SUMA 21
febrero 1996, pp. 35-39

La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de cambio y comparación

Jaime Martínez Montero
Manuel Aguilar Villagrán

ARTÍCULOS

El presente informe aporta datos experimentales que justifican que la categoría semántica de *igualación*, dentro de las estructuras aditivas, es sustancialmente distinta a las de *cambio* y *comparación*. Al hilo de los resultados, se ofrecen pautas para la secuenciación de los PAEV aditivos.

Introducción

Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV en adelante) de una etapa estructurados en función de categorías semánticas tienen una aparición reciente en la literatura científica. El trabajo de Puig y Cerdán (1988) los divulga en nuestro país, y un panorama abreviado de los mismos se puede ver en Bethencourt (1994). Una división típica de estos problemas ha sido considerarlos agrupados en dos grandes estructuras: aditivas y multiplicativas. Los problemas de *cambio, comparación* e *igualación*, así como los de *combinación*, estarían comprendidos dentro de las estructuras aditivas.

No todos los autores contemplan la categoría de *igualación* con entidad suficiente como para darle personalidad propia. Los trabajos de Heller y Greeno (1978), Nesher y Katriel (1978), Nesher, Greeno y Riley (1982), y De Corte, Verschaffel y De Win (1985) estarían entre ellos. Para ellos, la categoría de *igualación* habría que considerarla como un híbrido de las de *cambio* y *comparación*. Sin embargo, y de acuerdo con otros autores (Carpenter y Moser, 1982 y 1984; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981 y 1983; Fuson, 1992 y Martínez Montero, 1995) *igualación* tendría características propias.

El presente trabajo quiere establecer la necesidad de considerar la categoría de *igualación* como distinta de las de *cambio* y *comparación*, añadiendo evidencias empíricas a los datos que, en este sentido, ya obran en la literatura científica.

Planteamiento general

Las diferencias existentes entre las categorías de *cambio* y *comparación* y la de *igualación* se pueden poner de manifiesto desde dos perspectivas:

a) La modelización de las situaciones de igualación con materiales concretos es distinta a las de cambio y comparación. Respecto a la primera, presenta inicialmente dos cantidades, mientras que cambio sólo presenta una. Respecto a la segunda, la resolución de la situación planteada no requiere nuevos materiales, mientras que sí es esencial tal aporte en el caso de que la situación sea de igualación. Por todo ello, presenta una diferencia fundamental respecto a cambio en la situación inicial, y respecto a comparación en la situación final.

b) No hay una relación entre los diversos tipos de problemas identificados con el mismo dígito dentro de las diversas categorías. Por decirlo de una forma breve, los niveles de dificultad de cada uno de los tipos de problemas que componen cada una de las categorías semánticas en cuestión o no se corresponden o, al menos, no lo hacen en los aspectos fundamentales de la lógica interna que les sirve de construcción.

El argumento correspondiente a la primera perspectiva no requiere de mayores demostraciones. Sí, sin embargo el correspondiente a la segunda. Para poner esto en evidencia, se han pasado a un conjunto de 172 alumnos de los cursos 3.° (50 alumnos), 4.° (57 alumnos) y 5.° (65 alumnos) de primaria, pertenecientes a un colegio público de Cádiz, una batería de problemas que contenía los seis tipos distintos de que consta cada una de las categorías.

En la elaboración de los textos de los problemas se han controlado las variables de contenido sintáctico (proposiciones que lo componen, número de palabras, vocabulario empleado, complejidad sintáctica), de contexto (formato de presentación, contexto verbal y formato de la información), de contenido (tópico, campo de aplicación, contenido semántico y elementos del problema) y de estructura (véanse Castro Martínez, 1991, y Webb, 1980). Los problemas propuestos a los alumnos se reflejan en los cuadros adjuntos.

Los diversos problemas adoptan dos formas, que requieren exigencias distintas en las respuestas de los alumnos. En una de ellas los problemas aparecen formulados con números muy pequeños (menores de diez), y son de respuesta libre. En la otra se presentan con números grandes, siendo la respuesta exigida de elección múltiple entre cuatro alternativas (las cuatro operaciones básicas). Esta última opción se encuentra apoyada por múltiples investigadores (Bell y otros, 1983; Fischbein y otros, 1985; Vergnaud, 1983 y 1988; Greer, 1987; etc.), puesto que permite diferenciar en una solución incorrecta del problema cuándo ésta se deba a una mala elección de la operación o a un simple error de cálculo (que no es el asunto que está en cuestión).

La modelización de las situaciones de igualación con materiales concretos es distinta a las de cambio y comparación.

PROBLEMAS DE CAMBIO

1G. Daniel tiene 156 pesetas. Su padre le da 125. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

1P. Tenía 4 pesetas y me dieron 3. ¿Cuántas tengo ahora?

2G. Tenía 248 pesetas. Me gasté 115. ¿Cuántas pesetas me quedaron?

2P. Daniel tiene 8 pesetas. Se gasta 3. ¿Cuántas pesetas le quedan?

3G. Tenía 58 cromos. Después de jugar tenía 97. ¿Cuántos cromos gané?

3P. Tenía 4 pesetas. Mi madre me da dinero. Ahora tengo 9 pesetas. ¿Cuántas pesetas me ha dado mi madre?

4G. Tenía 153 pesetas. después de comprar caramelos me quedaron 94 pesetas. ¿Cuánto dinero me gasté?

4P. Tenía 7 cromos. Después de jugar me quedan 2. ¿Cuántos cromos he perdido?

5G. Mi tío me da 125 pesetas. Con las que tengo reúno 217. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?

5P. Mi tío me da 4 pesetas. Ahora tengo 7. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?

6G. Andrés pierde jugando 43 cromos. Le quedan 72. ¿Cuántos cromos tenía antes de jugar?

6P. He perdido jugando 3 cromos. Me quedan 5. ¿Cuántos tenía cuando empecé a jugar?

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

1G. En el colegio hay 264 chicas y 234 chicos. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?

1P. En una tienda trabajan 5 hombres y 2 mujeres. ¿Cuántos hombres más que mujeres trabajan en esa tienda?

2G. Inés tiene 162 cromos. María tiene 144. ¿Cuántos cromos menos tiene María?

2P. Tengo 5 primos y 2 primas. ¿Cuántas primas menos que primos tengo?

3G. La clase de 3.° tiene 164 libros. La clase de 2.° tiene 32 libros más que la clase de 3.° ¿Cuántos libros tiene la clase de 2.°?

3P. Tengo 6 pesetas, mi hermano tiene 3 más que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?

4G. Tengo 262 pesetas. Mi hermano tiene 18 pesetas menos que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?

4P. Juani tiene 6 libros. Ana tiene 2 menos que ella. ¿Cuántos libros tiene Ana?

5G. En el colegio hay 264 chicas. Hay 39 niñas más que niños. ¿Cuántos niños hay?

5P. Tengo 6 lápices de colores. Tengo 4 más que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos tengo?

6G. En la clase hay 238 lápices de colores. Hay 53 lápices menos que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos hay?

6P. En un equipo hay 3 niñas, y hay 2 niñas menos que niños. ¿Cuántos niños hay en ese equipo?

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

1G. Juan tiene 259 pesetas. Andrés tiene 293 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene que tener Andrés para tener las mismas que Juan?

1P. María tiene 5 cromos. Inés tiene 3. ¿Cuántos cromos más debe tener Inés para que tenga los mismos que María?

2G. Inés tiene 162 cromos. María tiene 144. ¿Cuántos cromos tiene que perder Inés para tener los mismos que María?

2P. Nicolás tiene 7 pesetas. Roberto tiene 5. ¿Cuántas pesetas se tiene que gastar Nicolás para tener las mismas que Roberto?

3G. El Real Madrid ha marcado 89 goles. Si el Zaragoza marcara 22 goles más tendría los mismos que el Real Madrid. ¿Cuántos goles ha marcado el Zaragoza?

3P. Rocío tiene 5 chicles. Si a Natalia le dan 2 chicles tiene los mismos que Rocío. ¿Cuántos chicles tiene Natalia?

4G. En una tienda de chucherías hay 168 chicles. Si venden 23 caramelos quedan los mismos chicles que caramelos. ¿Cuántos caramelos hay?

4P. Hay 5 sillas en el dormitorio. Si del salón quitaran 3 sillas quedarían las mismas que en el dormitorio. ¿Cuántas sillas hay en el salón?

5G. Tengo 126 cromos. Si me dan 53 tengo los mismos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

5P. Yo tengo 1 peseta. Si me dieran 3 más tendría las mismas que Lidia. ¿Cuántas pesetas tiene Lidia?

6G. Tengo 212 pesetas. Si me gasto 34 me queda el mismo dinero que a Jaime. ¿Cuánto dinero tiene Jaime?

6P. Tengo 6 caramelos. Si doy 2 me quedo con los mismos que Luis. ¿Cuántos caramelos tiene Luis?

...para establecer el índice de dificultad de cada uno de los problemas se descuenta el porcentaje de los mismos que han sido bien resueltos con números grandes, pero mal resueltos con números pequeños.

Resultados

De forma previa a la exposición de los mismos, queremos destacar el papel jugado por los problemas formulados con números muy pequeños. Éste consiste en modular los resultados obtenidos en los expresados con números grandes descontando en buena medida la influencia del azar en la elección de la operación. El fundamento es sencillo: se puede establecer que si un alumno no sabe resolver un problema con números muy pequeños cuya manipulación no requiere el empleo de operaciones, tampoco sabrá resolver el mismo problema si además requiere las destrezas añadidas de elegir la operación y saber efectuarla.

Por ello, para establecer el *índice de dificultad* de cada uno de los problemas (o porcentaje de aciertos en la resolución de los mismos) se descuenta el porcentaje de los mismos que han sido bien resueltos con números grandes, pero mal resueltos con números pequeños. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Tipos	*Cambio*	*Comparación*	*Igualación*
Tipo 1	72,2	50,0	47,9
Tipo 2	81,9	74,7	72,8
Tipo 3	39,8	62,0	45,6
Tipo 4	68,1	72,3	26,5
Tipo 5	53,8	38,6	77,5
Tipo 6	56,2	32,5	68,6

Si, en lo que se refiere a la tipificación de la dificultad de los problemas en las categorías clásicas de *Muy fáciles, Fáciles, Medianos, Difíciles* y *Muy difíciles* se utiliza el baremo empleado por Cerdá (1978), Arnal (1988), García Hoz y Pérez Juste (1989) y Pérez Juste y García Ramos (1989), tendríamos la siguiente clasificación:

- Problemas *muy fáciles*: cambio 2 e igualación 5.
- Problemas *fáciles*: cambio 1, cambio 4 y cambio 6; comparación 2, comparación 3 y comparación 4; igualación 2 e igualación 6.
- Problemas *medianos*: cambio 5; comparación 1; igualación 1 e igualación 3.
- Problemas *difíciles*: cambio 3; comparación 5 y comparación 6; igualación 4.
- Problemas *muy difíciles*: Ningún problema ha sido resuelto por menos del 25% de los alumnos.

Esta clasificación nos lleva a hacer diversas consideraciones:

1) El orden de los dígitos que tipifican los diversos tipos de problemas dentro de cada categoría no sirve de indicador de la dificultad de los mismos, contraria-

mente a lo expresado por otros autores (véase, ppr ejemplo, Nesher y otros, 1982).

2) Se puede establecer una gran similitud en los resultados obtenidos entre los dos primeros tipos de comparación e igualación, pero no así entre éstos y los mismos tipos de cambio. A mayor abundamiento, los tipos 2 de las dos primeras categorías acusan por igual el impacto de la inconsistencia o incongruencia del lenguaje empleado con el tipo de operación requerido para su solución (véanse Lewis y Mayer, 1987).

3) Igualación 3 y 4 se comportan, dentro de la categoría, de forma parecida a comparación 5 y 6. Ambos se presentan como los problemas más difíciles. En ambos casos se puede ver también el resultado de la inconsistencia del lenguaje, ya apuntado en el párrafo anterior. Cambio 3 y 4 tienen un comportamiento muy distinto entre sí. Mientras que cambio 4 se convierte en un problema fácil, cambio 3 es el más difícil de la categoría.

4) Cambio 1 y 2, comparación 2, 3 y 4, e igualación 5 y 6 vienen a comportarse de forma similar. Todos ellos son problemas de lenguaje consistente (las palabras claves «más» o «menos» coinciden con el sentido de las operaciones que hay que emplear, suma y resta, respectivamente).

5) La categoría de igualación presenta un perfil netamente diferenciado respecto a las de cambio y comparación.

Conclusiones

Lo hasta aquí reflejado puede tener unas claras consecuencias en el trabajo en el aula dentro de los primeros cursos de la enseñanza. Sucintamente podrían ser:

a) Se debe atender a la enseñanza-aprendizaje de la categoría de igualación de una forma explícita y diferenciada respecto al resto de las categorías.

b) Secuenciar los diversos tipos de PAEV, dentro de cada categoría, en orden a la dificultad de los mismos en función del dígito que los identifica, no parece ser el criterio más realista para establecer el gradiente de dificultad adecuado a la progresión que deben seguir los niños en el aprendizaje de los mismos.

c) En el proceso de enseñanza-aprendizaje de los PAEV se deben abordar conjuntamente problemas de diversas categorías que tengan un nivel de dificultad similar. Por ejemplo, pueden abordarse a la vez los problemas de cambio 1 y 2, comparación 2, 3 y 4, e igualación 2, 5 y 6. De la misma forma, y con posterioridad a los anteriores, se deben trabajar los problemas de cambio 4, 5 y 6, comparación 1 e igualación 1.

Se debe atender a la enseñanza-aprendizaje de la categoría de igualación de una forma explícita y diferenciada respecto al resto de las categorías.

...se deben abordar conjuntamente problemas de diversas categorías que tengan un nivel de dificultad similar

Finalmente, se debe prestar muy especial atención a los problemas de cambio 3, comparación 5 y 6 e igualación 3 y 4. Estos últimos requieren, de manera notable, un mayor grado de madurez y dominio del lenguaje por parte de los alumnos, por lo que la ubicación del aprendizaje de los mismos debe situarse en los últimos cursos del nivel primario.

Referencias bibliográficas

ARNAL, J. (1988): *Matemáticas. Items de evaluación. 3.° de EGB*, PPU, Barcelona.

BELL, W., J. COSTELLO y D. KUCHEMAN (1983): *A review of research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching*, Windsor, NFER-Nelson.

BETHENCOURT, J. T. (1994): «La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción», *Suma*, 16, 4-8.

CARPENTER, T. P. y J. M. MOSER (1981): «The development of Addition and Substraction Problems-Solving Skills», en CARPENTER, T. P., J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (eds.): *Addition and Substraction: A cognitive perspective*, L. Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

CARPENTER, T. P. y J. M. MOSER (1984): «The acquisition of addition and substraction concepts in Grades One through Three», *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.

CARPENTER, T. P., J. HIEBERT y J. M. MOSER (1981): «Problem Structure and First-Grade Children Initial Solution Processes for Simple Addition and Substraction problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.

CARPENTER, T. P., J. HIEBERT y J. M. MOSER (1983): «The Effect of Instruction on Children's Solutions of Addition and Substraction Word Problems», *Educational Studies in Mathematics*, 14, 55-72.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada.

CERDÁ, E. (1978): *Psicometría General*, 2.ª Edición, Herder, Barcelona.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., y DE WIN (1985). «Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representations and Solutions». *Journal of Educational Psychology*, 77, 4, 460-470.

FISCHBEIN, E. y otros (1985): «The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division», *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.

FUSON, K. (1992): «Research on whole number addition and substraction», en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Grouws, McMillan, New York. DA, 243-275.

GARCÍA HOZ, V., y R. PÉREZ JUSTE (1989): *La investigación del profesor en el aula*, 2.ª edición, Escuela Española, Madrid.

GREER, B. (1987): «Understanding of arithmetical operations as model of situations», en SLOBODA, J. A. y D. RODGERS (eds.): *Cognitive processes in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 60-80.

HELLER, J. I. y J. G. GREENO (1978): «Semantic processing of arithmetic word problem solving», *Informe presentado a la reunión anual de la Asociación Psicológica del Medio Oeste*, Chicago.

LEWIS, A. B. y R. E. MAYER (1987): «Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1995): *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3.°, 4.° y 5.° de EGB/Primaria*, Tesis Doctoral.

NESHER, P. y T. KATRIEL (1.978): «Two cognitive modes in arithmetic word problem solving», *Informe presentado en la Segunda Reunión Anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática*, Osnabrück, Alemania.

NESHER, P., J. G. GREENO y M. S. RILEY (1982): «The Development of Semantic Categories for Addition and Substraction»», *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

PÉREZ JUSTE, R. y J. M. GARCÍA RAMOS (1989): *Diagnóstico, evaluación y toma de decisiones*, Rialp, Madrid.

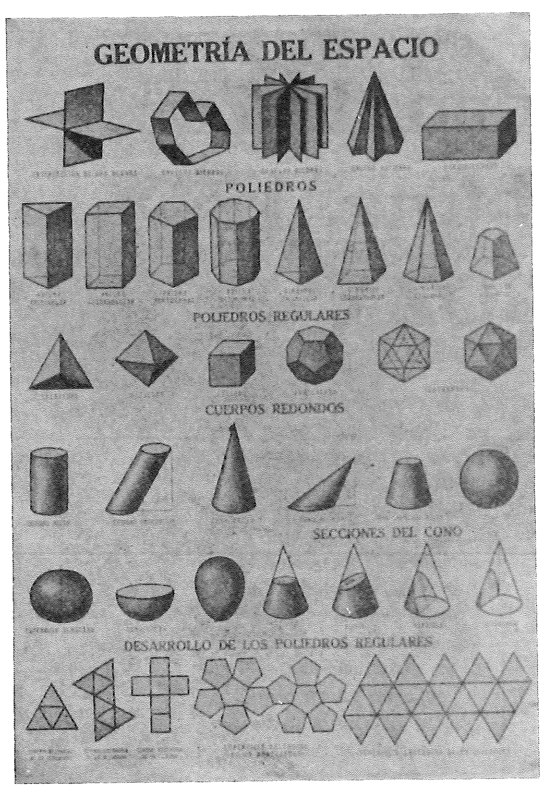
PUIG, L. y F. CERDÁN (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

VERGNAUD, G. (1983): «Multiplicative Structures»», en LESH, R. y M. LANDAU (eds.): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, Londres.

VERGNAUD, G. (1988): «Multiplicatives Structures», en HIEBERT, J. y M. BEHR (eds.): *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Erlbaum A. Vol. 2, Reston, Virginia, L, 141-161.

WEBB, N. L. (1980).: «Content and Context Variables in Problem Task», en GOLDING y McCLINTOCK (eds.) (1984): *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, The Franklin Institute Press, Philadelphia

Jaime Martínez
Servicio de Inspección.
Delegación de Educación.
Cádiz
Manuel Aguilar
Departamento de Psicología.
Facultad de Ciencias
de la Educación.
Universidad de Cádiz.



Colección de cuerpos geométricos
Catálogo del Material Escolar de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A.
(Gerona, 1928)