valor de *n* se puede corresponder con el número de fichas; ahora quedan por determinar dos hechos: de una parte, el origen del otro factor (n+1)/2 y, de otra parte, el producto de esos factores.

Abordar esas tareas exige de razonamientos que ya no están basados en relaciones numéricas. Hay que profundizar en las características de los resultados obtenidos, hay que analizar el origen de esos números y asociarlos no al número de movimientos, sino a las características de esos movimientos. Habrá que volver a tomar el trabajo ya realizado y revisarlo con nuevos ojos. Hay una necesidad de representar lo que ocurre en casos particulares para abandonar el recuento y entrar en el análisis cualitativo. La representación que usamos (véase cuadtro adjunto) para el caso de 7 fichas (V indica la casilla vacía), es un ejemplo de nuestro nuevo ámbito de trabajo y en el que la tarea no es la de contar.

Y, de acuerdo con las hipótesis formuladas, se podrán encontrar esas argumentaciones que andamos buscando. Veámoslo en cada una de las hipótesis que se han establecido anteriormente:

a) HIPÓTESIS I

De acuerdo con su formulación, y para el caso de 7 fichas, el número de movimientos que hay que realizar es 7 x 4 = 28. Por tanto, hay que centrar la atención en 7, 4 y el producto.

— El producto 7 x 4 lleva a preguntarse ¿qué ocurre cada 7 movimientos y que se repita 4 veces? Pueden darse respuestas como que cada 7 movimientos hay un mismo número en la casilla de la izquierda –la ficha 2 los 7 primeros movimientos; la ficha 4 los 7 siguientes;...

— También, a partir del producto 4 x 7, hay preguntas del tipo ¿qué ocurre cada 4 movimientos y que se repita 7 veces? Responder que, por ejemplo, los 4 movimientos se componen de 3 saltos y un desplazamiento invita a analizar las *características de los movimientos.*

b) HIPÓTESIS II

En este caso, hay que entender que los 28 movimientos resultan de sumar 15+13, es decir, los 15 movimientos que deben efectuarse para invertir el orden

Abordar esas tareas exige de razonamientos que ya no están basados en relaciones numéricas.

Mov.	Resultado							
1	2	1	V	3	4	5	6	7
2	2	1	4	3	V	5	6	7
3	2	1	4	3	6	5	V	7
4	2	1	4	3	6	5	7	V
5	2	1	4	3	6	V	7	5
6	2	1	4	V	6	3	7	5
7	2	V	4	1	6	3	7	5
8	V	2	4	1	6	3	7	5
9	4	2	V	1	6	3	7	5
10	4	2	6	1	V	3	7	5
11	4	2	6	1	7	3	V	5
12	4	2	6	1	7	3	5	V
13	4	2	6	1	7	V	5	3
14	4	2	6	V	7	1	5	3
15	4	V	6	2	7	1	5	3
16	V	4	6	2	7	1	5	3
17	6	4	V	2	7	1	5	3
18	6	4	7	2	V	1	5	3
19	6	4	7	2	5	1	V	3
20	6	4	7	2	5	1	3	V
21	6	4	7	2	5	V	3	1
22	6	4	7	V	5	2	3	1
23	6	V	7	4	5	2	3	1
24	V	6	7	4	5	2	3	1
25	7	6	V	4	5	2	3	1
26	7	6	5	4	V	2	3	1
27	7	6	5	4	3	2	V	1
28	7	6	5	4	3	2	1	V

de 5 fichas y otros 13 movimientos que serán necesarios para colocar en la posición final las 2 fichas restantes.

Pero no son tan nítidos los razonamientos lógicos que justifiquen esos 13 movimientos que permiten cambiar la posición de 2 fichas. Así que los alumnos deben volver a la situación real de cambiar 5 fichas y, después, hacer lo propio con las restantes: si se aborda la tarea de de invertir la posición de las 7 fichas que ocupan inicialmente la disposición V 1 2 3 4 5 6 7 sabiendo que con 15 movimientos se llega a la posición 5 4 3 2 1 V 6 7, la experiencia evidenciará la imposibilidad de alcanzar la posición final con 13 movimientos.

Se estudian otras alternativas en las que las 5 fichas no se invierten al principio. La reiterada imposibilidad de alcanzar el objetivo final inducen a pensar sobre las causas del fracaso. El disponer del estudio de los casos particulares (como el de 5 y 7 fichas) permiten observar las diferencias entre lo que ocurre en la realidad y lo que pretendemos alcanzar. Como por ejemplo, observar el *recorrido que hacen las fichas* desde la posición que ocupan hasta la posición final.

c) HIPOTESIS III

Para el caso de 7 fichas el número de movimientos se obtiene como 28 = 1+2+3+4+5+6+7. Este resultado, que se le ocurrirá más fácilmente a quien haya trabajado con progresiones aritméticas, nos llevaría a la demostración que se ha expuesto en el teorema niriag. Pero esta demostración, que concuerda con las exigencias de la presentación de resultados matemáticos, sólo es posible alcanzarla si se hace una abstracción de la realidad observada: hay que suponer que, por ejemplo, la ficha número 7 salta por encima de la ficha número 5, cuando en el cuadro anterior vemos que no se produce esa circunstancia sino la contraria.

Dos posibles argumentaciones

Vemos, por tanto, que la demostración que en principio parecía inaccesible para el alumno se le muestra más cercana si analiza los resultados de los trabajos previos. Además, serán los trabajos previos y las observaciones de cada alumno la que le lleven a un proceso de demostración diferente del de otros compañeros. Veamos dos posibles argumentaciones que parten de hipótesis distintas (I y II) y que, en consecuencia, usan de razonamientos diferenciados:

Argumentación 1: características de los movimientos

Si el alumno ha decidido que su argumentación hay que hacerla a partir de las peculiaridades que se observan en el tipo de movimientos, tiene que buscar comportamientos de carácter general, como los que se mencionan seguidamente (se incluye una tabla con las casillas numeradas que facilitará la lectura).

...la demostración que en principio parecía inaccesible para el alumno se le muestra más cercana si analiza los resultados de los trabajos previos...

N.° casilla	0	1	2	3	4	5	...	n–3	n–2	n–1	n
Fichas	V	1	2	3	4	5	...	n–3	n–2	n–1	n

1. Entre los movimientos hay saltos y hay desplazamientos.
2. Con los saltos las fichas avanzan dos posiciones, dos casillas, mientras que con los desplazamientos se avanza una sola casilla.
3. Después de una sucesión de saltos hay que hacer necesariamente un desplazamiento; en caso contrario, se volvería a posiciones anteriores y no se cumpliría la condición de emplear el menor número de movimientos posibles.
4. En el primer movimiento hay que hacer un salto: la ficha de la casilla número 2 termina en la casilla 0.
5. Se puede conseguir que, de forma consecutiva, las fichas que ocupan casilla pares (fichas con número par) avancen dos casillas hacia la izquierda. Si hay un número n de fichas, se pueden encadenar un total de $(n-1)/2$ saltos, siempre hacia la izquierda.
6. Al terminar todos los saltos hacia la izquierda, queda la casilla vacía en la posición $n-1$, y en la posición n está la ficha de número n. Ahora no es posible hacer un salto, pues se volvería a una posición anterior (la ficha de número $n-1$, que está en la casilla $n-3$, pasaría de nuevo a la casilla $n-1$). En consecuencia, se precisa hacer un desplazamiento, y el que resulta más beneficioso es llevar la ficha de número n a la casilla $n-1$, con lo que la casilla $n-1$ queda vacía.
7. Después del desplazamiento es posible que las fichas salten hacia la derecha, comenzando por la ficha que ocupa la posición $n-2$ que saltará a la casilla n. De este modo se encadenan una serie de $(n-1)/2$ saltos que hace que las fichas que ocupan las casillas impares avancen dos casillas hacia la derecha del tablero, y que la casilla vacía esté situada en la casilla 1.

8. Seguidamente hay que realizar un desplazamiento, siendo el más conveniente el de desplazar la ficha que ocupa la posición 0 (la ficha de número 2), a la casilla 1.
9. A modo de resumen: el tipo de movimientos más aconsejable es el de enlazar (n–1)/2 saltos consecutivos y, seguidamente, efectuar un desplazamiento. Podemos denominar «macromovimiento» a este conjunto de movimientos enlazados y que es posible realizarlo tanto si las fichas saltan hacia la izquierda como si lo hacen hacia la derecha y consta de un total de (n–1)/2 + 1 = (n+1)/2 movimientos. Además, después de un «macromovimiento» como los que se indican, la casilla vacía pasa a ocupar una de las posiciones extremas del tablero: la casilla *n* si el «macromovimiento» ha sido hacia la izquierda del tablero, y la casilla 0 en caso de hacerlo hacia la derecha.
10. Para alcanzar el objetivo final la ficha *n*, que ocupa la casilla *n*, debe terminar en la casilla 0 (o si se prefiere, que la ficha de número 1 debe terminar en la casilla n–1). Para lograr este propósito, observemos que el primer «macromovimiento» hacia la izquierda hace que la ficha *n* pase a ocupar la casilla n–1. El siguiente macromovimiento, hacia la derecha, deja la ficha de número *n* en la casilla n–1, pues al ser ésta par las fichas no se mueven.

Las ideas básicas están ya sobre la mesa, ahora queda hacer una formulación más detallada del recuento de los movimientos. Y si se quiere «adornar» la presentación del resultado se puede hacer en términos similares a estos:

- «Macromovimiento» a la izquierda: conjunto de movimientos consistente en (n–1)/2 saltos hacia la izquierda seguidos del desplazamiento de la ficha de la casilla número *n* hacia la izquierda. En estas condiciones las fichas que ocupan casillas de números pares, P, pasan a ocupar casillas pares de número P–2. Además, la ficha de lugar *n* pasa a la posición n–1 y queda vacía la casilla *n*.
- «Macromovimiento» a la derecha: conjunto de movimientos consistente en (n–1)/2 saltos hacia la derecha, seguidos del desplazamiento de la ficha de la casilla 0 hacia la derecha. En estas condiciones las fichas que ocupan casillas de números impares I, pasan a ocupar casillas impares de número I+2. Además, la ficha de lugar 0 pasa a la posición 1 y queda vacía la casilla 0.

...ahora queda hacer una formulación más detallada del recuento de los movimientos.

Teniendo en cuenta que a cada «macromovimiento» a la izquierda le sigue un «macromovimiento» a la derecha, la ficha *n* pasa de la casilla *n* a la casilla 0 si se hacen, de manera consecutiva, las acciones siguientes:

- 1 «macromovimiento» a la izquierda (la ficha *n* pasa a la casilla n-1, que es par).
- 1 «macromovimiento» a la derecha (la ficha *n* no cambia de casilla).
- (n–1)/2 «macromovimientos» a la izquierda (número de saltos necesarios para ir de la casilla de número n–1 a la casilla de número 0).
- (n–1)/2 – 1 «macromovimientos» a la derecha (el número de «macromovimientos» de este tipo necesarios para realizar los «macromovimientos» a la izquierda del punto anterior).

Por tanto, el número total de «macromovimientos» que permiten que la ficha de número *n* pase de la casilla *n* a la casilla 0 son:

$$2 + \frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n$$

Y recordando que cada «macromovimiento» consta de (n+1)/2 movimientos, el número total de movimientos será:

$$M_n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Obsérvese que, contrariamente a lo que parecía al principio, el factor *n* que figura en la producto anterior no corresponde al número de fichas sino al *número de «macromovimientos»* que hemos utilizado para obtener el número total de movimientos.

Además, M_n será el número total de movimientos necesarios por cuanto la ficha de número *n* ya está en su posición final después de realizar el menor número de movimientos posible. Cualquier otra posibilidad de que la ficha *n* ocupe la casilla 0 sería con un número de movimientos que fuese múltiplo

$$2 \times n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

puesto que hacen falta n(n+1)/2 movimientos para llevar la ficha *n* de la casilla 0 a la casilla *n*, y otros tantos, para que la ficha *n* regrese a la posición 0.

Argumentación 2: análisis de los recorridos

El modo en que puede razonar el alumno que haya optado por hacer un seguimiento de las posiciones que ocupa cualquiera de las fichas desde el inicio y el final del problema, se basará en las observaciones realizadas en sus trabajos con casos particulares. Por ejemplo, puede servir como referencia lo que ocurre con las fichas números 3 y 6 en el caso siguiente:

Casilla	0	1	2	3	4	5	6	7
Inicial	V	1	2	**3**	4	5	***6***	7
Final	7	***6***	5	4	**3**	2	1	V

Si se considera la casilla 0 como casilla par, y utilizando los resultados de los casos particulares anteriormente estudiados, se llegan a conclusiones del tipo siguiente:

— La ficha de número J que, inicialmente, ocupa la casilla de número J pasa a ocupar la posición final en la casilla de número n–J. Esto indica que las fichas que inicialmente ocupan casillas de número par finalizan ocupando casillas de número impar, mientras que las que inicialmente están en casillas de número impar terminan en casillas de número par. Hay, por tanto, un cambio de paridad respecto a las casillas que ocupa una ficha al inicio y al término de los movimientos.

— Si las fichas han de cambiar de paridad no pueden alcanzar su posición final a base de saltos ya que avanzan dos casillas y, por lo tanto, mantienen la paridad. En consecuencia, deben efectuar un desplazamiento. Este desplazamiento se hace en la casilla 0 para las fichas que ocupan casillas pares (todas han de llegar a esa casilla saltando) y en la casilla *n* para las fichas de casillas impares.

El trabajo que ahora se requiere es el de hacer un seguimiento de los movimientos que efectúa una ficha genérica que, inicialmente, está situada en la casilla J. Puesto que dependiendo de la paridad de esa casilla los movimientos iniciales son hacia la derecha o hacia la izquierda, vamos a estudiar las dos situaciones por separado:

J par

Recorrido:

Casilla J $\longrightarrow$ Casilla 0 $\longrightarrow$ Casilla 1 $\longrightarrow$ Casilla (n–J).

- Casilla J a casilla 0: se necesitan J/2 movimientos de tipo salto.
- Casilla 0 a casilla 1: hace falta 1 movimiento tipo desplazamiento.
- Casilla 1 a casilla (n-J): se precisan (n–1–J)/2 movimientos de tipo salto.

El número de movimientos que son necesarios para que la ficha pase de la casilla J (J par) a la casilla n–J es:

$$\frac{J}{2} + 1 + \frac{n-1-J}{2} = \frac{n+1}{2}$$

J impar

Recorrido:

Casilla J $\longrightarrow$ Casilla n $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Casilla (n-1) $\longrightarrow$ Casilla (n-J)

- Casilla J a casilla *n*: se necesita (n–J)/2 movimientos de tipo salto.
- Casilla *n* a casilla n–1: hace falta 1 movimiento de tipo desplazamiento.
- Casilla n-1 a casilla n–J: son necesarios (J–1)/2 movimientos de tipo salto.

El número de movimientos que son necesarios para que la ficha pase de la casilla J (J impar) a la casilla n–J es:

$$\frac{n-J}{2} + 1 + \frac{J-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Vemos, por tanto, que con independencia de la paridad de la ficha J, hay un número de movimientos mínimos con los que se desplaza una de las fichas de la casilla inicial a la que ocupa finalmente. Teniendo en cuenta que hay *n* fichas que han de hacer el mismo número de movimientos para ir de la casilla inicial a la final, el número de movimientos que permite alcanzar el objetivo del juego es

$$M_n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Además, este es el menor número de movimientos necesarios puesto que los hemos contabilizado de manera que cada ficha realizase el desplazamiento de la casilla inicial a la casilla final sin reiterar ningún movimiento.

A diferencia de lo que ocurría en la argumentación 1, en este caso el factor *n* que aparece en la igualdad anterior sí que corresponde al *número de fichas que hay sobre el tablero*, mientras que el otro factor corresponde al número de movimientos que realiza cada ficha.

Cualquiera de estas dos argumentaciones son, a buen seguro, más cercanas al alumno que la *demostración* empleada

Cualquiera de estas dos argumentaciones son, a buen seguro, más cercanas al alumno que la demostración empleada... Sin embargo, tienen tanta validez como aquella, son verdaderas demostraciones en el sentido matemático.

en el teorema niriag. Sin embargo, tienen tanta validez como aquella, son verdaderas demostraciones en el sentido matemático. Pero son estas más próximas al alumno, son más «naturales», están basadas en las experiencias y observaciones del trabajo previamente realizado. Son, en suma, demostraciones que se pueden esperar de un alumno.

Esbozada la panorámica que se puede presentar a los alumnos y con independencia de los caminos que hayan seguido, lo que se pone de manifiesto es que los alumnos han *hecho* matemáticas, los alumnos han trabajado de manera similar a como lo hacen los matemáticos. Ahora tienen otros argumentos para entender que la matemática no es la ciencia perfecta y acabada que pertenece a unos pocos elegidos.

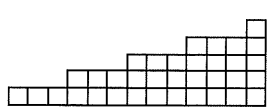
Además, los alumnos han visto la matemática como un mundo accesible en el que también pueden participar. De hecho, ya no tendrán que esperar acontecimientos para saciar sus inquietudes. Ahora ya disponen de herramientas y de métodos de trabajo propios de los profesionales de la creación matemática, ahora ya están en disposición de responder por sí mismos a la pregunta que formulábamos antes: ¿qué ocurre si n es par?

3. El trecho

Vemos, por tanto, que la demostración resulta accesible al alumno, la demostración no se muestra como el patrimonio de mentes privilegiadas, sino como el resultado de un proceso argumental en el que las manipulaciones iniciales sobre casos particulares sugieren pautas para la formulación de hipótesis. La lectura detenida de éstas, con el apoyo de conclusiones derivadas de los casos particulares, abre el camino hacia la demostración.

Es cierto que la instrucción se desarrolla en un contexto concreto en el que no se pueden olvidar los programas oficiales, los libros de texto, los exámenes de selectividad,... y también es cierto que la convicción del profesor sobre la enseñanza determina lo que hace cuando

...los alumnos han visto la matemática como un mundo accesible en él que también pueden participar.
[...]
Ahora ya disponen de herramientas y de métodos de trabajo propios de los profesionales de la creación matemática



enseña. En consecuencia, es decisión del profesor optar por las matemáticas *dichas*, la tradicional presentación de los conocimientos matemáticos de acuerdo con el método deductivo, o por las matemáticas *hechas*, la apuesta por la educación matemática que considera como aspectos fundamentales del aprendizaje la creatividad, la resolución de problemas, la formulación de hipótesis, la verificación de conjeturas, la realización de pruebas confirmatorias y la búsqueda de contraejemplos.

Una vez tomada esa decisión, el profesor deberá adecuar los trabajos de los alumnos de acuerdo con las capacidades y conocimientos que tengan, de acuerdo con su condición de aprendiz de matemático. Los diez cursos que, como mínimo, componen la formación matemática obligatoria de nuestros jóvenes estudiantes permiten programar un aprendizaje en el que tengan oportunidades de vivir experiencias en todas las facetas del quehacer matemático, y entre las que incluimos las de hacer demostraciones de resultados matemáticos. De este modo, los alumnos se forjarán unas concepciones sobre las matemáticas basadas en sus vivencias como profesionales de la creación científica.

No queremos terminar este trabajo sin antes señalar algunas de las variaciones que se producirán al pasar de un sistema escolar que apuesta por unas matemáticas *dichas* a un sistema escolar que apuesta por unas matemáticas *hechas*:

La presentación de los contenidos

El profesor no utilizará como fuente prioritaria de información los manuales escolares. Deberá buscar situaciones problemáticas desde las que el alumno alcance el resultado que se quiere mostrar. Por ejemplo, la suma de los términos de una progresión aritmética se pueden afrontar desde propuestas de trabajo del tipo siguiente:

- Se quieren construir escaleras de cualquier número de peldaños. Calcular el número de bloques cúbicos que se necesitan si las citadas escaleras tienen la forma que indica el gráfico adjunto.
- Sobre un plano hay n puntos sin que 3 de ellos estén alineados. Calcular los segmentos que se obtienen al unir cada dos de esos puntos.

Es de este modo que para el profesor la decisión no se limita a presentar tal o cual contenido, sino que, además, se amplia en el sentido de decidir cuál o cuáles de las formulaciones son las que va a proponer a los alumnos para presentar el contenido matemático que quiere tratar.

Las nuevas tareas

Al modificar la presentación de los conocimientos y llevar al alumno a aprender la forma de trabajo de los matemáticos se producirán momentos de balbuceo, de desorientación, de ansiedad... Por tanto, las tareas que proponga el profesor deberán ser ajustadas a las capacidades y conocimientos de los alumnos; además, y desde su papel de tutor del aprendizaje, debe animar a proseguir la tarea, debe formular preguntas que orienten en el trabajo, debe ayudar a salvar obstáculos o vías muertas...

La comunicación

En la forma habitual de transmisión de conocimientos matemáticos es el profesor el que introduce las palabras y expresiones propias del lenguaje técnico, después son los alumnos los que deben esforzarse para interpretarlas.

Pero si son los alumnos los que van construyendo las matemáticas el lenguaje imperante en el aula será el de los estudiantes. Y ahora será el profesor el que deba interpretar el conocimiento matemático que se oculta en el lenguaje más natural que emplean sus alumnos. La nueva situación exige que sea el profesor el que articule la búsqueda de expresiones comunes a todos los alumnos y el que deba establecer puentes con las expresiones habituales del lenguaje matemático.

La gestión de las conclusiones

De cada problema que se presente a los alumnos pueden derivarse diferentes modos de razonamiento y distinta presentación de los resultados, puesto que, como se ha mostrado en este trabajo, cada vía de resolución está condicionada a la observación de unas características determinadas. Es más, presumiblemente estos resultados no se formularán en la misma forma en que aparecen en los manuales escolares, ya que éstos se recogen en la forma que demanda la ortodoxia, aunque para ello, y como ocurre en el ejemplo del teorema niriag, estos resultados se alcancen empleando un grado mayor de abstracción.

Es evidente que no todas las situaciones problemáticas ofertarán tan amplio abanico de interpretaciones como ocurre en el caso del teorema de Pitágoras, del que Loomis (1972) recoge 270 demostraciones diferentes. Pero sí es factible que en un aula aparezcan algunas presentaciones del resultado que sean, aparentemente, distintas. El profesor, por tanto, tendrá que habilitar medios adecuados para patentizar la equivalencia entre estos resultados que, en principio, parecen diferentes, así como para que todos los alumnos puedan enriquecerse con las aportaciones de otros compañeros.

Bibliografía

ARANA, J. y otros (1985): *Análisis socio-educativo de los alumnos de Enseñanzas Medias de Zaragoza*, ICE, Zaragoza.

BLANCO, L. J. y C. RUIZ (1995): «Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado», en BLANCO, J. L. y MELLADO, V. (coord.): *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, Universidad de Extremadura, Badajoz.

BORASI, R. (1990): «The Invisible Hand Operating in Mathematics Instruction: Students´ Conceptions and Expectations», en COONEY, T. J. y HIRSCH, C. R. (edit.): *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook)*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia

CAMACHO, M. (1995): Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la Matemática y su enseñanza, en BLANCO, L. J. y MELLADO, V. (coord.): *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, Universidad de Extremadura, Badajoz

CORBALÁN, F., J, M. GAIRÍN, J. M. y E. PALACIÁN, E. (1984): *Las Matemáticas al finalizar la EGB*: Opinión de los alumnos, ICE, Zaragoza.

CORBALÁN, F. y J. M. GAIRÍN (1986): *Problemas a mí 1. Cosas de números*, Edinumen, Madrid.

DAVIS, P. J. y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor, Barcelona.

FISCHBEIN (1990): *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht.

GUZMAN, M. (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.

KLINE, M. (1976): *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, Madrid.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*, Alianza Universidad, Madrid.

LAVE, J., S. SMITH y M. BUTLER (1988): «Problem Solving as Everyday Practice», en RANDALL, I. y E. A. SILVER (edit.): *The Teaching and assessing of Mathematical Problem Solving*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

LOOMIS, E. S. (1972): The Pythagorean Proposition, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics, Reston, Virginia

POLYA, G. (1966): Matemáticas y razonamiento plausible, Tecnos, Madrid.

SILVER, E. A. (1990): Contributions of Research to Practice: Applying Findings, Methods, and Perspectives, en Cooney, T. J. y C. R. Hirsch (edit.): Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

STEFFE, L. P. (1990): Adaptive Mathematics Teching, en Cooney, T. J. y C. R. Hirsch (edit.): Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 yearbook), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

José María Gairín
E U Profesorado de EGB
Universidad de Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de
Profesores de Matemáticas
Pedro Sánchez Ciruelo