SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 20

NOVIEMBRE

1995

SUMA 20
noviembre 1995

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M. J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C./ Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.000 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 20
noviembre 1995

La nueva generación

EDITORIAL

En las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, recientemente celebradas en Madrid, se ha puesto de manifiesto un fenómeno observable en otros acontecimientos de estas características. Entre los más de seiscientos asistentes había una proporción considerable de profesores y profesoras jóvenes, pero que ya llevan algunos años, aunque no muchos, de práctica profesional en la enseñanza de las matemáticas; sin embargo, esta, llamémosle, «nueva generación» situada alrededor de los treinta años estaba escasamente representada entre ponentes, comunicantes y coordinadores.

Estos últimos pertenecían, en su mayoría, a la generación, que allá por los finales de los setenta y principios de los ochenta, coincidiendo con la transformación política española, emprendieron la tarea de cambiar la manera de cómo se estaban enseñando las matemáticas en escuelas e institutos. Con una gran dosis de voluntarismo, con unos recursos muy limitados y, con alguna frecuencia, con bastante incomprensión –por decirlo de forma suave– crearon las escuelas de verano, constituyeron grupos de trabajo más o menos estables, fundaron las primeras sociedades de profesores de matemáticas, iniciaron la celebración de las JAEM, idearon y crearon esta revista que se llama SUMA, se lanzaron a innovar en sus clases..., en pocas palabras en esta época se gestó una renovación profunda en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Precisamente, uno de los grupos temáticos de estas últimas JAEM ha tratado, con un cierto aire nostálgico para algunos, el análisis crítico de la innovación didáctica en España en los últimos quince años, interviniendo algunos de los que entonces fueron sus protagonistas.

Ahora, a finales de 1995, se pone en marcha una reforma que, con sus luces y sus sombras, lleva implícita algunas de las ideas que entonces empezaban a tomar cuerpo. Es un momento en el que no está todo hecho, en el que los profesores de matemáticas tenemos mucho que decir y aportar, tanto desde la crítica a los nuevos currículos, como a través de propuestas para la mejora de la enseñanza de algún aspecto de las matemáticas, o en la realización de materiales para la clase, etc. Estas aportaciones no las pueden llevar a cabo sólo aquella generación de hace veinte años. Es imprescindible que esta «nueva generación» de profesores que tienen veintitantos o treinta años se incorpore con ganas a esta tarea de seguir cambiando la enseñanza de nuestra materia, a seguir innovando, a tratar de seguir mejorando...

Es necesario que estos nuevos profesores y profesoras se incorporen a las juntas directivas de las sociedades de profesores, a los equipos que ponen en marcha las olimpiadas, a la organización de jornadas...; que se animen a presentar ponencias y comunicaciones en congresos, jornadas y encuentros; que comuniquen sus experiencias, que escriban artículos en revistas...

Con ello no abogamos por un relevo generacional, sino por una integración de profesores de diferentes edades y experiencia en una tarea que supone, además de la participación en un movimiento colectivo que impulsa la mejora de la calidad de la enseñanza de nuestra materia, un gran enriquecimiento profesional y personal.

SUMA 20

noviembre 1995

Cuatro años por delante

Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

ARTÍCULOS

Al ser nombrados por la Federación Española de Profesores de Matemáticas para la dirección de SUMA, deseamos poner de manifiesto en primer lugar nuestra gratitud a su Junta de Gobierno por la confianza que ha puesto en nosotros.

SUMA es una aventura, una bonita aventura, que se inició por octubre de 1988 cuando al poco de constituirse la Federación se pensó en crearla y que desde esa fecha ha salido sin interrupción (no ha sido una revista-guadiana, en todo caso, una revista-guadalquivir, y pretendemos que sea una revista-ebro, aunque sólo sea por razones geográficas) y ha proporcionado a los profesores y profesoras de matemáticas un medio para expresar sus inquietudes (y no el único desde el ámbito de la Federación).

Hoy, al aparecer el número 20 [gracias a los anteriores directores] SUMA es un proyecto totalmente consolidado

De la mano –y la cabeza– de Rafael Pérez y su equipo de Granada tomó cuerpo este proyecto editorial que siguieron, sin salir de Andalucía, Sixto Romero y los suyos desde Huelva (cuando se haga una historia de la educación matemática en nuestro país, en los últimos veinte años, Andalucía estará muy presente). Hoy, al aparecer el número 20, gracias a ellos, SUMA es un proyecto totalmente consolidado. Evidentemente, somos deudores de Rafael y de Sixto pero si, por un lado, tenemos las cosas más fáciles que ellos, por otro, tenemos un listón bastante alto y que, al menos, hemos de igualar.

Después de estos reconocimientos, guiados por la objetividad, y también por la amistad, pero no por el protocolo, deseamos dar unos breves apuntes sobre nuestro proyecto editorial, sobre nuestras intenciones. Nuestro propósito no es corregir una línea que creemos ha sido acertada, sino más bien contribuir a su permanente mejora desde la responsabilidad de la edición, y garantizar con ello que siga siendo la plataforma de intercambio que ha sido durante sus ocho años de vida.

En el editorial del primer número de SUMA, el consejo editorial en funciones afirmaba que la revista nacía «con pretensión de ser una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, órgano de expresión de la Federación de Sociedades que la edita y de los grupos que la apoyan; útil para la clase, plural y participativa, dedicada a todos los niveles educativos y que recogerá ideas, sugerencias, informaciones, innovaciones...». Todos estos objetivos siguen estando plenamente vigentes y nosotros, al asumir la dirección de la revista para los próximos cuatro años, queremos profundizar en su consecución.

Creemos que la Federación de Profesores de Matemáticas, como órgano coordinador de las sociedades en ella federadas, debe asumir la tarea de liderar la mejora de la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles. La revista SUMA como órgano de expresión de la Federación debe jugar un papel importante en esta tarea, recogiendo:

— Ideas y experiencias que contribuyan a la resolución de los problemas de enseñanza que se les plantean día a día a los profesores en sus aulas.
— Análisis que permitan enfocar correctamente los distintos aspectos de los currículos de matemáticas.
— Informaciones sobre las actividades de grupos de trabajo, sociedades federadas, congresos, simposios y todo tipo de actividades promovidas por los asociados.
— Valoración de materiales didácticos, publicaciones que puedan orientar a los lectores sobre su utilidad, contenido, aplicabilidad y contribución a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.
— Informes sobre problemas abiertos o nuevos de la enseñanza de las matemáticas.
— Valoración del desarrollo de los programas vigentes.
— Información sobre la posibilidad de incorporación de nuevos contenidos a los currículos.
— Opiniones, más o menos informales, de distintos expertos de la educación o de las matemáticas sobre los problemas de la enseñanza de las matemáticas.
— Y por último, y no por ello menos importante, las inquietudes de los lectores de la revista, manifestada a través de trabajos de diferente tipo, cartas al director, propuestas de colaboración, preguntas, etc.

La organización de las secciones que hasta ahora ha tenido la revista, y los contenidos que han sido desarrollados en ellas en los años anteriores, en buena parte responden a las cuestiones que acabamos de plantear, aunque creemos que es necesario promover la presencia de colaboraciones que incidan sobre algunos de los aspectos antes citados, como la valoración del desarrollo de los nuevos currículos, o la anticipación de nuevos problemas en la educación matemática.

La revista pasa a estar estructurada en las siguientes secciones:

SUMA no ha sido una revista-guadiana, en todo caso, una revista-guadalquivir, y pretendemos que sea una revista-ebro, aunque sólo sea por razones geográficas.

- Editorial.
- Artículos.
- Ideas y recursos.
- Miscelánea.
- Recensiones.
- Crónicas.
- Convocatorias.
- Sección del lector.

El *Editorial* de un medio de comunicación es una toma de posición del mismo ante un determinado tema. Como tal no es una opinión particular de una determinada persona, sino que representa la opinión colectiva del medio. SUMA, órgano de expresión de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, debe pronunciarse sobre diversas situaciones que rodean la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

El núcleo fundamental de la revista lo constituirán las secciones *Artículos, Ideas y recursos* y *Miscelánea*. En ellas tendrán cabida los trabajos remitidos a la redacción y que traten sobre cualquier aspecto relacionado con la educación matemática.

La calidad de una publicación es función tanto de los aspectos formales como del contenido. La dirección de SUMA tiene una responsabilidad frente a socios, suscriptores y lectores de que lo que en ella se publica tenga una calidad razonable. Por ello, los trabajos recibidos han sido revisados y valorados –y lo seguirán siendo– por asesores, nombrados por las distintas sociedades. Esto no debe servir para desanimar el envío de aportaciones, pues casi siempre el propio autor es el más feroz de sus críticos. Hace falta compartir el quehacer cotidiano. facilitando aquellas experiencias, materiales, ideas o reflexiones teóricas que ayudan a todos a ser buenos profesionales o, al menos, intentarlo.

Además, para contribuir a que la revista cumpla las condiciones propuestas, trataremos de conseguir que se publiquen artículos sobre algunos temas significativos, para lo que nos dirigiremos a especialistas, encargándoles colaboraciones concretas o la traducción de trabajos ya editados fuera de nuestro país que sean relevantes por su contenido.

Dentro de esta perspectiva, tenemos la intención de elaborar, una vez al año, un *Informe* sobre un tema específico, que estará coordinado por un experto y constará de varios artículos que presenten el estado de la cuestión en la actualidad, además de aquellas aportaciones que a lo largo del año se hayan remitido a SUMA. El primer *Informe* aparecerá en el número 23 de noviembre de 1996, sobre «Los programas de matemáticas en Europa» y será coordinado por Florencio Villarroya. En años sucesivos el tema será anunciado por la revista con suficiente antelación.

Con *Recensiones* se trata de informar a los lectores sobre todo tipo de material didáctico (libros, programas informáticos, material audiovisual, material manipulable, etc.) que aparezca en el mercado y que pueda tener una incidencia en el quehacer diario del profesorado de nuestra materia. Cualquier lector nos podrá enviar la recensión que considere conveniente y, por supuesto, aparecerá firmada por el mismo. Con una cierta frecuencia, las recensiones suelen tener un cierto carácter laudatorio; creemos que esto no siempre debe ser así, que deben caber también críticas negativas y, en algunos casos, críticas contrapuestas. Por supuesto, todas las colaboraciones firmadas, tanto en esta sección como en las demás, expresan el pensamiento y opinión del autor. A la dirección de SUMA puede resultarle interesante la publicación de algunos trabajos, aunque no comparta sus tesis.

Además de incluir en esta sección críticas de últimas novedades, pensamos introducir en cada número el comentario sobre una obra que, aunque publicada hace años –en ocasiones muchos– tenga un interés relevante, aunque sólo sea histórico, para los profesores de matemáticas. Los lectores están invitados a desempolvar y comentar esa obra que marcó un hito en la didáctica matemática, o ese manual de principio de siglo que nos muestra qué matemáticas se enseñaban entonces, o ese…

Ahora hace falta que lleguen a la redacción aportaciones, en forma de artículos, recensiones, notas, informaciones…

La sección *Crónicas* va a tratar de recoger todos los acontecimientos que se hayan producido recientemente y tengan relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En especial se recogerán las actividades llevadas a cabo por la Federación o por las sociedades que la integran, siempre que tengan una relevancia especial para el conjunto de lectores y no tengan un ámbito únicamente local.

Convocatorias va a incluir, como su nombre indica, el anuncio de todo tipo de congresos, jornadas, reuniones, etc. convocadas por cualquier tipo de institución (Federación, sociedades, CEP, ICE, colegios profesionales, sindicatos,…) con la única condición de que estén abiertas a cualquier lector. Desde aquí invitamos a todas las instituciones a que nos remitan, con tiempo suficiente, la correspondiente información.

La *Sección del lector* pretendemos que constituya una mezcla de «cartas al director» y «correo del lector» donde los lectores puedan exponer cualquier opinión o solicitar a otros lectores cualquier información. En esta sección cabe señalar el error de un determinado artículo, mostrar la discrepacia ante una recensión bibliográfica, criticar a los directores, incluso… felicitarlos. En una segunda faceta se puede demandar información sobre un artículo de una revista que se ha leído hace tiempo y no se sabe localizar, proponer un problema que se nos resiste, solicitar ayuda para pasar una encuesta en un trabajo de investigación, cualquier cuestión que otro lector pueda satisfacer. Cuando se hojean las publicaciones de asociaciones de profesores de fuera de nuestras fronteras, sorprende ver la abundante presencia de notas de los lectores, lo que no es habitual en la nuestra. Esperamos que poco a poco, SUMA se consolide en este aspecto e invite a la participación mediante este tipo de pequeñas intervenciones.

Para que una sección aparezca en la revista es necesario, obviamente, que existan materiales que justifiquen su presencia. Por ello, no siempre en todos los números aparecerán todas las secciones descritas.

Y de momento, esto es casi todo. Tenemos algunos proyectos que no están todavía lo suficientemente maduros como para divulgarlos, pero esperamos que alguno de ellos cuaje en los próximos números. Ahora hace falta que lleguen a la redacción aportaciones, en forma de artículos, recensiones, notas, informaciones…

Deseamos, con la colaboración de socios, suscriptores y lectores, poder cumplir una buena parte de estas intenciones y que dentro de cuatro años, en el número 31 de SUMA, podamos despedirnos y que al pasar esta bonita aventura a otros compañeros de la Federación. siga siendo tan atractiva y sugerente como nos pareció a nosotros cuando presentamos el proyecto que ahora empieza a materializarse.

Emilio Palacián
Julio Sancho
Directores de SUMA
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretario General: Luis Balbuena Castellano
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

FESPM

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: María Antonia Canals
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidenta: Rosa Pérez García
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Andrés Marcos García
Faclutad de Económicas. Universidad de La Coruña

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Javier Brihuega
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado de Correos 9479. 28080-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 9-18

Algunas reflexiones sobre nudos conceptuales a propósito del espacio*

Francesco Speranza

ARTÍCULOS

Introducción

Estas reflexiones se refieren a algunos problemas que están en la base del «pensamiento geométrico-espacial». En mi opinión, es importante que cada profesor reflexione sobre estos aspectos, que generalmente se pasan por alto.

I) Hablaremos sobre tópicos que se refieren también a los primeros pasos en el proceso de enseñanza/aprendizaje: por tanto, como se verá más tarde, a menudo, algunos tópicos «teóricos» permiten una cierta clarificación de cuestiones «elementales». Además, las cuestiones conceptuales son muy importantes, incluso desde el punto de vista epistemológico, y en esta perspectiva es útil repensar algunas ideas que se han ido elaborando en el ámbito de importantes tradiciones filosóficas.

II) En este contexto, no se puede pretender la misma precisión del significado a la que todos los matemáticos están habituados: de hecho, una cierta indeterminación semántica puede ser útil, a veces. Aquí querría distinguir entre dos adjetivos, considerados a menudo como sinónimos: *espacial* y *geométrico*:

«Geométrico» se usará en el contexto de una teoría, aunque sea elemental: «conceptos geométricos» (que son el primer paso para una organización teórica), «magnitudes geométricas». «Espacial» se refiere a lo que tiene relación con la experiencia del mundo que nos rodea, se usará para hablar de nuestra forma de ver y de actuar en el espacio, de nuestro hablar del espacio («habilidad espacial»): si bien debe señalarse que algunas tendencias epistemológicas tienden a ocultar esta contraposición. Pero no opondremos «espacial» a «plano», pues muchas veces el entorno en el que actuamos es bi-dimensional.

* Artículo traducido por Florencio Villarroya Bullido de *L'Educazione Matematica*, Año XV, Serie IV, vol. 1, n.° 2, mayo 1994. pp. 95-116. Revista cuatrimestral del «Centro di ricerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari», que amablemente ha autorizado la publicación en SUMA.

Tenemos que precisar este punto. Muchos dicen que la realidad física es, de todos modos, tridimensional y que, por tanto, se debe dar prioridad a las tres dimensiones. No estoy de acuerdo con esta conclusión, incluso cuando actuamos físicamente, operamos normalmente, en el nivel de modelos mentales, y estos pueden ser bi-dimensionales. Por tanto, la dimensión es un carácter de las imágenes mentales espaciales.

III) Recordemos brevemente el «programa de Erlangen». A partir de la constatación de la existencia de geometrías distintas de la geometría euclídea (elemental), por ejemplo la geometría proyectiva y la topología, Félix Klein (1872) propuso una sistematización global: existen muchas geometrías, cada una de ellas basada en un criterio de equivalencia de figuras geométricas: Dado un grupo G de transformaciones, dos figuras se dicen *G-equivalentes* cuando existe un elemento de G que transforma la primera en la segunda. La *G-geometría* es el estudio de las propiedades invariantes respecto del grupo G: en particular, los mismos conceptos geométricos son *relativos al grupo G*. Un concepto es admisible en la G-geometría si su «extensión» (el conjunto de figuras incluidas en ella) es invariante respecto de G. De hecho, podemos considerar significativa una geometría si hay un campo de experiencias (en el sentido más amplio de la palabra: puede tratarse de una experiencia puramente mental) que nos lleva a operar de acuerdo con el grupo G; hay otras geometrías privilegiadas en este sentido (por ejemplo, las ya citadas): pero muchas personas reconocen que, hablando en general, en torno a cada grupo se puede desarrollar una clase de intuición (ver Speranza, 1992).

IV) Cuando hablamos de «concepciones del espacio», no siempre se tratará de teorías matemáticamente elaboradas; sino que, a veces, ni siquiera estarán claramente expresadas. Por esto, tales «filosofías implícitas» pueden condicionar fuertemente nuestro modo de pensar (y condicionar la comunicación entre el enseñante y el estudiante). Esto puede surgir de un pensamiento «primitivo» (en el sentido etnológico o psicológico), o de una enseñanza-aprendizaje pre o extraescolares. El profesor (o el investigador) tiene que comprender sus propias concepciones y analizarlas (y estar abierto a todas ellas); también debe de estar preparado para encontrar en sus alumnos diferentes concepciones: incluso diferentes de unos alumnos a otros[1].

En mi opinión, el mejor modo de abordar el problema de esas diferentes concepciones de espacio consiste en poner en evidencia algunas contraposiciones. Algunas veces son de naturaleza puramente epistemológica (elemental), y las dos alternativas pueden incluso coexistir, en el sentido de que un mismo individuo «aplica» unas veces una, y otras veces otra (por ejemplo, espacio independiente o no independiente). Otras corresponden a diferentes elecciones que se pueden emplear en una teoría geométrica o física (por ejemplo, espacio limitado o ilimitado). Otras se sitúan en un plano decididamente filosófico (por ejemplo, ¿es el espacio una cosa real o una «forma» de nuestra mente?

...el mejor modo de abordar el problema de esas diferentes concepciones de espacio consiste en poner en evidencia algunas contraposiciones.

Espacio no independiente/ espacio independiente

«Espacio no independiente» significa que pensamos primero o esencialmente en los objetos (o en las figuras); el espacio es sólo la coexistencia de estos o estas. Alguno incluso habla de «concepciones relacionales». Por contra, «espacio independiente» significa que la primera cosa en que pensamos es el espacio y después en él, localizamos los objetos (las figuras).

En el pensamiento primitivo, el espacio es no-independiente; igual que para Aristóteles (basta pensar que para Aristóteles es el «lugar de un cuerpo»: la superficie interna que lo circunda).

Platón es más partidario de una visión independiente del espacio: «Hay una primera especie, que es ... no generada, no perecedera ...; hay una segunda, generada y siempre móvil ..., y hay, por fin, una tercera, la del espacio, que no admite destrucción y ofrece un sitio para todas las cosas generadas, ...» (*Timeo*, XVIII).

Posiblemente Platón fue precedido por los atomistas que admitían la existencia del vacío, y de aquí, pasando del plano físico al geométrico, se empieza a pensar en el espacio «en sí mismo».

En un artículo reciente, Manara observa que, mientras Euclides no habla de «espacio», en cambio la palabra aparece a menudo en los nuevos currículos. En realidad, Euclides no concibe el espacio como independiente, sólo considera las figuras en sí mismas (sólo excepcionalmente, por ejemplo en la «demostración» del primer criterio «de igualdad» de triángulos, se consideran dos figuras a la vez). Resulta natural, para el que piensa de este modo, no usar ni siquie-

1 La importancia de la idea de espacio en nuestra cultura está subrayada por las metáforas espaciales, de las que tan ricas son las lenguas indoeuropeas (según algunos, en especial las neolatinas); es decir, situaciones que son no espaciales se describen con palabras que hablan del espacio. Por ejemplo, «punto de vista», «en este punto», «incluir», «trasladar», «forma«, «concentrado», «substancia» (de sub y estar), «cuadrado»... No es así en todas las lenguas, como ha demostrado, por ejemplo Whorf en sus estudios sobre las lenguas indias de América [Whorf, 1936].

ra las palabras que se refieren al «entorno» entero, es decir a la propia palabra «espacio». Así parece Euclides más aristotélico que platónico (la idea de un Euclides platónico es probablemente «propaganda» hecha por los neoplatónicos, uno de los cuales era Proclo).

Hoy por el contrario, al menos entre los matemáticos, la idea de espacio tiene prioridad. Es un ejemplo significativo de la importancia de un análisis de las filosofías implícitas subyacentes a las matemáticas.

También en este sentido, es importante tener presentes los muchos factores que en la época moderna han impulsado (quizá incluso contra su voluntad) hacia el espacio independiente:

- El «sistema del mundo» de Newton.
- La geometría analítica, (no en la forma primitiva de Descartes, sino en el momento en que los continuadores dicen: «fijamos dos ejes en un plano...»).
- Las transformaciones geométricas y después, el programa de Erlangen.
- La consideración de espacios «extraños», estudiados en la geometría del siglo XX.

El espacio en el arte (I)

Las concepciones del espacio han influido en las artes y, recíprocamente, éstas han contribuido a orientar el modo de pensar el espacio. Desgraciadamente, estamos acostumbrados a considerar como ámbitos separados, la ciencia, el arte, la filosofía, mientras en otras épocas, éstas han interactuado más o menos explícitamente (hoy, obviamente de un modo menos evidente: pero entonces es todavía más importante darse cuenta de ello).

De las artes, aquéllas que me parece que pueden dar indicaciones más significativas son, por un lado, la arquitectura y el urbanismo (que actúan construyendo espacios), y por otro, la pintura (que está obligada a representar las tres dimensiones en dos y que, por tanto, se encuentra confrontada con los problemas de las representaciones). Para nuestro propósito, son especialmente interesantes las afirmaciones de Erwin Panofsky (sobre la pintura desde la Antigüedad al Renacimiento) y Pierre Francastel (sobre la pintura del Renacimiento al cubismo) y de Bruno Zevi (sobre la arquitectura): antes de nada, en el primero encontramos indicaciones fuertemente relacionadas con el problema del espacio independiente o puramente relacional.

Las concepciones del espacio han influido en las artes y, recíprocamente, éstas han contribuido a orientar el modo de pensar el espacio.

El ensayo de Panofsky *Die Perspektive als «symbolische Form»* (1924) se relaciona explícitamente con el pensamiento del filósofo Ernst Cassirer: a través de una «forma simbólica» «un particular contenido espiritual se conecta con un concreto signo sensible e identificado íntimamente con este». Según Panofsky, la perspectiva del Renacimiento es la realización visible de una nueva concepción del espacio, de una visión neoplatónica del mundo. Hay que advertir que Panofsky reclama más de una vez algunos aspectos de geometría y pone en evidencia la estrecha interrelación entre espíritu artístico y espíritu científico de los «creadores» de la perspectiva.

Una de las ideas fundamentales para comprender una época de la historia de la pintura es, según Panofsky, la concepción del espacio de aquel tiempo: encontramos algo análogo a nuestra contraposición entre «espacio independiente o no». Sin embargo, en esto Panofsky es más «rígido» al distinguir entre la era antigua y la medieval y moderna: «así como los artistas de la Antigüedad no podían imaginar este espacio sistemático, tampoco los filósofos de la Antigüedad, podían pensarlo [...]. Ninguna [de las teorías antiguas] había llegado a dar una definición de espacio como un sistema de meras relaciones entre altura, anchura y profundidad [...]. La totalidad del mundo es siempre algo fundamentalmente discontinuo [incluso en] Demócrito [y en] Platón [...]». (p. 53). Probablemente aquí Panofsky está pensando en la influencia que la geometría analítica ha tenido sobre las concepciones del espacio[2].

«El arte clásico [...] no ponía juntos pictóricamente en una unidad espacial los elementos singulares tridimensionales materialmente [...] sino que los fundía [...] en un conjunto de grupos. Lo mismo sucedió [con] el helenismo [...] el espacio no se siente como algo capaz de circunscribir y resolver la contraposición entre cuerpos y no-cuerpos [...]» (p. 51).

Después Panofsky examina la pintura medieval, aquélla que para nosotros supone un alejamiento del naturalismo de la Antigüedad tardía, para él es «componer una unidad real que antes se había configurado como una multiplicidad», unidad obtenida, por ejemplo con procedimientos «colorísticos y luminosos; Proclo (410-482) había afirmado que «el espacio no es otra cosa que la luz más sutil» (pp. 51-52).

Con el florecimiento de la pintura toscana, a partir de mediados del siglo XIII, se advierte la emergencia de un

2 Algunas veces, los matemáticos son incluso demasiado «tímidos» al considerar los profundos cambios que en el pensamiento se han producido por el desarrollo de las matemáticas. La separación de las culturas, que pesa de modo devastador en la cultura de hoy, es un obstáculo para estas interacciones, y por tanto, es aún más urgente reflexionar sobre estos temas.

nuevo sentido de la espacialidad (que se refuerza con los elementos arquitectónicos, presentes con frecuencia en la pintura), de la unidad compositiva: Panofsky cita, por encima de los demás a Duccio da Boninsegna (c. 1255-c. 1318), Giotto (1266-1337) y Ambrogio Lorenzetti (c 1290?-1348?). En estos pintores se va desarrollando gradualmente una perspectiva, no todavía «matemática», sino probablemente empírica, capaz, sin embargo, de «unificar el espacio» de un modo cada vez más sistemático.

Con el siglo XV, la teorización matemática de la perspectiva (L. B. Alberti, 1435) «llega a realizar plenamente, incluso en el plano matemático, la imagen del espacio, que hacía mucho tiempo que había sido unificada» (Panofsky). Es sabido que la «perspectiva matemática» no corresponde exactamente a la visión efectiva, debido a que la retina, incluso si sólo una pequeña parte de la superficie interna del ojo se interesa en la visión, no es plana. Las técnicas para resolver este problema las conocían ya en la Antigüedad (por ejemplo, los constructores de templos). Haber renunciado a estas técnicas en favor de una perspectiva rigurosamente matemática es un signo de una nueva concepción del espacio, en el umbral de una renovada tradición platónica, por la cual se considera el mundo de las ideas, con su perfección ultraterrena, como la verdadera realidad. Según Francastel: «[...] Antes de Brunelleschi y de Paolo Ucello [...] no se comprendía que las relaciones geométricas y matemáticas creaban un puente entre cosas de diferente naturaleza [...] El hecho de que en el siglo XV, grupos de artistas y científicos prosiguiendo las investigaciones iniciadas en el período medieval, descubrieran que no sólo las cosas, sino también el vacío podía ser medido, y que entre el espacio y las cosas existe una identidad racional y no substancial, [...], dio lugar, no solamente, a una nueva pintura, y una nueva arquitectura sino también a una nueva sociedad y [...] a un nuevo mundo». (pp. 31-32). «Por primera vez después de Grecia, se asiste a la elaboración de un sistema fundado en una visión racional del mundo [...]». (p. 105).

Según Argan, con Brunelleschi, empieza una nueva concepción del espacio en la arquitectura (Argan, 1946): «el espacio [...] está por todo, es, a la vez, continente y contenido, envolvente y es envuelto». (Francastel, 1950, p. 27).

En el siglo XV, el espacio se convierte en el protagonista de la propia pintura (Van Eyck, Masaccio, Beato Angélico,...) y es significativa, una vez más, la presencia constante de la arquitectura, sobre todo, si se tiene presente que, como observa Zevi, el espacio es propiamente el tema esencial de la obra arquitectónica. Algún tiempo después, Pomponio Gaurico expresará de modo clarísimo el principio del espacio independiente en el arte: «Atqui locus prior necesse est quam corpus locatum, Locus igitur primus disegnabitur».[3]

Hablar de espacio absoluto significa afirmar que es posible individualizar cada punto en sí mismo; hablar de espacio relativo quiere decir que un punto puede ser individualizado sólo en relación con algún objeto (es decir con un sistema de referencia).

3 Pero es necesario que el espacio exista primero, por tanto, el Espacio se delimitará en primer lugar.

Se observa como contraste, que los manieristas conocerán bien la *técnica* de la perspectiva, pero el concepto de la pintura cambiará profundamente. Francastel observa: «Se llegará así, al principio del siglo XVI, a una visión del espacio más escenográfica que euclídea [...]» (p. 106).

Todavía, la importancia del espacio se vuelve a encontrar, por ejemplo, en las obras del período italiano de El Greco, y en la madurez de Vermeer.

Espacio absoluto/espacio relativo

Hablar de espacio absoluto significa afirmar que es posible individualizar cada punto en sí mismo («la astronave intergaláctica n.° 1 está exactamente en el punto en que estaba la n.° 2 hace un año»); hablar de espacio relativo quiere decir que un punto puede ser individualizado sólo en relación con algún objeto (es decir con un sistema de referencia).

Esta contraposición ha sido fundamental en la historia de la física. Incluso cuando pensamos en términos terrestres, tenemos un sistema seguro de referencia «natural»: por tanto, pensamos en términos de espacio absoluto (lo que es más espontáneo para un niño). Se ha necesitado pensar en términos extraterrestres para llegar a concebir el espacio relativo (¿Parménides?, ¿los atomistas? ¿Nicola de Cusa?). Galileo pensaba en términos de espacio relativo para refutar a los aristotélicos; pero Newton volvió al espacio absoluto como soporte de su dinámica (por ejemplo pensemos en el principio de inercia). Leibniz se oponía a él con el «nuevo buen sentido»; las dos concepciones han funcionado a su vez, como un obstáculo epistemológico, una respecto de la otra.

La contraposición se puede explicar desde el punto de vista del programa de Erlangen: el espacio absoluto es aquél, en el que el grupo fundamental se reduce a la identidad; la relatividad del espacio «se mide» basándose en el grupo fundamental.

Para Einstein «espacio absoluto» hay que emparejarlo con «espacio independiente», y «espacio relativo» con «espacio no independiente»: es una hipótesis sugestiva, pero negada por la historia: el espacio del pensamiento primitivo (como el de Aristóteles) es absoluto y no-independiente; el espacio de la geometría elemental de hoy es relativo e independiente (al menos después de Klein).

Espacio homogéneo o no-homogéneo. Espacio isótropo o anisótropo

Un espacio se dice homogéneo si todos sus puntos son equivalentes; un espacio se dice isótropo si todas las direcciones que pasan por un punto son equivalentes.

El espacio de nuestra experiencia física, no es isótropo, (hay una dirección privilegiada: la vertical); puede considerarse homogéneo si nos encerramos en experiencias limitadas y bastante descontextualizadas (por ejemplo, olvidando que existen las paredes de la habitación).

El espacio de la cosmología aristotélica es no-homogéneo y no-isótropo (la Tierra no equivale a las demás esferas celestes, y la dirección arriba/abajo está privilegiada), el de la geometría euclídea es homogéneo e isótropo. Koyré pone el acento en la revolución cusiana-galileana-newtoniana que ha «impuesto» a la física la adopción de la geometría euclídea.

Las dos contraposiciones se pueden interpretar en el programa de Erlangen: un espacio es homogéneo cuando su grupo fundamental es transitivo (dados dos puntos, existe una transformación que lleva el uno al otro); y es isótropo cuando el subgrupo que deja un punto fijo opera transitivamente en las direcciones que salen del punto.

El pensamiento griego, al menos en la mayoría de los casos, trata de rechazar lo «ilimitado» por considerarlo una forma de imperfección. Para Aristóteles, más allá del cielo de las estrellas fijas no hay espacio.

Por encima de todo, una tarea importante en la escuela elemental es promover y cuidar el paso de un espacio anisótropo (y no homogéneo, de algún modo) del niño al espacio isótropo (y homogéneo) de la geometría.

Espacio limitado/espacio ilimitado

Hay bastante confusión, en la literatura clásica, sobre estos términos: habitualmente se pensaba en un espacio en el que las distancias tenían (o no) un límite superior (lo que quiere decir que se debía de tratar, antes que nada, de un espacio métrico). Pero «limitado» también puede significar «dotado de un límite» (una frontera), y esto nos lleva a una distinción topológica (es un claro ejemplo de como la matemática más avanzada puede aportar luz sobre los modos de pensar anteriores).

El pensamiento griego, al menos en la mayoría de los casos, trata de rechazar lo «ilimitado» por considerarlo una forma de imperfección. Para Aristóteles, más allá del cielo de las estrellas fijas no hay espacio.[4] Por tanto, la superficie externa del cielo de las estrellas fijas no es, hablando en términos modernos, un «confín»: aparece aquí la «infantil» objeción atribuida a Architas «y si, una vez llegado allí, extendiera mi mano ...».

Otros filósofos posteriores han admitido, un límite en el cosmos, pero sin embargo, con la existencia de un «espacio» fuera de él (Sambursky, 1956). El espacio de la geometría (al menos de Euclides en adelante) es *potencialmente* ilimitado: por tanto el espacio de la geometría está profundamente diferenciado del de la cosmología (pensemos también en las cuestiones de homogeneidad e isotropía). La separación entre la geometría y la física duró hasta la edad moderna: «La Matemática no es el estilo de la Naturaleza», «a la Naturaleza no le convienen las sutilezas matemáticas». Se ha observado (Cornford, 1936) que el cosmos finito ha sido un obstáculo epistemológico para poder aceptar el espacio infinito de la geometría euclídea. Y este era un obstáculo epistemológico para poder aceptar el espacio limitado de muchas teorías relativistas.

La mayor parte de las revisiones de la geometría euclídea, de finales del siglo XIX, introducen explícitamente, como término primitivo, el de «recta» ilimitada. Con ello, nos alejamos (respecto de la idea de «recta terminada») de la experiencia física y psicológica; pero este «salto» se explica admitiendo el infinito en acto, ahora habitual en las matemáticas (en el ámbito geométrico, la geometría proyectiva también ha hecho su contribución); y con una mayor sencillez *lógica* de la idea de recta, que puede ser pensada independientemente de una estructura de orden.[5]

4 Incluso prescindiendo de la negación aristotélica del vacío, la idea no es realmente tan «extraña»: una región del espacio vacío se puede considerar como la posición potencial de un cuerpo, pero de un cuerpo fuera del cosmos (que incluye todo), sería una contradicción en los términos.

5 Ocurre bastantes veces que entre dos conceptos relacionados, aquél que es psicológicamente más sencillo, es más complejo desde el punto de vista lógico.

El espacio en el arte (II)

Según Erwin Panofsky, el arte grecorromano, coherente con su opción filosófica, huía de la representación del infinito.

Con el cristianismo, hay un infinito en acto, si bien inicialmente limitado a lo divino; pero Duhem observa que «[...] entre las dos proposiciones "el infinito potencial no es contradictorio", "el infinito puede ser realizado en acto», los lógicos del siglo XIV [...] levantaron una barrera [... que] la hemos visto caer; no de golpe [...], sino arruinándose poco a poco en el transcurso de los años, desde 1350 hasta 1500».

También en este punto, juega el arte un papel esencial: también en este sentido la perspectiva representó el papel de forma simbólica. Probablemente, hasta que la perspectiva empírica se orientó hacia la técnica del eje de fuga,[6] la cuestión del infinito pudo quedarse en la sombra, pero con el descubrimiento del punto de fuga, *el infinito se hace representable*, superando así, también, el infinito potencial de Euclides: «El espacio infinito del mundo convertido en una realidad accesible al espíritu» (Francastel). De nuevo, la intuición artística ha precedido a la ciencia en la sustitución del cosmos cerrado de Aristóteles por la geometría del espacio de Euclides:

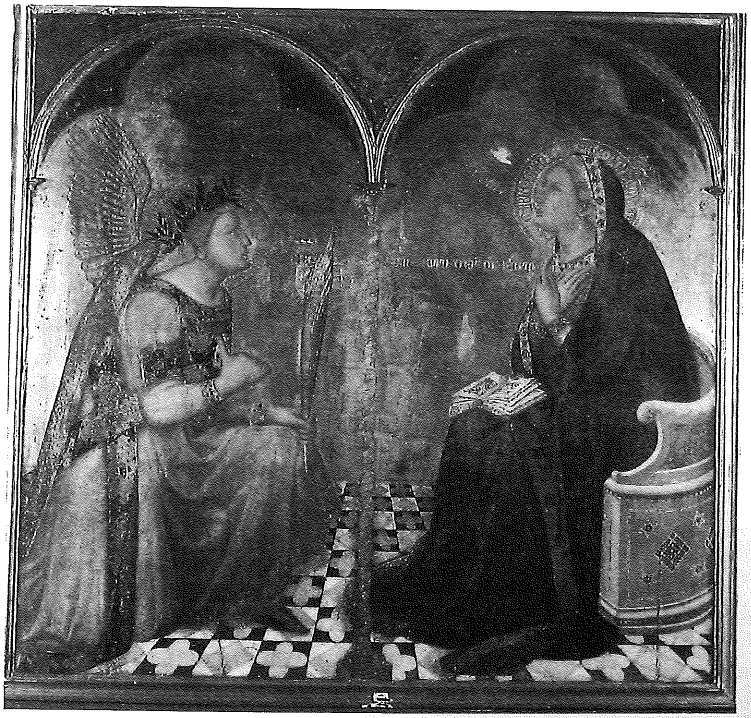
«Los astrónomos del Renacimiento descubrieron los espacios vacíos del universo: pero antes que Copérnico y Galileo, los arquitectos y los pintores tenían ya la sensación y la experiencia de esta extensión transparente que la geometría construye y mide» (Francastel).

La afirmación de la idea del infinito en la pintura, es estudiada además de por Panofsky y Francastel, por el sabio Claude Frontisi, que observó que en los primeros tiempos (por ejemplo en la «Anunciación» de Ambrogio Lorenzetti, 1344), los artistas, como si estuviesen molestos por haber «descubierto el infinito», lo ocultaban con un fondo de oro, que simbolizaba una dimensión ultraterrestre (anticipando la distinción del Cusano entre el *infinitum* divino y el *indeterminatum* espacial). Pero un siglo después, Alberti dirá: «sunt qui [...] aurum putant quandam historiae afferre maiestatem. Eos ipse plane non laudo».[7]

Frontisi observa que, hacia el final del siglo XV, esta «representación del infinito» queda limitada a la refiguración de la divinidad: con Benozzo Gozzoli (frescos del palacio Medici-Riccardi de Florencia), también se aplica a lo cotidiano.

6 Según esta técnica, las imágenes de las rectas paralelas de un mismo plano horizontal, convergen en un punto, pero éste, depende del plano: varía en una recta vertical. (Panofsky).

7 «algunos piensan que [...] el oro añade alguna majestad a la historia. Yo, ciertamente, no les alabo».



Ambrogio Lorenzetti. *Anunciación* (1344)

Espacio finito e infinito

Aquí «finito» quiere decir «formado por un número finito de puntos».

Probablemente la más antigua concepción del espacio, estaba en esta línea; la crisis de los inconmensurables impuso un nuevo pensamiento general. La geometría aventajó a la aritmética, porque ésta no podía representar la riqueza de los entes geométricos.[8] Euclides geometrizó la aritmética y el álgebra (hasta el siglo XIX hay que esperar, para asistir al regreso de la aritmética: pero, en mi opinión, todavía está por construir una presentación equilibrada entre las dos grandes áreas).

Hoy se sabe que existen «geometrías finitas» que son (a nivel axiomático) modelos alternativos de sistemas axiomáticos más sencillos. En la práctica, su aplicabilidad no vas más allá de los axiomas de incidencia (y de paralelismo), debido a que en los casos más significativos son modelos que se pueden construir sobre un cuerpo, y se sabe que no existen cuerpos ordenados finitos.

Por tanto, pueden existir espacios finitos a un nivel de pensamiento muy elemental y a uno muy abstracto; aquí, de nuevo, pueden aparecer obstáculos epistemológicos funcionando en sentidos opuestos (el pensamiento elemental frente a la aceptación de una figura como un conjunto infinito de puntos; y esta idea, una vez aceptada, contra las geometrías finitas).

Se observa que, desde un punto de vista «experimental», una afirmación como: «un espacio tiene un número finito de puntos» no es falsable, porque después de haber «seleccionado» un cierto número de puntos, si no puedo agotarlos todos, no se si en cierto momento acabará o no la selección de puntos. De acuerdo con el «falsacionismo ingenuo» esta afirmación no podría ser incluida como axioma de una teoría científica (una teoría científica debe necesariamente estar «disponible» para la falsación).

...pueden existir espacios finitos a un nivel de pensamiento muy elemental y a uno muy abstracto...

8 (Sólo como divagación, puesto que la historia no se hace con los «sí»): Y ¿si los griegos hubieran elegido (en lugar de renunciar a aplicar su aritmética a la geometría) renunciar a algunas otras partes de la geometría?

Espacio como conjunto de puntos o como continuo irreducible

¿Hay que pensar en el espacio como un conjunto de puntos o como un «conjunto irrompible» como la *durée* de Bergson?

En la concepción proto-pitagórica, el espacio era, probablemente, un conjunto de puntos-átomos, en número finito. Si se abandona la hipótesis de finitud, se puede pensar en un sistema de infinitos puntos sin dimensiones, pero esto habría chocado con el rechazo de los griegos del infinito, en particular del infinito *en acto*. Además, algunas paradojas de Zenón, probablemente, tienden a rechazar esta hipótesis (la flecha, el estadio). Aristóteles se preocupó en refutarla, más tarde, (basándose en el «sentido común» de las sucesiones finitas, como si los puntos de una recta fuesen seguidos unos de otros, como las cuentas de un collar); concluye diciendo que «no se puede pensar el continuo como compuesto de indivisibles, y en particular, no se puede pensar que una línea esté compuesta de puntos». Si en una recta se fija un punto, ya no hay una recta, sino dos.

Euclides en sus *Elementos* tuvo cuidado de no contradecir a Aristóteles, por ejemplo, dice que «los extremos de una línea son puntos», pero nada más; nunca habla del «lugar de puntos tales que...». Se puede decir que para Euclides, una línea está *potencialmente* constituida por puntos.

Con la plena entrada en funcionamiento del método de las coordenadas, el espacio tiene que ser considerado como el conjunto de sus puntos, y las figuras geométricas como «el lugar de los puntos tales que...». Hoy estamos acostumbrados a leer todo en términos de conjuntos: es un caso típico en el que dos filosofías implícitas, (la conjuntista, ligada a la geometría analítica, y la aristotélico-euclídea), pueden entrar en colisión, sobre todo a nivel didáctico.

Para juzgar sobre la naturaleza de ambas hipótesis, también hay que tener presente que los propios puntos son «figuras geométricas» (idealización de objetos físicos muy pequeños); de hecho, las figuras geométricas están muy lejos de la experiencia común (más que las líneas y las superficies).

En los años veinte, Whitehead elaboró una teoría del espacio-tiempo basada en la inclusión de «regiones» y no en la pertenencia de los puntos e instantes al espacio y al tiempo. Después de todo, no tenemos la experiencia de lo que puede ser un instante, sino sólo de un intervalo corto (que son los que están medidos aproximadamente). Bergson admite la reducción del espacio a «indivisibles», pero no del tiempo, lo que ha permitido elaborar recientemente otras «geometrías sin puntos».

El espacio ¿es real? o ¿es una forma de nuestra sensibilidad? (o...)

Se presenta como una «contraposición fuerte», desde Platón (que en el *Timeo* considera el espacio como «la tercera entidad», entre el mundo de las ideas y el de las cosas sensibles), hasta Newton que en el *Scholium generale* a los *Principia* lo llama *sensorium Dei*, el espacio es una realidad. Al contrario, Kant considera el espacio como «una forma de la sensibilidad», algo que está en nosotros, una condición para organizar la experiencia. Con la sugestiva imagen de Trudeau, el espacio sería un «procesador de datos».

Confrontado con estas contraposiciones, cualquiera puede llegar a pensar: «No tengo ningún interés en esto, yo hago matemáticas, habrá quien querrá interpretar lo que digo de un modo y quien de otro». Creo que esta es una posición simplista. Puesto que algunas de estas contraposiciones se reflejan inmediatamente en el enfoque que se dé al tratamiento de la geometría (por ejemplo, considerar o no las figuras como conjuntos de puntos). Entonces, cuando nos encontramos confrontados con una contraposición como la anterior, no es indiferente elegir entre Platón y Kant. En algunos casos, desde el primer punto de vista la elección es obligatoria, en otros es (o debe ser) irrevocable. En particular, la decisión es importante cuando *se enseña* geometría.

Pero la geometría siguió después de Kant: cómo éste había puesto en crisis las concepciones precedentes, la llegada de las geometrías no euclídeas ha puesto en crisis a Kant, ¿en qué punto estamos?

Helmholtz, por ejemplo, reconoce que hay «formas *a priori*», pero que éstas no pueden tener un contenido predeterminado (para Kant esto sería la geometría euclídea); en otras palabras es un *procesador de datos* pero, mientras en la idea de Kant, ya estaría dotado de un software, en la nueva concepción el software se va formando a través de la experiencia, o mejor todavía en la interacción entre la experiencia y lo que ya existe en nuestra mente (Enriques, Piaget).

En esta contraposición (convertida en «trilema»), me parece que se puede y se debe hacer una elección: estoy decididamente por la tercera vía. Es lo que se llama, comúnmente, «empirismo en geometría», pero sería más justo incluirlo en el «racionalismo experimental» que, según Enriques, es la concepción fundamental subyacente a la ciencia a partir de Galileo. Lo que nos permite evitar a la vez, la Escila del idealismo (el destino de los kantianos), y la Caribdis del sensismo como el de Sexto Empírico (para el que la geometría no tiene sentido, ya que en la realidad no existen objetos que tengan sólo longitud y no anchura y profundidad).

De hecho, el espacio no es algo que de pronto se necesite «aprender», ni tampoco es una pura y simple estructura mental (o neurológica); al contrario, tiene que ser «formado» con estrategias adecuadas.

Esta tercera vía, en mi opinión, da especial importancia a la enseñanza y al aprendizaje. De hecho, el espacio no es algo que de pronto se necesite «aprender», ni tampoco es una pura y simple estructura mental (o neurológica); al contrario, tiene que ser «formado» con estrategias adecuadas.

El espacio en el arte (III)

Estamos acostumbrados a pensar en la geometría analítica como en un tema relativamente avanzado: tradicionalmente sólo se enseñaba en los cursos superiores de la secundaria, si bien en algunas escuelas no se llega nunca. Esto se debe a la pretensión de tratarla en un contexto organizado lógicamente y, por tanto, después de haber aparecido otros muchos temas: desde la geometría euclídea hasta los números reales; pero existen numerosas situaciones que claramente preludian el método de coordenadas, empezando por algunos juegos, como el de barcos, justamente así aparecen en los nuevos currículos para la escuela elemental y secundaria. Aquí nos gustaría mencionar una anticipación de la geometría analítica utilizada en la pintura, sobre todo en la toscana del siglo XIV.

Entre los varios métodos empleados por los artistas para «construir», para «unificar» el espacio, uno fue verdaderamente genial, debido a los Lorenzetti, y después adoptado por la mayoría de los artistas: representar sobre el plano horizontal un suelo o una alfombra de diseño cuadriculado. Normalmente, se cita como prototipo la *Anunciación* de Ambrogio de 1344, pero fue precedida por un fresco en la basílica inferior de San Francisco de Asís y por la predela de la *Storie dell'ordine carmelitano* de Pietro, de 1329. Se trata de cinco compartimentos (en la pinacoteca nacional de Siena, justo en frente de la *Anunciación*): en el primero podemos ver un suelo y una cubierta con cuadros, y las rectas que deben de concurrir en el punto de fuga principal, en vez de paralelas, están inclinadas hacia el compartimento central (así, el borde de la cubierta que cae horizontalmente, da la imagen «real» del cuadro); en los dos compartimentos de la derecha se tiene una situación análoga, también con una inclinación hacia el centro; y lo mismo pasa con los techos, en los que líneas análogas están inclinadas hacia abajo. La representación en perspectiva está así realizada mediante cuatro afinidades. Todavía es más sorprendente la aplicación de este principio en el políptico *El nacimiento de la Virgen* (1342), en el Museo de la Catedral en Siena: los lados derecho e izquierdo, son las dos mitades de la misma escena, dividida por una columna que forma parte de la estructura: una persona está un poco de una parte y un poco de la otra.[9]

9 Sin embargo, en otras pinturas, por ejemplo en una que hoy está en Zagreb, también Pietro emplea la perspectiva central.

De este modo, no sólo se da la sensación de profundidad y la organización perspectiva del espacio, sino que para cada persona, para cada detalle se precisa la posición (y queda abierta la posibilidad de representar un personaje más grande de lo que le corresponde por su posición, para destacar su papel). Si el pintor hubiera querido hacer simplemente una decoración, podría haber inventado cualquier cosa más «brillante» que un sencillo suelo pavimentado.

También en este caso, la intuición de un artista ha precedido (en unos 300 años) a la formulación precisa de un matemático (las coordenadas cartesianas). En este punto (¡metáfora espacial!) me parece que se debe revaluar la opinión de Panofsky sobre la «incapacidad» de todas las concepciones espaciales de la Antigüedad: antes de la organización según Lorenzetti-Descartes, el espacio puro de Demócrito y de Platón y el vacío informe; después el espacio está organizado, es una prefiguración de lo que la física llama hoy «campo».

Ambrogio Lorenzetti.
El nacimiento de la Virgen
(1342)

Bibiografía

ALBERTI, L. B. (1435): *De Pictura.*

ARGAN, G. C. (1946): «The Architecture of Brunelleschi and the Origins of Perspective Theory in the Fifteenth Century», *Journ. of the Warburg and Courtauld Inst*, IX.

ARISTÓTELES, *Física.*

CAPEK, M. (ed.) (1976): *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston.

CAPEK, M. (1976): «Introduction», en M. CAPEK, *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston.

CORNFORD, F. M. (1936): «The invention of space», en M. CAPEK, *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston, 3-16, 1976.

CASSIRER, E. (1923 y sig): *Filosofia delle forme simboliche*, La Nuova Italia, Firenze.

DUHEM, P. (1909): *Études sur Léonard de Vinci*, II.

ENRIQUES, F. (1906): *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna.

EINSTEIN, A. (1954): «Introduzione», en JAMMER, *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano, 1954.

FRANCASTEL, P. (1950): *Lo spazio figurativo dal Rinascimento al Cubismo*, Einaudi, Torino.

FRONTISI, C. (1992): «Figures de l'infini: l'exemple de la peinture toscane du XIV et XV siècles», en F. MONNOYEUR (ed), *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Belin, París, 1992.

JAMMER, M. (1954): *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano.

MANARA, C. F. (1988): «La Matematica nella scuola secondaria superiore», *L'ins d. mat. e d. scienze int*, 11, 686-703.

MENGHINI, M. y L. MANCINI PROIA (1988): *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte*, CNR, TID.

NEWTON, I. (1687): *Principi matematici di filosofia naturale*, UTET, Torino.

PANOFSKY, E. (1924): *La prospettiva come forma simbolica*, Feltrinelli, Milano.

PLATÓN, *Timeo.*

POINCARÉ, H. (1902): *La ciencia y la hipótesis.*

POMPONIO GAURICO, *De sculptura.*

SAMBURSKY, S. (1956): *Il mondo fisico dei Greci*, Feltrinelli, Milan.

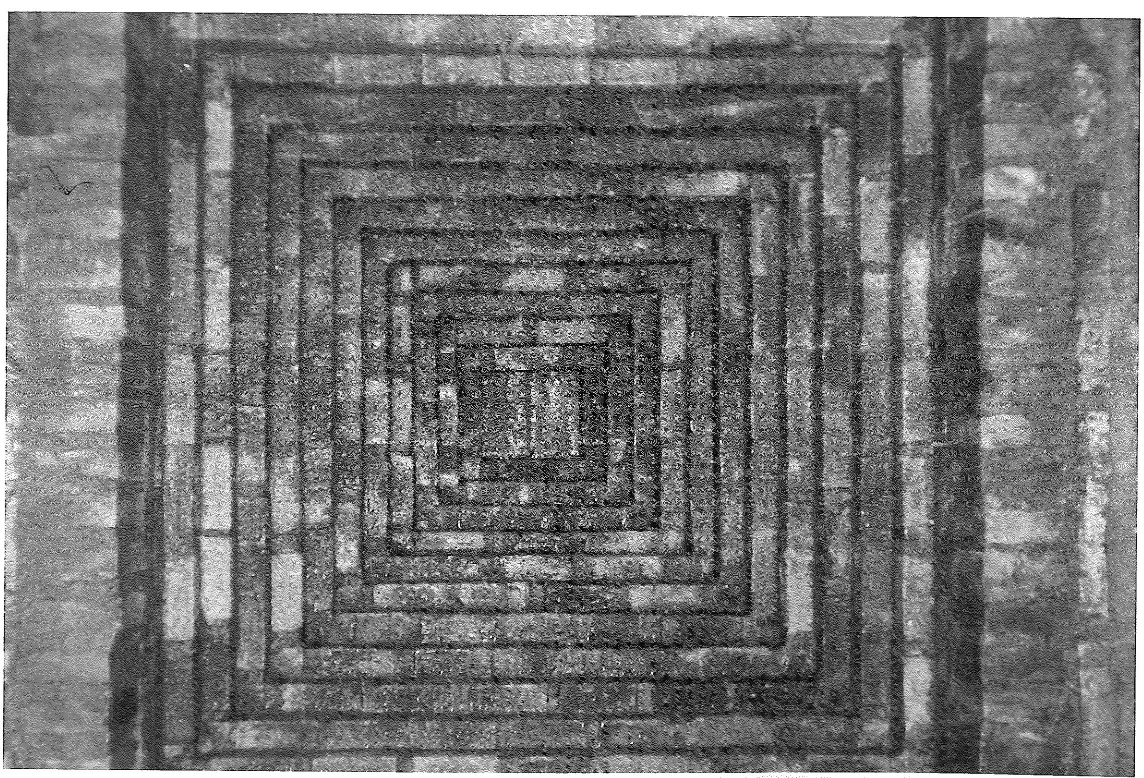
SPERANZA, F. (1992): «La «rivoluzione» di Felix Klein», *Atti sem. Epistemologia della Matematica*, CNR-TID, 269-286.

WHORF, B. (1936): «Un modello d'Universo degli indiani d'America», en *Linguaggio, mente, realtà*, Einaudi, Torino.

ZEVI, B. (1948): *Saper vedere l'archittetura*, Einaudi, Torino.

Francesco Speranza
Universidad de Parma

Traducción:
Florencio Villarroya
IES Miguel Catalán
de Zaragoza
Sociedad Aragonesa
Pedro S. Ciruelo de
Profesores de Matemáticas



Cuadrados en fuga
(VI Olimpiada Matemática Nacional)

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 19-27

La discriminación positiva hacia las chicas en las aulas de matemáticas ¿debe conducir a su segregación?

Josetxu Arrieta Gallastegui

ARTÍCULOS

Tras revisar y criticar los numerosos estudios que avalan la tesis de la inferioridad intelectual de las chicas al resolver problemas de matemáticas, aportando datos muy recientes de la investigación al respecto en el panorama internacional, en el presente artículo se cuestiona el supuesto de que sus rendimientos en matemáticas mejorarían si estudiasen en aulas no mixtas (las chicas con las chicas y los chicos con los chicos), a la vez que se defiende la tesis de que, aunque así fuera, aunque mejorasen sus rendimientos, desde un punto de punto de vista educativo no habría por qué asumir tal segregación.

A lo largo del pasado año se publicaron diversos artículos periodísticos (ver los suplementos de *Educación* de *El País* del 15-3-94 y del 18-10-94 o *Comunidad Escolar* del 14-12-94), en los que se planteaba abiertamente la posibilidad de volver a la separación de sexos en las aulas, al menos en ciertas áreas, como las matemáticas y las ciencias. La propia directora del Instituto de la Mujer, Marina Subirats, afirmaba en uno de ellos que «es cierto que el separar a los alumnos en algunas materias puede ser beneficioso», citando expresamente el ejemplo de las matemáticas puesto que, según decía, en sus clases es «donde se están estimulando más los códigos masculinos y, con ello, las niñas están interiorizando un carácter de segundo sexo. Rendirían más si estuviesen solas». De hecho, en algunos países como Estados Unidos, Suecia, Inglaterra y Alemania ya se han realizado experiencias al respecto y el debate está planteado abiertamente desde hace un lustro.

Pues bien, para entrar en dicho debate me propongo en este artículo plantear tres preguntas que están íntimamente relacionadas entre sí. Son las siguientes:

1. ¿Existen diferencias significativas de rendimiento en matemáticas entre chicos y chicas?
2. ¿Mejorarían los resultados de las chicas si las estudiasen separadas de los chicos?
3. ¿Deberían estudiar los chicos y las chicas en aulas no mixtas?

Es obvio que la tercera pregunta sólo tiene sentido planteársela si la respuesta a las dos preguntas anteriores fuese afirmativa, puesto que en caso contrario nadie plantearía la vuelta de la segregación. Pero a pesar de estar directamente relacionadas entre sí, como acabamos de ver, quiero dejar claro, de entrada, que son preguntas que exigen para su posible respuesta del recurso a conocimientos con características muy diferenciadas. Las dos primeras pueden intentar resolverse recurriendo a investigaciones y conocimientos de tipo científico (estudios empíricos y experimentales, estudios de casos, etc.), mientras que la última requiere el uso de conocimientos filosóficos y teóricos sobre la educación, esto es, sea cual fuese la respuesta a las dos primeras preguntas, la correspondiente a la tercera no puede venir determinada exclusivamente por las aportaciones de la ciencia al respecto.

Dado que las investigaciones realizadas hasta la fecha se han concentrado en intentar dar respuesta a la primera de las preguntas, vamos a comenzar por ella, analizando inicialmente unos datos históricos y distinguiendo posteriormente la década pasada, la de los ochenta, de la década actual. Sin embargo, es preciso iniciar el estudio con alguna aclaración. Sí parece evidente que a través de la enseñanza de la lengua materna se tiende inevitablemente a reforzar la discriminación en función del sexo a través de la escuela, puesto que el propio lenguaje está impregnado de sesgos sexistas (García Meseguer, 1988), en el caso de la otra área instrumental básica, la de matemáticas, la que aquí nos interesa, el mero sentido común nos lleva en principio a no implicarlas con tales consideraciones materiales, dado su carácter presuntamente *objetivo, neutro* y *a-cultural*. Este punto de vista, tan extendido por otra parte, y que confunde la *universalidad de la verdad* de las ideas matemáticas con las bases culturales de dichos conocimientos, refuerza el llamado *mito de Euclides* (Davis y Hersch, 1988). Este consiste en la creencia de que los *Elementos* de Euclides contienen verdades claras e indubitables relativas al universo. A partir de verdades evidentes por sí mismas, y procediendo mediante demostraciones rigurosas, Euclides llega a un conocimiento que es cierto, objetivo y eterno. Si bien es cierto que hasta mediados del siglo XIX todo el mundo lo asumía, en la actualidad los propios matemáticos confiesan «la pérdida de tal certidumbre» (Kline, 1985), aunque no ocurra lo mismo con la mayoría de la sociedad, pues sigue creyendo mayoritariamente en él. De ahí que la comunidad educativa, comenzando por el profesorado, asuma de manera generalizada que no es posible que a través de una ciencia objetiva, neutra y a-cultural como las matemáticas se pueda discriminar a las mujeres, favoreciendo que obtengan rendimientos inferiores o que se alejen en cuanto pueden de estudiarla. Pues bien, el plantearse la primera de las preguntas puede ayudar a deshacer algunos equívocos al respecto.

¿Existen diferencias significativas de rendimiento en matemáticas entre chicos y chicas?

Datos históricos de interés

Si revisamos la historia de la escolaridad se aprecia que, hasta hace relativamente poco tiempo –finales de la II Guerra Mundial en los países occidentales–, se defendía explícitamente la discriminación entre los sexos en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas. Los niños tenían que estudiar, por ley, más matemáticas que las niñas.

...hasta hace relativamente poco tiempo –finales de la II Guerra Mundial en los países occidentales–, se defendía explícitamente la discriminación entre los sexos en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

He aquí unos datos bastante llamativos, recogidos por Shuard (1982) para el informe Cockroft. En 1860 se pensaba que sería ruinoso introducirla en las escuelas secundarias de niñas; incluso la aritmética era sospechosa, como lo muestran las críticas documentadas de padres que cambiaban a sus niñas de colegio si se les hacía estudiar matemáticas en el mismo. Los argumentos de tales padres eran del siguiente tipo: si mis niñas fuesen a ser banqueras todavía, pero como no lo van a ser, no la necesitan. En 1888 se recogían en las Actas sobre la educación elemental inglesas frases que a nuestras madres no les son en absoluto ajenas: «como el tiempo de las niñas está dedicado sobre todo a las labores de costura, el tiempo que pueden dedicar a la aritmética es menor que el que pueden dedicar los niños».

Ya en este siglo, en 1912, se seguían planteando objeciones a la no discriminación, se continuaba defendiendo explícitamente que el acceso a dicho conocimiento no debía ser igualitario para ambos sexos, basándose en argumentos que, curiosamente, son algunos de los que se utilizan en la actualidad para explicar por qué no son mejores las niñas en matemáticas (Badger, 1983). Las objeciones a la dedicación a su aprendizaje por las niñas eran las siguientes: no son interesantes para ellas, no las van a utilizar posteriormente, son demasiado inconsistentes para poder aprenderlas, no tienen un pensamiento independiente, son demasiado dadas a la rutina...

Un par de datos más sobre la situación inglesa, también bastante significativos para la posterior discusión. En 1918 ya se comenzó a matizar, a sugerir, que las diferencias entre niñas y niños en la enseñanza se deberían centrar en plantear diferentes tipos de problemas o actividades matemáticas para unas y otros: las niñas debían realizar problemas de compras, de economía doméstica, mientras que los niños debían demostrar teoremas. Hasta 1937 no se puede afirmar que la opinión educativa les considerase intelectualmente similares, aunque con intereses diferentes, como se recoge en el Hanbook editado por el Board of Education, que incluía las recomendaciones al profesorado y a los interesados en el trabajo desarrollado en las escuelas públicas elementales.

Podemos concluir por ahora este breve repaso histórico afirmando que, desde la segunda mitad del siglo XX, la unificación formal de los modelos escolares femeninos y masculinos es un hecho generalizado en el mundo occidental, desapareciendo los rasgos diferenciadores más explícitos de los currículos (en nuestro país esto se consiguió a través de la LGE de los setenta). Los objetivos y contenidos de la enseñanza de las matemáticas se unificaron, tendiendo a negar, por tanto, la hipótesis de la discriminación sexista en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

La situación en la década de los ochenta: diversos resultados e interpretaciones

Según Subirats y Brullet (1988), autoras que han desarrollado el por ahora más sistemático estudio realizado en nuestro país sobre la trasmisión de los géneros en la escuela mixta, uno de los elementos que contribuyen a la ocultación de las actuales formas de sexismo en la educación se deriva del hecho que sus consecuencias no son tan visibles en términos de resultados escolares: las diferencias se establecen más bien en la utilización posterior de estos resultados; afectan más a la construcción de la personalidad que a la cualificación de su fuerza de trabajo, por lo que las consecuencias del sexismo hay que buscarlas en la internalización de unas pautas de género diferenciadas. También concluyen que en la escuela mixta actual se sigue manteniendo una diferencia entre los sistemas de valores y comportamientos femeninos y masculinos, y que estos últimos siguen siendo considerados superiores; pero resaltan que el carácter masculino de la cultura que trasmite la escuela no se debe al hecho de que lo que en ella se aprende, como las matemáticas o la historia, haya sido desarrollado esencialmente por hombres.

Esto es, vienen a indicar que el problema es de valores y no de contenidos, que como estos no generan rendimientos diferentes en función del sexo, la discriminación se basa en la trasmisión de los géneros de manera oculta, en términos de lo que los didactas llamamos el currículum oculto. Querría matizar estas conclusiones puesto que, aunque afirman la discriminación, niegan por otro lado su dependencia de la variable contenido, por lo que habría que rechazar la hipótesis de que la escuela reprime en cierta medida el acceso de las mujeres al conocimiento de alto *status*, como las matemáticas.

La diferenciación se aprecia también, se hace visible, al constatar el hecho de que las chicas tienden a apartarse voluntariamente de las matemáticas.

En primer lugar, habría que matizar su afirmación de que en términos de resultados escolares no son tan visibles las diferencias en función del sexo. Aunque la literatura sobre las diferencias entre sexos es enorme y los resultados muy diversos y algo confusos, reiteradamente se ha puesto de manifiesto, tanto en estudios evaluativos realizados comparando los rendimientos en matemáticas de estudiantes de ambos sexos y de diferentes países, como en los realizados internamente en los EEUU, Inglaterra o Francia, que «a partir de los doce o trece años, la actuación de las chicas empieza a descender en relación con la de los chicos hasta que, al término del período escolar obligatorio, se observa una diferencia extraordinaria entre ambos sexos, tanto en cuanto a aptitudes como en facilidad de aprendizaje y en notas obtenidas» (Badger, 1983, p. 187). Diferencia, y siempre en el sentido favorable a los estudiantes varones, apreciada no únicamente en los exámenes públicos sino también a través de los resultados medidos en base a diferentes test construidos expresamente para avanzar en el estudio detallado de las áreas o procesos en los que radica tal diferencia.

Los resultados al respecto, aunque no exista unanimidad en lo referente a su explicación, como vamos a ver, sí que parecían concluyentes. Desde 1964 hasta la década actual, las investigaciones realizadas ponían de manifiesto que el rendimiento de chicos y chicas en las matemáticas escolares era «visiblemente» diferenciado, matizando la afirmación de Subirats y Brullet. Es más, se comprobó también que generalmente el rendimiento de las chicas, aunque globalmente inferior a partir de los trece años, era igual o superior al de los chicos en problemas aritméticos o algebraicos y en algunas parcelas de las más modernas matemáticas, tales como las matrices. Sin embargo, en áreas que requieren habilidad y juicio espaciales, como la geometría del espacio, y en la resolución de problemas no rutinarios, así como en determinados temas específicos, como la medición y la proporcionalidad, su rendimiento escolar se mostraba claramente inferior.

La diferenciación se aprecia también, se hace visible, al constatar el hecho de que las chicas tienden a apartarse voluntariamente de las matemáticas y de las materias o carreras relacionadas con ellas, especialmente las técnicas superiores (en nuestro país, por ejemplo, el curso 1984-85 estaban inscritos 7.438 alumnos y sólo 1.455 alumnas en dichas escuelas –Ministerio de Cultura, 1988, p. 168–). Luego parece innegable que también hay consecuencias visibles en función del sexo en cuanto a la cualificación de la fuerza de trabajo.

De hecho, la propia existencia de organizaciones como la sección internacional del Comité de Educación Matemática que presenta cada cuatro años en los ICMI sus trabajos en torno al tema específico de «Mujer y Matemáticas», o los innumerables estudios, artículos y libros que se han planteado el tema ponen de manifiesto que los contenidos, y, en concreto, las matemáticas, constituyen una variable a tener en cuenta para analizar el problema del sexismo en las escuelas, que no se puede desdeñar, a pesar de la igualdad de oportunidades existente en la escuela mixta actual en cuanto a contenidos a estudiar.

El origen o la génesis de los diferentes rendimientos, tanto en el área de Lengua, donde las chicas suelen superar a los chicos, como en el área de Matemáticas, se ha intentado explicar de muy diferentes maneras. Clásicamente se plantea la cuestión como sigue: los factores de discriminación, ¿son biológicos, naturales o culturales o sociológicos? Los primeros se suelen citar, habitualmente, para ser inmediatamente rechazados. El tema de la inferioridad de la capacidad de visualización espacial, relacionado con la superioridad masculina proveniente de una supuesta diferencia sexual en la lateralización del cerebro no puede explicar las diferencias citadas, aunque sólo sea porque en los programas actuales, y desde hace ya casi veinte años, la geometría del espacio brilla por su ausencia, por lo que dichos argumentos no son en absoluto relevantes. Por otro lado, los argumentos biológicos no pueden explicar tampoco el hecho comprobado de que las diferencias en rendimientos o elección de la materia están más marcados en unos países que en otros.

Los factores culturales parecen más determinantes: los estereotipos sexuales que vehicula la educación en la primera infancia, está claro que pueden influir en la diferenciación (unos juegan a construcciones y hacen deporte, mientras que ellas no realizan este tipo de actividades en la misma medida...). Nos podemos preguntar también si la naturaleza de las matemáticas o más bien la imagen que de ella dan las escuelas es un factor de discriminación. Según numerosas encuestas, tanto los chicos como las chicas la perciben de la misma manera: difíciles, hace falta estar dotado, son lógicas, útiles...; pero son ellas las que las procuran evadir en mayor medida.

Los factores de tipo sociológico, como la imagen social de las matemáticas, parece claro que también influyen. Para triunfar, hay que saber matemáticas y las chicas otorgan menos importancia que los chicos a su porvenir profesional. Ante la pregunta de si se consideran importantes para el futuro, los chicos responden, cuando el futuro es el de ellas, que no tienen opinión, mientras que ellas piensan que es bastante importante, lo que muestra que los esquemas tradicionales están bien interiorizados por los alumnos y alumnas y que la presión cultural para identificarse con el rol sexual que conviene a cada uno es tan fuerte que puede hacer difícil a las chicas la opción de elegir las matemáticas, por no convenir al esquema de su sexo (Sueur, 1980).

Los trabajos deseados por ellos son una llave determinante para la elección de las matemáticas por los chicos y para su rechazo por las chicas. Éstas eligen trabajos donde, *a priori*, no tienen mucha necesidad de ellas y que en su mayoría tienen connotaciones femeninas, poco valorizadas en la escala social. Las matemáticas constituyen un filtro crítico para el mercado de empleo y han reemplazado al latín y al griego como instrumentos básicos de selección y orientación escolar. De hecho, tienen un papel selectivo muy determinante; su papel está sobreevaluado, por encima de otras materias.

Spear mostró cómo los resultados diferentes en ciencias, favorables en su mayoría a los chicos, están mantenidos por los juicios y expectativas sesgados de sus profesoras y profesores, los cuales amplían las diferencias que puedan existir.

Lo que cuenta en la orientación de los alumnos y alumnas no son tanto sus deseos como su fuerza, su prestigio, que se sitúa en una jerarquía en la que las matemáticas están en lo más alto. Las chicas rehuyen este modelo y aspiran a un cierto arte de vivir. Los chicos se cuelan por él, obligados a situarse. ¿Habrá que reconciliar las matemáticas y el arte de vivir? Si se admite que es principalmente el rol social de las matemáticas y su *status* selectivo el que preside el destino posterior de la juventud, la situación se hace algo más clara y coherente: matemáticas = poder, poder = masculino. Aplicamos la transitividad y llegamos a la conclusión de que constituyen un dominio reservado al sexo masculino.

Entre los factores culturales y sociales se incluyen también los relacionados con las diferentes expectativas al respecto, tanto de las profesoras como de los profesores. Spear (1984) mostró cómo los resultados diferentes en ciencias, favorables en su mayoría a los chicos, están mantenidos por los juicios y expectativas sesgados de sus profesoras y profesores, los cuales amplían las diferencias que puedan existir. Su estudio realizado con 306 profesores de secundaria en Inglaterra pone de manifiesto que el profesorado de ciencias, tanto varones como mujeres, consideran que la ciencia y la tecnología son más importantes para los chicos que para las chicas. Y juzgan mejor un trabajo si piensan que lo ha hecho un chico, incurriendo en el llamado efecto Pigmalion. Por su parte, Sueur (1980) comprobó en Francia cómo la mitad de los enseñantes esperan que los chicos lo hagan mejor en matemáticas, mientras que ninguno espera que lo hagan mejor las chicas; la profecía de la autorrealización, en definitiva, refleja la inevitable asunción por el profesorado de la imagen social y dominante de las matemáticas, aunque no sean conscientes de ello.

Por otra parte, parece claro que si existe un prejuicio ampliamente extendido, es el de que las matemáticas son una actividad masculina, esto es, están en las antípodas de lo que se llama el *eterno femenino*. En el inconsciente colectivo una *matemática* tiene un aspecto viril y no da importancia a su aspecto exterior. Esto forma parte de un estereotipo: hacer matemáticas no es una actividad para chicas. Las propias matemáticas profesionales se han visto confrontadas con discriminaciones profesionales; prácticamente todas señalan actitudes sexistas en sus relaciones académicas, por ejemplo la de tipo disuasorio (*mejor buscas marido que la solución de la ecuación...*).

También se ha estudiado el tema desde la psicología diferencial, demostrándose que las expectativas y las atribuciones del éxito y del fracaso no son las mismas en los chicos que en las chicas. Los niños tienden a atribuir sus éxitos a causas estables, y sus fracasos a causas inestables; justo al revés que las niñas. Los primeros tienden a supervalorar su rendimiento, mientras que ellas tienden a subestimarlo. A su vez, los profesores tienden a atribuir el fracaso de los chicos a su falta de motivación o de esfuerzo, y no a la falta de capacidad, al contrario de lo que ocurre con las chicas. Atribuciones que se explican en términos de la teoría de la «impotencia aprendida».

Concluyendo este apartado quiero resaltar que la fuerza y la aceptación de los estereotipos se percibe claramente en las expresiones de los y las enseñantes, como lo muestra el siguiente cuadro elaborado por Alberdi (1987, p. 32):

Las niñas son	Los niños son
moldeables	creativos
constantes	activos
pasivas	despistados
ordenadas	independientes
receptivas	vagos
estudiosas	desorientados
teóricas	inteligentes
tímidas	deportistas
maduras	pandilleros
concienzudas	perfeccionistas
aplicadas	conflictivos
colaboradoras	competitivos

La situación en la década de los noventa: análisis didáctico y datos recientes

Entrando en un análisis más propiamente didáctico del tema, querríamos avanzar en la línea de estudiar si los procesos de enseñanza de las matemáticas conllevan características específicas que favorecen la discriminación y refuerzan los estereotipos. Para ello conviene citar previamente algunos estudios que nos puedan ayudar, referidos tanto a los medios de enseñanza de las matemáticas como a la interacción entre el profesorado y el alumnado y la existente entre los mismos alumnos y alumnas. Los realizados en torno a los medios didácticos, como los libros de texto, ponen de manifiesto que los problemas, evaluaciones y ejemplos, tienen muy poco que ver con los intereses y el mundo de las niñas y que se da una sobrerepresentación del hombre en los manuales. Según Milton, por ejemplo –citado por Sueur (1980, p. 36)–, «el contexto en general masculino de los problemas y ejercicios de matemáticas desfavorece a las chicas con respecto a sus condiscípulos varones».

Los análisis de la interacción verbal muestran, y basta con referirse al excelente estudio ya citado de Subirats y Brullet, que las y los docentes establecen más relaciones verbales con los niños y viceversa, éstos interaccionan más con el profesorado. Y analizando más en detalle las interacciones, comprobaron un dato muy significativo: que el 80% de la información dirigida a los niños se refiere al contenido, mientras que el 96% de la dada a las niñas tiene que ver con la forma. Diferenciación poco precisa (la de forma y contenido), pero coherente con lo que veíamos respecto a la aceptación de los estereotipos por parte de los docentes. Se comprueba también en su estudio que las niñas se adaptan más a la norma, piden menos la palabra, reproduciéndose en las aulas el hecho de que el protagonismo en los ámbitos públicos pertenezca a las personas masculinas.

A su vez el estudio de las interacciones entre alumnos y alumnas en las aulas de matemáticas pone de manifiesto que «los niños tienden a desanimar a las niñas, pues les interrumpen, esperan que les lleven y traigan cosas, dominan, presumen, monopolizan el mejor equipo» (Kelly, 1987, p. 12), lo que ha dado lugar a experiencias, realizadas especialmente en Gran Bretaña, en las que las clases se separan por sexos, de manera que las niñas puedan desarrollar su interés por las ciencias y las matemáticas *sin ser atormentadas por los niños* (aquí esbozamos ya la segunda pregunta).

Ya citamos también algunas aportaciones referidas al pensamiento del profesorado respecto a los roles y estereotipos sexuales y su incidencia en la evaluación de las matemáticas. Vimos que sin ser conscientes de ello, tienden a dar por supuesto unos resultados diferentes en función del sexo: esperan que las niñas rindan menos en matemáticas y reflejan esa expectativa en las evaluaciones de los trabajos del alumnado.

Pero revisemos a continuación, para finalizar este primer apartado, los más recientes datos empíricos en torno a las diferencias de rendimiento entre chicos y chicas, extraídos de un artículo de Hanna (1994) que se plantea abiertamente nuestra tercera pregunta: ¿deberían ser enseñados los chicos y las chicas de manera diferenciada? Pues bien, como se puede apreciar analizando los datos recogidos en el cuadro adjunto, en el que se estudian las aportaciones de tres meta-análisis y tres informes internacionales, la tendencia es generalizada: las diferencias entre chicos y chicas han tendido a disminuir claramente en los últimos años. De hecho no se puede decir que existan en la educación obligatoria, aunque parece ser que persisten a partir del bachillerato.

¿Mejorarían los resultados de las chicas si estudiasen las matemáticas separadas de los chicos?

En primer lugar conviene recordar que, hasta la fecha, los estudios al respecto se basan en muestras de un tamaño claramente inferior al de las utilizadas en los estudios que acabamos de comentar, y en evaluaciones bastante menos rigurosas que ellas. Y ello no puede ser de otra manera, puesto que el número de escuelas segregadas ha descendido vertiginosamente en los últimos veinte años en los países donde se han realizado (EE.UU., Gran Bretaña, Alemania y los países nórdicos), por lo que es virtualmente imposible contrastar experimentalmente en la actualidad, con la suficiente fiabilidad y validez, la hipótesis citada. Únicamente el retorno a una situación anterior, en la que las escuelas mixtas y segregadas tuviesen porcentajes similares de estudiantes en su seno, permitiría el análisis experimental de la tesis que afirma que las niñas obtendrían resultados superiores si estudiasen sin *ser atormentadas por los niños.*

Aunque en España no se conocen experiencias de segregación a tiempo parcial, (de niños a los que se les oferte actividades de adiestramiento para el rol doméstico, por poner un ejemplo, y de niñas hacia las tecnologías, por poner otro), en las investigaciones al respecto que se han realizado en los países más desarrollados se parte de la siguiente premisa: «los alumnos y las alumnas se han encontrado durante su infancia con tantas expectativas y un tratamiento tan diferentes, que cada uno de ellos necesita encontrar apoyo y reto en cosas muy diferentes. Por esto es por lo que se necesita una pedagogía segregada» (Kruse, 1992, p. 76). Según esta misma autora, la investigación británica y danesa señala que en colegios sólo para niñas, éstas muestran menos actitudes estereotipadas en cuanto a los roles sexuales, hacen menos elecciones tradicionales y se comportan profesionalmente mejor que chicas de un estrato social similar, pero que asisten a escuelas mixtas. Sobre la base de este tipo de investigaciones, afirma, se está alcanzando por fin el punto de reconocimiento de que la coeducación no favorece a las niñas en la escuela, por lo que se está empezando a experimentar con nuevos tipos de pedagogía feminista y situaciones de aprendizaje basadas en la segregación de sexos.

...las diferencias entre chicos y chicas han tendido a disminuir claramente en los últimos años. De hecho no se puede decir que existan en la educación obligatoria, aunque parece ser que persisten a partir del bachillerato.

Según sus planteamientos, en una sociedad basada en la desigualdad de poder y de *status* entre los dos sexos, el hecho de alternar entre procesos de enseñanza mixtos y no mixtos puede contribuir a la creación de las condiciones para el cambio. Al mismo tiempo, esta alternancia puede servir para matizar y enriquecer el conocimiento que tienen las personas acerca de las condiciones idóneas que pueden hacer surgir una toma de conciencia, que es un prerrequisito para el cambio. Esta toma de conciencia debe incluir todas las cosas que compartimos como seres humanos, nuestras diferencias individuales y la forma en que las divisiones sociales, basadas en aspectos raciales, clasistas o sexuales, estructuran nuestras experiencias y las oportunidades que se nos presentan en la vida.

Admitiendo que la separación entre los sexos puede favorecer en determinados casos dicha toma de conciencia, y que incluso podría ser beneficiosa para abordar temas relacionados con el propio sexo o las características de los géneros, dado que ello favorecería la expresión más abierta de las opiniones al respecto, lo que no queda claro es que ella deba realizarse en el ámbito de la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Los, repito, escasos estudios al respecto (al menos en lo que yo pueda conocer), está claro que comprueban una mejora en los rendimientos escolares de las chicas cuando se les segrega, pero, al haberse realizado en condiciones experimentales muy determinadas, no pueden por más que verse afectados por el efecto «halo». Sería inverosímil que un grupo de chicas separadas, conscientes de la importancia del experimento en que participan, y enseñadas por una enseñante que asume el carácter innovador de dicha experiencia, no «rindiese» considerablemente mejor que cualquier otro grupo de chicas inmersa en aulas mixtas.

Por otra parte, y en segundo lugar, se echa en falta, a mi juicio, el desarrollo de estudios que analicen el problema desde otra perspectiva, buscando otras causas para el alejamiento y la progresiva, aunque relativa, disminución del rendimiento de las chicas que no conlleven su segregación en las aulas. Me refiero a causas que residan en la rela-

Meta-análisis

- HYDE, FENNEMA Y LAMON (1990) examinaron alrededor de 100 estudios publicados entre 1967 y 1987, que habían utilizado tests estandarizados para medir las diferencias entre los géneros en el rendimiento en matemáticas. Concluyeron que, en la escuela primaria y secundaria obligatoria, no existían diferencias, pero que en el bachillerato emergían pequeñas diferencias favorables a los hombres, aunque estas diferencias habían disminuido a lo largo de los últimos 20 años. Los investigadores concluyeron que su meta-análisis proporcionaba muy poco apoyo a las conclusiones globales de estudios previos, según los cuales los chicos superaban a las chicas en su rendimiento matemático.
- FRIEDMAN (1989) supervisó 98 estudios realizados entre 1974 y 1987, incluyendo artículos de periódicos, tesis doctorales y evaluaciones realizadas en los EEUU, concluyendo que no podemos decir a un nivel de confianza del 95% que exista una diferencia de sexo en la población de los EEUU en edad escolar. Su análisis también mostró que la diferencia de sexo en favor de los hombres está decreciendo en cortos períodos de tiempo.
- FEINGOLD (1988) ha revisado las investigaciones realizadas los 27 años previos llegando a la conclusión de que, aunque la diferencia en rendimiento en los niveles del bachillerato ha permanecido constante, las diferencias de género en razonamiento verbal, razonamiento abstracto, relaciones espaciales, habilidad numérica y otras áreas del desarrollo cognitivo, han ido disminuyendo marcadamente a lo largo de dicho período.

Informes internacionales

- El Segundo Estudio Internacional de Matemáticas (SIMS), con datos de estudiantes de 13 años en 20 países recogidos en 1980 y 1981, mostró que la diferencia de género no sólo varía ampliamente en los distintos países sino que son inferiores a las diferencias entre los propios países. Como dice Hanna (1989), en algunos las chicas fueron superiores a los chicos en uno, dos o tres de los cinco subtests, mientras que en otros ocurría lo contrario. En 5 de los 20 países estudiados, no se observaron diferencias de género.
- La Primera Evaluación Internacional del Progreso Educativo (IAEP), realizada en 1988, también concluyó que no existen marcadas diferencias de género en el rendimiento matemático de los y las estudiantes de 13 años. Lapointe, Mead y Phillips (1989) afirmaron que chicos y chicas respondieron al mismo nivel en 10 de las 12 poblaciones estudiadas. Unicamente en Corea y España los chicos de esa edad lo hicieron significativamente mejor.
- La Segunda IAEP estudió los rendimientos de chicos y chicas de 13 años en 20 países y de los de 9 en 14 países. Los resultados indican que hay muy pocas diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento en función del género. Además, Lapointe, Mead y Askew (1992) afirman que los patrones de rendimiento para niños y niñas de 9 años...no son los mismos de los encontrados a los 13 años.

Traducido de HANNA (1994, 310-311)

ción de los alumnos y alumnas con el saber específico, con las matemáticas, y con las situaciones didácticas. Los estudios que hemos citado en el apartado anterior tienden a situar el problema en las aptitudes diferentes de partida, las motivaciones e intereses distintos, los estereotipos asumidos por todos, las interacciones entre los enseñantes y los enseñados y de estos entre sí, o en los medios utilizados, pero no en los problemas específicos de la comunicación y transmisión de los conocimientos matemáticos en situaciones didácticas.

De ahí que las alternativas propuestas para las escuelas mixtas incidan sobre todo en la necesidad de potenciar un cambio en los intereses y motivaciones de las alumnas (animándolas a estudiar matemáticas y ciencias, llevando a mujeres matemáticas a los centros, acercando los enunciados de los problemas de matemáticas al mundo tradicionalmente considerado como femenino, el de la economía doméstica...), de los alumnos (haciendo que vean lo dominantes que son al revisar los vídeos de las clases previamente grabadas), y del profesorado (pidiéndoles que tomen conciencia del problema e interaccionen más con sus alumnas en términos de contenido y no de forma...). Y es obvio que, al respecto, las escuelas mixtas no han ni siquiera comenzado a caminar.

Aunque, por otro lado, podíamos preguntarnos por qué animarlas a que las estudien. ¿Por qué cambiar los intereses? ¿Es legítimo este voluntarismo? ¿No reforzaremos así el imperialismo de las matemáticas, que por otro lado no las necesitan? Pregunta que se une a la más general de los movimientos feministas: la del rechazo del modelo masculino... ¿No sería mejor hacer caer el ídolo que representan hoy las matemáticas? Después de todo, las chicas que las estudian lo hacen porque les gusta, mientras que los chicos se ven forzados a hacerlo para alcanzar un determinado *status* social. ¿No sería mejor desmitificar su papel de selección?, de alguna manera ¿desacralizarlas?

De todas formas, dado que en la propia práctica docente, la que realiza el profesor o la profesora en su aula, es difícil constatar la realidad de la discriminación, es más, se tiende a negar que exista, parece necesario profundizar en el estudio de los procesos a través de los cuales la interiorización de los estereotipos se traduce y da lugar al planteamiento de tareas didácticas diferentes en función del sexo, aunque se aborden conjuntamente los mismos contenidos. Si se entiende que el cambio del pensamiento pedagógico del profesorado se realiza esencialmente en base al análisis de la propia práctica no nos debe de extrañar que el mero conocimiento de los citados, interesantes, aunque poco concluyentes estudios, no sirva, no sea suficientemente operatorio, para transformar el pensamiento y la acción de los profesores y profesoras.

Si recurrimos a la teoría de las situaciones didácticas, parece plausible suponer que es precisamente en las situaciones de validación (Brousseau, 1986), y no en las de acción, formulación e institucionalización, donde el contrato didáctico acentúa la participación de los alumnos y no tanto el de las alumnas. Tanto por sus actitudes más dinámicas y activas en el aula, como por las expectativas

¿No sería mejor hacer caer el ídolo que representan hoy las matemáticas? [...] ¿No sería mejor desmitificar su papel de selección?, de alguna manera ¿desacralizarlas?

de los participantes en el proceso (niños, niñas, profesores y profesoras), en las situaciones de validación, de argumentación, se implican más a menudo los niños que las niñas (en los análisis de vídeos grabados donde se refleja el desarrollo de tales situaciones en diferentes aulas se comprueba claramente).Y es a través de esas situaciones como se puede acceder a un genuino conocimiento matemático. Por tanto, mientras no se planteen de manera que las expectativas de acción de los participantes no inhiban la de las niñas, no las frenen (y ello exige transformar el medio), se podrá explicar en cierta medida el progresivo alejamiento de éstas respecto a dicho conocimiento, así como los resultados que indican su inferior rendimiento en la resolución de problemas no rutinarios. En las situaciones de validación, por otro lado, al no depender el resultado de la intervención de la aprobación del maestro o maestra sino de la aceptación por el grupo de los argumentos, la tendencia más generalizada en las niñas a actuar en función de la búsqueda de la aprobación de la autoridad (el maestro o la maestra) se ve frenada.

Por predominar los procesos de clarificación y valoración en tales situaciones, y no tanto los de ejecución, se fomenta su visión, la de los propios conocimientos, en términos más abiertos, relacionales y comprensivos, favoreciéndose un cambio de actitud ante las matemáticas producto del propio proceso de enseñanza, no de los ánimos que se les pueden inducir por otros motivos (segregándolas, por ejemplo). A su vez, los medios de satisfacción se obtienen cuando se comprende, y no cuando el profesor o la profesora consideran la tarea terminada, o cuando sin más se plantea una respuesta, aunque no tenga sentido, por lo que se incrementan las posibilidades de una implicación en la tarea, en su comprensión, en la realización de una actividad específicamente matemática.

La escasa utilización de este tipo de situaciones en las aulas, su ausencia en la educación infantil y primaria, revierte en el mantenimiento de las normas culturales asumidas por los propios alumnos y alumnas, normas y estereotipos que podrán ir evolucionando y transformándose conforme desarrollen tareas de aprendizaje de las matemáticas que pongan de manifiesto la fragilidad y futilidad de las mismas. Y sin probar previamente que en las aulas mixtas, mediante experiencias de discriminación positiva hacia las chicas, no se consiguen resultados equiparables a los obtenidos mediante su segregación, ¿merece la pena intentar esta última?

¿Deberían estudiar los chicos y las chicas en aulas no mixtas?

Como decíamos al comienzo, esta pregunta no puede contestarse recurriendo a datos empíricos o experimentales. Para responderla debemos esclarecer nuestras visiones sobre la educación, sobre la importancia de determinados contenidos en el currículum, sobre si es más importante la labor de socialización que la de aprender significativamente alguna disciplina científica o artística, etc. Por ello, aunque la respuesta a las dos anteriores preguntas hubiese sido incontestablemente que sí (y, como hemos visto, eso no está tan claro), podríamos y deberíamos seguir cuestionando esta tercera pregunta. Desde mi punto de vista, compartido por Hanna (1994), aquellas personas que teorizan sobre una vía de comprender las matemáticas específicamente femenina, la mayoría de ellas feministas y todas ellas bien intencionadas, puede que estén haciendo un flaco servicio a la educación y al resto de las mujeres. Al reforzar los puntos de vista tradicionales sobre las mujeres, suponiendo que «valen» más para las relaciones personales que para relacionar ideas abstractas, corren el riesgo de retratar a las mujeres como personas no válidas para las ciencias «duras». Al sugerir que las dicotomías entre los géneros (lógica *versus* intuición, agresión *versus* sumisión, rigor frente a creatividad...), son inherentes a los mismos, corren el riesgo de perpetuar los estereotipos socialmente existentes y legitimar las diferencias entre géneros en el rendimiento matemático, además de proporcionar una fundamentación racional a la relativamente escasa participación de las mujeres en los logros científicos en general.

...aquellas personas que teorizan sobre una vía de comprender las matemáticas específicamente femenina, la mayoría de ellas feministas y todas ellas bien intencionadas, puede que estén haciendo un flaco servicio a la educación y al resto de las mujeres

Josetxu Arrieta
Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Oviedo

En definitiva, y para concluir por ahora esta modesta y quizás atrevida incursión en el campo, defenderíamos la tesis de que la realización de situaciones validación en un contexto que no inhiba las intervenciones de las niñas, controlando el medio a-didáctico y la relación de los alumnos y alumnas con él, fomentaría un cambio de actitud ante las matemáticas del sexo femenino e inhibiría la tendencia a impedir el acceso de las mujeres a la misma a través de la enseñanza, sin necesidad de recurrir a su separación en aulas segregadas.

Referencias bibliográficas

ALBERDI, I. (1987): «Coeducación y sexismo en la enseñanza media», en MINISTERIO DE CULTURA (eds.), *La investigación en España sobre mujer y educación*, Instituto de la Mujer, Madrid

BADGER, M. E. (1983): «¿Por qué no son mejores las chicas en matemáticas?», *Educación y Sociedad*, 2, 187-204.

BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-116.

MINISTERIO DE CULTURA (ed.) (1988): *La presencia de las mujeres en el sistema educativo*, Instituto de la Mujer, Madrid.

DAVIS, P. J. y R. HERSCH (1988): *Experiencia matemática*, Labor-MEC, Barcelona.

GARCÍA MESEGUER, A. (1988): *Lenguaje y discriminación sexual* (3.ª ed.), Montesinos, Barcelona.

HANNA, G. (1989): «Mathematics achievement of girls and boys in grade eight: Results from twenty countries», *Educational Studies in Mathematics*, 20, 225-232.

HANNA, G. (1994): «Should girls and boys be taught differently?», en R. BIEHLER SCHOLZ, R.W., STRABER, R. y WINKELMAN, B. (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 303-314

KELLY, A. (1987): «Estrategias para cambiar la situación de las niñas y las mujeres en la Ciencia y en la Ingeniería», en MEC (eds.), *El sexismo en la enseñanza*, Dirección General de Renovación Pedagógica, Madrid.

KLINE, M. (1985): *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, Madrid.

KRUSE, A. M. (1992): «¿Cómo pueden ayudar a las chicas las experiencias escolares?», en BALLARIN, P. (ed.), *Desde las mujeres. Modelos educativos: ¿coeducar/segregar?*, Seminario de Estudios de la Mujer de la Universidad, Granada.

SHUARD, H. B. (1985): «Differences in mathematical perfomance between girls and boys», en W. H. COCKROFT (eds.), *Las Matemáticas sí cuentan*, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, Madrid.

SPEAR, M. G. (1984): «Sex Bias in Science Teacher's Ratings of Work and Pupil Characteristics», *European Journal of Science Education*, 6(4), 369-377.

SUBIRATS, M. y C. BRULLET (1988): *Rosa y azul. La transmisión de los géneros en la escuela mixta*, Instituto de la Mujer, Madrid.

SUEUR, M. (1980): «Comment les maths viennent aux filles ou comment les filles ne viennent pas aux maths», *Recherches*, 41, 30-46.

NUEVA DIRECCIÓN

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tno.: (976) 76 13 49
Fax: (976) 76 13 45

SUMA 20

noviembre 1995, pp. 29-35

Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos

M. Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

En este trabajo analizamos, mediante el uso de diferentes representaciones, la resolución de algunos problemas verbales de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético y lo algebraico, como los de grifos, proporcionalidad, móviles y otros, con el fin de ver qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético.

ARTÍCULOS

En la agenda de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra (Wagner y Kieran, 1989), aparecen varias preguntas acerca de la naturaleza aritmética o algebraica de los problemas verbales. Algunas preguntas en concreto son las siguientes:

1. ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos?
2. ¿Qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético? ¿Hay jerarquías cognitivas con respecto a modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc., que justifiquen un análisis en resolución de problemas algebraicos?

Contestar a estas preguntas es interesante al menos para conocer los puntos de corte entre la aritmética y el álgebra en el currículo escolar, prever los obstáculos que pueden presentarse en el tránsito de la aritmética al álgebra, comprender la naturaleza del proceso de resolución de los problemas verbales y desarrollar estrategias de enseñanza (Puig y Cerdán, 1991).

Para ello analizaremos mediante el uso de diferentes representaciones la resolución de algunos problemas como los de grifos, proporcionalidad, móviles y otros, con el fin de ver la posibilidad de encuadrarlos como problemas aritméticos o algebraicos.

Examinemos diferentes representaciones en el siguiente problema verbal:

Problema 1

Juan es 3 cm más bajo que Víctor, y éste es 8 cm más alto que Pedro. Sabiendo que Pedro mide 160 cm, ¿cuánto mide Juan?

El problema está dado en el sistema de representación verbal-sintáctico y su comprensión, que parte de una lectura adecuada, exige toda una serie de habilidades lingüísticas, reconocimiento de nombres, adjetivos, verbos, etc., y permite identificar lo que se sabe y lo que se quiere encontrar, y con ciertas dificultades podríamos propiciar un procesamiento verbal-sintáctico que nos permita su resolución.

Pedro mide 160 cm.

Víctor es 8 cm más alto que Pedro. (La palabra «éste» en el texto se refiere a Víctor).

Por lo tanto, Víctor mide 168 cm. (Si Víctor es 8 cm más alto que Pedro, entonces hay que añadir 8 cm a la altura de Pedro).

Juan es 3 cm más bajo que Víctor. (Invirtiendo la frase: Víctor es 3 cm más alto que Juan).

Víctor mide 168 cm. (Recordar lo procesado anteriormente).

Por lo tanto, Juan mide 165 cm. (Si Juan es 3 cm más bajo que Víctor, entonces hay que quitar 3 cm a la altura de Víctor).

Una persona que sepa álgebra puede utilizar un sistema de representación formal. He aquí una secuencia posible:

J = V - 3,	Juan es 3 cm más bajo que Víctor
V = P + 8,	Víctor es 8 cm más alto que Pedro
P = 160,	Pedro mide 160 cm
J = ?,	¿Cuánto mide Juan?

Se ha realizado un proceso de traslación de un sistema de representación a otro, proceso que implica mucho más que una simple traducción. Ahora, el problema está en condiciones de poderlo resolver aplicando reglas algebraicas.

Todavía existe al menos otro sistema de representación, que denominaremos físico-visual y que contiene diferentes subsistemas de representación para este sencillo problema: representación física, icónica, geométrica y diagramática.

Un buen ejemplo de una representación del problema mediante diagramas viene dado en la figura 1, basado en método de análisis-síntesis (Puig y Cerdán, 1989). El paso desde la incógnita a través de incógnitas auxiliares, hasta reducir todo a datos del problema, es el análisis; el camino inverso es la síntesis, es decir efectuar los cálculos que aparecen en el diagrama: (8 + 160) - 3.

Una representación geométrica puede ser dada por la figura 2.

A partir de esta representación y mediante el esquema partes-todo (inclusión de clases y comparación) así como de los sistemas de representación verbal-sintáctico y aritmético, se puede generar un sencillo proceso de solución: (figura 3).

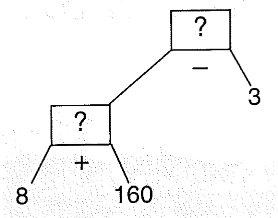


Figura 1

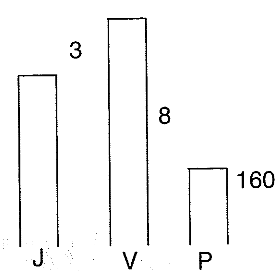


Figura 2

Observemos que no existe una correspondencia unívoca entre un sistema de representación y la estructura del problema, y que los cuatro sistemas de representación son ejecutables, es decir, se pueden desencadenar en ellos procedimientos de solución diferentes, aunque equivalentes.

Resnick y Ford (1990) señalan que el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas es elaborar una representación del mismo, entendiendo por tal elaboración, el proceso que establece vínculos entre el planteamiento del problema y la red semántica de la persona, su conocimiento general acerca de las relaciones matemáticas y espaciales, y su conocimiento de los procedimientos, con el fin de detectar las características del problema y codificarlas para poderlas interpretar por el sistema de procesamiento de la información.

Cuando se ha elaborado una representación del problema, la probabilidad de que se lleve a cabo una solución correcta va a depender de que el resolutor posea en la memoria un conjunto adecuado de procedimientos que se ajusten al problema, tal como se presenta.

Sabemos que la resolución de problemas es una actividad dirigida a una meta y los estudiantes necesitan aprender acciones específicas de resolución de problemas relacionadas con las metas y, a veces, la falta de una buena representación del problema constituye la dificultad central para muchos estudiantes incompetentes en álgebra.

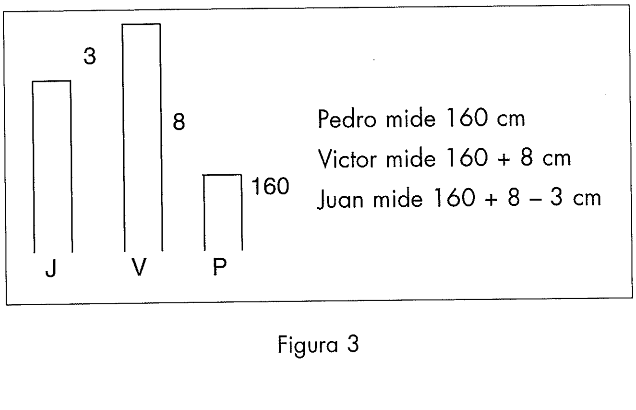


Figura 3

La representación tiene un carácter semántico, pues afecta al plano del contenido, y no debe limitarse el proceso de traducir problemas verbales de álgebra, a la simple traducción de un lenguaje a otro. La traducción va más allá, se trata de la elaboración de una representación en el sistema de representación elegido.

Es necesario considerar con el auxilio de papel y lápiz los tres sistemas de representación posibles en matemáticas: el lingüístico, el físico-visual y el algebraico. Cada uno de ellos puede hacer entrar en juego diferentes representaciones mentales de los objetos o estructuras considerados. Tampoco se debe olvidar los dos sistemas de representación que pertenecen al mundo de las representaciones mentales: la heurística y las creencias (Goldin, 1987). O como señala Kaput (1989) las matemáticas son, entre otras cosas, una colección de lenguajes y éstos tienen un doble papel: son instrumentos de comunicación e instrumentos de pensamiento. Sus puntos de partida son:

a) la noción de representación mental como el medio por el cual un individuo organiza y maneja el flujo de su experiencia,

b) la noción de sistema de representación o sistema simbólico como un artefacto lingüístico o cultural, materialmente realizable.

Los sistemas de representación, cuando se aprenden, son usados por los individuos para estructurar la creación y elaboración de sus representaciones mentales.

Sin embargo, en la práctica hay que reconocer que se ha potenciado más una enseñanza sintáctica del álgebra que una enseñanza semántica, como consecuencia de dificultades inherentes en el trato con los símbolos formales del álgebra, que son muy concisos y de sintaxis implícita, y de la ausencia de representaciones que puedan proveer información de retroalimentación.

Consideremos el siguiente problema:

Problema 2

Un grifo tarda en llenar un depósito 2 horas. Otro grifo llena el mismo depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardan los dos juntos en llenar el depósito?

Ahora, este problema verbal tiene mayores dificultades para desencadenar un procesamiento verbal-sintáctico que nos permita su resolución.

Una representación mediante diagramas basada en una generalización del método análisis-síntesis, es decir, tratando lo conocido y lo desconocido de la misma forma es:

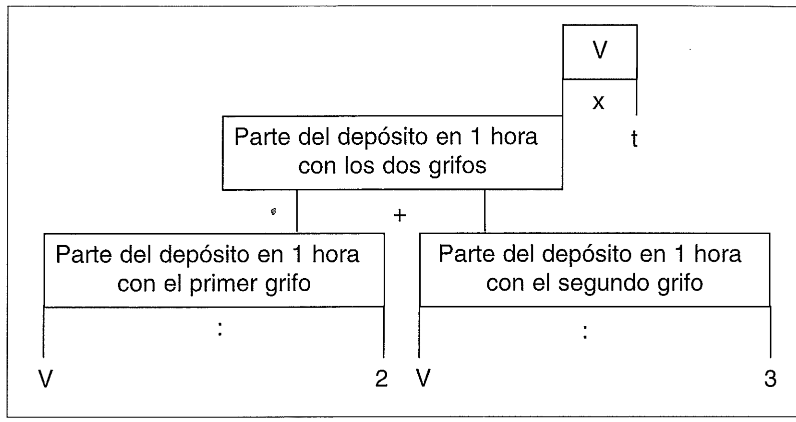


Figura 4

El método se muestra aparentemente algebraico con la presencia de una nueva incógnita que en el diagrama la consideramos como un dato útil para establecer, en la síntesis, la relación definitiva que nos permite obtener el resultado.

Una persona que sepa álgebra podría, utilizando el sistema de representación formal, escribir: $V = (V/2 + V/3)\ t$ o, simplemente, $1/2 + 1/3 = 1/t$.

Desencadenar, en ambos casos, un proceso de solución requiere necesariamente aplicar reglas algebraicas. No ocurría así en el problema 1.

Una representación geométrica sencilla puede ser dada por la siguiente figura:

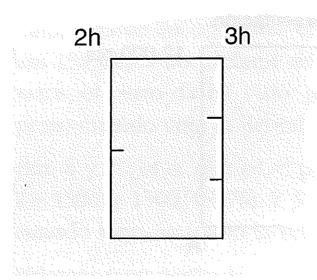


Figura 5

¿Se podría desencadenar un proceso de solución, a partir de esta representación? Obviamente, sí, teniendo en cuenta algunos esquemas como la relación partes-todo, reducción a la unidad y equivalencia, así como a los sistemas de representación verbal-sintáctico y aritmético.

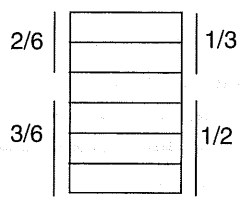


Figura 6

1/2 y 1/3

son equivalentes a

3/6 y 2/6

Luego llenan 5/6 del depósito en 1 hora y el 1/6 restante lo llenan en 1/5 h.

No hemos tenido que recurrir en todo el proceso de resolución a ninguna regla algebraica.

En la resolución de problemas, como hemos indicado, un primer paso es elaborar una representación del problema que tiene un carácter marcadamente semántico, sin embargo esta fase en los problemas verbales algebraicos se ha entendido como una traducción del sistema de representación lingüístico al sistema de representación formal que, generalmente, se concreta en una ecuación, cuyo contenido semántico, por la propia dificultad de los símbolos formales, es escaso, olvidándose del sistema de representación físico-visual como un sistema de representación útil en la elaboración de representaciones del problema.

Problema 3

Andrés tiene 12.000 pesetas y Pedro el 75% del dinero de Andrés. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?

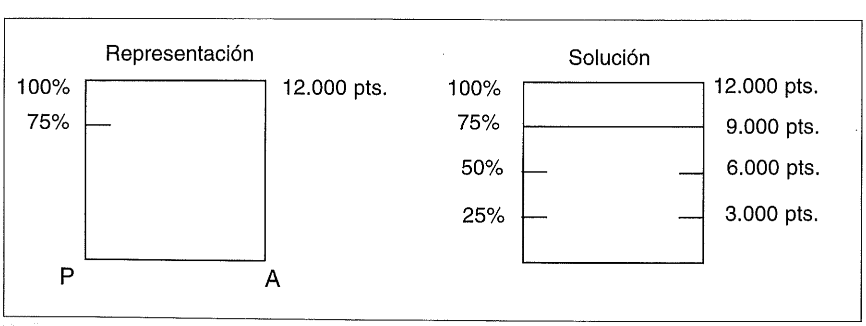


Figura 7

Reducción a la unidad o escala del 25 %.

Resultado: Pedro tiene 9.000 pesetas.

El sistema de representación formal nos conduce a dos tipos de razonamiento en la proporción (comparación por cociente), el razonamiento horizontal (llamado método de la ecuación) y el razonamiento vertical (llamado método proporcional), formuladas respectivamente como:

x = 75% de 12.000 o

75/100 = x/12.000

Problema 4

Antes de recibir la paga semanal Víctor tenía 12.000 pesetas. Después de la paga semanal tiene 13.800 pesetas. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

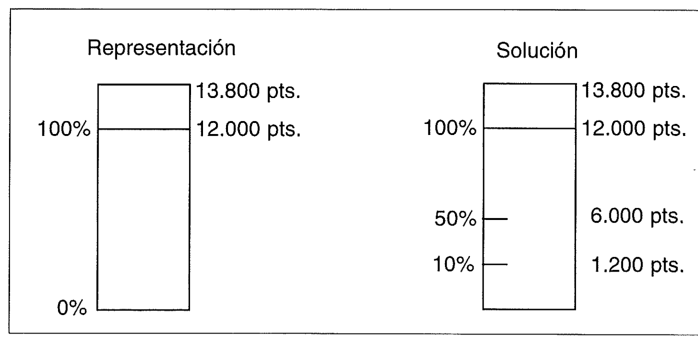


Figura 8

Reducción a la unidad o escala del 10%.

Resultado: El porcentaje de aumento es 15%.

Razonamiento horizontal:

x% de 12.000 = 13.800

Razonamiento vertical:

x/100 = 13.800/12.000

Resultado: 115% - 100%.

Una representación de los problemas 3 y 4 mediante el método análisis-síntesis nos llevaría a interpretar estos problemas como aritméticos, donde lo conocido y desconocido puede ser tratado de formas diferentes.

Los métodos de la proporción y de reducción a la unidad se pueden concretar en: el método de la proporción supone plantear una proporción en cuyo primer miembro figuran las dos cantidades conocidas de una magnitud, expresando que su razón es igual a la razón directa o inversa de la cantidad conocida y de la desconocida de la otra magnitud. Finalmente consiste en trasladar la información a expresiones del tipo:

$$a/b = x/d$$

Reducción a la unidad supone calcular el valor de la segunda magnitud que corresponde a la unidad de la primera, y entonces el valor que corresponde a n, según que la proporcionalidad sea directa o inversa.

Formalmente consiste en trasladar la información a una expresión del tipo: $m = a \cdot n$, para las magnitudes directamente proporcionales o $m \cdot n = a$, para las magnitudes inversamente proporcionales.

Veamos el caso de reducción a la unidad, para situaciones de proporcionalidad inversa, en el siguiente problema.

Problema 5

20 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer la obra 15 obreros?

Se origina con relación al producto de las dos magnitudes (figura 9):

$1/20 \cdot 6$, parte de la obra, por obrero y día.

El resultado está asociado a un proceso de recuento hasta llegar a la unidad.

8)

$$\frac{15}{20} \cdot 6 + \ldots + \frac{15}{20} \cdot 6 = 1$$

Un ejemplo interesante de problemas que parece señalar el tránsito de la aritmética al álgebra lo constituye los problemas de «móviles».

Problema 6

Un automóvil parte del punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase cuánto tiempo tardarán en encontrarse.

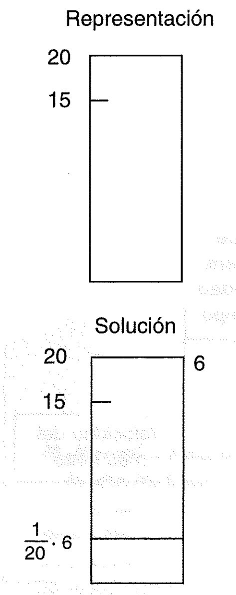


Figura 9

Una versión de este problema es utilizada en Puig y Cerdán (1991) como un posible ejemplo de problema de varias operaciones combinadas que debe situarse en el terreno de álgebra, y lo relacionan con los trabajos de Filloy y Rojano (1985) que han determinado en el terreno de la resolución de ecuaciones un corte entre la aritmética y el álgebra en el momento en que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación.

Al aplicar al problema 6 el método de análisis-síntesis, para llegar desde los datos a la incógnita, es necesario considerar tanto a datos como incógnitas como si fueran datos, es decir, es necesario operar formalmente con ellos. El examen de las relaciones que se obtienen no ha de comenzar necesariamente en la incógnita y terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace es buscar una cantidad, que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema y que pueda expresarse de dos maneras distintas (método cartesiano).

Una representación mediante diagrama, utilizando el método de análisis-síntesis es:

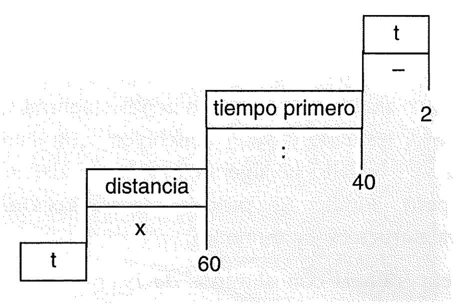


Figura 10

En la Aritmética de Treviso aparece enunciada la regla para resolver problemas de dos objetos que se persiguen y después se alcanzan (Paradés y Malet, 1989, pp.112-114), dando como ejemplo:

«Una liebre se halla delante de un perro, el cual la persigue; se encuentra 150 pasos por delante de él y mientras la liebre da 6 pasos, el perro da 10. Pido: ¿cuántos pasos habrá dado el perro cuando coja la liebre?

La diferencia entre 6 y 10 es 4, que es el partidor. Según la regla, 150 x 2 = 1500 [y 1500/4=375]. Y 375 pasos habrá dado el perro cuando haya atrapado la liebre».

Este tipo de problemas y en particular el problema 6 pueden ser traducidos, como señalan Puig y Cerdán, a una expresión aritmética, mediante el método de análisis-síntesis.

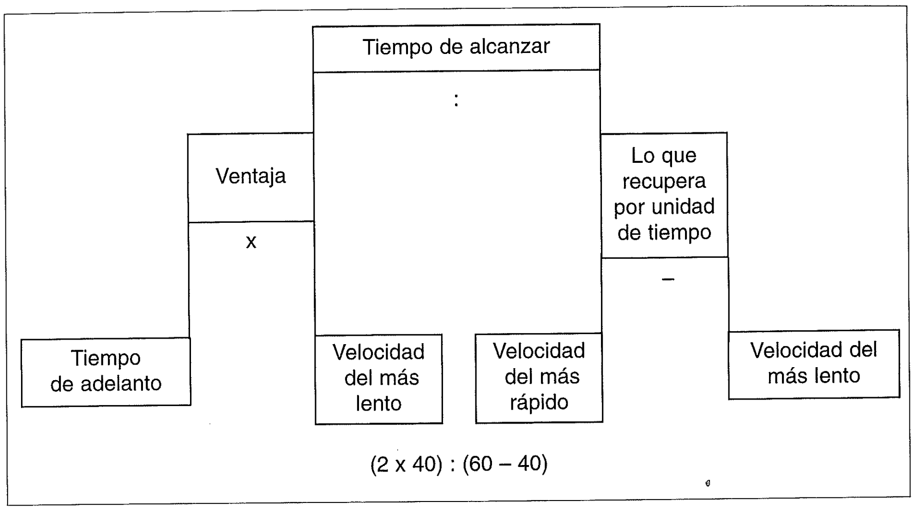


Figura 11

Sin embargo, argumentan que las incógnitas auxiliares necesarias para que el proceso de traducción pueda ser aritmético son más difíciles de establecer que las que aparecieron en el análisis algebraico, y añaden que el análisis algebraico puede calificarse de análisis natural y éste, de complejo, refinado o sutil; concluyen, que este problema se ve abocado al álgebra por la vía del análisis natural, pero «admite» un proceso de traducción, más sutil, cuya estructura es aritmética.

Nuestra experiencia con alumnos de bachillerato y universitarios (Escuela Universitaria de Formación del Profesorado y Facultad de Matemáticas de La Laguna) se ha realizado con una versión del problema en términos de dinero.

En él se prohibe expresamente, su resolución en términos algebraicos.

Problema 7

Juan encontró trabajo y gana 30.000 pesetas semanales. Seis semanas más tarde Pedro encontró trabajo y gana 45.000 pesetas a la semana. ¿Cuántas semanas tardará Pedro en obtener unos ingresos idénticos a los de Juan?

Aparece con cierta facilidad la resolución aritmética mediante comparación por diferencias y otra por cociente con la ventaja obtenida que responde al diagrama aritmético del método análisis-síntesis.

En el sistema de representación visual-geométrico que hemos venido utilizando nos llevaría a la figura 12.

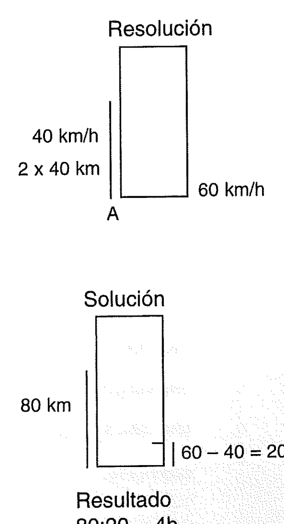


Figura 12

O, también, a la representación algebraica

$$2 \cdot 40 + 40\,t = 60\,t$$

Parece claro que no tenemos elementos suficientes para clasificar un problema verbal en aritmético o algebraico. Vemos como el proceso de traslación puede realizarse mediante varios sistemas de representación (formal, visual-geométrico, diagramas, etc.), que siendo cualitativamente distintos conducen a expresiones equivalentes. Determinar, entonces, entre los problemas verbales de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético o algebraico, cuál tiene una estructura más aritmética que algebraica, o al revés, depende de los sistemas de representación elegidos que provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución.

El sistema de representación de imágenes (físico-visual) aporta elementos de análisis en la resolución de problemas, permitiendo en muchos casos una representación y solución del mismo. Este sistema de representación necesita de una mayor presencia en el sistema educativo, organizado y sistematizado como subsistemas de representación locales que permitan enseñarlos con carácter autónomo, es decir, como autosuficientes.

El que hemos venido mostrando en estos problemas como un sistema de representación visual geométrico (S.R.V.G.) es un sistema mixto que combina el esquema de relación partes-todo y sus relaciones posibles: combinar, cambiar, comparar e igualar, con el sistema decimal, mediante una representación bidimensional continua (rectángulos) que facilita el paso a los esquemas aditivo, multiplicativo y proporcional.

Referencias bibliográficas

FILLOY, E. y T. ROJANO (1989): «Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra», *For the Learning of Mathematics*, vol.9/2, Publishing Association Montreal, Canadá, 19-25.

GOLDIN, G. A. (1987): «Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving», en JANVIER, C. (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale N. J.

KAPUT, J. (1989): «Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra», en S. WAGNER y C. KIERAN (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, Lawrence Erlbaum Asocciates, National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ. Reston, VA, 167-194.

PALAREA, M. M. y M. M. SOCAS (1994): «Elaborations Semantiques VS Elaborations Syntactiques dans L'Enseignement-apprentissage de L'Algèbre scolaire (12-16 ans)», en Actas de la 46 CIEAM, IREM-118, Toulouse, France.

PALAREA, M. M. y M. M. SOCAS (1995): «El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Algebra escolar», en *Actas del Simposium Internacional sobre la «Matemática Actual»*, XXV aniversario de los estudios de Matemáticas en la Universidad de La Laguna (en prensa).

PARADIS, J. y A. MALET (1989): *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*, PPU, Barcelona.

PUIG, L. y F. CERDAN (1989): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

PUIG, L. y F. CERDAN (1991): «Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales», en *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática. Aprendizaje y Enseñanza del Algebra*, Cuernavaca, Morelos, México, 35-48.

RESNICK, L. B. y W. W. FORD (1990): *La enseñanza de las matemáticas y su fundamento psicológico*, Paidós-MEC, Barcelona.

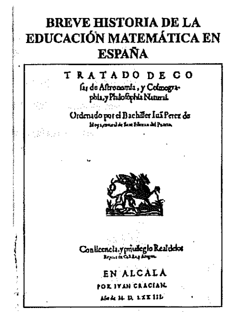
WAGNER, S. y C. KIERAN (1989): «An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra», en WAGNER, S. y C. KIERAN, C. (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Eribaum Associates, NCTM: Hillsdale, NJ. Reston, VA, 220-237.

M. Mercedes Palarea
Martín M. Socas
Área de Didáctica
de las Matemáticas de
la Universidad de La Laguna.
Sociedad Canaria Isaac
Newton de Profesores
de Matemáticas

Concurrencia orientativa
(VI Olimpiada Matemática Nacional)

PUBLICACIONES VII JAEM

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»



- *Actas 7.as Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* (1.500 pts.).
- *Fotografía y matemáticas.* (400 pts.).
- *Breve historia de la educación matemática en España.* (400 pts.).
- *El Cálculo Mecánico. Del ábaco al ordenador.* (250 pts.).
- *Rutas matemáticas por Madrid.* (600 pts.).
- *Medidas tradicionales y de oficios.* (500 pts.).
- *Las Matemáticas en los sellos de correos.* (250 pts.).
- Vídeo: *Rutas matemáticas por Madrid.* (1.000 pts.).

Solicitud de pedidos contra reembolso (500 pts. de gastos de envío):

SMPM «Emma Castelnuovo»
Apartado de Correos 14.610
28080-MADRID

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 37-40

Las matemáticas en la educación de adultos

Faraón Lloréns Largo

ARTÍCULOS

La EPA (Educación Permanente de Adultos) es una gran desconocida. Aprovechando que en la Comunidad Valenciana «está de moda» (se acaba de aprobar la Ley de Formación de Personas Adultas) quisiera hacer una reflexión sobre las matemáticas en este nivel educativo. Al mismo tiempo deseo expresar lo que siento como profesor de matemáticas. Quisiera transmitir mi pasión por las matemáticas, realmente pienso que son fascinantes; me permiten resolver problemas, vencer dificultades, realizar deducciones detectivescas, manipular cifras, realizar medidas, calcular superficies y volúmenes... y, por qué no, evitar que me engañen en la compra. En verdad no comprendo ese odio intrínseco de la mayoría hacia las matemáticas. ¿Será culpa del sistema educativo? ¿Tendrá la culpa la propia asignatura? ¿O quizás sea por los alumnos? ¿Tal vez sean culpables los profesores?

Cuando hablando de manera informal con la gente me preguntan cuál es mi trabajo y les contesto que soy profesor de matemáticas, a muchos de ellos o ellas les cambia la cara, y durante unos segundos me odian al recordar su experiencia en las clases de matemáticas y me ven como al monstruo que atormenta a los inocentes alumnos. Al continuar charlando y, posiblemente, contagiados por mi entusiasmo y pasión por ella, bajan la guardia. Esta vivencia, repetida en múltiples ocasiones, ha determinado la distribución de la presente «novela» en cuatro apartados que he llamado: el escenario del crimen, la víctima inocente, el arma utilizada y el asesino reincidente.

El escenario del crimen

Quisiera aprovechar que recientemente se ha aprobado en la Comunidad Valenciana la *Ley de Formación de las Personas Adultas,* para reflexionar en voz alta sobre la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo.

Las siglas EPA quieren decir *Educación Permanente de Adultos,* o como también se le llama, *Educación de Personas Adultas* para evitar el sexismo en el lenguaje con la palabra «adultos», aunque a mí personalmente la palabra que me molesta es la de «educación», ya que me siento ridículo intentando educar a personas «hechas y derechas» (incluso algunas de ellas podrán ser unos padres). Lo que está en mis manos es la *formación* o *instrucción* en alguna materia concreta (en este caso matemáticas), o el fomentar determinadas actitudes ante la vida (¡menudos rollos morales les «pego»!). Pero, el término educar en relación a un adulto me parece inadecuado. Sin embargo, ¡esa es otra historia!

Como decía, la EPA siempre ha sido la «cenicienta» (por no decir algo peor) del sistema educativo. Ha estado abandonada y su supervivencia (en algunos lugares su existencia) ha dependido de que los que «mandan» estuvieran en ese momento por la labor. Baste tan sólo darse una vuelta por las instalaciones de los centros existentes, ver los recursos disponibles y las dotaciones materiales y de personal. Además es una gran desconocida; pocos conocen su existencia y otros realmente no saben lo que es. Que levanten la mano los que hayan oído hablar de la EPA alguna vez. Ya podéis bajar la mano; como habréis comprobado muy pocos. ¡Pero esa es otra historia!

La EPA está organizada por ciclos:

1er ciclo: *Alfabetización y Neolectores*
2.º ciclo: *Educación Base*
3er ciclo: *Graduado Escolar*

Además están las actividades no regladas: los curso de valenciano (en la Comunidad Valenciana), la preparación de las pruebas de madurez para el título de FP1, cursos de Postgraduado,... También tenemos una oferta de talleres: pintura, cerámica, tapices, reciclaje,... Se organizan charlas, conferencias, visitas culturales, incluso viajes. En fin, considero tan importante nuestra labor educativa y de formación, como la labor social que desarrollamos. Hay que descartar para siempre la idea de que los centros de EPA es donde acuden a sacarse el graduado los «burros» (concepto que no comparto en absoluto; sus razones tendrán para no finalizar con éxito sus estudios). ¡Pero esa es otra historia!

Siguiendo con lo nuestro, lo que querría contaros, tras diez años impartiendo clases en distintos centros de EPA de la zona, es como pienso que debe ser la enseñanza de las matemáticas en este tipo de centros y, más concretamente, en el nivel de Graduado (el que sirve, de momento, para la obtención del título de Graduado Escolar), que aunque con la reforma cambie de nombre deberán seguir existiendo grupos de nivel equivalente. Por otro lado, esto son reflexiones generales, y por tanto, se pueden aplicar a cualquier ciclo de la Educación de Adultos (incluso a cualquier asignatura).

La víctima inocente

Por si alguien no lo sabe, diré que a los centros de EPA acuden las personas mayores de 16 y menores de 123 años (aunque estamos pensando en aumentar la edad tope para que ningún interesado pueda quedar fuera) que quieren completar o iniciar su formación.

Empezaré por las características del alumnado asistente al grupo de Graduado. Lo primero que quisiera destacar es la *heterogeneidad* del grupo. A nuestras clases asisten, en un mismo grupo, alumnos con diferentes características:

- Jóvenes de 16 y 17 años que vienen directamente de la escuela, y que no obtuvieron el título en ella.
- Personas que en su momento no obtuvieron la titulación, y ahora se han dado cuenta que lo necesitan y asisten voluntariamente a la escuela.

[La EPA] es una gran desconocida; pocos conocen su existencia y otros realmente no saben lo que es.

1 Cultura es lo que queda después de haber olvidado lo que se aprendió.

- Personas que ven peligrar su puesto de trabajo o que ven muy inestable el mercado laboral y quieren adquirir una mayor preparación.
- Padres y madres que observan como sus hijos van creciendo y les plantean preguntas y solicitan su ayuda para resolver los «deberes» escolares y quieren prepararse para ello.
- Personas que por puro placer acuden para aprender.
- Otras como terapia para salir de casa; y así un montón de casos particulares.

Esta heterogeneidad presenta dos caras: la positiva, ya que la diversidad de gentes y personalidades hace que se enriquezca el proceso de enseñanza-aprendizaje; la negativa, el no saber por donde «entrarles», ya que lo que va bien para unos, aburre a los otros, para unos corres mucho mientras que para otros vas muy lento,...

Veamos cuáles son las características psicológicas generales de una persona adulta. Éstas nos servirán para conocer mejor el comportamiento del adulto durante el aprendizaje y no caer en el error de utilizar parámetros de comportamiento propios de la infancia y los jóvenes (error muy común ya que los contenidos son de niveles tradicionalmente enfocados al mundo infantil; tampoco olvidemos que nosotros mismos somos profesores de EGB y recibimos en su momento una preparación especifica para enseñar a los niños). Podríamos destacar:

- Dificultad en asimilar conceptos abstractos.
- Le cuesta cambiar lo que ya tiene aprendido, aunque sea erróneo.
- Tiene menos capacidad memorística.

Analizándolas, nos daremos cuenta de que la comprensión debe ser la protagonista del proceso educativo. La memorización deberemos reducirla al mínimo[1]. Los problemas deben plantear situaciones reales y cercanas al adulto. Y, si queremos modificar «vicios» adquiridos, deberán darse cuenta de su error, comprendiendo y asumiendo el nuevo camino que le mostramos.

Debemos puntualizar también que gran parte del alumnado de estos centros está formado por mujeres. Hay que tener en cuenta que, en general, las mujeres no han tenido la misma motivación social ni el mismo trato que los hombres al trabajar las matemáticas. Ésta es una carencia que ellas arrastran y que nosotros estamos en la obligación de subsanar. Descartemos para siempre la idea de que las mujeres son de «letras» y los hombres de «ciencias». ¡Pero esa es otra historia!

El arma utilizada

Aún no comprendo como el primer día de mi primera clase de matemáticas en un centro de adultos no me quedé solo en clase. Supongo que si no se fueron sería por respeto; ¡pero no entiendo como fueron capaces de volver al día siguiente! ¿Que por qué digo esto? Pues porque el temario que me proponía dar durante el curso era de película de terror, con nombres tan «sugerentes» como *sustracción de números enteros, producto de potencias de la misma base, criterios de divisibilidad, potenciación y radicación de números fraccionarlos, polinomios homogéneos, suma algebraica de polinomios, resolución analítica de ecuaciones de primer grado por el método de sustitución, teorema de Pitágoras aplicado a figuras planas,...*

Quizás se piense que los títulos que acabo de poner son normales, y que no deben asustar. Yo invito a que se los proponga a una persona que abandonó hace tiempo el sistema educativo tras un fracaso escolar (no olvidemos que nuestros alumnos no tienen el título), y que, tímidamente, se acerca al centro de adultos.

Con ello no quiero decir que estos contenidos no se vean en las clases de matemáticas, sino que no se deben plantear con estos títulos y desde el principio. Deben surgir poco a poco: al enfrentarse el adulto a la resolución de un problema, surgirá del mismo alumno la forma de atacarlo, y el profesor debe ser un espectador que debe ir aportando pistas cuando vea que el alumno se bloquea (aunque estar atascado en un problema es una situación muy digna y de la que se aprende mucho; no es una pérdida de tiempo. ¡Pero esa es otra historia!).

...nuestros alumnos y alumnas, al finalizar su paso por el centro de EPA no van a continuar grandes estudios, ni necesitarán las matemáticas como herramienta para resolver complicados problemas...

Las matemáticas pueden llegar a ser fascinantes. No lo serán si nos empeñamos en dar a nuestros alumnos teoremas, largas demostraciones, reglas y grandes formalismos. Pero, en cambio, si le animamos a resolver problemas cercanos a él o ella, le proponemos juegos, adivinanzas y le retamos a descubrir e investigar, puede que cambien la opinión que tienen de los matemáticos (debemos ser, «matemágicos»). Mejor aún si todo ello lo aderezamos con un poco de humor, ¡que falta hace en nuestra sociedad actual!

Como dice Martin Gardner[2] «un profesor de matemáticas, por grande que sea su amor por la materia y fuerte su deseo de comunicación, se enfrenta de modo permanente con una dificultad agobiante: ¿Cómo mantener despiertos a sus alumnos?». El mismo autor propone una solución: «Siempre he creído que el mejor camino para hacer las matemáticas interesantes a alumnos y profanos es acercarse en son de juego. [...] El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades»[3]. Como sigue diciendo, lo que debemos es encontrar el equilibrio entre el juego y la seriedad de forma que podamos atrapar al alumno: el juego hará que el alumno y la alumna estén interesados en la actividad y sigan hablando de ella al salir de clase; la seriedad convertirá las clases en algo útil y provechoso (y justificará su inclusión en el currículum, si es que no esta ya suficientemente justificada).

Seamos realistas, nuestros alumnos y alumnas, al finalizar su paso por el centro de EPA no van a continuar grandes estudios, ni necesitarán las matemáticas como herramienta para resolver complicados problemas que se le plantean en su vida. Sólo persigo un objetivo al empezar las clases en un grupo nuevo cada mes de septiembre: que *llegado el mes de junio, la mayoría de mis alumnos y alumnas opinen que las matemáticas no son tan aburridas, y que les gustan y las comprenden mejor que antes.* ¿De qué nos servirá que durante esos nueve meses (qué casualidad, lo mismo que dura un embarazo) la persona adulta haya mecanizado complicados algoritmos, memorizado importantes fórmulas y aplicado grandes métodos, si al finalizar las clases retira por completo de su mesa de trabajo los cuadernos, los esconde en alguna estantería (en el mejor de los casos, porque la mayoría acabarán en la basura) y no vuelve a utilizarlos nunca? En cambio, si le inculcamos el gusanillo de la resolución de acertijos (los problemas se pueden considerar como acertijos que debemos solucionar) y se aficiona a los juegos, a las secciones de entretenimiento de las revistas, y en fin, a poner

2 Martin GARDNER, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial (Libro de Bolsillo 778), 1987.

3 Os recomiendo que leáis y tengáis en la biblioteca del centro los libros de este científico y matemático, muchas de ellas sacadas de una sección que escribía en *Scientific American* y publicadas en libros de bolsillo de Alianza Editorial: *Nuevos pasatiempos matemáticos* (LB 391), *Circo matemático* (LB 937), *Festival lógico-matemático* (LB 1023), *Máquinas y diagramas lógicos* (LB 1091) y *Orden y sorpresa* (LB 1255).

a trabajar a sus neuronas, puede que cuando dejen de asistir a las clases continúen con ello.

Pensad un poco en lo dicho. El objetivo propuesto no es tan trivial como pueda parecer. Llegar a alcanzarlo implica muchas aptitudes y actitudes.

El alumno adulto tiene dificultades ante problemas con enunciado. Conocen perfectamente los algoritmos para realizar las operaciones, pero no saben distinguir cuándo utilizar cada una de ellas[4]. Paradójicamente, en la vida diaria los problemas le aparecerán como situaciones, nunca como expresiones matemáticas que hay que resolver. ¿De qué le sirve saber realizar perfectamente grandes divisiones si no comprende cuando debe dividir? Es más, no olvidemos que existen las calculadoras que pueden ayudamos en nuestros cálculos; pero que no nos pueden decir qué operaciones debemos realizar para resolver un problema. Dejemos que las máquinas trabajen y dediquémonos a pensar. ¡Pero esa es otra historia!

El asesino reincidente

Una vez leí una frase que me gustó mucho y que ahora transcribo: «el mejor maestro no es el que más enseña, sino el que mejor hace aprender».

El profesor de un centro de adultos debe ceder el papel protagonista al alumnado. Esto que debería darse en todos los niveles educativos, tiene mayor razón de ser cuando tratamos con adultos.

Me parece un verdadero derroche no aprovechar la experiencia que tienen los adultos. A diferencia de los niños, que son un libro en blanco donde escribir, los adultos aportan toda una serie de preconceptos, con sus ventajas y sus inconvenientes. Debemos, pues, partir de lo que ya conocen y afianzarlos, y reconvertir los conocimientos erróneos.

Deberemos utilizar un lenguaje comprensible por ellos. ¿De qué nos sirve decir cosas importantes si no se enteran? Si utilizamos términos rebuscados nos admirarán («¡Cuánto sabe este profesor!, pero yo no me he enterado de nada»); si utilizamos palabras sencillas nos comprenderán. Yo personalmente prefiero que me comprendan a que me admiren. Mi trabajo es enseñar, no impresionar a nadie. ¡Pero eso es otra historia!

El tiempo es limitado (como ya he dicho, un embarazo, incluido los dolores del parto cuando se hacen los exámenes y se entregan las notas, pero sin la alegría del bebé). No deberemos intentar atiborrarlos de conocimientos. Por muchos conceptos que les enseñemos, siempre se nos quedará alguno por dar. El alumno debe venir a nuestro centro a *Aprender a aprender*. De esta manera, finalizada su «escolarización» será capaz de continuar su formación permanente. Somos seres inacabados, como dice Paolo Freire y, por tanto estamos toda la vida adquiriendo nuevos conocimientos. Pero debemos estar preparados para ello, abiertos a la adquisición de nuevos conceptos.

El filósofo austríaco L. Wittgenstein decía que podría escribirse una obra filosófica buena y seria compuesta enteramente por chistes, ya que si se entiende la gracia, se comprenderá el argumento implícito en él. Yo adaptaría este pensamiento diciendo que se puede dar un curso de matemáticas compuesto enteramente por juegos y adivinanzas; si se encuentran las soluciones de los acertijos y se estudian las estrategias que nos permitan ganar el juego, se habrán adquirido gran cantidad de conocimientos matemáticos.

Las matemáticas no sólo se aprenden con lápiz y papel, no son sólo conceptos abstractos, ni grandes expresiones. Las matemáticas se pueden «tocar», y nos las encontramos continuamente en la vida diaria[5]. Aprovechémoslo y acerquemos a nuestros alumnos a esta visión del mundo. Si la comprenden, la asimilarán. Si se la imponemos, la odiarán.

Resolución del caso

El escenario del crimen debe ser mejorado por la Administración[6] (¡eso espero!). La víctima inocente, no es tan inocente; aprovechemos su experiencia y convirtámosla en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje. El arma utilizada tiene doble filo: no nos empeñemos en cortar por la parte fría, abstracta e inaccesible de las matemáticas; utilicemos la otra más agradable, interesante e igualmente útil. Por último, ¿deberemos encarcelar al asesino reincidente? De momento no, démosle otra oportunidad. No debemos cruzarnos de brazos pensando que las matemáticas son «el coco» y no se puede hacer nada. Queda todo por hacer, el verdadero crimen sería desperdiciar todo el potencial de las personas que se acercan a nuestros centros tímida y temerosamente, pero de manera voluntaria y con muchas ganas de aprender.

4 En relación al analfabetismo matemático es muy interesante el ensayo *El hombre anumérico* de John Allen Paulos, editado por Tusquets en 1990.

5 El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático.

6 La LOGSE, como respuesta a las necesidades educativas de la sociedad española, dedica el Título III a la Educación de las Personas Adultas. La Generalitat Valenciana acaba de aprobar la Ley de Formación de las Personas Adultas.

Faraón Lloréns
Centro de EPA Beniassent
Alcoy (Alicante).

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 41-51

Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares

J. Mª Cardeñoso
P. Azcárate

ARTÍCULOS

En este artículo se analizan los diferentes proyectos y propuestas curriculares relacionadas con el tratamiento del conocimiento estocático, los contenidos que recogen y las orientaciones que sugieren para su tratamiento en el aula centradas la mayoría de ellas en un estudio frecuencialista del fenómeno aleatorio.

En los últimos años ha habido intensos debates sobre la idoneidad de la introducción de la probabilidad y la estadística en la escuela y en relación al momento oportuno para tal introducción. A partir de las investigaciones y discusiones realizadas, numerosos argumentos se han ido consolidando a favor de dicha inclusión, entre los que cabe destacar:

- Su interés para la resolución de problemas relacionados con el mundo real y con otras materias del currículo.
- Su influencia en la toma de decisiones de las personas cuando disponen sólo de datos afectados de incertidumbre.
- Su dominio facilita el análisis crítico de la información recibida a través, por ejemplo, de los medios de comunicación.
- Su comprensión proporciona una filosofía del azar de gran repercusión para la comprensión del mundo actual.

El ritmo del cambio en la sociedad actual es cada vez más acelerado, lo que supone la necesidad de una formación que proporcione al ciudadano recursos para toda la vida, que le permitan enfrentarse y comprender la complejidad de la sociedad en la que está inmerso. El estudio de la probabilidad proporciona una información valida para enfrentarse con los problemas cotidianos y permite un acercamiento diferente a dichos problemas, una forma distinta de analizarlos, facilitando a los estudiantes la exploración de sucesos y situaciones que son relevantes en su vida diaria.

El reconocimiento de su valor educativo ha llevado a incluir paulatinamente el conocimiento estocástico tanto en los análisis y reflexiones más generales sobre el currículo matemático obligatorio, como en los currículos escolares concretos de cada país.

Propuestas curriculares globales

Un claro reflejo de la importancia adquirida por la educación estocástica en los últimos años y de su reconocimiento como parte integrante de la cultura matemática de los individuos es su inclusión en las propuestas de carácter general sobre la educación matemática.

— Un ejemplo son los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, publicados en 1989 por la NCTM. En ellos se recogen los informes y reflexiones de un gran número de profesionales de la educación matemática y se formula lo que se considera como contenido básico del currículo escolar matemático, tanto en su contenido como en la orientación de su enseñanza, en respuesta a las demandas de la sociedad sobre la necesidad de cambio de las matemáticas escolares. Entre sus introducciones novedosas, encontramos la sugerencia del tratamiento del conocimiento estocástico a lo largo de todos los años de escolaridad.

La justificación de su inclusión se apoya en la consideración de que, para ser un ciudadano integrado en la sociedad actual, es necesario estar bien informado y para ello es esencial entender los conceptos y técnicas fundamentales de la probabilidad y la estadística y sus relaciones:

«La recogida, organización, presentación e interpretación de los datos, así como la toma de decisiones y predicciones basadas en dicha información, son todas ellas destrezas que tienen cada vez más importancia en una sociedad que se base en la tecnología y la comunicación... El estudio de la estadística y la probabilidad subraya la importancia que tiene plantear preguntas, hacer conjeturas y buscar relaciones durante la formulación y resolución de problemas del mundo real... constituyen conexiones importantes con otras áreas de contenido, como Ciencias Sociales y Naturales... Su docencia debe estar impregnada de un espíritu de investigación y exploración» (NCTM, 1991, 54).

Desde los *Estándares* se propone introducir «la exploración del azar» y el tratamiento del «concepto de casualidad» desde el nivel de la Educación Infantil. Su tratamiento en los sucesivos niveles educativos va progresivamente dirigido a la elaboración de modelos, experimentales y teóricos, de situaciones probabilísticas, que les sirvan como referentes en situaciones cotidianas, a la hora de determinar o hipotetizar posibilidades de ocurrencia, y tomar decisiones en función de ello. En sus orientaciones metodológicas apunta la necesidad de implicar a los niños de forma activa en su aprendizaje y de tomar como punto de partida situaciones que surjan del mundo cotidiano, no como concreciones ejemplificadoras del contenido probabilístico aislado, sino para tratar la totalidad de contenidos implicados y sus interrelaciones.

Un claro reflejo de la importancia adquirida por la educación estocástica en los últimos años y de su reconocimiento como parte integrante de la cultura matemática de los individuos es su inclusión en las propuestas de carácter general sobre la educación matemática.

— En la misma línea están las recomendaciones indicadas en el llamado *Informe Cockcroft*, resultado de un estudio realizado sobre la enseñanza de las matemáticas en el Reino Unido. En él se recoge un breve análisis sobre la situación específica de la enseñanza de la probabilidad y la estadística, resaltando los pocos trabajos e investigaciones desarrolladas sobre el tema cuando, curiosamente, se considera al Reino Unido como uno de los países con mayor experiencia en la enseñanza del conocimiento estocástico.

Comenta que, en general, estos conocimientos son iniciados en el nivel de secundaria y, a menudo, se insiste en la aplicación directa de técnicas o fórmulas sin más explicaciones de su significado. Un tratamiento de estas características provoca habitualmente un desarrollo del conocimiento probabilístico, lejos de la comprensión de los alumnos al no incidir en la discusión de los datos disponibles, en su interpretación y en las posibles conclusiones alternativas en función del contexto de aplicación. Como contrapunto, afirma que estas materias no pueden ser consideradas como un conjunto de técnicas, sino como una actitud mental diferente que permite admitir «la incertidumbre y la variabilidad en los datos y en la recogida de éstos y permite tomar decisiones a pesar de esa incertidumbre» (Cockcroft, 1985, p. 286). Sin entrar en especificar contenidos concretos, puntualiza que son conocimientos que deben de ser enseñados con lentitud, a través de todas aquellas situaciones y actividades necesarias para que las ideas se comprendan, desarrollen y afiancen. Mantiene, además, que «los años de primaria poseen un valor intrínseco: el de un período en que se abren las puertas a una amplia gama de experiencias» (Cockcroft, 1985, p. 104) y que proporcionarán una base de estimable valor para la actividad matemática en los años posteriores.

Propuestas curriculares específicas

En la literatura también podemos encontrar propuestas de carácter más específico en relación con el tratamiento del conocimiento estocástico en los diferentes niveles escolares. Como sugieren Ahlgren y Garfield (1991), existen diferentes aproximaciones al currículum estocástico: aquellas cuya organización se basa exclusivamente en un conjunto de actividades secuenciadas y con sentido en sí misma; las que se organizan como unidades completas, independientes y separadas; incluso las que se presentan como todo un curso completo también diferenciado en sí mismo. En la revisión realizada hemos podido detectar algunos ejemplos de estas diferentes aproximaciones.

Si bien en todos los estudios consultados se constata la casi total ausencia de un material escolar apropiado para el trabajo en el aula, sí hemos encontrado interesantes propuestas curriculares específicas sobre el tratamiento del conocimiento probabilístico o estadístico a lo largo de los distintos niveles educativos.

...en todos los estudios consultados se constata la casi total ausencia de un material escolar apropiado para el trabajo en el aula

— Entre ellas podemos citar la propuesta por Vargas y Dumont (1973) en *Combinatoire, statisques et probabilités de 6 a 14 ans*, en la que proponen una secuencia de trabajo a lo largo de los ocho primeros cursos de la enseñanza (6-14), dirigida fundamentalmente a la adquisición de habilidades y destrezas. Su punto de partida es la recogida de información a través de la experiencia. A continuación se introduce a los niños en los aspectos combinatorios y, progresivamente, en la búsqueda de los posibles resultados del evento o experimento aleatorio. También tratan los distintos aspectos del conocimiento estocástico, los diversos tipos de sucesos, la equiprobabilidad, la frecuencia, la construcción e interpretación de las diferentes clases de tablas, gráficas, conceptos, medidas y representaciones posibles, hasta finalizar en el último curso, con la introducción de la visión conjuntista de las probabilidad y de las medidas fundamentales de centralización y dispersión.

Desde nuestra perspectiva, los planteamientos de Vargas y Dumont desvinculan de la realidad el conocimiento y comprensión de estos conceptos con demasiada rapidez. Al finalizar la Primaria, en una edad donde los niños aún no están capacitados para una tratamiento formal de estos conocimientos, ¿cómo puede representar la interpretación del conjunto de sucesos como un álgebra de conjuntos? Todo el desarrollo de la propuesta se apoya en una presentación cercana al conocimiento formal de la probabilidad y la estadística, situando la combinatoria en la base de dicho conocimiento. En sus orientaciones metodológicas sugiere la necesidad de acceder a estos conocimientos a partir de la experimentación en situaciones especialmente planificadas y tratadas con un material concreto. Son situaciones entendidas como elementos de experimentación, diseñados más en función del contenido y su estructura, que desde la realidad e intereses del niño. Pueden servir de referencia para su inclusión en proyectos o unidades más amplias que otorguen un sentido a su tratamiento.

— Una propuesta más cercana a las ideas actuales es la presentada por Díaz Godino, Batanero y Cañizares (1988) en su libro *Azar y Probabilidad*; en la que también se recoge la necesidad de su tratamiento desde los primeros niveles. En dicha propuesta, completada con un estudio teórico sobre el tema, se analiza la imposibilidad de enfocar la enseñanza elemental de estas nociones hacia su adquisición formal, dada la incapacidad cognitiva de los niños de estas edades. Como alternativa, enfocan su trabajo hacia la construcción de intuiciones, basadas en la propuesta de una amplia fenomenología. Dicha construcción constituirá un momento previo y base de la adquisición de conceptos formales, propio de etapas educativas posteriores.

Se presentan una serie de «unidades didácticas» que pueden ser desarrolladas en las aulas desde los primeros niveles, incluido el Infantil, hasta la Educación Secundaria, con un tratamiento escalonado del conocimiento estocástico, a modo indicativo y orientativo de un proceso global de formación. La secuencia de presentación va en progresivo aumento de complejidad de los conceptos implicados, fenómeno aleatorio, juegos combinatorios, frecuencias relativas, el lenguaje del azar, comparación y asignación de probabilidad, etc. En el desarrollo de las unidades propuestas siempre parten de situaciones experienciales en las que los niños ha de tomar parte activa, pero son situaciones puntuales, al margen de todo contexto global, que no representan en sí mismas ningún proceso, ni una relación con situaciones más amplias.

— La propuesta presentada por Bisson (1983) es una adaptación de la teoría de situaciones didácticas plantea-da por Brousseau (1986). Su punto clave está en la elección de problemas significativos que preservan el sentido del conocimiento implicado, inmersos en una situación más amplia en la que esté envuelto todo el sistema de interacciones: *la situación didáctica*. Plantea los tres tipos de situaciones didácticas que, según Brousseau, deben de ponerse en juego en un proceso de enseñanza/aprendizaje del conocimiento matemático, según el tipo de dialéctica que establezcan: de la acción, de la formulación y de la validación:

- En las situaciones que domina la dialéctica de la acción se plantean problemas al estudiante cuya solución esté relacionada con el concepto que se pretende enseñar. Se debe posibilitar el contraste entre distintas soluciones y ajustar su acción en función de la información que recibe de la propia situación.
- En la situación de formulación el alumno debe elaborar el modelo intuido de la fase anterior, construyendo un lenguaje que permita el intercambio de información con sus compañeros. Como resultado, el alumno crea un modelo explícito que puede ser reformulado con ayuda de signos o reglas.
- El tercer tipo es la situación de validación en la que el objetivo es conseguir que el estudiante avance en el proceso de matematización, al probar la validez del modelo para interpretar hechos diferentes y convencer de su validez a otros compañeros.

Tal como están descritas, consideramos que las situaciones en donde se plantea la dialéctica de la acción, siempre inmersas en contextos más amplios que conecten con la realidad del niño, son las idóneas para poner en juego en los primeros años de la primaria. Son aquellas en la que los problemas planteados están en relación con el concepto que se pretende enseñar y en las que se pone al niño en contacto con la experiencia directa.

— Hay otras propuestas, focalizadas exclusivamente en los niveles de Secundaria, como son :

- La presentada por el Grupo Cero (1984) en *Un proyecto de curriculum de Matemáticas*. De él, no nos interesa tanto los contenido que proponen: recogida, tratamiento y análisis de los datos; reconocimiento de situaciones de azar; juegos de azar y su tratamiento estadístico; frecuencia relativa; probabilidad; etc.; sino sus orientaciones metodológicas. Defiende la introducción lenta del estudio de conceptos probabilísticos y estadísticos, concediendo tiempo suficiente a las discusiones y experiencias subyacentes a partir de variadas situaciones. En todo su trabajo se enfatiza la perspectiva frecuencialista de los sucesos y el subsiguiente tratamiento estadístico de los datos.
- La propuesta presentada por el School Council Project on Statistical Education (1980), *Statistics in your world*, en la Universidad de Sheffield, cuna, junto con la de Bielefeld, de gran parte de los trabajos e investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística. En su trabajo ofrecen una serie de cuadernos de actividades para el alumno (11-16) y de notas para el profesor. Su orientación metodológica parte, básicamente, del desarrollo del conocimiento en contextos prácticos vinculados con el mundo del niño. Plantean una adquisición progresiva tanto de las técnicas como de los conceptos y la no necesidad de una justificación teórica completa en estos niveles de la educación. Ponen de manifiesto el carácter interdisciplinar de estas materias y, por tanto, su potencialidad para relacionar el conocimiento matemático con otras áreas del currículo. Una adaptación de dicho proyecto es *L´estadistica en el votre mon*, publicada por el ICE de la UAB en 1990. En dicho proyecto se presentan diferentes materiales para el alumno y libros para el profesor, en los que se proponen una colección de actividades y situaciones de experimentación que intentan estar conectadas, en cierta forma, con problemas cotidianos y con el mundo real.

Engel presenta una recopilación exhaustiva de problemas y situaciones, discutidasy desarrolladas, con un claro carácter instructivo.

— Existen también propuestas de situaciones o tareas de enseñanza en donde se presentan experiencias accesibles a todos los niveles educativos e integrables en diferentes procesos. Un ejemplo es el, ya clásico, libro de Engel (1988), *L'Enseignement des Probabilites et de la Statistiques*. En él, Engel presenta una recopilación exhaustiva de problemas y situaciones, discutidas y desarrolladas, con un claro carácter instructivo. Sus ejemplos han sido fuente de un gran número de experiencias sobre la enseñanza de la probabilidad y la estadística, realizadas por profesionales de diferentes niveles, tanto en sus aulas como en sus trabajos de investigación.

En su propuesta, aunque plantea inicialmente la necesidad de integrar estos conocimientos en todos los niveles de la enseñanza, en su desarrollo real dirige el estudio de las probabilidades hacia los niveles de Secundaria. La mayoría de las situaciones propuestas por Engel necesitan para su desarrollo de unos mínimos conocimientos matemáticos, algunos no accesibles a los niños de Primaria. Aún así, su obra es de gran significación por aportar multitud de ideas útiles para trabajar en la escuela el conocimiento estocástico.

Muchas de estas propuestas se caracterizan por pretender dar protagonismo a los niños en el desarrollo de las distintas actividades, pero presentan un formato muy específico, cerrado en muchos casos y lineal; con una secuencia determinada *a priori* e independiente del contexto en donde pueden adquirir significado para el niño. Presentación controvertida, en cierta forma, con la idea que tenemos sobre el sentido del tratamiento del conocimiento matemático en la escuela, cuyo principal problema es la construcción del sentido de los objetos matemáticos, hecho dependiente del contexto real de aplicación (Thom, 1974).

Todas estas reflexiones, proyectos y estudios, desarrollados en los últimos años, han ido configurando nuevas propuestas en cuanto a la enseñanza de la matemática, en general, y de la estocástica en particular. Propuestas que paulatinamente se han ido reflejando en la letra de los distintos sistemas educativos.

Nuestro currículo prescritivo

El sistema educativo de un país es el reflejo de las necesidades socio-económicas, culturales y políticas, la reforma del sistema surge cuando las necesidades de dicha sociedad evolucionan y sus demandas se modifican. El cambio de las necesidades sociales y el mayor conocimiento sobre el tema, a partir de los estudios e investigaciones realizadas, han provocado la transformación de la opinión de aquellos elementos de la sociedad que piensan sobre la enseñanza de la Matemática en los diferentes países. Desde ellos se procede a la selección de los contenidos que se deben enseñar, configurando las propuestas oficiales, en función de las demandas de la sociedad. La inclusión oficial, en los currículos escolares elementales de los aspectos relacionados con el conocimiento estadístico y probabilístico, es fruto de dicho movimiento.

...en el caso del conocimiento estocástico la definitiva integración en el ámbito escolar se está dando a un ritmo lento y difícil, entre otras razones, por el escaso conocimiento que aún se dispone sobre la didáctica de la estocástica, la carencia de profesores cualificados y su particular naturaleza epistemológica.

Esta selección, por otra parte, es el resultado de lo que, el propio Chevalard (1991), denomina *trabajo externo de la transposición didáctica*, y es lo que determina, a partir del saber científico, los objetos del saber que deberán de ser enseñados, es decir el currículo *pretendido*, que se propone, en gran parte, por mediación de los programas oficiales (Traves y Westbury, 1989). No obstante, este paso no es suficiente, pues en el caso del conocimiento estocástico la definitiva integración en el ámbito escolar se está dando a un ritmo lento y difícil, entre otras razones, por el escaso conocimiento que aún se dispone sobre la didáctica de la estocástica, la carencia de profesores cualificados y su particular naturaleza epistemológica. Razones ya indicadas por Ràde (1986), pero que mantienen gran parte de su vigencia. Por tanto, su inclusión en el currículo *ejecutado* en el ámbito del aula y su reflejo en el currículo *alcanzado* por los alumnos está aún muy lejos de ser una realidad en un gran número de países, entre ellos España.

En un informe elaborado por la International Commission on Mathematical Instruction denominado *School Mathematics in the 1990s,* publicado en España en 1988 como *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90* (Howson y Wilson, 1988), se presenta una revisión sobre los currículos de diferentes países y en ella se constata un alto grado de uniformidad entre las diferentes propuestas en lo referente a aritmética y álgebra, no tanto si nos fijamos en los contenidos de geometría, y una gran variedad con respecto al estudio de la probabilidad y la estadística. Hay países con un largo camino recorrido en la enseñanza de estos temas desde la escuela elemental, como Inglaterra o Alemania, y otros en que su tratamiento en los currículos es prácticamente insignificante.

En *España* no ha sido incluido en el desarrollo curricular de la enseñanza primaria hasta la ordenación del año 1992, con las nuevas propuestas resultado del desarrollo de la LOGSE y su concreción en las distintas autonomías. En el currículo español, en las sucesivas ordenaciones de la Educación Obligatoria (1970, 1981, 1984), no encontramos ninguna referencia en los primeros ciclos en cuanto a objetivos/contenidos ni en el campo de las orientaciones metodológicas, para el tratamiento matemático de nociones asociadas al azar y a la probabilidad. En la enseñanza básica actual las nociones asociadas al mundo de la incertidumbre están prácticamente ausentes, basta analizar los libros de texto de EGB para constatarlo.

Sin embargo, en la regulación del Ciclo Superior de la EGB, en los llamados Programas Renovados, si se recoge un bloque de contenidos, denominado «Estadística descriptiva», centrado en la introducción de las técnicas elementales de tratamiento y representación de datos, sin ninguna alusión al tratamiento de la probabilidad y sus relaciones, dejando estos contenidos para el BUP, comentando explícitamente que «este tema enlaza en BUP con el estudio de las distribuciones estadísticas y de la probabilidad, instrumento matemático que utiliza la estadística inductiva» (*Programas Renovados de la EGB. Ciclo Superior*, 1981, p.175). Traves y Westbury (1989), en un análisis exhaustivo de los currículos matemáticos, ya advierten que, en general, éstos se centran más en el dominio de la estadística, porque «aparentemente la probabilidad no es suficientemente importante a nivel internacional como para justificar el rótulo de Probabilidad y Estadística» (p. 16), entre sus contenidos.

En el ámbito metodológico de los Programas Renovados había unos principios explícitos que orientaban al profesor hacia la necesaria implicación activa del alumno, respetando y adaptando la enseñanza a su ritmo de aprendizaje. Pero, sin embargo, la presentación de una secuenciación de objetivos y contenidos perfectamente delimitados y organizados jerárquicamente, induce a los profesores, y fundamentalmente a los del Ciclo Superior, a presentar los conceptos previamente de forma teórica, para luego aplicarlos a la resolución de ejercicios.

Habitualmente, en nuestro medio educativo la enseñanza de la probabilidad se ha iniciado alrededor de los quince años. En los programas del Bachillerato actual aparece en los cuestionarios oficiales de primer curso un solo objetivo formulado en relación al conocimiento probabilístico: «Introducir la teoría combinatoria y la noción de probabilidad para el caso de un universo finito». Este planteamiento ha llevado generalmente a una presentación de la teoría matemática de la probabilidad desde una perspectiva clásica, en la que la asignación de las probabilidades iniciales a los sucesos se basa en la regla de Laplace y en el cálculo combinatorio. El tema se desarrolla de forma axiomática, sin considerar que en estos niveles la gran mayoría de los alumnos no pueden comprender un desarrollo axiomático de la teoría matemática, y mucho menos cuando adolecen de toda preparación intuitiva que es necesaria y previa a cualquier conocimiento formal de la probabilidad. El resto de los contenidos regulados están relacionados con el conocimiento estadístico y, en general, no se establecen conexiones entre ellos.

En sus planteamientos metodológicos subyace la misma idea señalada para el caso de los Programas Renovados. Los conceptos aparecen en los cuestionarios como objetos matemáticos sobre los cuales, en primer lugar, se ha de estudiar su definición y propiedades, para luego ser aplicados a casos particulares, a modo de ejemplo. «Es el marco de una enseñanza clásicamente estructurada en curso teórico y ejercicios, es decir, «tu aprendes, yo explico»» (Margolinas, 1993, p. 175).

En los programas del Bachillerato actual [...] el tema se desarrolla de forma axiomática, sin considerar que en estos niveles la gran mayoría de los alumnos no pueden comprender un desarrollo axiomático de la teoría matemática, y mucho menos cuando adolecen de toda preparación intuitiva que es necesaria y previa a cualquier conocimiento formal de la probabilidad.

La nueva regulación del sistema educativo español, producto del desarrollo de la LOGSE, ha incidido significativamente en el tratamiento de este campo del conocimiento matemático en los currículos oficiales. Por primera vez se recoge su enseñanza desde los primeros niveles educativos y a lo largo de toda la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria.

Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO)

Con respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria, dentro de sus objetivos, se presenta la necesidad de incorporar al lenguaje y modos de argumentación habitual, la forma probabilística de expresión matemática y las diversas formas de explicar la realidad determinada/aleatoria. Así mismo, recoge la utilización de técnicas sencillas de recogidas de datos, tanto referidos a fenómenos causales como aleatorios y a la interpretación de dichos datos. En el apartado de contenidos se presenta un bloque denominado «Tratamiento del azar», en él se recogen los diferentes conocimientos, tanto conceptuales, procedimentales, como actitudinales, que se han de trabajar en este nivel. Básicmente se centran en: reconocer y caracterizar los fenómenos aleatorios; asignar probabilidades a determinados sucesos tanto en experimentos simples como compuestos; introducir el concepto de probabilidad a través del estudio frecuencial de los fenómenos; introducir la probabilidad laplaciana como correspondiente a casos sencillos y equiprobables.

Entre los procedimientos a poner en juego propone la utilización de distintas fuentes de información para asignar probabilidades, y de diversas técnicas y procedimientos para su cálculo. Y entre las estrategias más generales: reconocer fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico; argumentar conjeturas sobre su comportamiento; y tomar decisiones en los distintos contextos en función de la información obtenida. Estrategias que llevarían a los alumnos a una valoración positiva de la información probabilística, a la hora de tomar decisiones ante situaciones de incertidumbre, adquiriendo cautela y sentido crítico ante las creencias populares sobre los diferentes fenómenos aleatorios.

En las orientaciones específicas sobre el tratamiento del azar, plantean la introducción progresiva de la idea de azar y probabilidad desde los primeros años de la etapa. El trabajo debe estar dirigido al desarrollo de una intuición sobre la probabilidad, para lo que propone directamente el enfoque frecuencial, tanto para el estudio de la probabilidad como del significado y comportamiento de la aleatoriedad, permitiendo detectar sus «regularidades». Da un papel relevante a la actividad manipulativa y al juego y considera a la combinatoria como un método idóneo para afrontar ciertas situaciones probabilísticas.

Paralelamente se presenta un bloque de «Interpretación, representación y tratamiento de la información» que propone directamente el estudio estadístico de los datos pero que, curiosamente, se divide en dos grandes apartados:

- El tratamiento de la información sobre los fenómenos causales, en el que introduce el significado de la proporcionalidad.
- El tratamiento de la información sobre fenómenos aleatorios.

Mantiene un tratamiento paralelo con el otro bloque de contenidos, donde se incidía en la conceptualización del fenómeno aleatorio a través de parámetros probabilísticos, complementarios de los estadísticos; en ningún momento, en las orientaciones sobre su tratamiento, se presenta referencia alguna sobre las posibles relaciones entre ambos bloques.

Sus orientaciones metodológicas, acordes con las orientaciones psicopedagógicas generales de todo el sistema educativo español, recogen los planteamientos constructivistas del conocimiento y defienden los siguientes aspectos: la importancia de los conceptos previos de los alumnos como punto de partida; el papel de la aproximaciones contextuales e inductivas al conocimiento matemático; el proceso de actividades como algo abierto y flexible con variedad de métodos de trabajo y organizaciones; con estrategias válidas y necesarias para provocar un aprendizaje significativo.

Ya en el segundo ciclo [de Secundaria] propone la adquisición de una idea más precisa del concepto de probabilidad como medida de lo esperable en la ocurrencia de un suceso y sus posibles aplicaciones, pero sin llegar a su axiomática.

Por último, en la secuencia sugerida desde las propuestas oficiales, (MEC, 1992*b*), se considera al primer ciclo como una continuación del trabajo desarrollado en Primaria sobre los fenómenos en los que interviene el azar, llegando a cierto nivel de formalización de una medida del grado de incertidumbre que le permita asignar probabilidades a través fundamentalmente del recuento. Ya en el segundo ciclo propone la adquisición de una idea más precisa del concepto de probabilidad como medida de lo esperable en la ocurrencia de un suceso y sus posibles aplicaciones, pero sin llegar a su axiomática.

Existen otras secuenciaciones, sugeridas por distintos grupos de profesores, como las tres propuestas recogidas en el libro del MEC (1993), en las que encontramos opciones muy diferenciadas, desde la consideración de los conocimientos probabilísticos y estadísticos como un bloque único, hasta una fuerte tendencia hacia lo estadístico en detrimento de lo probabilístico, retrasando su tratamiento al segundo ciclo. La propuesta *Actividades sobre Azar y Probabilidad,* presentada por Cruz, González y Llorente (1993) como material curricular, esta centrada en el tratamiento de la probabilidad y el azar a través de diferentes experiencias y situaciones, localizando también el tratamiento de estos temas a partir del segundo ciclo.

Educación primaria

Con respecto a la Educación Primaria, el currículum español presentado en el Real Decreto del 1679/91 sobre la regulación de la Educación Primaria (BOE del 13/9/1991), recoge la enseñanza de estos conceptos en un bloque único denominado «Organización de la información». En su desarrollo se concretan los objetivos y los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales para la iniciación del conocimiento estadístico y probabilístico a lo largo de los distintos ciclos de la primaria (MEC, 1992*a*).

En el desarrollo del bloque encontramos, de nuevo, una mayor carga en la introducción de conocimientos y técnicas elementales de la estadística descriptiva, si bien es cierto que plantea la necesidad de construir el conocimiento probabilístico en interrelación con el propio conocimiento estadístico. El conocimiento probabilístico es iniciado desde la introducción del carácter aleatorio de una experiencia hasta las primeras asignaciones del grado de probabilidad de un suceso. En la secuenciación sugerida por el MEC, la iniciación en la probabilidad y la caracterización de los tipos de sucesos, se propone en el tercer ciclo de Primaria, sesgando todos los otros ciclos hacia un tratamiento exclusivamente estadístico, en el que se incluyen recuentos, tablas, gráficos e interpretaciones de los datos representados, todo previamente a la introducción de una interpretación probabilística de la información.

En sus orientaciones más generales, acordes como ya dijimos con los presupuestos constructivistas, se plantea la necesidad de partir de la experiencia del niño y de sus conocimientos previos sobre el tema, respetar sus ritmos de aprendizaje y guiar su aprendizaje a través del diseño de una secuencia de actividades, relacionadas entre sí en la medida de lo posible, pero de distintas categorías: actividades de presentación, de desarrollo, de generalización y de profundización. Matiza al final que es útil comprobar que los objetivos se han cumplido al finalizar el proceso.

Más concretamente, para el tratamiento del «Azar y la probabilidad», proponen como introducción idónea partir del la experimentación y análisis de los juegos de azar, confrontando las estimaciones realizadas y los resultados obtenidos. Consideran que los niños de estas edades «ya pueden apreciar el carácter aleatorio de un suceso mediante la observación de fenómenos de la vida cotidiana y mediante la realización de juegos... pueden decidir de forma sencilla e imprecisa el grado de probabilidad de un suceso» y que, por tanto, las actividades apropiadas para «el tratamiento de estos contenidos son en su mayoría lúdicas y motivadoras y suponen el trabajo con objetos concretos y conocidos, por lo cual no ofrecen gran dificultad para su enseñanza y aprendizaje» (MEC, 1992*a*, p. 94). Podemos percibir la sugerencia de una introducción de este conocimiento a través de un camino puramente intuitivo y experimental que puede provocar su comprensión parcial y desvirtuada.

En la propuesta presentada por la Junta de Andalucía (BOJA del 20/6/1992), autonomía a la que pertenecemos, no hay una presentación explícita de un bloque relacionado con algún aspecto del conocimiento estocástico. Pero, como podemos comprobar están recogidos implícitamente en los distintos objetivos generales. En la colección de materiales curriculares presentados por la Junta de Andalucía para la Educación Primaria (Junta de Andalucía, 1992), podemos señalar, por ejemplo, que entre los objetivos presentados en el área de las Matemáticas hay dos que están claramente vinculados con el aprendizaje del conocimiento estocástico:

(Obj. 1) «Utilizar los códigos y conocimientos matemáticos para apreciar, interpretar y producir informaciones sobre hechos o fenómenos conocidos, susceptibles de ser matematizados.» (Tomo I, p. 103).

[En primaria] podemos percibir la sugerencia de una introducción de este conocimiento a través de un camino puramente intuitivo y experimental que puede provocar su comprensión parcial y desvirtuada.

(Obj. 6) «Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.» (Tomo I, p.104).

Este hecho se refleja a lo hora de sugerir una cierta organización y secuenciación de los contenidos propuestos desde el Decreto de la Educación Primaria, recogida en el Tomo II de dicho desarrollo. Así encontramos indicaciones del tipo:

En el segundo ciclo y, curiosamente, dentro del desarrollo del bloque «Números y operaciones», la siguiente sugerencia:

- «Exploración sobre la causalidad. Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias» (Tomo II, p. 99).

Ya en el tercer ciclo, y dentro del mismo bloque de «Números y operaciones», encontramos las siguientes indicaciones:

- «Recogida, organización, representación, análisis y valoración de datos de forma cada vez más sistemática. Formulación de sencillas inferencias. Presentación de manera ordenada y clara de los resultados».
- «Aproximación a la idea de probabilidad. Exploración del grado de probabilidad de sucesos sencillos» (Tomo III, p. 100).

En otro bloque distinto «Conocimiento, orientación y representación espacial», pero también en el tercer ciclo, encontramos reflejado el tratamiento estadístico de los datos, de forma muy especial:

- «Representaciones espaciales de ideas y situaciones no espaciales. Elaboración e interpretación de tablas y gráficas estadísticas» (Tomo III, p. 99).

Dicha organización no parece reconocer la problemática específica del conocimiento estocástico cuya naturaleza (Azcárate, 1995) difiere sustancialmente de otros campos del conocimiento matemático, como el numérico o el geométrico. Su presentación, diluida y dispersa, sin referencia a la necesaria relación entre el campo empírico y teórico para su elaboración, puede producir gran confusión a los profesores a la hora de su tratamiento en el aula.

En el apartado de las orientaciones metodológicas, presentado por la Junta de Andalucía, hay algunas indicaciones referidas a estos temas. Así, indican que los niños del segundo ciclo suelen tener un especial interés por situaciones donde ha de analizarse y preverse la probabilidad de un suceso o la posible repetición de un suceso. Aclaran que, siempre en un tono investigativo y lúdico, se le pueden proponer a los niños actividades tendentes a discriminar lo seguro, lo posible, lo probable, etc. Igualmente se consideran importantes las actividades experimentales sobre modelos de probabilidad, localizadas en el tercer ciclo. En ellas se ha de enfrentar al alumno con experiencias concretas en situaciones de naturaleza probabilísticas, en las que tengan que prever el resultado y comprobarlo experimentalmente, «descubriendo progresivamente que puede saberse qué suceso es más probable, y 'cuánto' más probable es» (Junta de Andalucía, 1992, p. 96).

Hay una cierta tendencia de nuevo hacia el estudio de sucesos fundamentalmente repetibles, en todas las propuestas oficiales. «Se trata de comprobar que los alumnos empiezan a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o sucesos que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición» (MEC, 1992, p. 29), es decir, factibles de ser analizados fundamentalmente desde una perspectiva frecuencialista y tratados desde la estadística elemental, considerando la perspectiva clásica como un caso especial en situaciones de equiprobabilidad.

Este planteamiento puede tener ciertos problemas dada la dificultad que supone en un contexto práctico, por un lado, asegurar la equivalencia de los sucesivos experimentos y, por otro, su posible repetición infinita, lo cual lleva en muchos casos a resultados contradictorios. Al querer confirmar rápidamente los resultados previstos por el modelo de referencia pueden considerar ciertos sesgos de la intuición probabilística, asociados al uso del heurístico de representatividad, como también comenta Serrano (1993) en su trabajo. Aunque, al dar un papel significativo a las concepciones iniciales de los sujetos en sus orientaciones metodológicas, se facilita la consideración de las predicciones previas formuladas por los alumnos, de carácter subjetivo, como soporte de la enseñanza de la probabilidad, en contraste con las sugerencias relativas a una aproximación frecuencial de la probabilidad.

Gran parte de las propuestas curriculares analizadas respetan la idea general de unas matemáticas escolares adaptadas a las necesidades del momento actual y desarrolladas desde las perspectivas surgidas en el estudio de los procesos de enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas

Reflexión final

Gran parte de las propuestas curriculares analizadas respetan la idea general de unas matemáticas escolares adaptadas a las necesidades del momento actual y desarrolladas desde las perspectivas surgidas en el estudio de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, partiendo de los presupuestos que conlleva una construcción significativa del conocimiento. Todas las orientaciones quedan particularizadas, directamente, al tratamiento del conocimiento estocástico, sin embargo no hay en ningún caso una mención especial sobre los problemas específicos de la comprensión de estos conceptos, ni sobre su naturaleza epistemológica, opuesta en cierta medida a la estructura lógica formal del conocimiento matemático.

En nuestro sistema educativo actual, la probabilidad y la estadística son introducidas en los niveles de secundaria y se pueden diferenciar dos formas de acercamiento a estos saberes matemáticos desde las orientaciones y secuenciaciones de contenidos propuestas y desarrolladas. Una aproximación intuitiva, focalizada en experimentos, juegos de azar o situaciones reales, utilizando conceptos como frecuencia, frecuencia relativa, proporciones numéricas o simetrías, para llegar a definir la probabilidad como límite de la frecuencia relativa. Después de esta fase más experimental e intuitiva de la enseñanza hay una progresión en la introducción de los métodos y conceptos más elaborados. En muchos casos es una presentación operativizada de los conceptos caracterizados, simplemente, por su utilización y sus posibles aplicaciones.

Alternativamente, quizás en niveles superiores, se introducen un número de conceptos básicos como: suceso aleatorio, resultado, suceso elemental, suceso cierto o imposible, espacio muestral, etc., que se consideran que son la base sobre la que se construye la estructura matemática, como si «el sentido de un nuevo saber deba emanar enteramente de los conceptos fundamentales ya conocidos» (Steinbring, 1988, p. 312). Desde esta perspectiva se suele definir la probabilidad en términos laplacianos. A veces hay una secuencia temporal entre estas dos formas de acercarse al conocimiento estocástico, primero se realiza un trabajo experimental concreto para luego ir desarrollando, sobre esas «intuiciones» primarias construidas, la teoría formal, bien desde presupuestos frecuencialistas o bien laplacianos; cuando, en realidad, son simplemente perspectivas diferentes del mismo concepto: el de probabilidad.

En cualquier caso, en los currículos propuestos no quedan explícitamente recogidos dos de los aspectos básicos relacionados con la comprensión del conocimiento estocástico: la noción de suceso aleatorio y el problema del significado de la probabilidad en los posibles contextos de aplicación. Este último aspecto es un tema de gran controversia histórica aún sin resolver que no puede ser ignorado o reducido a una interpretación homogénea del concepto.

El intento de fundamentación del conocimiento matemático producido en este siglo se ha reflejado en diversas posturas filosóficas y epistemológicas sobre la fundamentación de la probabilidad: clásica, logicista, frecuencialista, subjetivista, axiomática. Todas estas controversias han promovido interpretaciones diferentes del significado de la probabilidad y de su campo de aplicación. Desde esta visión tan compleja del significado del concepto en su aplicación al mundo real es difícil justificar la introducción de una interpretación homogénea y universal del concepto en el mundo educativo. Al contrario, la escuela debe combinar ideas desde diferentes perspectivas, desde los primeros niveles:

«* Lo estocástico como la matemática de los fenómenos de masa.
* Lo estocástico como la lógica de la incertidumbre.
* Lo estocástico como la técnica que transforma los datos en indicadores.
* Lo estocástico como teoría de la decisión» (Dinges, 1981 p. 51).

Por otro lado, la idea de aleatoriedad y de suceso aleatorio es normalmente considerada como algo ya conocido e intuido por los sujetos y no suele ser objeto de estudio en sí misma. La noción de azar o de aleatoriedad no son analizadas ni en relación con su significado en la vida real, ni en relación a como alcanza su modelización matemática. En general, «el experimento azaroso es una idea introductoria que es apoyada matemáticamente y lingüísticamente de muchas maneras, sin desarrollar su significado preciso y la representación subyacente a lo largo de la enseñanza» (Steinbring, 1991, p. 141).

Esto puede tener consecuencias importantes a la hora de la comprensión de una realidad, fundamentalmente azarosa, como la que nos rodea, y para el propio aprendizaje del conocimiento estocástico pues, como nos dicen Konold y otros (1991, p. 2), «la noción de aleatoriedad es ambigua y compleja, pero las variantes del concepto son, sin embargo, el corazón del pensamiento probabilístico y estadístico».

La probabilidad es una materia difícil de aprender y enseñar. [...] El aprendizaje de la probabilidad supone para el sujeto una revolución similar a la acaecida en la historia del conocimiento ante su tratamiento.

Siendo estas dos nociones: la de probabilidad y la de aleatoriedad, las dos ideas básicas sobre las que se apoya toda la estructura matemática del Cálculo de Probabilidades, su significado, no suele ser cuestionado ni analizado al ser introducidos en la escuela. La probabilidad es una materia difícil de aprender y enseñar. La causalidad es lógicamente mucho más clara, pero el azar es una realidad y, por tanto, su tratamiento en el aula es ineludible. El aprendizaje de la probabilidad supone para el sujeto una revolución similar a la acaecida en la historia del conocimiento ante su tratamiento. Los estudiantes han de aceptar la presencia de la incertidumbre como algo inherente a la realidad y adoptar la convención de representar dicha incertidumbre cuantitativamente a través del Cálculo de Probabilidades (Falk y Konold, 1992).

El tratamiento del conocimiento estocástico y la negociación de sus significados en el aula, han de ser desarrollados desde una perspectiva dinámica que refleje, no sólo la interrelación entre la modelización matemática y los hechos empíricos, sino también entre las distintas interpretaciones de su significado (Azcárate, 1995). Un proceso metodológico que refleja una organización sistémica del conjunto de tareas o actividades permite la elaboración comprensiva de los conceptos y la integración de interpretaciones variadas en su desarrollo, su reconocimiento y su contraste.

Referencias bibliográficas

AHLGREN, A. y J. GARFIELD (1991): «Analysis of the Probability Curriculum», en KAPADIA y BOROVCNICK (eds.), *Chance Encounters. Probability in Education,* Kluwer, Amsterdam.

AZCÁRATE, P. (1995): *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la Educación Primaria,* Tesis Doctoral inédita, Universidad de Cádiz.

BISSON, D. (1983): *Du hasard aux probabilités. Quel ensingnement des probabilités?*, Memoria de DEA de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Bordeaux, Bordeaux.

BOE del 13/9/91: *Real Decreto 1679/91, por el que se establecen las Enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria.*

BOJA del 20/6/92: *Real Decreto 105/92, por el que se establecen las Enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en Andalucía.*

BROUSSEAU, G. (1986): Theorisations des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Tesis de estado, IREM de Burdeos, Burdeos.

CHEVALARD, Y. (1991): *La transposition didactique,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

COCKCROFT, W. H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan*, Servicio de Publicaciones del MEC, Madrid.

DÍAZ GODINO, J., M. C. BATANERO y M. J. CAÑIZARES (1988): *Azar y Probabilidad*, Síntesis, Madrid.

DINGES, H. (1981): «Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Schule», en DÖRFLER y FISCHER (eds.), *Stochastick im Schulunterricht*, Teubner, Stuttgart.

ENGEL, A. (1988): *Probabilidad y Estadística*, 2 vols., Mestral Universidad, Valencia (Original tomo 1, 1973; Original tomo 2, 1976).

FALK, R. y C. KONOLD (1992): «The Psychology of Learning Probablity», en GORDON y GORDON (eds.), *Statistics for the Twenty-First Century,* Mathematical Association of America, Washington, DC.

KONOLD, C. y otros (1991): «Nocives views on randomness», trabajo presentado en The Thirteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education, Blacksburg VA.

GRUPO CERO (1984): *De 12 a 16. Un Proyecto de curriculum de matemáticas*, Grupo Cero, Valencia.

HOWSON, G. y B. WILSON (dir.) (1988): *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90*, Mestral, Valencia.

JUNTA DE ANDALUCÍA, (1992): *Colección de materiales curriculares para la Educación Primaria.*

MARGOLINAS, C. (1993): *De L'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

MEC, (1981): *Programas Renovados de la EGB. Ciclo Superior*, Escuela Española, Madrid.

MEC (1992a): *Documentos para la Reforma. Educación Primaria.*

MEC (1992b): *Documentos para la Reforma. Educación Secundaria.*

MEC (1993): *Propuestas de Secuencias Matemáticas*, Escuela Española, Madrid.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

SCHOOLS COUNCIL PROJECT ON STATISTICAL EDUCATION, (1980): *Statistics in your world*, Foulsham Educational, England.

SERRANO, L. (1993): *Una aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: un estudio de concepciones iniciales*, Memoria de Tercer Ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

STEINBRING, H. (1988): «Nature du savoir mathématiques dans la pratique de l'enseignant», en LABORDE, C. (ed.): *Actes du premier colloque Franco-Allemand de Didactiques des Mathématiques et de l'Informatique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

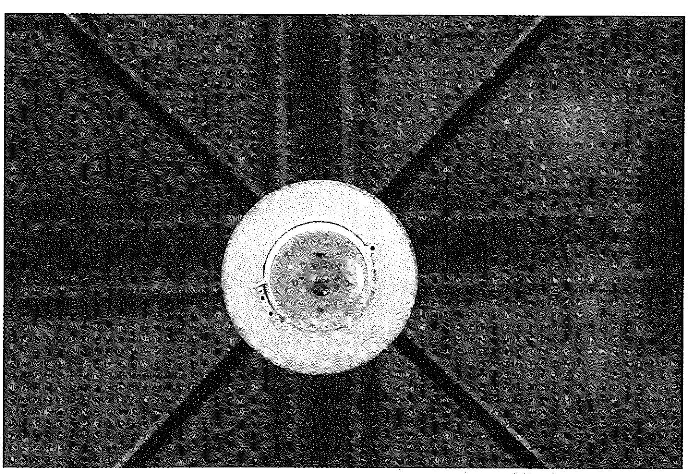
STEINBRING, H. (1991): «The Theoretical nature of probability in the classroom», en KAPADIA y BOROVCNICK (eds.), Chance Encounters: Probability in Education, Kluwer, Dordrecht.

THOM, R. (1974): «Matemáticas modernas y matemáticas de siempre», en HERNÁNDEZ (ed.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Universidad, Madrid.

TRAVES, K. J. y J. WESTBURY (1989): *Study of Mathematics I: Analysis of Mathematics Curricula*, Pergamon Press, Oxford.

VARGAS, T. y M. DUMONT (1973): *Combinatoire, Statistiques et Probabilités de 6 à 14 ans*, OCDL, París.

J. M.ª Cardeñoso
Departamento de Didáctica
de las Matemáticas.
Universidad de Granada
P. Azcárate
Departamento de Didáctica
(D. de las Matemáticas)
Universidad de Cádiz



Intersección
(VI Olimpiada Matemática Nacional)

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 53-59

Algunas contradicciones y dificultades de la resolución de problemas en el aula

Joaquín Fernández Gago

ARTÍCULOS

El presente artículo es una exposición de las dificultades y contradicciones de la aplicación sistemática de la metodología de resolución de problemas con alumnos de 1.° y 3.° de BUP durante el curso 1992-93, y durante el primer y segundo trimestre con alumnos de 2.° de BUP. Además de una descripción de problemas con que nos encontramos, analizamos sus causas y presentamos posibles soluciones. Terminamos enumerando las múltiples ventajas de esta metodología.

Introducción

Para empezar definamos qué entendemos por metodología de resolución de problemas y, más concretamente, qué es un problema (extraído del Grupo Temático 3 del IMEC). Por problema entendemos una situación que da lugar a ciertas cuestiones abiertas, que supone un desafío intelectual a alguien que no dispone de manera inmediata de métodos, procedimientos o algoritmos, etc., para responder a las cuestiones y solucionar los problemas.

Resolución de problemas es el proceso para tratar problemas con intención de resolverlos. En nuestro caso el *proceso* está basado en las ideas de Polya, Guzmán y Mason. Pretendemos que el alumno actúe sobre el problema mediante preguntas divididas en cuatro fases. En la página siguiente se presenta el modelo que pretendíamos que usaran los alumnos.

Queremos dejar claro que nuestro objetivo fundamental era enseñar a resolver problemas (y es por ello por lo que trabajamos con los alumnos el modelo anterior), sin descartar conocimientos matemáticos que puedan tratarse o no con esta metodología.

La forma de llevar a cabo esta metodología ha consistido en :

1. Presentación de problemas en clase durante las 3 o 4 primeras semanas de curso, en las que se enseñaban las cuatro fases antes citadas.
2. Profundización sobre las cuatro fases.
3. Práctica sistemática en clase incitando a los alumnos a través de preguntas a usar el modelo de resolución de problemas.
4. Enseñanza de algunos contenidos a través de problemas (para usar esta metodología).

ESQUEMA PARA DIVERTIRSE CON PROBLEMAS

A) Familiarízate

- Leer.
- Particularizar al tún-tún.
- Responder ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿cuál es la incógnita?

B) En busca de estrategias

- Hacer tormenta de ideas.
  - B.1. ¿Algo parecido?
  - B.2. ¿Más fácil?
  - B.3. Particularizar, buscar regularidades
- Utilizar estrategias.
  - B.4. ¿Gráficos, dibujos?
  - B.5. ¿Cambiar enunciado?
  - B.6. ¿Escoger notación?
  - B.7. ¿Hay simetría?
  - B.8. Supongamos que no.
  - B.9. ¿Empiezo por el final?
- Intentar escribir ¡Ajá! conjetura o ¡Estoy felizmente atascado! Si es así leer de nuevo, particularizar de nuevo, decidirme por estrategia.

C) Lleva adelante tu estrategia

- Trabaja con empeño
- ¿Salió *seguro*? particulariza (comprueba) y explica el porqué.

D) Reflexiona y saca jugo al problema

- Examina a fondo el camino que has seguido tu. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O, por qué no has llegado?
- Trata de entender que la cosa efectivamente marcha, si no por qué tiene que marchar así.
- Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple.
- Mira hasta dónde da de sí el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias.
- Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

La resolución de problemas, como todo cambio de actitud, es un proceso lento, duro, incluso puede ser desesperante.

5. Coherencia entre la evaluación y la metodología.

Las dificultades las hemos dividido en dos tipos: dificultades propias del currículum actual y de la metodología tradicional y dificultades del propio método.

Dificultades propias del currículum actual y la metodología tradicional

La inercia de los alumnos

Al principio esta metodología no les gusta y desconfían de ella. La razón es bien sencilla: los alumnos han recibido un entrenamiento en sentido contrario al propuesto por nosotros. Creo que lo que realmente determina un aprendizaje es una práctica y metodología sistemática: si llevan diez años pensando que en la matemática no hay que decidir, porque yo en tres meses les diga que hay que decidir no van a cambiar. Se podría resumir diciendo que el problema es la falta de consciencia, falta de consciencia que está en nuestra sociedad y que aumenta en la escuela. En la resolución de problemas es esencial hacer consciente al alumno de los procedimientos mentales que ha seguido para hacer un problema. Así la resolución de problemas, como todo cambio de actitud, es un proceso lento, duro, incluso puede ser desesperante.

Para minimizar este problema proponemos ser sistemáticos, continuamente hablar de estrategias, ser pacientes y no esperar muchos resultados en un año, coger a alumnos que recibieron este método en años anteriores y echarle coraje (puede que haya incluso presiones de padres, tutores y alumnos).

Sin embargo, puede ser útil la fase de «sácale el jugo», ya que con ella se puede conseguir hacer al alumno consciente de lo que ha aprendido. Esto es fundamental, ya que muchos creen que aprender es repetir un algoritmo. Por ejemplo, proponemos que si en un problema se ha usado una estrategia, hacerles conscientes de ello y que refleje cómo y cuándo la volvería a usar.

Hay alumnos que, aunque son constatables sus progresos, afirman que no aprenden

La razón está en que para ellos aprender es aprender contenidos (en el sentido tradicional), algoritmos, y no a pensar matemáticamente. Y es que en la resolución de problemas intervienen los conocimientos matemáticos y conocimientos de orden superior o metaconocimientos, que guían el control del proceso de resolución.

Para ir resolviendo esto proponemos ser sistemáticos a la hora de hacer consciente al alumno de sus progresos. Es interesante comunicarles frases como: «ves como entiendes mejor el enunciado», «ves como se te ocurren unas ideas», «ves como sabes criticar tu solución», «ves como reflexionas mejor».

También aquí destacamos lo ya comentado referido a hacer consciente al alumno sobre lo que ha aprendido.

La selectividad

Es un problema serio. Expondré aquí las contradicciones que conlleva con nuestra metodología.

Al usar esta metodología el ritmo de clases es lento en cuanto avance de los contenidos, hecho que critican algunos alumnos, en 3.° de BUP, porque «no vamos a saber ciertas cosas para selectividad».

Habría que plantearse la eficacia de este sistema y qué se pretende que el alumno sepa de matemáticas. Si se decide poner problemas en esta prueba, al menos que la corrección de los mismos no se base sólo en la dicotomía problema resuelto-problema no resuelto. Además, todas la pruebas de este tipo tienden, según dicen en pro de la objetividad, a centrarse en conocimientos más que en procesos. Como vemos esto de momento es difícil de conseguir, sólo nos queda hacer ver a nuestros alumnos que este aprendizaje genera autoconfianza, muy importante para enfrentarse a los exámenes de selectividad.

Si un contenido nos es imposible adaptarlo a un problema, deberemos hacer consciente al alumno de las estrategias que se hayan usado en su definición o evolución histórica.

El currículum actual no se presta a esta metodología

Muchos de los contenidos que llevamos al aula son difícilmente susceptibles de presentarlos como problema. Por ejemplo, las funciones son más difíciles de llevar que la combinatoria, o la definición de límite de una sucesión que las progresiones aritméticas. Sin embargo, podemos hacer algo, mientras se implanta el nuevo sistema educativo que encaja mejor con la resolución de problemas. Podemos adaptar ciertos contenidos, haciéndolos más manejables si los despojamos del rigor de la matemática moderna, lo que podemos hacer con la historia de la matemática. Por ejemplo, si presentamos la idea de límite de una sucesión como la usó Arquímedes para aproximar la longitud de una circunferencia, el alumno probablemente se quede que éste es el número al que se acercan los términos de la sucesión, de forma que si le pregunta por el límite de:

$$a_n = \frac{n^3 + \sqrt{n^4 + 2n}}{n^5 + 7n + 10}$$

seguramente le dé valores a n (B.3 «particulariza, experimenta») y así se aproxime a la solución.

También tendremos que presentar problemas que no incidan directamente en los contenidos, y que puedan ser útiles para fomentar el «metaconocimiento» de los alumnos. Por último, si un contenido nos es imposible adaptarlo a un problema, deberemos hacer consciente al alumno de las estrategias que se hayan usado en su definición o evolución histórica.

Entrenamiento que ha recibido el profesor

Por lo general el profesor ha llevado a cabo un aprendizaje en el que lo fundamental es la solución del problema, más que el proceso en sí. Esto le hace ser impaciente deseando ver pronto los frutos. De esta forma podemos impedirle a los alumnos que «saboreen» ellos la forma de enfrentarse a los problemas.

Por ejemplo en 3.° de BUP se les puso que buscaran el término general de la sucesión que expresa el número de amebas que se van reproduciendo por bipartición. Tras particularizar afirman que

$$a(n) = 2n$$

y preguntan al profesor «¿está bien?».No debemos decirle sí o no, sino que comprueben. Si se atascan no hagamos el problema, recomendémosle una estrategia o provoquemos que la usen.

Dificultades propias del método

La evaluación

A la vez de explicar las dificultades que presenta, exponemos qué implicaciones tiene nuestra concepción de la evaluación y su coherencia con la metodología.

Asimismo, queremos dejar claro, como veremos mas adelante, que no sólo la metodología condiciona la evaluación sino que también ésta influye sobre la metodología.

En primer lugar, el objetivo de la evaluación consiste en analizar el progreso del alumno en cuanto actitud hacia la matemática, conceptos y técnicas de resolución de problemas. Se trata pues de un *proceso*, no de valorar las capacidades en un determinado momento. Estas observaciones se anotarán en unas fichas de observación del alumno. Esto nos permitirá acercarnos más a la evaluación individualizada. En las fichas atenderemos a estos apartados: expresión, concepto, estrategias, juicio crítico (si comprueba o no, si demuestra o no), proceso (idea original, busca un plan, cambia de estrategia si se atasca), actitudes (si trabaja, si tiene miedo, gusto por la certeza, gusto por el reto).

Otras técnicas que pretendemos usar son las pruebas escritas y los problemas en grupo con secretario de procesos por grupos (muy interesantes para alumnos de COU con problemas de selectividad).

El usar la observación sistemática conlleva algunos inconvenientes como son: dedicar menos tiempo al temario, que como veremos más adelante es una dificultad, y prestar menos tiempo a otros alumnos que tienen dificultades resolviendo un problema en clase.

En segundo lugar la evaluación debe ser *cualitativa.* En un problema nos puede interesar una calificación numérica, pero sobre todo si se ha sabido clasificar datos, si se ha identificado la condición y lo que me piden (incógnita), si se han usado estrategias, si se ha tenido una idea original, si se atreve a formular la conjetura, si ha comprobado, justificado o demostrado su solución, si vuelve a buscar otra estrategia. Veamos un ejemplo :

Problema para 1.° de BUP. Un profesor dispone de 20 alumnos y quiere hacer parejas. ¿Cuántas parejas distintas puede hacer?

Respuesta. La alumna comenzó escribiendo datos, condición e incógnita. A continuación, hizo un diagrama de árbol, tras haberlo hecho más fácil con menos alumnos. Nombró con letras a los alumnos. Creía que la pareja AB era distinta de la BA. Comprobó, también con números pequeños, que no funcionaba su solución. Cambió de estrategia, dio otro resultado, volvió a comprobar que no era correcto.

...hay un amplio consenso en la literatura especializada, afirmando que la evaluación determina la forma de trabajo de los alumnos.

Hemos constatado un gran progreso en cuanto a la forma de resolver problemas. Una calificación numérica hubiera resultado nefasta.

Sin embargo, por muy buenos y loables que sean los propósitos el alumno sigue obsesionado por el resultado de un problema más que por el proceso. Al principio no da importancia a la observación en clase. En definitiva no entiende este sistema de evaluación, aunque se les explique a principio de curso. Tenemos que hacer constar también que al cabo de un curso se obtienen resultados satisfactorios, si se explica continuamente y en momentos clave.

Por último, abordamos el que, desde nuestro punto de vista, es el escollo más crítico de la evaluación: ¿qué problemas ponemos en las pruebas escritas?

Los alumnos están acostumbrados a enfrentarse en los exámenes a ejercicios de forma que repiten mecánicamente un esquema ya asimilado. No hay ninguna dificultad, ni nada que decidir. Si hiciéramos lo mismo nuestros alumnos no usarían esta metodología, la olvidarían. En este sentido hay un amplio consenso en la literatura especializada, afirmando que la evaluación determina la forma de trabajo de los alumnos. Ahora bien, si ponemos problemas, al alumno le aumentará considerablemente la ansiedad ante el examen y se defenderá, a veces, con críticas directas o a través de padres y tutores. Les es más fácil, con alguna frecuencia, presionar para que cambie el profesor que trabajar para cambiar ellos.

Ante esta dicotomía nuestra propuesta es clara: hay que poner problemas en los exámenes, que se puedan abordar fácilmente con alguna estrategia ya enseñada. Además es útil facilitarles el trabajo. Veamos un ejemplo :

Problema de un examen de 2.° de BUP. Estamos interesados en hallar los ángulos cuya tangente es mayor que 2. Se proponen las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué te piden y qué te dan?

b) Elegir un par de estrategias, explicando como se llevaría cada una adelante.

c) Llevar una adelante y comprobar la solución obtenida.

No saben qué estudiar

Este sistema les descoloca, al principio sobre todo. ¿Cómo estudiar cuando llego a casa? Si hay un problema sabré que hacer, pero ¿y los contenidos? En este sentido proponemos que al terminar cada actividad el alumno escriba los contenidos que ha conocido (escribiendo lo que recuerda, o qué imagen tiene de él), el metaconocimiento que haya asimilado y elabore periódicamente mapas conceptuales. Fuatai (1986) encontró en sus investigaciones que alumnos de escuela secundaria, después de la instrucción con mapas conceptuales, aumentaron su habilidad para la resolución de problemas matemáticos nuevos (González García, 1992). Además sobre los mapas conceptuales es preciso indicar que hay investigaciones que afirman que la elaboración de los mismos incide positivamente en la resolución de problemas. Nosotros, además de esto, hemos observado que es un instrumento muy útil para proponerse problemas. Por ejemplo, en 3.° de BUP han surgido cuestiones como «¿puede ser una progresión geométrica aritmética?», «¿tienen los polinomios asíntotas verticales?», «¿y horizontales?».

Las cuatro fases

Antes de empezar es preciso resaltar que la excesiva rigidez en cuanto a uso de un modelo de resolución por fases, puede llevar a atascos, ya que las fases pueden asimilarse como perfectamente diferenciadas.

Un primer problema relativo a nuestro modelo, que se presenta a los alumnos: las estrategias y reflexiones que se recomiendan no saben cómo emplearlas. Por ejemplo, tras haber hecho varios problemas en los que se usaba la estrategia B.2 «hazlo más fácil», si un problema se prestaba a resolverlo con esta estrategia los alumnos no sabían cómo. Para resolver esto hicimos, junto con los alumnos, un cuadro que reflejara qué significaba para ellos cada uno de los apartados del modelo de resolución de problemas, y en que consiste para ellos llevar a cabo una de estas técnicas. Por ejemplo, para los alumnos la estrategia hacerlo más fácil les denotaba «no agobiarse», «menos dificultades», y consistía para ellos en «quitar dificultades», «poner números mas sencillos» o «descomponer en trozos». Presentamos a continuación algunas reflexiones y problemas que se plantean en cada una de las cuatro fases.

...la excesiva rigidez en cuanto a uso de un modelo de resolución por fases, puede llevar a atascos, ya que las fases pueden asimilarse como perfectamente diferenciadas.

Fase de familiarización. El principal problema que se plantea es determinar la condición. En algunos problemas es realmente difícil para el alumno. Para ello le recomendamos que particularice si puede, que experimente, que juegue, que cambie informaciones del enunciado y seleccione la esencial. En definitiva, que actúe antes de preguntarse por la condición.

Fase de búsqueda de estrategias. Observamos que hay unas estrategias que son más usadas que otras. Estas son B.1, B.2, B.3, B.4 o B.5. Centrémonos en B.3 «particulariza, experimenta, juega con el problema, busca regularidades». Esta rápidamente la asimilan y la usan con asiduidad, dando buenos frutos. Sin embargo encontramos estas dificultades:

- Hay alumnos que no particularizan organizadamente. Por ejemplo, en un problema de combinaciones en el que había que contar el número de tríos; ciertos alumnos hacían esto ABC DBA ACD DAE. También lo pudimos apreciar con las ecuaciones.
- Ciertos alumnos al particularizar son incapaces de buscar regularidades. Por ejemplo, al buscar términos generales de sucesiones y sustituir n por 1, 2, 3, 4 y 5, no pueden observar que tienen en común los términos a_1, a_2,a_3, a_4 y a_5. Para resolverlo tenemos que insistirles que la particularización debe ser reflexiva, es decir, debe ir acompañada de preguntas como «¿Por qué ha funcionado en unos casos y en otros no?», «¿hay algo en común en estos casos particulares?».
- El particularizar produce cierto estancamiento en cuanto a búsqueda o asimilación de nuevas técnicas o estrategias. Muchas veces es la única estrategia que usan.
- Otra dificultad que puede encontrar el alumno a la hora de particularizar es la poca familiaridad con los objetos que se usan. Por ejemplo en 3.° de BUP propusimos dos problemas equivalentes: uno si era cierto que la suma de sucesiones sin límite podía tener límite, y el otro si la suma de funciones discontinuas podía ser continua. El primero tuvo un mayor nivel de éxitos que el segundo y es que es mas fácil particularizar con sucesiones que con funciones. En este sentido los contenidos del BUP no ayudan mucho, pero tampoco los

de 3.° y 4.° de ESO y el nuevo Bachillerato. Y es que los contenidos de estos currículos están muy mediatizados por su aplicación al mundo real o como base para preparar al alumno a las licenciaturas de tipo científico. Esto hace que haya muchos contenidos que dependan en mayor o menor medida del concepto de infinito y del continuo.

Desde la resolución de problemas hubiera sido interesante que aparecieran más contenidos sobre conjuntos finitos o discretos. Como muestra un ejemplo: ¿Por qué no aparece en 3.° y 4.° de ESO la combinatoria?

Fase de llevar adelante la estrategia, comprobación y explicación. En esta fase, clave en la resolución de problemas, se plantean entre otras las siguientes cuestiones:

— En general, no comprueban. El entrenamiento recibido juega en contra. En este punto suelen bloquearse pues preguntan: ¿cómo compruebo? Sería interesante que el alumno recogiera entre su aprendizaje distintas formas de comprobar:

- Con una ley general o fórmula observar si funciona con casos particulares o mas sencillos.
- Ante un resultado o conjetura observar si hay contradicciones (por ejemplo suelen aparecer hipotenusas de triángulos rectángulos menores que catetos).
- Por último, puede ser útil exponer las distintas conjeturas que aparecen y que los propios compañeros se encarguen de rebatirla.

— No buscan el porqué (demostrar). La justificación o explicación del porqué plantea otros problemas. Como dicen Mason, Burton y Stacey (1988) «[...] para explicar el porqué hace falta una estructura en la que basarse. Explicar a los alumnos qué es una estructura es difícil. Esto supone, muchas veces, una descontextualización con todo lo que se ha hecho hasta ahora en el problema».

En este sentido señalamos que la particularización para comprobar juega en contra, ya que el alumno se afianza en su conjetura con lo que carece de sentido mas crítica hacia la solución. Por ejemplo, en un problema en el que se les pedía encontrar el centro de un círculo dado este último, aparecieron construcciones geométricas (algunas muy originales). A renglón seguido se les pidió que demostraran que el punto construido era efectivamente el centro. Las respuestas eran «¡para qué, está bien, lo he comprobado con el compás y en varias circunferencias!». Se les dice que no lo han comprobado en todos los casos sino con unas cuantas circunferencias. Su respuesta es «¡Pero eso es imposible!».

— La circularidad lógica. A veces usan en el transcurso de una demostración una afirmación que es la que precisamente hay que demostrar.

Como recomendaciones para desbloquear las situaciones anteriores destacamos :

Las respuestas eran «¡para qué, está bien, lo he comprobado con el compás y en varias circunferencias!». Se les dice que no lo han comprobado en todos los casos sino con unas cuantas circunferencias. Su respuesta es «¡Pero eso es imposible!».

- Presentar problemas en los que se vea necesaria la demostración, ya que la comprobación no es suficiente.
- Usar el álgebra o la geometría en distintos problemas para demostrar conjeturas.
- Empezar a construir demostraciones con objetos matemáticos sencillos (números enteros, sucesiones como en el problema de genealogía de las abejas).

Reflexión. La reflexión final es importantísima, tanto para mejorar en la resolución de problemas, como asimilar técnicas y conocimientos nuevos.

Las preguntas que propone Guzmán en su obra *Para pensar mejor* son interesantes y certeras, pero difíciles de llegar a nuestros alumnos. Por ello, proponemos adaptarlas y hacer las preguntas en clase y no en casa.

Por ejemplo: ¿Qué has aprendido sobre los conceptos que aparecen en este problema? ¿Y sobre los modelos de resolución? ¿Qué otro problema podrías resolver con el mismo método? ¿Cuál ha sido para ti el punto mas importante de la resolución del problema?

Con este panorama la resolución de problemas es una cuestión compleja y difícil de llevar a la práctica diaria de la clase, sin embargo, también proporciona:

- Confianza en los alumnos.
- Una nueva concepción de las matemáticas. Como muestra una frase que nos comentó un alumno no muy brillante de 2.° BUP tras trabajar dos meses y medio con esta metodología: «yo creía que las Matemáticas eran unas reglas que yo tenía que aplicar, ahora me doy cuenta que las reglas también las pongo yo».
- Fluidez de ideas a la hora de resolver problemas. Un compañero de Química me ha comentado: «es difícil que a los alumnos que han trabajado Resolución de problemas les ponga un cero en cada problema. Me gusta porque pelean los problemas».

Otro ejemplo que confirma son las soluciones aportadas a este problema de examen:

Problema. Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 20 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 60° con el suelo.

Soluciones:

a) Hacer un dibujo a escala en el papel y medir la altura con la regla.

b) Aplicar el coseno, obtener así la hipotenusa y por último obtener la altura con el teorema de Pitágoras.

c) Aplicar la tangente y despejar la altura.

d) Ampliar por simetría el triángulo rectángulo a un triángulo equilátero. La hipotenusa es así 40 m. La altura se obtiene con el seno de 60°.

En definitiva, con esta metodología se consigue:

- Los alumnos explican y comprueban más sus soluciones, con lo que sin duda mejora su capacidad de expresión.
- Alegría del profesor cuando ve ciertas soluciones.

Joaquín Fernández
IB Licinio de la Fuente
Coín (Málaga)

Bibliografía

AUSUBEL, D. P. (1978): *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, Trillas, Mexico.

BOYER, C. B. (1992): *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

BRIALES, F. J., M. JIMÉNEZ y J. ALBA (1991): «Evaluación Formativa», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 197, 36.

CALLEJO DE LA VEGA, M. L. (1992): «Currículum de Matemáticas y Resolución de Problemas», *Suma*, n.° 10, 25-35.

GONZÁLEZ GARCÍA, F. M. (1992): «Los mapas conceptuales de J. D. Novak como instrumentos de las Ciencias Experimentales», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 10, n.° 2, 148-158.

GUZMÁN, M. (1987): «Cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de la matemática», *Thales*, 13-26.

GUZMÁN, M. (1987): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.

JUNTA DE ANDALUCIA: *Diseño Curricular Base de Educación Secundaria de Matemáticas*, Consejería de Educación y Ciencia.

MASON, J., L. BURTON y K. STACEY (1988): *Pensar matemáticamente*, Labor-MEC, Barcelona.

NOVAK, J. D. y B. GOWIN (1988): *Aprendiendo a aprender*, Martínez Roca, Barcelona.

POLYA, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

SHOENFELD, A.: «Reflections on doing and teaching matematics», *Eduaction and matematic*, The University of California.

VILA, A. y M. JUAMPERE (1992): «Evaluación en Matemáticas: ¿Acreditación o análisis del proceso?», *Epsilon*, Thales, n.° 22, 105-110.

VV.AA. (1989): *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, Sociedad Thales, Benalmádena.

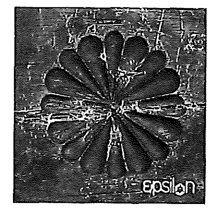
Representación gráfica
(VI Olimpiada Matemática Nacional)

SAEM THALES

EDICIÓN ESPECIAL EPSILON
DEDICADO A LA ALHAMBRA

Segunda edición (1995) de un número monográfico dedicado a las relaciones entre Arte y Matemáticas, que gira en torno a las matemáticas de la Alhambra de Granada. Se completa con un artículo dedicado a la mezquita de Córdoba. Es un libro de indudable éxito que estaba agotado y que ha habido que reeditar por su enorme demanda. Ilustraciones de color.

PVP. España: 2.000 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 20$USA.



Otras publicaciones

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS 10 AÑOS DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Incluye las soluciones a los problemas propuestos en las fases provincial y regional en los diez primeros años de existencia de la Olimpiada Matemática Thales (competición estudiantil dirigida a alumnos de 8.° de EGB y 2.° de ESO). Aunque las soluciones han sido realizadas por los editores, se han incluido muchas realizadas por algunos de los más de treinta mil alumnos participantes. 212 páginas. Impresión a dos tintas.
PVP. España: 1.300 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 13$USA.

UNIDADES DIDÁCTICAS DE MATEMÁTICAS
Editado en septiembre de 1995. Contiene cinco unidades didácticas completas seleccionadas entre las presentadas a un concurso público convocado por la SAEM Thales a tal efecto. Incluye abundantes actividades dispuestas para su aplicación directa al aula con sus correspondientes consideraciones para el profesor. 170 páginas. Ilustraciones en blanco y negro.
PVP. España: 2.000 pts. más gastos de envío.
Extranjero: 20$USA.

Pedidos: SAEM THALES. Facultad de Matemáticas. Apartado de Correos 1160. 41080 SEVILLA.

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 61-68

Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa

Bernardo Gómez Alfonso

IDEAS Y RECURSOS

En este trabajo se defiende el interés educativo de los métodos alternativos de cálculo aritmético recogidos por la tradición escrita, como dominio para hacer intervenir el álgebra en su papel de herramienta privilegiada para hacer emerger la estructura formal de la operatoria aritmética.

Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos, se pueden considerar en general y en particular; es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo, esta proposición; la suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que esta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, por que solo se aplica a los números 11, 5 y 55.

Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramos generales, de los cuales el que trata de leyes, es el álgebra, y el que trata de los hechos es la Aritmética. (Vallejo, Introducción al tratado, *pie, p. XLIV).*

Introducción

Ideas que articulan el presente trabajo

- La aritmética no debe enseñarse como una colección de habilidades independientes, sino como un sistema matemático organizado según principios definidos. Los principios unificadores, las relaciones y el contenido deben estar organizados de manera que el alumno advierta la estructura lógica y coherente del tema (Flournoy, 1969, p. 19).
- El álgebra es una herramienta apta para comprender las generalizaciones, captar conexiones estructurales y argumentar en matemáticas.
- Algebra y aritmética no son sistemas matemáticos aislados, de hecho el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis.

Una consecuencia lógica que se extrae de estas tres ideas es que la enseñanza de la aritmética y del álgebra debería organizarse evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ellos, respetando naturalmente la naturaleza secuencial de ambos sistemas matemáticos. Sin embargo, se ha constatado (Lee y Wheeler, 1989) que existe disociación entre la aritmética y el álgebra que es mayor de la que cabría esperar entre los estudiantes que resuelven con éxito las tareas algebraicas estándar. Esta disociación pone de manifiesto que estos estudiantes no ven la relevancia del álgebra en aquellas situaciones aritméticas que requieren de este otro tipo de razonamiento, como tampoco ven la importancia de usar la aritmética para determinar la verdad o falsedad de una expresión algebraica.

En relación con esta disociación se ha observado en un trabajo reciente (Gómez, 1994) que los estudiantes no sienten la necesidad de expresar sus procedimientos de cálculo mental en el lenguaje horizontal del álgebra, mientras lo pueden hacer con una combinación de lenguajes: aritmético de columnas, retórico de órdenes de unidades y coloquial.

Esto es un indicio de que uno de los problemas que debemos enfrentar los profesores al introducir el lenguaje algebraico es lograr que los estudiantes capten la funcionalidad del sistema de signos del álgebra para las situaciones aritméticas y adviertan relaciones aritméticas en las fórmulas algebraicas.

Para lograr este objetivo parece que no basta con la práctica usual de plantear ejercicios de traducción como una formalización de lo que ya se sabe o resolver ejercicios con expresiones literales como un nuevo tipo de cálculo reglado, porque esto no es suficiente razón para lograr que los estudiantes cambien un lenguaje en el que ya están familiarizados por otro en el que no lo están, sino que sería necesario hacer que el nuevo lenguaje aparezca como una herramienta para obtener nuevas cosas o para estructurar las que ya se conocen.

Pero de esta doble naturaleza del álgebra, operacional y estructural, que se supone que deberían percibir los estudiantes, parece que en la escuela predomina la primera. Mi idea es que es necesario aumentar la percepción de la segunda y que para ello es preciso que los estudiantes y profesores dispongan de dominios valiosos de conocimientos que les permitan trabajar el álgebra en este sentido. Parece obvio que el campo natural para que el álgebra encuentre estos dominios es la aritmética.

> *Uno de los problemas que debemos enfrentar los profesores al introducir el lenguaje algebraico es lograr que los estudiantes capten la funcionalidad del sistema de signos del álgebra para las situaciones aritméticas y adviertan relaciones aritméticas en las fórmulas algebraicas.*

El lenguaje algebraico como herramienta para mostrar la estructura interna de los procesos aritméticos

Desde que en el siglo XIX los libros de aritmética asumieron elementos del lenguaje del álgebra, éstos fueron ganando en claridad, brevedad y estructuración. Desde entonces el lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis se utiliza en las secuencias de operaciones combinadas y en la presentación de las propiedades estructurales. Pero ha parecido que por la propia naturaleza reglada de los algoritmos de cálculo este lenguaje no iba con ellos. Bajo esta creencia, a los estudiantes no se les ha dado ocasión para conocer y aprovecharse de las ventajas que éste ofrece para poner de relieve las leyes, propiedades y principios que sustentan los procesos de cálculo aritméticos.

Es cierto que en la edad temprana en la que se enseñan los algoritmos de cálculo a los niños resulta un despropósito acompañarlos de una justificación algebraica, sin embargo en el periodo de la iniciación al álgebra el programa sí que ofrece oportunidades para dar pie a la revisión de las ideas aritméticas bajo este nuevo lenguaje. Pero como esto no se suele hacer, se producen fenómenos de disociación que podrían explicar el que haya estudiantes que, por ejemplo, ignoren que el algoritmo de la multiplicación y la multiplicación algebraica de polinomios es en esencia la misma cosa, que se rigen por las mismas leyes y principios y que un caso sólo es la traducción formal del otro.

Dicho de otra manera, no todos los estudiantes han tenido la oportunidad de analizar juntas las dos parejas de algoritmos siguientes:

$$\begin{array}{r}
24 \\
\underline{\times 36} \\
144 \\
\underline{72} \\
864
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & 2\cdot X & +4 \\
 & \underline{3\cdot X} & \underline{+6} \\
 & 2\cdot 6\cdot X & +6\cdot 4 \\
\underline{3\cdot 2\cdot X^2} & \underline{+\ 3\cdot 4\cdot X} & \\
3\cdot 2\cdot X^2 & +(2\cdot 6+3\cdot 4)\cdot X & +6\cdot 4
\end{array}$$

Lo mismo se puede decir del algoritmo de la división numérica y el algoritmo de la división de polinomios. Si el lector está interesado puede preguntarse qué es lo que tienen en común y en qué se diferencian.

$$\begin{array}{r|l}
62\,4 & \underline{23} \\
\underline{-\ 46} & 2 \\
16\,4 & \\
\ldots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
6\cdot X^2+2\cdot X+4 & \underline{2\cdot X+3} \\
\underline{-\ 4\cdot X^2+6\cdot X} & 2\cdot X \\
\ldots &
\end{array}$$

La aritmética como campo de aplicación y validación de fórmulas algebraicas

Recíprocamente, los estudiantes pocas veces tienen la oportunidad de contemplar desde la aritmética las fórmulas algebraicas que han estudiado, lo que les hace ignorar su aplicabilidad en situaciones numéricas donde son valiosas. En efecto, veamos algunos ejemplos:

La fórmula de la diferencia de cuadrados

$$(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$$

se traduce aritméticamente en un método rápido de cálculo mental para situaciones en que los dos factores tienen el número central o intermedio acabado en cero

$$49 \text{x} 51 = (50 - 1)(50 + 1) =$$
$$= 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

La regla es: Para multiplicar dos números como por ejemplo 49x51 se toma el número central, 50, se eleva al cuadrado, 2500 y se le resta el cuadrado de la diferencia entre los dos números dados, 1. Total 2499.

Si el lector está interesado puede practicar mentalmente esta regla con cualquiera de estos números: 39x41, 38x42,... 98x102, 97x103,... 998x1002,...

Análogamente las fórmulas del cuadrado del binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

se traducen aritméticamente en dos métodos rápidos de cálculo mental para situaciones en las que se quiera calcular el cuadrado de un número próximo a otro cuyo cuadrado es conocido:

$$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \text{x} 20 + 1 = 441$$
$$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \text{x} 20 + 1 = 361$$

La regla es: Para hallar el cuadrado de un número, por ejemplo, de dos cifras, se halla el cuadrado del número de la decena inferior más próxima y se le suma el duplo de este mismo número por la cifra de las unidades y al resultado se le suma el cuadrado de la cifra de las unidades. Si el lector está interesado puede probar a enunciar la regla para hallar el cuadrado de un número usando la decena superior más próxima. La práctica mental de esta regla es conveniente con números como. 49^2, 51^2, 48^2, 52^2,... 99^2, 101^2, 98^2, 102^2,... 999^2, 1001^2, 998^2, 1002^2,...

...los viejos métodos de cálculo son un dominio de conocimientos valioso, motivador y fructífero para ayudar a los estudiantes a entender la estructura interna de los procesos aritméticos y para familiarizar a los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra.

Propuesta experimental

Los ejemplos anteriores abundan en la idea de la existencia de una disociación entre la aritmética y el álgebra en el caso de los métodos de cálculo aritméticos y determinados métodos y fórmulas de cálculo algebraico. Para trabajar en contra de esta disociación se presenta a continuación, como propuesta experimental, un análisis de viejos métodos de cálculo, tomados de las aritméticas antiguas, en el que se utiliza el lenguaje algebraico para mostrar la estructura interna de los mismos. Después se propone el trabajo inverso, a partir de algunas de las fórmulas obtenidas en el desarrollo algebraico se pide que se enuncien las reglas de cálculo aritmético correspondientes. Este trabajo de ida y vuelta resume una experiencia escolar con futuros maestros desarrollada durante varios años en la Escuela de Magisterio de Valencia. Esta experiencia ha puesto de manifiesto que los viejos métodos de cálculo son un dominio de conocimientos valioso, motivador y fructífero para ayudar a los estudiantes a entender la estructura interna de los procesos aritméticos y para familiarizar a los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra.

De las fórmulas a las reglas

Entre el lenguaje algebraico con letras y el lenguaje reglado de los métodos de cálculo, existe un tipo de lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis donde los números vienen dados en forma multiplicativa, también llamada polinómica. En este lenguaje para expresar el producto de 23x45 escribimos:

(1)
$$(2 \times 10 + 3) \times (4 \times 10 + 5) =$$
$$= (2 \times 10 + 3) \times 4 \times 10 + (2 \times 10 + 3) \times 5 =$$
$$= 2 \times 4 \times 100 + 10(2 \times 5 + 3 \times 4) + 3 \times 5$$

Al generalizar esta expresión obtenemos una expresión algebraica

(2)
$$(10a + b) \times (10c + d) =$$
$$= (10a + b) \times 10c + (10a + b) \times d =$$
$$= 100ac + 10(ad + bc) + bd$$

que suministra una regla práctica, por lo que se puede considerar como una fórmula[1], que es precisamente un viejo método de cálculo usual en las aritméticas hasta el siglo XIX por medio del cual se obtiene el producto final

1 Toda expresión que suministra una regla práctica, se llama fórmula; de manera, que fórmula es una expresión analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operación, o alguna propiedad de una cantidad (Vallejo, *Compendio*, p. 137).

sin escribir los productos parciales intermedios, sólo se escriben los factores y el producto final. Este método era conocido como de «la cruceta», por ejemplo en Treviso (1478), y sobre un ejemplo es como sigue:

(3) Para multiplicar 23×25, se dice: 5 por 3, 15. Se escribe el 5 y se lleva 1. 5 por 2, 10 y 1 que se lleva 11; 4 por 3 son 12 y 11 son 23. Se escribe el 3 y se llevan 2. 4 por 2 son 8 y 2 que se llevan 10. Se escribe el 10 y resulta 1035

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times \\ \underline{45} \\ 1035 \end{array}$$

Si se comparan las formas (1) y (2) y (3) se advierte que las tres describen el mismo proceso, pero con lenguajes diferentes. La forma (1) es reglada, necesaria para ejecutar la operación. La forma (2) actúa de puente entre la (1) y la (3), necesaria para muchos estudiantes que necesitan moverse en el terreno concreto de los números antes de saltar al más general de las letras. La forma (3) sintetiza el proceso y muestra los principios y leyes que rigen la ejecución. En efecto, se advierte en las formas (2) y (3) que el resultado se ha obtenido aplicando la propiedad distributiva dos veces y después agrupando por factores comunes. Esto, que queda oculto en la forma (1), es precisamente la gran ventaja de este lenguaje, su capacidad para mostrar la estructura interna de la operatoria.

Al mismo tiempo, las formas (2) y (3) también explican con brevedad como ha de procederse, ya que indican que el resultado se obtiene a partir de tres sumandos, uno es el producto de las unidades, otro es la suma de los dos productos de las unidades por las decenas y el tercero es el producto de las centenas.

Mostramos a continuación, en una cita de Vallejo, cómo se explicaba este método cuando no se usaba el lenguaje algebraico, para que el lector puede apreciar las ventajas e inconvenientes de uno y otro lenguaje.

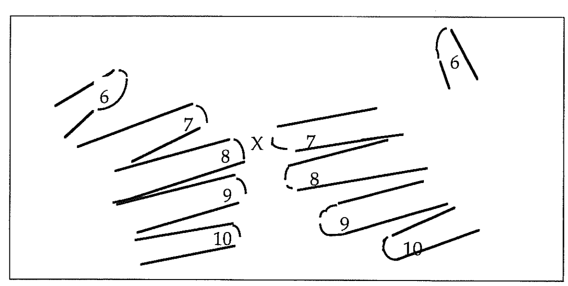
«... si se observan con atención los productos parciales de algunas multiplicaciones, se ve que todos están dispuestos de manera que los mismos órdenes de unidades se hallan en una misma columna vertical; y analizando su formación, se verá ademas que las unidades por las unidades deben siempre dar unidades, pudiendo también dar decenas, pero nada más; que para tener todas las decenas, es necesario añadir este exceso de decenas que provienen de las unidades por las unidades; 1º a las decenas por las unidades; 2º a las unidades por las decenas, lo que podrá dar centenas además; que para tener todas las centenas es necesario añadir este exceso; 1º a las centenas por las unidades; 2º a las unidades por las centenas; 3º a las decenas por las decenas, lo que podrá ocasionar millares además; que para tener todos los millares es necesario añadir este exceso, 1º a los millares por las unidades; 2º a las unidades por los millares; 3º a las centenas por las decenas; 4º a las decenas por las centenas; lo que podrá dar decenas de millar, etc.

Luego podremos establecer esta regla general para encontrar a un tiempo el producto de dos factores cualesquiera. Multiplíquense las unidades por las unidades: escríbanse las unidades del producto y reténganse las decenas; multiplíquense después las decenas por las unidades; luego las unidades por las decenas, y a su suma agréguense las decenas retenidas: escríbanse las decenas de esa suma total, y reténganse las centenas; multiplíquense las centenas por las unidades, las unidades por las centenas, y las decenas por las decenas, al total añádanse las centenas retenidas: escríbanse las centenas contenidas en este nuevo total, y reténganse los millares para añadirlos a la suma de los millares por las unidades, de las unidades por los millares, de las centenas por las decenas, de las decenas por las centenas, etc.»

De las reglas a las fórmulas

Una vieja y muy conocida técnica para multiplicar número dígitos, llamada multiplicación «a la Turca», en la Aritmética de Chuquet, el Triparty (cit. Compligio, 1992), operaba con los dedos de la siguiente manera:

Cada dedo está asociado a un número del 6 al 10. Para multiplicar dos de esos números se juntan los dedos correspondientes hasta tocarse. Los dedos que se tocan y los que quedan por arriba son la cifra de las decenas. Los que quedan por debajo se multiplican, los de una mano por los de otra, y dan la cifra de las unidades.



7x8 = Los dedos que se tocan y los de arriba dan la cifra de las decenas: 3 + 2 son cinco decenas.
Los dedos que quedan por abajo de los que se tocan en una mano se multiplican por los que quedan en la otra mona. Esto da la cifra de las unidades: 2 x 3, son 6.
Total: 56

Se puede hacer de esta regla el punto de arranque para plantear otras. ¿Habrá alguna regla con los dedos para trabajar los números ente 5 y 9 en vez de entre 6 y 10? ¿Y entre 15 y 19 o entre 16 y 20?

También cabe plantearse cuestiones matemáticas: ¿Cómo se explica esta regla? ¿En qué leyes, principios, relaciones o propiedades se sustentan?

¿Cómo se explica esta regla? ¿En qué leyes, principios, relaciones o propiedades se sustenta?

El primer tipo de cuestiones es fácil de contestar, basta asignar números a los dedos, y como se sabe el resultado de los productos basta con indagar como serán las reglas. Con paciencia se puede obtener una regla general que agrupe a toda la casuística, pero este es un camino lento que va de lo particular a lo general. Cabe la posibilidad de tomar el camino inverso, el que va de lo general a lo particular. Para allanar esta otra ruta voy a presentar una nueva regla ciertamente parecida a la anterior, llamada multiplicación «del Perezoso» que aparece en Corachán (1699).

Para multiplicar por ejemplo 7 por 8, se escriben los números y a su derecha sus diferencias a 10.

7 ...... diferencia a 10 3

8 ...... diferencia a 10 2

La diferencia entre un factor y la diferencia a 10 del otro da la cifra de las decenas, 7-2=5. El producto de las diferencias da la cifra de las unidades, 2×3=6. Total 56.

A continuación la transcribo tal como viene en la aritmética de Pérez de Moya (1573), una de las tres más influyentes aritméticas españolas de los siglos XVI y XVII, para que se puedan comparar los diversos estilos de lenguaje.

«Si quieres multiplicar un número Dígito por sí mismo, o por otro cualquiera número Dígito, como ocho veces seis, o siete veces seis, asentarás un número (cualquiera de ellos) encima del otro, poniendo delante de cada uno hacia la mano derecha lo que le faltare para llegar a diez, como si dijéramos ¿ocho veces siete cuánto montan? Pon el uno encima del otro, poniendo delante del ocho un dos, y poniendo delante del siete un tres (que es lo que les falta para diez) como parece:

8 —— 2

7 —— 3

Hecho esto, multiplicarás las faltas que a los tales números les falta para llegar a diez la una por la otra, ¿como son? y tras, diciendo dos veces tres hacen seis, estos seis se asentarán debajo de la raya por unidades como parece:

8 —— 2

7 —— 3

6

Y luego restarás la falta del un número del otro número contrario, y no importa que sea cualquiera, quiero decir que el tres (que es la falta del siete) lo restas del ocho o los dos (que es la falta del ocho) lo restas del siete, que de una manera y de otra quedarán cinco, los cuales harás dieces, y juntarlos has con los seis que tenías de la multiplicación del dos por el tres, y montarán cincuenta y seis, y tanto dirás que montan ocho veces siete.

8 —— 2

7 —— 3

5 6

Nota, que cuando la suma de ambos los dos números que multiplicamos no pasara de 10, no curarás de esta regla porque, será cosa más embarazosa que comprensible».

Estas dos reglas, a la turca o de los dedos y la del perezoso, presentan un parecido asombroso, casi se diría que son la misma regla, ¿lo son? De hecho, ambas constan de dos partes, una suma y un producto, este último obtenido multiplicando los mismos valores, el 3 y el 2. Por otra parte, qué interés puede tener una regla para multiplicar dos números dígitos, como el 8 y el 7, si en realidad hay que multiplicar otros dos, el 3 y el 2, ¿qué ventaja es esto? En la época en la que se utilizaba estas reglas, la práctica de la multiplicación no era algo tan frecuente como lo es hoy en día para nuestros escolares, la gente prefería recurrir a este tipo de reglas para multiplicar los números mayores que 5, pues así no tenían que hacer el esfuerzo de memorizar las tablas de multiplicar más allá de la de este valor.

Pero no sólo eso, la tabla del perezoso es perfectamente generalizable. En efecto, véase el siguiente método, llamado en Dalmáu (1898) de «los complementos», recomendado para el caso en que el producto de los complementos sea más fácil que el producto de los datos dados. Transcribo literalmente:

Método de los Complementos, para factores con igual número de cifras.

Se toma la diferencia entre uno de los factores y el complemento del otro a una potencia de 10, colocando a la derecha tantos ceros como tenga esta potencia; se añade a este resultado el producto de los dos complementos, y la suma es el producto buscado.

Sea la multiplicación 989x998:

Producto de los complementos a 1000	*11x2 =*	*22*
998 – 11 = 987, añadiendo tres ceros		*987000*
Suma, que es el producto		*987022*

Método de los Complementos, generalizado a factores con desigual número de cifras. Si ambos factores no tienen igual número de cifras, se practica la regla dada en el caso anterior, igualando antes las cifras, añadiendo los ceros necesarios a la derecha del factor que tenga menos, teniendo cuidado de suprimir después estos ceros de la derecha del producto.

Sea la multiplicación 9986x95. Igualando las cifras del segundo factor, tendremos 9986x9500.

Producto de los complementos a 10000	*14 x 500 =*	*7000*
9986-500 = 9486, añadiendo cuatro ceros		*94860000*
Suma que es el producto		*94867000*

Método de los Complementos, para factores iguales, o lo que es lo mismo, para hallar el cuadrado de cualquier número. Podemos aplicar el recomendable método de los complementos aritméticos, que ya hemos explicado.

Hallaremos el cuadrado de 896.

Producto de los complementos a 1000	*104 x 104 =*	*10816*
896 - 104 = 792, añadiéndole tres ceros		*792000*
Suma, que es la segunda potencia buscada		*802816*

Llegados a este punto, una vez conocidas estas reglas para multiplicar, el lector advertirá que todas ellas tienen algo en común. Si la curiosidad le espolea querrá saber que es ello. Incluso es posible que le asalten otras preguntas, como por ejemplo cuando en la regla de los complementos se halla la diferencia entre el primer dato que se escribe y el complemento del otro, que pasaría si cambiáramos los datos y escribiéramos primero el otro dato. Obviamente en ambos casos ha de dar lo mismo, porque la regla no debe depender del dato que se escriba primero. Pero, ¿es igual restarle a un dato el complemento del otro, que al revés? Si esto es verdad estamos ante una ley que no es evidente a primera vista. ¿Qué ley es ésta?

Formulación de esta ley.

$$a - (10 - b) = b - (10 - a).$$

En efecto $a - (10 - b) = a + b - 10 = b - (10 - a)$.

Con esta ley hemos iniciado el proceso para pasar de las reglas a las formulas. Continuemos con ello. ¿Qué ley o fórmula se encierra en las reglas enunciadas?

Recordemos la formula del perezoso, en ella para calcular el producto de dos números 7 y 8 se halla el producto de sus complementos $(10 - 8)(10 - 7)$ y la diferencia de un dato por el complemento del otro, $10[8 - (10 - 7)]$. Esto último es la cifra de las decenas, lo que se escribe en el lenguaje horizontal con un cero a la derecha. En consecuencia el método del perezoso se puede reescribir así:

$$8\times7 = (10-7)(10-8) + 10[7 - (10-8)]) =$$
$$= (10-7)(10-8) + 10[8 - (10-7)])$$

Ahora para conocer hasta qué punto esta regla es general, basta con reescribirla con letras donde hay números:

$$ab = (10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)])$$

y demostrar que es cierta para cualesquier dígitos a y b, para lo cual es suficiente con efectuar el cálculo literal de $(10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)])$ y comprobar que efectivamente resulta ab. En efecto:

$$(10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)])=$$
$$= 100-10a-10b+ab+10a-100-10b = ab$$

A continuación, y por analogía, resulta fácil formular el método de los complementos:

$$ab = (100-a)(100-b)+100[a-(100-b)]$$
$$ab = (1000-a)(1000-b)+1000[a-(1000-b)]$$
$$\dots$$

Y ahora, regresando al método de los dedos o a la turca, para calcular el producto de dos números, por ejemplo 7 y 9, se asigna el 7 al dedo índice y el 9 al dedo medio, después se juntan estos dedos. La cifra de las decenas se obtiene sumando el número de dedos que se tocan y los que quedan por arriba, es decir, 2+4. Adviértase que en vez del 7 contabilizamos un 2 y en vez del 9 contabilizamos un 4, esto es como si prescindiéramos de 5 de las unidades de cada uno de estos números 7 y 9. Por otra parte, se multiplica el número de dedos que quedan por abajo de los que se tocan, es decir 3x1, adviértase que esto es como si hiciéramos el producto de los complementos a diez de los datos dados, $(10-7)(10-9)$, igual que en el método del perezoso. Por lo tanto, la regla se puede escribir en el lenguaje horizontal así:

$$7\times9 = (10-7)(10-9)+10[(7-5)+(9-5)])$$

Y por analogía la fórmula debe ser:

$$ab = (10-a)(10-b)+10\,[(a-5)+(b-5)]$$

Para demostrarla es suficiente con hacer el correspondiente cálculo literal. Una vez se ha llegado aquí, es el

...el método de los dedos o a la turca no es más que una reformulación del método del perezoso y viceversa.

momento de poner juntas las fórmulas del perezoso y la de los dedos para tratar de analizar lo que tienen en común.

$$ab = (10-a)(10-b)+10[a-(10-b)])$$

$$ab = (10-a)(10-b)+10\ [(a-5)+(b-5)]$$

Salta a la vista que la parte que tienen diferente, $10[a-(10-b)])$ y $10\ [(a-5)+(b-5)]$ no lo es tanto pues una se sigue de la otra. En efecto:

$$a-(10-b) = (a+b-10) = (a-5)+(b-5)]$$

En consecuencia, podemos decir que el método de los dedos o a la turca no es más que una reformulación del método del perezoso y viceversa. Como el método del perezoso se generaliza en el método de los complementos, cabe pensar que también el método de los dedos se generaliza por analogía. Su estudio se deja en las manos, nunca mejor dicho, del lector.

De las fórmulas a las reglas

En el intermedio del proceso anterior aparece una formula para la que no se ha dado la regla. En efecto se vio que

$$a-(10-b) = (a-5)+(b-5) = (a+b-10)$$

por lo tanto se tiene aquí un tercer método, cuya fórmula es:

$$ab = (10-a)(10-b)+10\ [a+b-10]$$

La regla correspondiente puede enunciarse así: Para multiplicar dos números dígitos se resta de 10 cada factor y también se resta diez de su suma. El primer resultado da la cifra de las unidades y el segundo la cifra de las decenas.

Epílogo

Los métodos utilizados anteriormente forman parte de la tradición escrita en los libros de aritmética. El aprendizaje de estos métodos es de por sí una actividad lúdica que puede ser utilizada con una finalidad motivadora, pero lo que aquí se ha pretendido mostrar es que también pueden ser utilizados con una intención matemática. En este sentido, la tradición aritmética es rica y valiosa, como muestra ofrezco algunas otras de estas reglas para que sean analizadas y se haga emerger su estructura común a través de sus fórmulas correspondientes.

El aprendizaje de estos métodos es de por sí una actividad lúdica que puede ser utilizada con una finalidad motivadora, pero lo que aquí se ha pretendido mostrar es que también pueden ser utilizados con una intención matemática.

Reglas de la tabla Mayor. Son las que se utilizaban para multiplicar los números de dos cifras, es decir los comprendidos entre 10 y 100. A continuación las presento tal y como vienen en Bruño (1932), incluyendo su generalización a números entre 100 y 110 y entre 1000 y 1010.

Caso general

Para multiplicar dos números de dos cifras iguales en decenas.

Se añaden al uno las unidades del otro, se multiplica la suma por las decenas y por 10, y se añade al resultado el producto de las unidades de ambos factores.

Ejemplo:

$$25\times27 = (32\times20) + 35 = 640 + 35 = 675.$$

En efecto:

$$25\times27 = (20+5)(20+7) = (20+5)20+(20+5)7 =$$

$$= (20+5)20+20\times7+5\times7 = (20+5+7)20+7\times5 = 32\times20+5\times7$$

Casos particulares

1.°) Los dos números están comprendidos entre 10 y 20.

La operación es más sencilla por tener cada factor sólo una decena

$$13\times18 = (13+8)10 + 8\times3\ ...$$

2.°) Los dos factores sólo difieren en las cifras de sus unidades, las cuales suman 10.

El aplicar la regla general equivale, en este caso, a multiplicar la cifra común de las decenas por la misma aumentada de 1, multiplicar el resultado por 100 y añadir el producto de las unidades.

Ejemplos: $89\times81 = (8\times9)100 + (9\times1) = 7.209$

Nota: Esta regla es particularmente ultrarrápida cuando se aplica al caso de un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo. Esta regla viene en Santillana de la siguiente manera:

«Los productos de 15×15, 25×25, 35×35, 45×45, etc., acaban en 25. Observa cómo se obtiene el producto completo:

1xsiguiente (2) = 2; 15×15 = 225».

3.°) Los dos números están comprendidos entre 100 y 110.

Se podrá también aplicar la regla general, teniendo en cuenta que cada factor tiene 10 decenas; luego, después de añadir a uno de los factores las unidades del otro, se multiplicará por 100, y se añadirá el producto de las unidades de los dos números.

Ejemplos: 103×106 = (109×100)+3×6 = 10.918

4.°) Los dos números están comprendidos entre 1.000 y 1.010.

Ejemplo: 1.005×1.008 = (1.013×1.000)+(5.8)=1.013.040

5.°) Los dos números están comprendidos entre 90 y 100.

Ejemplo: 92×97. Por la regla general resulta

(92+7)90+(2×7) = (99×90)+14 = 8.910+14 = 8.924

De la misma forma que hay reglas para números de dos cifras iguales en decenas, particularizando según sea el caso, también hay reglas para números iguales en unidades. En la Aritmética de Polo (190?), se incluye la siguiente:

Método para multiplicar dos números de dos cifras iguales en las cifras de las unidades y tales que las de las decenas suman 10:

Ejemplo. 34×74 = 2.516. Se multiplican las cifras de las decenas, al producto se le suma la cifra de las unidades, y el total son las centenas del producto que se quiere averiguar, a las que se añade el producto de las unidades por sí mismas.

Por último, y para no hacer mas larga esta selección, se incluye el siguiente método de las diferencias, tomado de Donovan & William (1965). Para multiplicar números iguales comprendidos entre 25 y 50:

46×46 =	46-25, 21	×100	2100
	50-46, 4	4×4	+ 16
			2116

Nota final: He aquí algunas soluciones:

$$(10a+b)(10a+c) = 100a(a+1)+bc$$

$$(10a+b)(10a+c) = 10a[(10a+b)+c)]+bc$$

$$(10a+b)(10c+b) = 100(ac+b)+b^2$$

$$(10a+b)(10c+b) = 100(ac+b)+b^2), \text{ con } a+c = 10$$

$$N^2 = 100\,(N-25) + (50-N)^2$$

Bernardo Gómez
Departamento de
Didáctica de la Matemática.
Universitat de València

Referencias bibliográficas

BRUÑO (1932, serie reeditada): *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada. Curso Sup.*, (2.ª ed.), Ed. La instrucción popular, Madrid, Barcelona.

COMPIGLIO, A. y V. EUGENI, (1992): *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo*, (Trad. de *Dalle dita al calculatore*), Ed. Paidós, Barcelona.

CORACHÁN, J. B. (1699): *Arithmetica Demonstrada Theórico-Práctica para lo mathemático y mercantil*, Valencia.

DALMÁU CARLES, J. (1898, serie reeditada): *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*, (Libro del alumno. Grado profesional), Barcelona, Madrid y Gerona.

DONOVAN, A. J. y H. G. WILLIAM (1965, Serie, 1.ª ed., 1960): *Exploring Mathematics on your short cuts in calculations*, vol. 9, Ed. John Murray, Londres.

FLOURNOY, F. (1969): *Las matemáticas en la escuela primaria*, Troquel, Buenos Aires. (Título de la obra en inglés: *Elementary School Mathematics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964).

GÓMEZ ALFONSO, B. (1994): *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*, Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

GÓMEZ, B. (1988): *Numeración y Cálculo*, Síntesis, Madrid.

LEE, L. y D. WHEELER (1989): «The arithmetic connection», *Educational Studies in mathematics*, 20, 41-45.

PÉREZ DE MOYA, J. (1573): *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural*, Alcalá de Henares.

POLO, R. (¿Final del XIX?): *Aritmética*, Libreria de F. Pablos, Salamanca.

SANTILLANA (Ediciones de 1982, 1988. Serie reeditada): *Libro de texto para la EGB.*

TREVISO (1478): *Aritmética* (Trad. de D. E. Smith), en Frank J. SWETZ, *Capitalism y Arithmetic. The New Math of the 15 th Century*, (1987, ed 1989), La Salle, Illiois, Open Court.

VALLEJO, J. M. (1813, 4.ª ed. 1841): *Tratado Elemental de Matemáticas*, Tomo I, Madrid.

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 69-72

Fractales y azar. Un acercamiento mediante la calculadora gráfica

Juan Gallardo Calderón

IDEAS Y RECURSOS

Mientras la intuición nos lleva a suponer que un proceso aleatorio debe conducir a una estructura arbitraria y desordenada, la experiencia que mostramos en el artículo pone de manifiesto que no siempre es así.
Las calculadoras gráficas proporcionan un instrumento muy útil para acercarse en el aula, de modo experimental, a los fractales y al caos.

Desde que en 1975 Mandelbrödt introdujera el término fractal para referirse a los objetos matemáticos obtenidos a través de la repetición infinita de un proceso geométrico generalmente de naturaleza muy simple y que, sin embargo, da lugar a una estructura final aparentemente compleja, puede decirse que las matemáticas han encontrado una herramienta que, por su poder creativo y de aplicación a otras ciencias, está dando lugar a experiencias interdisciplinares de sumo interés.

Como consecuencia, los fractales, y el caos, atraen cada vez más la atención de la sociedad en general, y no sólo la del matemático que encuentra en la geometría fractal un puente entre la geometría clásica y el análisis moderno. Así, el color y la belleza de sus formas geométricas despiertan en el artista un interés estético por las matemáticas que rara vez había ocurrido antes. Para el experto en informática los fractales y el caos ofrecen un extraordinario entorno en el que explorar, crear y construir un nuevo mundo visual. A los estudiantes interesados les da la posibilidad de introducirse en las matemáticas del siglo XXI y... a los profesores y profesoras se nos presenta así una oportunidad única de poner de manifiesto el dinamismo de nuestra materia y las múltiples relaciones entre sus distintas partes.

Parece, por tanto, conveniente ofrecer a los alumnos y alumnas de Bachillerato la posibilidad de acercarse a las nociones básicas del caos y los fractales. Esa aproximación puede hacerse a través de actividades exploratorias en las que juegan un papel de gran utilidad los ordenadores –o las calculadoras gráficas– al permitir un contraste rápido de sus intuiciones.

Las oportunidades para introducir elementos de geometría fractal en clase de secundaria son muchas, ya que muchas son las conexiones con tópicos clásicos en los programas actuales.

Entre esas conexiones merece destacarse, junto a las más conocidas que relacionan los fractales con los conceptos de semejanza, iteración, límite, etc. la que se refiere a la conexión entre los fractales y el azar.

El juego del caos

Los importantes avances científicos y tecnológicos habidos durante el siglo XX hacen pensar con frecuencia que el mundo funciona como un mecanismo de relojería, cuyas leyes pueden ser descifradas paso a paso. Sin embargo, el desarrollo de las nuevas teorías científicas nos lleva justamente a la conclusión de que esa ilusión está injustificada; el determinismo estricto y el desarrollo aparentemente aleatorio *no* son mutuamente excluyentes, sino que coexisten abundantemente en la naturaleza.

La relación entre caos y fractales se mueve en esa dirección. Nuestra idea intuitiva de azar nos hace suponer que una figura que se genere aleatoriamente debe poseer una estructura arbitraria y desordenada. El llamado «juego del caos» puede servir para poner de manifiesto como, mediante un procedimiento aleatorio, se obtiene una figura de estructura determinística (caos determinista), lo cual, a la vista de lo apuntado en el párrafo anterior, justifica su interés para ser conocido por los alumnos y alumnas de enseñanza secundaria.

Para poner en práctica el juego del caos necesitamos un dado de tres caras señaladas con A, B y C. Puede servirnos un dado ordinario sin más que asociar, por ejemplo, las caras del 1 y del 2 con A, las del 3 y del 4 con B y las del 5 y del 6 con C. Tendremos así un generador de secuencias aleatorias de A, B y C, tales como B, C, B, B, A, B, C, B, C, A... Las reglas del juego son muy simples. Dibujamos un triángulo de vértices A, B, C y señalamos un punto cualquiera del plano, x_0; tiramos el dado y si sale por ejemplo A, nos desplazamos al punto medio entre x_0, y A; llamamos a ese punto x_1. Tiramos de nuevo el dado y señalamos como punto siguiente el situado a medio camino entre x_1 y el vértice indicado por el dado, y así sucesivamente. La figura 1 ejemplifica las tres primeras tiradas del juego, en el caso de que el punto inicial se haya elegido interior al triángulo; la secuencia correspondiente a las tres tiradas representadas sería: C, A, B.

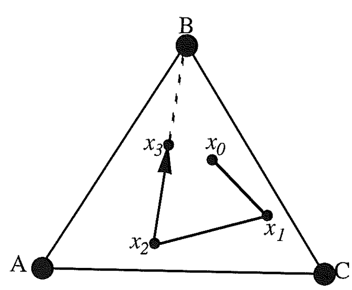


Figura 1

```
ClrDraw
0 → Xmin
1 → Xmax
0 → Ymin
0 → Ymax
Disp «X=»
Input X
Disp «Y=»
Input Y
0 → C
Disp «J=»
Input J
Lbl 1
C+1 → C
PT - On (X,Y)
If C > J
End
Rand → N
If N < .3333
Goto 2
If N > .6666
Goto 3
.5X → X
.5Y → Y
Goto 1
Lbl 2
.5(X+1) → X
.5Y → Y
Goto 1
Lbl 3
.5(X+.5) → X
.5(Y+1) → Y
Goto 1
```

La cuestión es si en el caso que jugáramos infinitas veces, los puntos x_n se colocarían aleatoriamente o por el contrario se agruparían de alguna manera especial.

Puede demostrarse que los puntos convergen hacia un conjunto fractal muy conocido. Naturalmente, sería pretencioso intentar esa demostración en los niveles de enseñanza en que nos movemos, pero sí es posible acercarnos a este hecho de un modo relativamente sencillo, usando calculadoras gráficas, que cada uno o dos alumnos pueden tener a su disposición con más facilidad que un ordenador y que, de manera análoga a éste, permiten llevar a cabo realmente y en un escaso periodo de tiempo, lo que sin ellas se quedaría en un experimento mental de dificultades seguramente insalvables.

Sin embargo, en primer lugar, conviene animar a los alumnos y alumnas a que jueguen manualmente algunas partidas y a que dibujen los resultados correspondientes a cuatro o cinco tiradas, lo cual les permitir además de hacerse con las reglas del juego, lanzar sus primeras conjeturas.

A continuación, puede simularse el juego para un número mayor de partidas utilizando una calculadora gráfica. Por ejemplo, con «Texas Instruments, mod. 81», un programa que nos permite dicha simulación viene en el cuadro adjunto.

La elaboración de este programa necesita, claro está, el conocimiento del lenguaje de programación específico de la calculadora utilizada (por otra parte, similar al Basic), pero sólo en su última fase; es decir, el diseño del proceso, que es lo realmente importante, es sobre todo un ejercicio relacionado con el carácter algorítmico de las matemáticas, y proporciona ocasión para enlazar con diversos conceptos y procedimientos.

Esos pasos esenciales en el programa concreto que nos ocupa son:

1. «Dibujar» un triángulo, por ejemplo de vértices A(0,0), B(0.5, 1), C(1,0)

2. «Elegir» el punto P con el que iniciar el juego; le daremos unas coordenadas genéricas P(X,Y).
3. Decidir cuantas veces queremos jugar (J), e introducir un contador (C) que controle el número de ellas que se llevan jugadas.

A estas tres etapas previas están fundamentalmente dedicadas las instrucciones 1 a 17. En las siguientes, «jugaremos al caos»:

4. «Cogemos el dado de tres caras» mediante la definición de una variable que toma como valor en cada tirada un número aleatorio comprendido entre 0 y 1 (línea 18). Si el número obtenido está entre 0 y 1/3, diremos que ha salido C; si está entre 2/3 y 1, que ha salido B; en otro caso supondremos que ha salido A.
5. Si sale C, debemos desplazarnos al punto medio entre P y C (lineas 26, 27, 28, 29). Si ha salido B, iremos al punto medio entre P y B (lineas 30, 31, 32, 33). En otro caso, el punto siguiente a P se hallar a medio camino entre P y A (lineas 23, 24, 25).

La figura 2 muestra los resultados del Juego del Caos, simulado con el programa, para 100, 500, 1.000 y 10.000 tiradas.

En un aula con alumnos poco habituados a trabajar con programación en la calculadora gráfica, es seguro que estas explicaciones habrá que darlas *a posteriori* una vez que se les ha facilitado el programa y lo han ejecutado, pero a continuación se les puede proponer variaciones sobre el programa, para que ellos mismos lo modifiquen adecuadamente y además les proporcione un mejor conocimiento del juego y sus consecuencias. Variaciones tales como ¿qué ocurre si «dibujamos» un triángulo de otra clase?, o, ¿qué ocurre si el dado tiene «cargada» una de sus caras?. En cualquier caso, ¿qué características tendrá la figura resultante cuando el juego se realizara infinitas veces?

El triángulo de Sierpinski

Si repitiéramos el proceso infinitas veces es de esperar que apareciera el llamado *triángulo de Sierpinski*, que de esta forma diremos que es la figura límite o *atractor*, del juego del caos.

Se trata de un fractal clásico que fue introducido, en 1916 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski, como el conjunto de puntos que queda después de realizar infinitas veces el proceso geométrico siguiente:

Dibujamos un triángulo en el plano y le aplicamos el siguiente esquema iterativo:

a) unir mediante segmentos los puntos medios de sus lados y
b) eliminar el triángulo central de entre los cuatro formados.

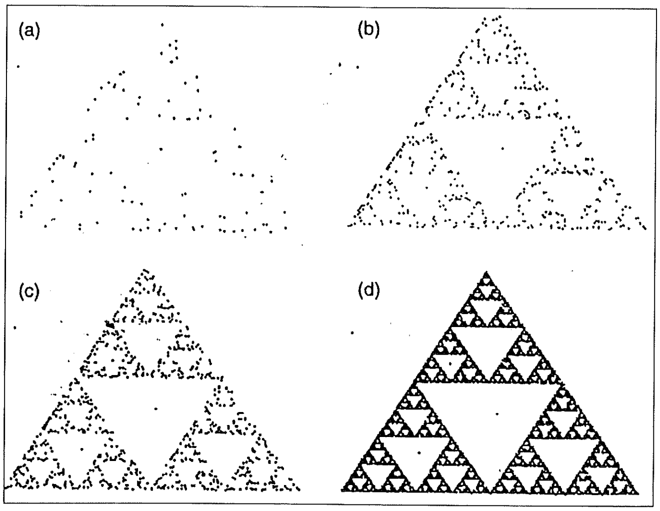


Figura 2

En cada una de las etapas del proceso se van generando cuatro triángulos congruentes de los que eliminamos el del medio. Concretamente, después del primer paso tenemos tres triángulos congruentes cuyos lados miden exactamente la mitad del inicial; siguiendo el mismo procedimiento con los tres triángulos restantes, obtendremos 3, 9, 27, 81... triángulos, cada uno de los cuales es una versión reducida a escala de los triángulos de la etapa anterior. La figura 3 muestra las primeras etapas de la construcción:

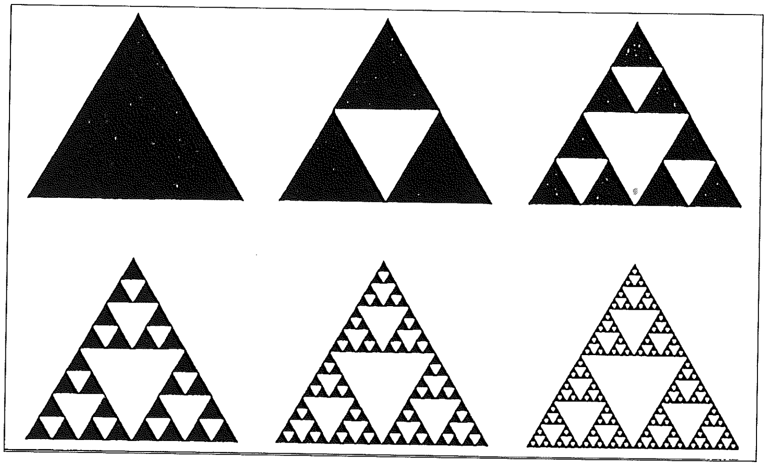


Figura 3

La construcción del triángulo de Sierpinski desde este otro punto de vista, puede ser trabajada también por alumnos de bachillerato, proporcionando una aproximación a la noción de autosemejanza, característica esencial de ciertos fractales, a la vez que permite mediante el estudio de las sucesiones de las áreas, concluir que la figura límite tendrá área nula, lo que por otra parte vendría a poner de manifiesto que la figura correspondiente a cualquier etapa del proceso, por avanzada que sea, será siempre una aproximación finita al triángulo de Sierpinski, toda vez que al tratarse de una figura límite no es posible su representación exacta.

Conclusión

Lo expuesto hasta aquí permite un acercamiento, intuitivo y basado en la experiencia, al hecho aparentemente paradójico de que una figura fractal de estructura muy elaborada tal como es el triángulo de Sierpinski puede obtenerse mediante un proceso aleatorio tal como son las infinitas tiradas del juego del caos.

Es evidente que no puede decirse que hayamos establecido plenamente ese resultado. Un análisis riguroso (Peitgen y otros, 1992) tiene como punto de partida la consideración de que una sucesión de tiradas puede representarse, como ya dijimos, mediante una sucesión de las letras A, B y C; cuando se leen de derecha a izquierda cada una de esas secuencias indica un procedimiento para asociar la posición del punto con un subtriángulo correspondiente a una determinada etapa de la construcción del triángulo de Sierpinski por autosemejanza, y recíprocamente.

Además, son muchas las cuestiones que quedan pendientes, por ejemplo, la referente a si habrá «juegos de caos» que produzcan fractales diferentes del triángulo de Sierpinski.

Sin embargo, creo que lo importante desde el punto de vista pedagógico es que el alumno habrá tenido, quizás por primera vez, la oportunidad de intuir que caos y determinismo son las dos caras de una misma moneda.

Juan Gallardo
IB Santa Eulalia. Mérida
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
Ventura Reyes Prósper

Bibliografía

GUZMÁN, M. y otros (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor.

PEITGEN, H. y otros (1992): *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag.

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 73-75

De la Astronomía a la Lingüística: una experiencia didáctica en torno a los logaritmos

Benito Hernández Bermejo
Juan Bosco Romero Márquez

IDEAS Y RECURSOS

Enun recorrido que empieza en las necesidades de los cálculos astronómicos y termina en la teoría de lenguajes formales, se propone un modelo que posee las mismas propiedades que los logaritmos, desde el punto de vista formal, aumque con ciertas limitaciones. Dicho modelo muestra que las propiedades de los logaritmos no son tan antinaturales como parece a primera vista, pudiendo no sólo ser aprendidads sino también ser aceptadas.

Queridos alumnos:

Como ya sabéis, hemos definido una función logaritmo de la siguiente manera:

$$f:\Re^{+}-\{0\}\rightarrow\Re$$
$$b\rightarrow \log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b,$$

donde a>0, a≠1 es la llamada *base* del logaritmo, que habitualmente es 10 o el número *e*.

Aunque esta definición es perfectamente correcta, probablemente os ha parecido arbitraria: ¿Por qué definir el logaritmo de esta forma? ¿Por qué *definirlo?* Todo tiene una explicación...

Hace alrededor de tres siglos, John Neper definió por primera vez los logaritmos debido a que estaba buscando una función que simplificara de alguna forma los cálculos numéricos, que en aquella época eran largos y tediosos: ¡Entonces no había calculadoras! Tales cálculos habían empezado a proliferar, especialmente en Astronomía: el propio Kepler, en la misma época, se queja frecuentemente en este sentido.

Pues bien: ¿qué ocurriría si dispusiéramos de una función «mágica», una función capaz, nada menos, que de convertir las potencias en multiplicaciones y las multiplicaciones en sumas? ¿Acaso no sería una ayuda inmensa para nosotros si tuviésemos que calcular a mano?

Pues esta función existe, y es el logaritmo.

Esto es así debido a sus tres propiedades, que son las que justifican históricamente la utilidad de esta función:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$$
$$\log_a(x^z)=z\log_a x,$$

para cualquier base a, con x, y reales positivos y z real.

Aunque los logaritmos tienen otras propiedades, estas son con diferencia las más importantes, y en ellas nos vamos a fijar: son las llamadas *propiedades funcionales* (hay un teorema por el cual se ve que estas tres propiedades, junto con $\log_a a = 1$ determinan a la función logaritmo)

¿No os parecen «diferentes»? Lo que quiero decir es que nunca antes habéis visto unas propiedades así: al principio resultan extrañas, poco evidentes. Normalmente uno no se encuentra nunca cosas concretas que se comporten de esta forma... ¿o sí?

Os voy a proponer un juego: vamos a jugar con las palabras. Suponed que yo tomo el alfabeto de las letras minúsculas (me olvido de las mayúsculas para no complicarlo todo inútilmente), es decir:

{a, b, c, ..., z}.

Pues bien: voy a dar mi definición de «palabra»: una palabra es un conjunto de letras puestas una a continuación de otra, como por ejemplo:

casa
alumno
ababccbd
wwwwww

Diremos que dos palabras son iguales cuando consten del mismo número de letras y coincidan entre sí letra por letra, en el orden natural. Otra forma de expresarlo es decir que una palabra es un *conjunto ordenado* de letras. Fijaos bien: a mí no me importa que la palabra como tal signifique algo o no. Sencillamente son letras que junto en cierto orden. Vamos a etiquetar las palabras con letras mayúsculas para darles un nombre:

A = caballo
B = vgekliut,

por ejemplo.

Cualquier palabra A tiene asociada una longitud, *lg A*, que es el número de caracteres que la componen. Así, si A = libro, además de ser una hermosa palabra, lg A = 5.

¿Qué podemos hacer con nuestro conjunto de palabras?

¿Podemos juntar unas con otras? ¡Pues claro! A esta operación le voy a llamar *producto* y lo designaremos con un asterisco: si A = auto y B = bus, A * B = autobus; y si C = ccc y D = ddd, C * D = cccddd. O sea, el producto de palabras consiste en unirlas o pegarlas (más propiamente concatenarlas) en el orden indicado. Notad como este producto es asociativo pero no conmutativo, es decir:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$
$$A * B \neq B * A, \quad A, B, C \text{ cualquiera.}$$

Hemos definido un producto. ¿Sería posible definir, por ejemplo, una *potenciación?* Si tenemos el producto elevar a una potencia es fácil: basta multiplicar tantas veces como indique el exponente. Es decir, para n entero positivo:

$$A^n = A * A * \overset{(n)}{\ldots} * A$$

Así, si A = tbo, $A^2 = A * A$ = tbotbo y $A^3 = A * A * A$= tbotbotbo.

Os voy a proponer un juego: vamos a jugar con las palabras. Suponed que yo tomo el alfabeto de las letras minúsculas...

¿Podríamos ir más lejos y definir una *división?* Si podemos, lo que ocurre es que dos palabras no van a poder dividirse siempre, esto es, a veces una no va a ser divisible por la otra. Diremos que A es divisible por C si y sólo si existe una B tal que A = B * C; en este caso A/C = B. Por ejemplo: si A = averia, puede dividirse entre C = ria, y A/C = = ave. También es posible dividirlo entre C' = ia, tal que A/C' = aver. Sin embargo no se puede dividir entre C'' = = ave, ya que la división se considera sólo desde el lado derecho (aunque, por supuesto es posible definirla por la izquierda de manera análoga: es tan sólo una cuestión de convenio).

Según esto, ¿qué pasaría si yo dividiera una palabra entre sí misma: A/A? ¡Aparentemente nos quedamos sin letras! Pues bien, para ser coherentes con nuestras propias definiciones vamos a admitir que esta es una palabra también, y levamos a llamar λ: una palabra, de longitud 0: lg λ = 0. Como tiene longitud 0 será el elemento neutro de nuestro producto:

$$A * \lambda = \lambda * A = A \ ,\forall A$$

Respecto a la potenciación, también salimos ganando, ya que podemos extenderla para el caso n = 0:

$$A^0 = \lambda, \forall A$$

Además $\lambda^n = \lambda$ sea cual sea n = 0, 1, 2... puesto que al concatenar n veces una palabra sin caracteres el resultado es claramente la misma palabra sin caracteres. También es fácil ver que $A/\lambda = A$ $\forall A$ ya que quitamos λ por la derecha y al ser λ vacía el resultado es la propia A.

El conjunto de palabras así definido, incluyendo λ, se llama *lenguaje universal* asociado al alfabeto de las letras minúsculas.

Recapitulemos: Hemos empezado formando palabras. No nos hemos preocupado de su significado, sino sólo de trabajar con ellas definiendo unas operaciones: producto, división y potenciación.

Desde un punto de vista lingüístico, esto es lo mismo que decir que estamos trabajando a un nivel *sintáctico*, al ocuparnos de cómo construir y manejar las palabras de acuerdo a unas reglas, y no teniendo en cuenta el aspecto *semántico*, esto es, si el lenguaje resultante está dotado de significado y puede emplearse como instrumento para la comunicación. Existe un tercer nivel, el nivel *pragmático*, que se ocupa de la relación existente entre el lenguaje y sus usuarios: en este caso se trata de un lenguaje que surge con finalidades educativas en el campo de la matemática. (Como nota curiosa, los lenguajes están clasificados de acuerdo a sus propiedades generativas, es decir, de acuerdo al tipo de reglas gramaticales que los generan, nuestro lenguaje pertenece a la «mejor» de todas, la de los «lenguajes regulares» o «lenguajes de Kleene». Por abstractas que os puedan parecer estas cuestiones, hoy en día poseen un amplio interés en relación con diversos problemas de la Informática, como el desarrollo de lenguajes de programación).

Ahora fijémonos en esa función lg o longitud que habíamos definido. Es sencillo ver que:

$$\lg(A * B) = \lg A + \lg B$$
$$\lg(A/B) = \lg A - \lg B$$
$$\lg(A^n) = n \cdot \lg A$$

siempre que, como en el caso de la división, la operación esté definida. Nótese que dentro de los argumentos de la función lg tenemos las operaciones entre cadenas {*, /, potenciación} y fuera de tales argumentos las operaciones habituales entre números reales {+, –, ·}.

Por ejemplo, demostremos la primera (las demás son análogas y os las propongo como un breve ejercicio):

Sea $A = a_1 \cdots a_n$ y $B = b_1 \cdots b_m$, con *n, m* enteros positivos (cero en el caso de la cadena vacía). Entonces $\lg A = n$ y $\lg B = m$. Además $A * B = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ de modo que:

$$\lg(A * B) = n + m = \lg A + \lg B, \text{ Q.E.D.}$$

...las propiedades son formalmente idénticas a las de la función logaritmo, [...] no son tan antinaturales después de todo... No sólo pueden aprenderse, también pueden aceptarse.

Vemos que las propiedades son formalmente idénticas a las de la función logaritmo, que es lo que nos habíamos propuesto explorar. Luego, realmente, no es tan difícil llegar a un caso concreto y palpable que reproduzca fielmente las propiedades de los logaritmos. No son tan antinaturales después de todo... No sólo pueden aprenderse, también pueden aceptarse. Sólo hace falta imaginación.

Sin embargo, la matemática también es, a menudo, crítica. Hemos visto un modelo que posee unas propiedades idénticas a las de los logaritmos, pero, como todo modelo, debe tener limitaciones. ¿sois capaces de verlas? Si la respuesta es «no», os puedo señalar algunas: en primer lugar, el logaritmo tiene como conjunto imagen a todo $\Re$, mientras que nuestra «función» lg tan sólo puede tomar valores enteros no negativos. Por otra parte, la potenciación que hemos definido sólo puede efectuarse con exponentes (de nuevo) enteros no negativos; sin embargo, entre números reales no existen limitaciones en este sentido. Por tanto, este modelo es algo así como una versión con números enteros del original, o, por decirlo más precisamente, un *modelo discreto*. La comprensión de que lo que hacemos está limitado y el conocimiento de estas limitaciones es a menudo fundamental en la ciencia. Por eso os invito a que sigáis comparando nuestro ejemplo con el original en busca de diferencias y semejanzas. ¿qué podéis decir acerca del producto y de la división?

Pensadlo bien: hemos empezado por la Astronomía y terminado en la Lingüística, pero el objetivo era la Matemática. Nuestro vehículo durante este recorrido fueron las ganas de entender, de pensar y ¿por qué no? de divertirnos mediante juegos que nosotros mismos inventamos. La Matemática es todo eso. La Matemática puede, de hecho debe, ser así.

Benito Hernández
Departamento de Física Fundamental, UNED
Juan Bosco Romero
IB Isabel de Castilla
Ávila

Bibliografía

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las Matemáticas*, vol. I, Siglo XXI, México.
FERNÁNDEZ, G. y F. SÁEZ (1987): *Fundamentos de Informática*, Alianza, Madrid.
GUZMÁN, M. (1986): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.
KOESTLER, A. (1986): *Los sonámbulos*, vol. II, Salvat, Barcelona.
PIAGET, J. (1991): *Seis estudios de Psicología*, Labor, Barcelona.
POZO, J. I. (1987): *Aprendizaje de la Ciencia y pensamiento causal*, Visor Libros, Madrid.
RAPPOPORT, L. (1986): *La personalidad desde los 13 a los 25 años*, Paidós, Barcelona.
SPIVAK, M. (1988): *Calculus*, Reverté, Barcelona.
VAN HOUT, G. (1973): *La guía básica de la matemática moderna*, Daimon, Barcelona.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

CONVOCATORIAS

Secretario General de la Federación

Editor del Servicio de Publicaciones de la Federación

En marzo de este año se cumplían los cuatro años de mandato del actual Secretario General de la Federación, Luis Balbuena Castellano. Se hizo la correspondiente convocatoria para que los socios presentaran sus candidaturas a este puesto antes del 31 de enero de 1995. No se presentó ninguna. Por esta razón, y en virtud de lo previsto en los Estatutos, se abre un nuevo plazo de presentación de candidaturas que expirará el 31 de enero de 1996.

El puesto de Editor del Servicio de Publicaciones de la Federación es de más reciente creación y se hacía la convocatoria por primera vez. Tampoco se presentaron candidaturas y por esto se convoca también de nuevo con la misma fecha límite de 31 de enero de 1996 de presentación para los interesados.

Quienes deseen presentarse a alguno de esos puestos convocados, deberá enviar a la Secretaría General de la Federación (Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna –Tenerife–) los documentos que se solicitan.

La Junta de Gobierno de la Federación se reunirá entre los meses de febrero y marzo de 1996 para proceder a designar al responsable de cada puesto convocad entre quienes se hayan presentado o, en su defecto, actuar como indican los Estatutos.

Se reproducen a continuación los artículos de los Estatutos y del Reglamento alusivos a la Secretaría general, así como las bases aprobadas por la Junta de Gobierno para la designación del Editor del Servicio de Publicaciones.

Secretario General

Estatuto

Art. 14. El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años.

Art. 15. Son funciones del Secretario General:

a) Actuar como secretario en la Comisión Permanente y en la Junta de Gobierno, custodiando sus actas.

b) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno del Presidente.

c) Ordenar gastos.

d) Informar a los asociados de las actividades de la Federación.

e) La Coordinación general de las actividades de la Federación.

f) Organizar la elaboración de estudios y trabajos que redunden en beneficio de la Federación y que hayan sido aprobados en la Comisión Permanente o en la Junta de Gobierno.

g) Llevar la correspondencia de la Federación.

Reglamento

Art. 9. El Secretario General de la Federación será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años y rendirá cuenta de su gestión anualmente ante la Junta de Gobierno.

Art. 10. Podrá ser candidato cualquier socio de las Sociedades federadas. la solicitud, dirigida al Presidente de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste que es socio activo.

b) Una memoria de un máximo de tres folios, a doble espacio y por una cara, en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General, así como los contenidos de las tres vocalías previstas.

Art. 11 La Junta de Gobierno convocará el puesto de Secretario general mediante la comunicación a las Sociedades federadas, dos meses antes de finalizar su mandato o, en el caso de haber presentado su dimisión, dando un plazo mínimo de dos meses para la presentación de candidaturas.

Art. 12. El Presidente convocará una reunión de la Junta de Gobierno para proceder a la designación del Secretario General entre los candidatos presentados. Una vez decdida la designación lo comunicará a las Sociedades federadas.

Art. 13. Si no se presentara ningún candidato a Secretario General, o ninguno de los presentados recibiera la confianza de la Junta de Gobierno, ésta quedará facultada para designar a un socio que ocupará el cargo accidentalmente y por un plazo no superior a dos años dentro de los cuales realizará una nueva convocatoria.

Servicio de Publicaciones

El Servicio de Publicaciones será coordinado por un Editor que deberá ser un socio propuesto por su Sociedad federada. Será elegido por la Junta de Gobierno de la Federación, nombrado vocal *ad hoc* de la misma y será asesorado por un Comité Editorial.

Son funciones del Editor las siguientes:

a) Proponer a la Junta de Gobierno, para su aprobación, la composición de un Consejo Editorial de no más de cuatro personas (excluido el Editor).

b) Elaborar su proyecto bianual de publicaciones que presentará a la Junta de Gobierno para su aprobación. Dicho proyecto deberá:

- Incluir las propuestas de publicaciones que reciba de las distintas Sociedades, debidamente informadas por el Comité Editorial.
- Contener publicaciones que a juicio del Comité Editorial puedan resultar convenientes.
- Especificar las características, interés y viabilidad económica de cada publicación, así como, los mecanismos de edición y distribución.

c) Colaborar con los servicios de publicaciones de las distintas sociedades federadas.

d) Establecer canales de colaboración con otras entidades públicas o privadas que puedan favorecer el desarrollo del Servicio de Publicaciones.

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 77-84

La matemática que protege de errores a los números de identificación

María Candelaria Espinel Febles
Pino Caballero Gil

IDEAS Y RECURSOS

Con este material pretendemos divulgar la matemática implicada en los números de identificación tales como NIF, ISBN, EAN... La aritmética modular se utiliza para fijar el dígito de control, y algoritmos sencillos permiten al ordenador descubrir muchas falsificaciones o posibles errores en el número de identificación de la tarjeta, producto o persona. Los esquemas de codificación más usuales detectan todos los errores simples, esto es, cuando se confunde un dígito por otro pero, sin embargo, no descubren otros tipos de errores que, aunque son menos frecuentes, son posibles. El álgebra y la divisibilidad ayudan a elegir esquemas de codificación más seguros.

Introducción

Letra del DNI

Si tiene interés en conocer el procedimiento que se utilizó para obtener la letra de su NIF, tome el número de su DNI y calcule el resto módulo 23 y luego consulte el resultado en la siguiente tabla:

0	T	8	P	16	Q
1	R	9	D	17	V
2	W	10	X	18	H
3	A	11	B	19	L
4	G	12	N	20	C
5	M	13	J	21	K
6	Y	14	Z	22	E
7	F	15	S	23	T

En la práctica puede dividir el número del carnet entre 23, despreciar la parte decimal, multiplicar por 23 y restarlo al número del carnet, así obtendrá un número entre 0 y 23 que le permitirá fijar la letra según la lista anterior.

Por ejemplo, para el DNI 78694024,

$$78694024 : 23 = 3421479.3$$

$$3421479 \times 23 = 78694017$$

$$78694024 - 78694017 = 7$$

Por lo tanto, le corresponde la letra F.

Número de las tarjetas

Las tarjetas de bancos y cajas de ahorros utilizan procedimientos análogos para garantizar su seguridad. Supongamos un usuario cuya tarjeta tiene el número:

5 02065 000457195 3

pero por equivocación el cajero lee el número:

5 02065 000457165 3.

Esta errata, como veremos más adelante, se puede detectar gracias al dígito que va al final, llamado dígito de control.

Para calcular el dígito de control se utilizan los 14 dígitos centrales, y sus posiciones se entienden siempre contadas desde la derecha. El procedimiento es el siguiente:

Paso 1: Se suman los dígitos de las posiciones impares, esto es, las posiciones 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13, y el resultado se multiplica por 2.

Paso 2: Se cuentan el número de dígitos en las posiciones impares que son mayores que 4, y se suma al resultado del paso 1.

Paso 3: Se suman los dígitos de las posiciones pares y se añade al resultado del paso 2 más 1.

Paso 4: El último dígito de la tarjeta o dígito de control es la cantidad necesaria para que al sumarla al resultado del paso 3 quede un múltiplo de 10.

En la tarjeta citada, los pasos serían:

P1: $5 + 1 + 5 + 0 + 0 + 6 + 2 = 19$

$19 \times 2 = 38$

P2: $3 + 38 = 41$

P3: $9 + 7 + 4 + 0 + 5 + 0 + 0 = 25$

$25 + 41 + 1 = 67$

P4: $67 + 3 = 70$, por lo tanto, el 3 es el dígito de control.

En el caso de la equivocación citada, en la que se cambió el 9 por el 6, el dígito de control da 6 en lugar de 3 como figura en la tarjeta.

Con los procedimientos dados puede comprobar la letra de su NIF y el dígito de control de su tarjeta. No obstante, según la red de cajeros a la que pertenezca podrían existir diferencias en el procedimiento.

Código de barras (EAN)

Aunque los dos ejemplos citados son de ámbito nacional, la idea de añadir un dígito para controlar los errores que puedan cometer las personas o las máquinas se utiliza a nivel internacional. Este es el caso del código de barras o EAN (European Article Numbering). La mayoría de los artículos que compramos lo llevan. En la caja se rastrea el código del artículo mediante un escáner, de modo que se envía el precio almacenado en la memoria de un ordenador a la pantalla de la caja registradora y, por último, a la factura del cliente.

El código de barras lo forman doce números que se reparten de la siguiente forma: dos para el país, cinco para la empresa, cinco para el producto y además un último dígito de control para detectar errores.

El texto de Montaner-Moyano que se cita en la bibliografía tiene un código de barras acompañado de los siguientes dígitos:

97 88420 51877 0

El último dígito, 0 en este caso, es de validación, y permite comprobar que los datos anteriores son correctos.

El dígito de control o validación se comprueba mediante el procedimiento siguiente, donde las posiciones se entienden contadas desde la derecha:

Paso 1: Se suman los dígitos que ocupan posición impar.

Paso 2: Se suman los dígitos que ocupan posición par y el resultado se multiplica por 3.

Paso 3: Se suman los resultados de los pasos 1 y 2.

Paso 4: Se divide la suma por un número elegido, conocido como el módulo, que en este caso es el 10.

Paso 5: Se obtiene el resto de esta división, llamado resto módulo 10 de la suma. Si esta cantidad es 0, el código es correcto.

En nuestro ejemplo:

P1: $0 + 7 + 1 + 0 + 4 + 8 + 9 = 29$

P2: $7 + 8 + 5 + 2 + 8 + 7 = 37$

$37 \times 3 = 111$

P3: $29 + 111 = 140$

P4: $140 : 10 = 14$

P5: $140 = 0$ módulo 10.

Por tanto, el dígito de control es efectivamente 0.

Código para el pasaporte

En muchos países el pasaporte contiene también dígitos de control. En las

...la idea de añadir un dígito para controlar los errores que puedan cometer las personas o las máquinas se utiliza a nivel internacional.

aduanas existen máquinas para chequear estos dígitos. No se reconoce ese dígito a simple vista ya que aparece al final de un número que sí tiene relevancia, como es la fecha de nacimiento, número de pasaporte o fecha de caducidad. Los dígitos de chequeo se calculan utilizando un conjunto de reglas estándar. El procedimiento más común consta de los siguientes cuatro pasos:

Paso 1: Se multiplica cada dígito del número original por unas cantidades llamadas pesos. Los pesos que se eligen para el pasaporte son los dígitos de la serie 1731731731...

Paso 2: Se suman los resultados de sus multiplicaciones.

Paso 3: Se divide la suma por un número elegido, por convenio muchos países utilizan el número 10.

Paso 4: Se especifica el resto de esta división como dígito de chequeo.

Utilizando por ejemplo la fecha de nacimiento 3 de Septiembre de 1978 tenemos 030978. Pueden surgir problemas entre el orden del día y el mes, pues en algunos países se anota el mes antes que el día, así en nuestro ejemplo sería 090378, e incluso si se toma primero el año, se tendría 780903.

Siguiendo la costumbre española, la aplicación del proceso sería:

P1: Núm. original:	0	3	0	9	7	8
Pesos:	1	7	3	1	7	3
Productos:	0	21	0	9	49	24

P2: 0 + 21 + 0 + 9 + 49 + 24 = 103

P3: 103 ÷ 10 = 10, y resto 3

P4: el dígito de chequeo es el 3.

El número aparece en el pasaporte como 0309783.

Cálculos similares se hacen con el número del pasaporte o con la fecha de caducidad e incluso, en los países donde los ciudadanos tienen asignado tal número, con el número del carnet de identidad. La máquina de la aduana lee la zona y ejecuta los cálculos casi instantáneamente. Este proceso asegura que el pasaporte sea fiable y siga las reglas.

[En el ISBN] las dos primeras cifras nos dicen el país y la lengua en que se editó, las tres siguientes identifican la editorial y las cuatro siguientes, identifican al libro en sí.

ISBN para libros

Un código de ámbito internacional que se utiliza para identificar los libros es el llamado ISBN (International Standard Book Numbers). Por ejemplo, el texto de Montaner-Moyano (1989) que se cita en la bibliografía tiene el código:

ISBN 84-205-1877-8

Las dos primeras cifras, 84, nos dicen el país y la lengua en que se editó, las tres siguientes, 205, identifican la editorial y las cuatro siguientes, 1877, identifican al libro en sí. Además se añade un último dígito, 8, que informa de posibles errores al escribir alguno de los dígitos.

La última cifra de verificación se comprueba mediante el siguiente algoritmo:

Paso 1: Se multiplica cada dígito del número original por unos valores llamados pesos, que vienen dados por 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1.

Paso 2: Se suman los resultados de sus multiplicaciones.

Paso 3: Se calcula el resto módulo 11 de la cantidad anterior.

Paso 4: Si ese resultado es 0 el dígito de control queda comprobado.

En el ejemplo anterior, el dígito de control 8 queda comprobado de la siguiente forma:

P1: Núm. original:	8	4	2	0	5	1	8	7	7	8
Pesos:	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Productos:	80	36	16	0	30	5	32	21	14	8

P2: 80 + 36 + 16 + 0 + 30 + 5 + 32 + 21 + 14 + 8 = 242

P3: 242 ≡ 0 módulo 11

P4: El dígito 8 es correcto.

Sin el último dígito el resultado del Paso 2 sería 234, así que el 8 es el menor entero que permite conseguir un múltiplo de 11. Si fuese necesario un 10 como dígito de control se representaría por una X.

En los cinco ejemplos propuestos se han presentado cinco códigos actuales siguiendo la siguiente estructura. El NIF se describe de forma sencilla. El código de las tarjetas se presenta en forma de algoritmo. El código de barras se introduce como algoritmo que usa las clases residuales. El código para el pasaporte se presenta como un algoritmo que utiliza el producto escalar. El ISBN se describe en forma de algoritmo que utiliza a la vez las clases residuales y el producto escalar.

Con una lectura atenta de la descripción de los cinco procedimientos se puede deducir un método de funcionamiento común, que se pondrá de manifiesto en el siguiente apartado. Sin embargo, queremos hacer patente la diversidad en sus presentaciones puesto que de esta forma se abren más posibilidades en sus aplicaciones didácticas.

Clases residuales y producto escalar

En realidad casi todos los procedimientos anteriores se pueden describir en forma de algoritmos matemáticos que utilicen las clases residuales y el producto escalar para asignar un dígito de control (letra o número) para intentar detectar los errores que pudieran ocurrir en la transmisión de información. Por ello damos las siguientes definiciones básicas:

En general, si dos números enteros se diferencian en un múltiplo de un número entero n, se dice que son congruentes módulo n. En álgebra se utiliza la notación que sigue:

Si x e y son números enteros y $x - y$ es divisible por n se expresa como

$$x = y \pmod n$$

esto se lee, x es congruente con y, módulo n.

Se define el producto escalar de la cadena $x_1, x_2, \dots, x_k$ y el vector de pesos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ como

$$(x_1,x_2,\dots,x_k)\ (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k) = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \dots + x_k\lambda_k$$

Así, en general para obtener el dígito de control x_k, para una cadena $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ y un módulo n el dígito x_k se asigna de forma que cumpla la condición siguiente

$$(x_1,x_2,\dots,x_k)(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k) = 0 \pmod n$$

Veamos cómo quedan los esquemas de los cinco números de identificación descritos, utilizando ambas herramientas.

Letra del DNI

$$(x_1,x_2,\dots,x_8,x_9,x_{10})(10^7,10^6,\dots,10^0,-10^1,-10^0) =$$
$$= 10^7x_1+10^6x_2+\dots+10^0x_8-10^1x_9-10^0x_{10} = 0 \pmod{23}$$

Donde x_9 y x_{10} representan la letra del NIF.

Número de las tarjetas

No es posible utilizar vectores ya que en el Paso 2 del algoritmo se impone la condición de elegir los dígitos mayores que 4 y este hecho no es posible expresarlo mediante un vector.

Código de barras

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{12},x_{13})(1,3,1,\dots,3,1)=$$
$$=x_1+3x_2+x_3+\dots+3x_{12}+x_{13}=0 \pmod{10}$$

...casi todos los procedimientos anteriores se pueden describir en forma de algoritmos matemáticos que utilicen las clases residuales y el producto escalar

Aquí el dígito de control x_{13} se elige de forma que:

$$x_1+3x_2+x_3+\dots+3x_{12}=-x_{13} \pmod{10}$$

Pasaporte

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)(1,7,3,1,7,3,-1)=$$
$$=x_1+7x_2+3x_3+x_4+7x_5+3x_6-x_7=0 \pmod{10}$$

Luego el dígito de control x_7 se obtiene según:

$$x_1+7x_2+3x_3+\dots+3x_6=x_7 \pmod{10}$$

ISBN

$$(x_1,x_2,\dots,x_9,x_{10})(10,9,\dots,2,1)=$$
$$=10x_1+9x_2+\dots+2x_9+x_{10}=0 \pmod{11}$$

De manera que el dígito de control x_{10} viene dado por:

$$10x_1+9x_2+\dots+2x_9=-x_{10} \pmod{11}$$

Otros códigos que se utilizan para chequear dígitos de control son los siguientes.

$$(x_1,x_2,\dots)(7,3,9,7,3,9,\dots)=0 \pmod{10}$$
$$(x_1,x_2,\dots)(12,11,10,\dots,3,2,1)=0 \pmod{10}$$
$$(x_1,x_2,\dots)(1,2,3,4,5,6,7,8,1)=0 \pmod{10}$$
$$(x_1,x_2,\dots)(2^1,2^2,2^3,\dots,2^k)=0 \pmod{11}$$

Cálculo de probabilidades de detección de errores

Los esquemas anteriores permiten calcular dígitos que detectan errores. Los errores más frecuentes son los siguientes:

Error simple:

$$x \rightarrow y$$

Errores por transposición:

$$xy \rightarrow yx$$

Errores de transposición por salto:

$$x.y.z \rightarrow z.y.x$$

Error doble:

$$x\dots y \rightarrow z\dots t$$

Obviamente tanto los errores por transposición como los de transposición por salto son errores dobles.

A continuación calculamos las probabilidades de detección de algunos de estos errores en los cinco números de identificación presentados. Para su evaluación se cuentan los casos de no detección de error. En cada caso se considera la diferencia entre las cantidades resultantes de los productos escalares correspondientes al número correcto y al incorrecto. No se detecta aquel error que produzca una diferencia que sea múltiplo del módulo.

Letra del DNI

El código usado para el NIF, dada la ley de asignación de la letra, detecta el 100% de *errores simples,* pues un error de este tipo sobre un dígito que esté en la posición i produce un nuevo número cuya diferencia con el original viene dada por

$$k\,10^i,\ 0 < k < 10,\ i = 0,\dots,7$$

que de ninguna forma es múltiplo de 23. Por tanto, este nuevo número no puede tener asignada la misma letra que el anterior.

Por ejemplo, 78**6**94024F con un error simple en el 6 da 78**8**94024F. La diferencia 78894024 - 78694024 = 200000, de manera que la letra que le toca a 78894024 es E por ser 22 su módulo 23.

Este código también detecta el 100% de *errores por transposición.* Si es la letra la trasladada, se detecta automáticamente, y en el resto de casos, un número con dos dígitos adyacentes xy situados en posiciones i e $i-1$ respectivamente, que son traspuestos, difiere del original en una cantidad

$$(x-y-1)10^i + (10+y-x)10^{i-1} = 9(x-y)10^{i-1}$$

que nunca puede ser múltiplo de 23.

La evaluación de la probabilidad de *error de transposición por salto* es más complicada aunque tal como veremos en el próximo apartado, es 1.

En cuanto a los *errores dobles* existen casos que no se detectan. Así, por ejemplo, si la diferencia entre los números coincide exactamente con la diferencia entre las letras, el error no se descubre. También hay casos de error doble sin incluir la letra que no son detectados. Por ejemplo cuando 78**69**4024F se sustituye por 78**46**4024F no se detecta ningún error; esto ocurre siempre que la diferencia entre los números es múltiplo de 23.

...debemos fijarnos cuando realizamos la compra en el supermercado ya que [el código de barras] sólo se detectan los errores simples, aproximadamente un 89% de los errores de transposición y no muchos más errores.

Número de las tarjetas

Este código detecta el 100% de *errores simples.* Se tienen dos casos según si el error se comete en un dígito de posición impar o de posición par.

- Si el error se produce en un dígito de posición impar, la diferencia de la cantidad Q, resultante al final del Paso 3 del algoritmo de formación, con la del número original es una cantidad entre 1 y 19. Luego si resulta una diferencia de 10 tiene que ser porque el número ...x... se cambió por el número ...y... siendo $x - y = 5$ o $y - x = 5$, y simultáneamente los dígitos x e y son menores que 4 o mayores que 4, pero esto es imposible.
- Si el error se produce en un dígito de posición par, la diferencia de las cantidades Q es un valor entre 1 y 9, luego nunca es múltiplo de 10.

Las tarjetas de los bancos detectan el 99% de *errores de transposición.* Efectivamente, dado que si los dígitos xy se convierten en yx, la diferencia entre las cantidades Q viene dada por las tres posibilidades siguientes:

$y - x$, $y - x + 1$, $y - x - 1$ donde la primera corresponde al caso en que x e y son simultáneamente mayores o menores que 4. Pero salvo en el segundo caso y cuando el dígito en posición impar y, es el 9 y el dígito x en posición par es el 0 esas cantidades nunca son múltiplos de 10. Luego utilizando la regla de Laplace y dado que hay $14\times10\times9$ = 1.260 posibles errores por transposición entre los 14 dígitos del código y hay sólo 7 casos de no detección, la probabilidad de detección de error por transposición viene dada por 0,99.

En cuanto a *errores dobles,* esto es ...x...y... en lugar de ...z...t..., existen casos en los que el error no se detecta. Por ejemplo el código 4**5**0**8**450122981109 que por un error doble de lugar al número 4**1**0**2**450122981109 no se detecta, pues este último número también cumple satisfactoriamente las reglas de formación.

Código de barras

Este código detecta el 100% de *errores simples,* ya que si el dígito x se confunde con y se tiene una diferencia en el valor Q resultante del Paso 3, dada por:

- la cantidad $x - y$ si la posición del dígito es impar; y esta cantidad nunca puede ser múltiplo de 10,
- la cantidad $3(x - y)$ si la posición del dígito es par; cantidad que tampoco puede ser múltiplo de 10.

Sólo detecta el 88,9% de los *errores por transposición* porque si el error se produce sobre los dígitos x e y, se tiene una diferencia en Q dada por:

$$(x - y) + 3(y - x) = 2(y - x)$$

que es múltiplo de 10 siempre que x – y=5, o y – x =5, luego, dado que hay 10 casos favorables y 90 casos posibles, la probabilidad de no detección de errores es 10/90=0,1111, y la de detección de errores: 1 – 0,1111 = =0,889.

En cuanto a *errores dobles*, hay muchos que no se detectan, por ejemplo si 978847**6**15560**8** se confunde con 978847**2**15560**2**, el error no se detecta.

Como conclusión, debemos fijarnos cuando realizamos la compra en el supermercado ya que sólo se detectan los errores simples, aproximadamente un 89% de los errores de transposición y no muchos más errores.

Pasaporte

Se detecta el 100% de *errores simples* pues un error de sustitución de x por y produce una diferencia en la cantidad Q resultante del Paso 2, dada por una de las tres posibles expresiones

$$7(x - y),\ 3(x - y),\ x - y$$

que nunca puede ser múltiplo de 10.

En cuanto a los *errores por transposición xy* por *yx* la diferencia en Q viene dada por una de las siguientes expresiones:

$$7(x - y) + (y - x) = 6(x - y)$$

$$3(x - y) + y - x = 2(x - y)$$

$$x - y + 7(y - x) = 6(y - x)$$

que sólo es múltiplo de 10 cuando x – y=5 o y – x=5. Luego de forma idéntica al código de barras se tiene una probabilidad de detección dada por 0,88.

Este código no detecta todos los *errores dobles*, por ejemplo si el código 0**3**097**8**3 se confunde con 0**2**097**7**3, el error no se detecta.

ISBN

Este código detecta el 100% de los *errores simples* puesto que si el dígito i-ésimo x se confunde con y, la diferencia entre las cantidades Q resultantes del producto escalar, viene dada por (x - y)i que nunca puede ser múltiplo de 11 puesto que 0 <i <11.

También detecta el 100% de *errores por transposición* ya que si los dígitos x e y en las posiciones $i-1$ e i se transponen, se produce una diferencia en las cantidades Q dada por

$$(x - y)(i - 1) + (y - x)i = y - x$$

que tampoco puede ser múltiplo de 11.

Los *errores de transposición por salto* también son detectados al 100% ya que como ocurría en el caso anterior si el error se produce sobre los dígitos x e y en posiciones i y j, la diferencia viene dada por

$$(x - y)i + (y - x)j = (x - y)(i - j)$$

que tampoco puede ser múltiplo de 11, ya que 0 < i, j < 11.

En cuanto a *errores dobles* si los dígitos x e y en posiciones i y j se confunden con los dígitos z y t, la diferencia mencionada viene dada por

$$(x - z)i + (y - t)j$$

de manera que para que no se detecte, dicha cantidad tiene que ser múltiplo de 11. Por ejemplo, si el número 84**2**0518**7**78 se sustituye por 84**1**0518**6**78, el error no se detecta.

Resumimos en la siguiente tabla estas probabilidades de detección de error:

Error	*NIF*	*Tarjeta*	*EAN*	*Pasaporte*	*ISBN*
Simple	1	1	1	1	1
Transposición	1	0,99	0,89	0,89	1
Transp. por salto	1				1

De esta tabla se deduce que, a pesar de la diversidad de métodos, algunos están concebidos de manera que no detectan algunos errores.

Condiciones que deben cumplirse para detectar errores

La capacidad de detectar errores por medio de códigos lineales viene dada por el siguiente resultado.

TEOREMA. *Si un número de identificación $x_1x_2...x_k$ satisface la condición $(x_1,x_2,...,x_k)(\lambda_{1,-2},...,\lambda_k) = 0 \pmod n$, entonces un error simple $x_i \rightarrow x_i'$ no se detecta si y sólo si $(x_i - x_i') = 0 \pmod n$.*

Y un error de intercambio de dígitos de las posiciones i-ésima y j-ésima no se detecta si y sólo si $(x_i - x_i')(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \pmod n$

Como consecuencia del teorema anterior, las condiciones que debe cumplir el módulo n para proteger contra los distintos tipos de error son:

Error simple:

$$\text{mcd}\ (\lambda_i, n) = 1$$

Error por transposición:

$$\text{mcd}\ (\lambda_{i+1} - \lambda_i, n) = 1$$

Error de transposición por salto:

$$\text{mcd}\ (\lambda_i - \lambda_j, n) = 1$$

Según el teorema anterior se tienen las certificaciones siguientes sobre las capacidades de detección de error calculadas en el apartado anterior:

Letra del DNI

- mcd (10k, 23) = 1, luego detecta los errores simples.
- mcd (10i + 1 – 10i, 23)=1, luego detecta los errores por transposición.
- mcd (10i – 10j, 23)= 1, siendo $0 < i - j < 7$, luego detecta los errores de transposición por salto.

Código de barras

- mcd (3, 10) = mcd (1, 10) = 1, luego detecta los errores simples.
- mcd (2, 10) = 2, luego no detecta todos los errores por transposición ni los de transposición por salto.

Pasaporte

- mcd(7,10) = mcd(3,10) = mcd(1,10) =1, luego detecta los errores simples.
- mcd(4,10)=mcd(2,10)=mcd(6,10)=2, luego no detecta todos los errores por transposición ni los de transposición por salto.

ISBN

- mcd (k, 11) = 1, siendo 0< k< 10, luego detecta los errores simples.
- mcd (1, 11)= 1, luego detecta los errores de transposición.
- mcd (i – j, 11)= 1, siendo $0 < i - j < 10$, luego detecta los errores de transposición por salto.

Según lo anterior resulta lógica la tendencia a usar como módulo un número primo, como son el 11 y el 23, ya que con éstos es más probable la detección de errores.

El concepto de algoritmo como proceso paso a paso aún tiene poca aceptación en la enseñanza, lo cual es una situación absurda, pues es una necesidad del presente en el manejo de ordenadores.

Reflexiones para el aula

A veces es difícil encontrar aplicaciones de las matemáticas que sean lo suficientemente sencillas y que puedan tener interés para el estudiante. Los códigos presentan ambas ventajas, por un lado, la matemática que necesitan es perfectamente asequible para los jóvenes y, por otro, los códigos tienen algo de misterio que les seduce.

Los contenidos matemáticos implicados en los códigos de identificación considerados en este trabajo son primordialmente los siguientes:

- Divisibilidad.
- Clases residuales.
- Algoritmos.
- Producto escalar.
- Álgebra.
- Probabilidad.

Encontrar el *resto de una división*, utilizando la tecla de memoria de la calculadora, es una habilidad que el joven debe adquirir superando el cálculo rutinario. Utilizar el número del DNI para obtener la letra que le corresponde en el NIF, como se muestra en el primer apartado, ofrece una oportunidad para ello.

Las *clases residuales* tienden a ser tema de un curso de álgebra de primero de carrera pero pensamos que se pueden introducir mucho antes. La aplicación más cotidiana de las clases residuales está en el reloj. Cuando son las 9 y pasan 8 horas decimos que son las 5, y sin embargo 9 + 8=17. Esto se escribe de la forma: 17 = 5 (mod 12), notación debida a Gauss. De la misma forma 9–11 = -2 = 10 (mod 12), y decimos que «–2 es congruente con 10 módulo 12».

Los restos módulo de los cinco números de identificación considerados se presentan mediante distintas formas. Unas veces se trata de calcular el dígito de control para que dé lugar a un múltiplo de 23, 10, 11,...; en otros se comprueba mediante un algoritmo la validez del dígito de control. Creemos que el concepto de divisibilidad debe estar por encima de la formalización algebraica de la teoría de congruencias que efectivamente puede reservarse para la enseñanza superior.

La idea de *algoritmo* se suele asociar casi siempre a las cuatro reglas y al algoritmo de Euclides. El concepto de algoritmo como proceso paso a paso aún tiene poca aceptación en la enseñanza, lo cual es una situación absurda, pues es una necesidad del presente en el manejo de ordenadores.

La matemática escolar introduce el *producto escalar* en el bachillerato. Los vectores aparecen en fuerzas, velocidades, aceleraciones, desplazamientos; mientras que del producto escalar se trabaja primordialmente el aspecto geométrico.

El producto escalar se puede trabajar a partir de la multiplicación ordinaria. Así aparece en el problema de hallar la cuenta a partir de un vector cantidad y un vector precio. Por ejemplo al calcular la cuenta de la siguiente compra:

	Garbanzos	*Lentejas*	*Patatas*
Cantidad	3	5	10
Precio	210	108	80

Vector cantidad: (3, 5, 10),

Vector precio: (210, 108, 80),

Producto escalar: (3x210 + 5x108 + 10x80).

De esta forma los vectores aparecen como cadenas sin necesidad de intervenir la magnitud con su dirección.

En este trabajo se han presentado varios códigos como productos escalares. Los alumnos podrían trabajar en la identificación de distintos códigos que se utilizan en la sociedad y expresarlos si es posible como un producto escalar tal como se muestran aquí. Esto les permitirá observar cómo el *álgebra* se puede utilizar para almacenar información de forma esquemática, en definitiva aprenderán la utilidad de los algoritmos algebraicos.

Seguramente a los jóvenes les resultará atractivo jugar a diseñar sus propios códigos pues el auge que éstos tienen en la compleja sociedad actual no descarta un posible uso comercial de alguna idea brillante.

Sorprende conocer lo poco seguros que resultan códigos que se utilizan con gran profusión en todo el mundo. Encontrar la *probabilidad* de un tipo de error en un código determinado resulta mucho más atractivo e incitante que resolver ese mismo problema pensando en urnas y bolas. En el apartado 3 de este trabajo se muestran algunos de estos cálculos. Confesamos que algunos suponen cierta dificultad, pero pensamos que ése es otro papel que tenemos que asumir los profesores ante los alumnos, que no lo sabemos todo.

Sin embargo, las matemáticas tienen ese encanto. A veces alguien encuentra un teorema que nos facilita el trabajo. Esto queda reflejado en el teorema del apartado 4 que ofrece una aplicación a la vida real de los números primos y la divisibilidad.

Los profesores necesitamos abrir la matemática al mundo exterior, para alejar el peligro que supone la separación entre el aula y la sociedad. Los matemáticos corremos el riesgo de que si no cambiamos nuestros métodos, los ciudadanos terminarán buscando su formación en otro lado. En definitiva, pensamos que los profesores debemos asumir que nuestros jóvenes necesitan de una matemática útil e interesante.

Los profesores necesitamos abrir la matemática al mundo exterior, para alejar el peligro que supone la separación entre el aula y la sociedad.

M.ª Candelaria Espinel
Pino Caballero
Universidad de La Laguna

Bibliografía

BARNES, S. y K. MICHALOWICZ (1994): «Bar-Code Activity Sheet. Mathematics», *Teaching in the Middle School*, 1,1, 59-65

GALLIAN, J. y S. WINTERS (1988): «Modular Arithmetic in the Marketplace», *The American Mathematical Monthly*, 95, 6, 548-551.

GALLIAN, J. (1991): «The Mathematics of Identification Numbers», *The College Mathematics Journal*, 22, 3, 194-202.

MONTANER, P. y R. MOYANO (1989): *¿Cómo nos comunicamos?*, Breda, Alhambra.

WHEELER, M. (1994): «Check-Digit Schemes», *The Mathematics Teacher*, 87, 4, 228-220.

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 85-90

La calculadora gráfica. Una herramienta para resolver un problema de evolución de especies

Leandro Tortosa Grau

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se recoge brevemente el contenido y resultado de una experiencia llevada a cabo en clase, con un grupo de alumnos de 4.° curso de ESO. Se plantea el problema inicial de la evolución de un grupo de peces en una charca se obtiene un modelo matemático simple (la llamada función logística), que aproxima el problema, y después se estudian algunos casos interesantes de los que se obtienen diversos comportamientos, tanto regulares como caóticos.

Desarrollo de la experiencia

Planteamiento inicial

La experiencia llevada a cabo con un grupo de alumnos de 4.° de ESO. consistió básicamente en el planteamiento de un problema inicial general, y el desarrollo del mismo utilizando herramientas matemáticas «poco convencionales», como son los procesos iterativos, tanto numéricos como gráficos,basados en la utilización de la calculadora gráfica del tipo TI-82.

El problema inicial planteado fue: ¿cómo evolucionará una población cualquiera, con el transcurso de los años? ¿Se extinguirá la población con los años, rebosarán en el medio físico en que se encuentren, o sufrirán fluctuaciones cíclicas en cuanto al número de individuos en la especie? Así, en nuestro afán por modelizar y generalizar, nos preguntamos ¿seremos capaces de predecir la evolución de una población en un espacio físico a lo largo de los años?

Obtención del modelo. La función logística

Para responder a estas preguntas debemos obtener un modelo matemático sencillo que nos permita abordar el problema desde el punto de vista funcional y numérico. Vamos a particularizar este problema al caso de una población de peces en una charca, de forma que pretendemos estudiar su evolución. Establecemos el siguiente criterio de notación: representamos la población anual mediante

$$x_{(0)}, x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots\ldots, x_{(n)}, \ldots$$

donde $x_{(0)}$ representa el valor inicial de la población; $x_{(1)}$ representa el valor de la población al primer año; $x_{(2)}$ al segundo año y así sucesivamente.

El propósito del modelo es determinar las variaciones en la población debido al crecimiento y a la competencia por los recursos.

- Si la población es pequeña, hay recursos para que se produzca un crecimiento de la especie a lo largo de los años; esto lo podemos definir mediante la siguiente iteración: $x_{(n+1)} = R\, x_{(n)}$ con $R > 1$.
- Si la población crece muy rápidamente, los recursos se irán agotando poco a poco hasta que resulten insuficientes para todos los elementos. Por esto, a la expresión anterior hay que añadirle un término que frene la expansión, quedando la expresión anterior así:

$$x_{(n+1)} = R\, x_{(n)} - A\, x^2_{(n)}$$

De esta expresión pasamos a otra, haciendo $A = R$, obteniendo:

$$x_{(n+1)} = R\, x_{(n)}\, (1 - x_{(n)})$$

En esta última expresión hemos escalado la variable $x_{(n)}$ en el intervalo [0,1], lo que significa que el valor máximo para la población es 1; así, este valor representa una saturación total en la charca, es decir, está llena de peces. También debemos notar que R es una constante que está relacionada con la tasa de nacimientos de la especie, así como con otros factores ambientales y propios de cada especie; por lo tanto, es una constante que estudian y determinan los biólogos, y no nos cuestionamos, desde el punto de vista matemático, su obtención. Lo único que nos interesa saber es que su valor varía entre 0 y 4.

Vemos, pues, que hemos obtenido un modelo matemático basado en la primera ecuación para estudiar numéricamente el problema planteado. Dicha ecuación recibe el nombre de «función logística».

Ejemplo: supongamos que para una charca con peces, el valor de $R = 2$, y que inicialmente $x_{(0)} = 0.1$, (es decir, la charca está rellena de peces en un 10% de su capacidad), y queremos saber cómo va a evolucionar esa población con los años. Para realizar esto basta con que vayamos calculando los sucesivos iterados con la calculadora, que son:

Iterado	$x_{(0)}$	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$
Valor iterado	0.1	0.18	0.2952	0.416	0.486	0.499	0.5	0.5

En la tabla anterior: $x_{(1)} = 2*0.1*(1-0.1)$

$$x_{(2)} = 2*0.18*(1-0.18)$$

Como vemos, a partir de $x_{(6)}$ obtenemos el valor 0.5, lo que significa que a partir del 6.° año la población se estabiliza en el valor 0.5, es decir, llenando en un 50% la capacidad total de la charca en la que se encuentran.

Pero esto no es más que un ejemplo. Para estudiar el problema en su conjunto podemos dar los valores iniciales que queramos entre 0 y 1 y estudiar qué ocurre al ir variando R entre 0 y 4. ¿Será similar en todos los casos el comportamiento de la población? El problema que nos encontramos es que todos estos procesos iterativos son muy lentos de realizar a mano. Aquí es donde nos vamos a ayudar de la calculadora gráfica para agilizar todos los cálculos, y además vamos a utilizar algunas de las posibilidades gráficas que nos ofrece para «visualizar» gráficamente el problema.

La calculadora gráfica

En este punto, ya nos centramos en la utilización de la calculadora gráfica como herramienta básica para el tratamiento del problema. Este tratamiento con calculadora lo podemos realizar de dos formas distintas.

- La primera forma sería a partir de las posibilidades que nos ofrece este modelo de calculadora (TI-82), en cuanto a manejo y manipulación de sucesiones de números.
- La segunda forma sería mediante la utilización de algún programa para la calculadora que nos resolviera estos procesos iterativos de forma mecánica.

Vamos a comenzar con la primera de ellas.

Esta calculadora nos ofrece la posibilidad de trabajar con sucesiones y dibujar puntos de la misma. La tecla MODE nos da las distintas variantes en cuanto al modo de trabajo. Lo vemos en la figura 1.

En la pantalla MODE debemos seleccionar 3 dígitos de precisión, modo Seq y Dot, para que pinte punto a punto. Si seleccionamos esto y presionamos Y= tenemos la segunda pantalla que aparece en la gráfica anterior; debemos teclear la sucesión a representar, que en nuestro caso es $R*u_{n-1}(1-u_{n-1})$. Debemos darle a R un valor para que pueda ir calculando los iterados. Para conseguir que calcule los iterados de esa ecuación que hemos introducido, debemos ajustar la ventana de representación gráfica por medio de la tecla WINDOW. Los valores para que podamos visualizar los primeros 50 iterados de la ecuación aparecen en los siguientes dibujos de la gráfica anterior. Notar que el valor u_nStart = 0.1 corresponde con el valor inicial $x_{(0)}$ = 0.1 para la población de peces.

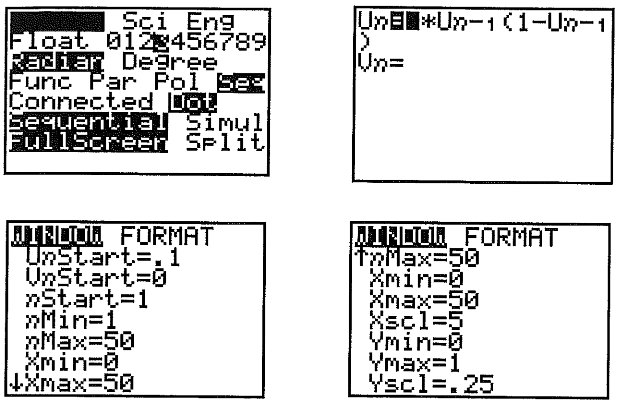


Gráfico 1

El gráfico 2 nos muestra el dibujo de los primeros 50 iterados para la función logística de parámetro R = 2 y para el valor inicial 0.1. Se advierte como los iterados tienden a un valor estable; la población se estabiliza para el valor 0.5.

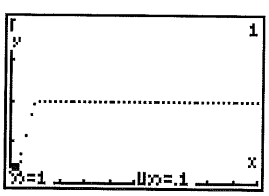


Gráfico 2

Como vemos en el gráfico 3, también tenemos la opción de visualizar la tabla de valores correspondientes a los iterados anteriores; puede ser de gran utilidad visualizar la tabla, ya que podemos identificar de una forma mucho más clara la evolución de la población y si se estabiliza en algún valor o no.

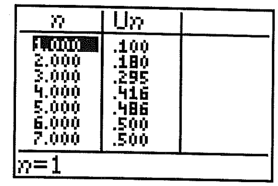


Gráfico 3

Una vez visto este primer caso, se trataría de ir estudiando qué ocurre para valores distintos de R y ver si hay alguna variación para diferentes condiciones iniciales. Vemos cómo podemos usar las capacidades gráficas de la calculadora para obtener conclusiones.

Ahora vamos a ver algunos dibujos realizados con la calculadora para algunos valores de R en los que suceden comportamientos distintos.

El conjunto de valores más interesantes para R, con condición inicial 0.1, en los que cambia el comportamiento de la iteración son los siguientes:

2.0; 2.95; 3.05; 3.24; 3.5; 3.68; 3.74; 3.8; 4

Para cada uno de estos valores podemos estudiar distintos valores iniciales sin más que cambiar u_nStart en la ventana WINDOW. Algunas gráficas son:

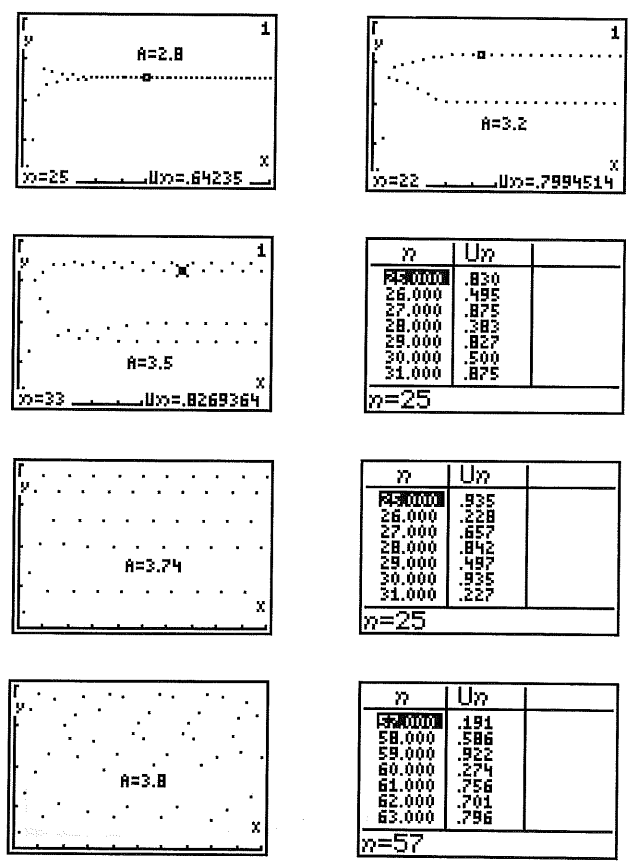


Gráfico 4

En los ejemplos del gráfico 4 tenemos algunos casos significativos de diversos comportamientos. Vemos, por ejemplo para el caso R = 2.8, que sigue habiendo un punto límite al que tiende la población. Para el caso R = 3.2 ya vemos como la gráfica se va moviendo entre dos valores, lo que significa un dos-ciclo. Esto significa que la población oscila cada dos años con los mismos valores; aumenta y disminuye, pero siempre a valores constantes. Para el caso R = 3.5 también se observa una repetición de valores pero cada cuatro años. Esto significa que la evolución de la población representa un 4-ciclo; también se ha dibujado la gráfica con algunos valores para comprobar que efectivamente se trata de un 4-ciclo. Para el caso R = 3.74, el 4-ciclo anterior pasa a ser un 5-ciclo; cada 5 años se vuelve al valor anterior y se van repitiendo de nuevo. Para el caso R = 3.8, cambia el comportamiento radicalmente; si hasta ahora todos los valores que habíamos probado nos daban un comportamiento predecible y, en cierto modo, «natural», ahora nos encontramos con que no apreciamos ninguna regularidad en los valores que van tomando los iterados. ¿Qué significa esto? ¿Resulta impredecible el comportamiento de la población con los años? Pues parece que sí; a la vista de la gráfica y, si investigamos un poco en la tabla de valores, no apreciamos regularidad alguna. Podríamos describir este comportamiento, en principio, como «caótico», entendiendo por caótico una falta de predictibilidad.

Para estudiar un poco más en profundidad todo esto, vamos a analizar el caso R = 4.

Caso particular R = 4

Antes de estudiar el caso R = 4 vamos a introducir el concepto de «iteración gráfica».

Supongamos que queremos iterar gráficamente Y= 4x (1-x) con el valor inicial 0.1. Para efectuar la iteración gráfica hacemos lo siguiente:

Partimos en el eje X del punto 0.1 y trazamos una recta perpendicular al eje X hasta que corta a la curva; después se mueve hacia izquierda o derecha paralelamente al eje X hasta cortar a la diagonal. Este es el primer iterado. Para obtener el siguiente iterado debemos repetir este proceso y así sucesivamente. El proceso geométrico aquí descrito es la secuencia repetida de estos pasos una y otra vez, usando cada vez el último punto final como el siguiente inicial. Lo vemos en el siguiente gráfico, en el que hemos iterado la función expuesta anteriormente.

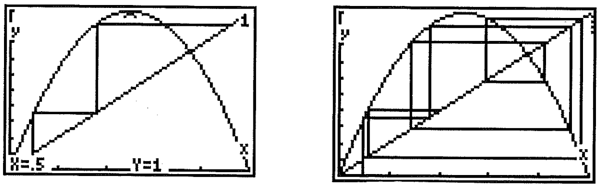


Gráfico 5

Veamos ahora que este proceso lo podemos hacer manualmente en la calculadora TI-82.

Podemos intentar visualizar manualmente qué va a ocurrir en este caso haciendo lo siguiente: podemos representar en la calculadora, la función Y = 4x (1–x) y tomar como valor inicial $x_{(0)}$ = 0.3, por ejemplo. Entonces podemos realizar manualmente la iteración a partir de la opción PEN apretando las teclas 2nd PRGM . Esto nos permite ir de la función a la recta y así reiteradamente estudiar el comportamiento de los puntos que obtenemos. El gráfico de lo que obtenemos está aquí.

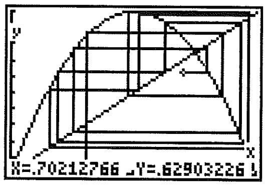


Gráfico 6

Podemos, si tenemos suficiente paciencia, ir anotando los valores de intersección de las curvas para, de esta manera, obtener los sucesivos iterados y analizar el comportamiento de la población con los años. Como vemos, si realizamos la iteración de esta forma vamos poco a poco «rellenando» todo el espacio. Esto nos lleva a pensar que no existe una «regularidad» en cuanto a los valores que vamos a ir obteniendo si calculamos los iterados mediante una sucesión. ¿Significa esto que el comportamiento de esta determinada población, bajo estas características, es caótico e impredecible? Pues sí, en cierto sentido podemos afirmar que no somos capaces de prever el desarrollo de la población ni su evolución. Pero nos interesa profundizar un poco en el concepto de caos aplicado a este problema. ¿Qué significa para nuestra población una evolución caótica? Pues significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden provocar comportamientos totalmente distintos en la evolución de la población. Pero esto es algo que podemos comprobar. Vamos a estudiar los casos en que R = 4 y vamos a dar condiciones iniciales de 0.300 y 0.301, lo que significaría dejar en una charca 300 peces y en otra, al lado, 301 peces. Pues bien, una diferencia tan ínfima como es de un pez ¿puede provocar resultados distintos?

Como podemos apreciar en el gráfico 7, hemos dibujado la iteración gráfica para los casos con condiciones iniciales 0.3 y 0.301. Hemos utilizado también un programa para que nos vaya representando gráficamente los puntos de la iteración a partir del valor x = 25, para de esta manera poder visualizar mejor la evolución cuando ya han pasado 25 años. Pues bien, como vemos los resultados no son ni mucho menos iguales. Los últimos dibujos recogen la tabla de valores desde el 25 al 31 de los dos casos con condiciones iniciales estudiados, y se observa que ambos resultados no son iguales, ni tan siquiera aproximados.

Todo esto nos conduce a reflexionar sobre el fenómeno del caos como falta de predictibilidad en un sistema que evoluciona con el tiempo. También podemos hacer otra reflexión. El fenómeno al que estamos denominando caos se da paralelamente al fenómeno que entendemos como evolución predecible y «natural». Es decir, que una serie muy consistente de condiciones favorables a predecir la evolución de este sistema, no me asegura de ningún modo que en cualquier momento no aparezcan condiciones iniciales caóticas. El caos y el «orden» parece que se encuentran tan cerca uno de otro que la frontera entre ambos es imperceptible.

Podemos formar la tabla siguiente con los valores estudiados hasta ahora:

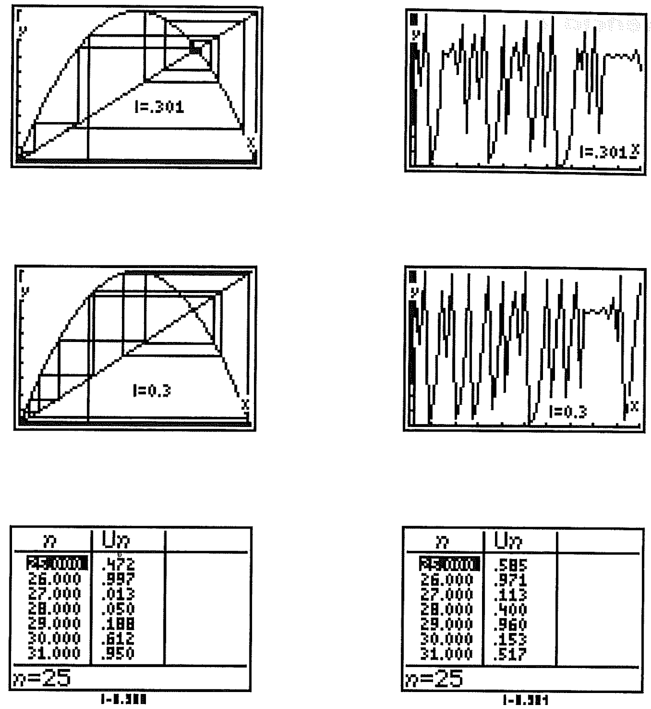


Gráfico 7

Si quisiéramos representar en una figura todas las posibilidades para los distintos valores de R, obtendríamos la figura siguiente, que se conoce con el nombre de gráfica de bifurcaciones

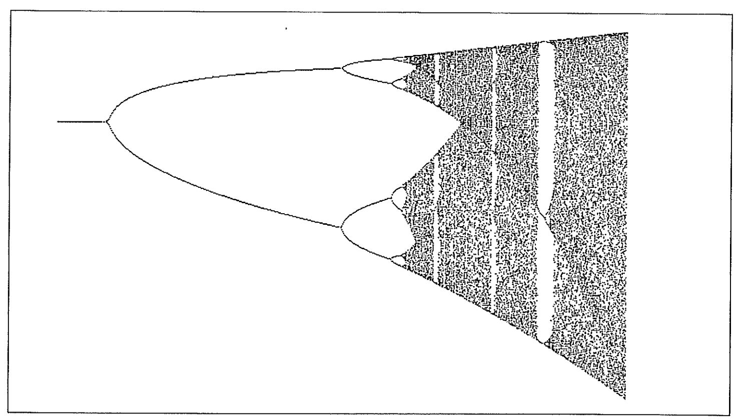


Gráfico 8

Parámetro a	2.0	2.95	3.05	3.24	3.5	3.68	3.74	3.8	3.84
Atractor período 5							•		
Atractor periodo 4					•				
Atractor periodo 3									•
Atractor periodo 2			•	•					
Punto fijo	•	•							
CAOS						•		•	

Como vemos en el dibujo del gráfico que obtenemos, se trata de un conjunto de características fractales, que resume todo el conjunto de comportamientos de la función logística.

Experiencia en clase

El trabajo aquí expuesto ya se ha comentado al inicio que fue realizado con alumnos de 4.° curso de ESO. La experiencia en conjunto ha resultado muy positiva. En cuanto al trabajo con las calculadoras, que el CEP de Alicante nos prestó durante dos semanas, fue muy positivo; queda muy claro que a los alumnos les «engancha» el trabajo con calculadoras, y mucho más si tienen las posibilidades gráficas que este modelo entre otros, poseen. Les encanta representar gráficamente las funciones y «manipularlas». Todos los alumnos mostraron un gran interés en aprender rápidamente su manejo y, en poco tiempo, le tomaron la medida y ya ellos solos se apañaban con los ejercicios. Los problemas en cuanto al manejo de la misma venían del lado de los valores de la ventana de representación. Lo que más les costó fue comprender la ventana WINDOW cuando estábamos trabajando en modo Seq. Algunos introducían mal los datos y se «perdía» la representación. Estuvieron durante unas clases estudiando iteraciones para diversos valores de R y comprobando los valores que aparecían en las tablas. También hicieron iteraciones gráficas en modo manual, ya que no dio tiempo a hablar sobre algún programa que realizara esto de forma sistemática.

Por lo tanto, la experiencia en cuanto al uso y manejo de la calculadora gráfica fue muy positivo, expresando la mayoría de los alumnos su deseo de continuar trabajando en otros temas con la misma herramienta.

En cuanto a la experiencia del planteamiento de un problema general concreto y real y su desarrollo a lo largo de bastante tiempo, la experiencia resultó también positiva. A los alumnos les interesa mucho más el planteamiento de problemas «reales», con los que se pueden familiarizar y discutir *a priori* y *a posteriori*. Además, todo aquello a lo que le encuentran una aplicación, les satisface bastante, y se muestran menos pasivos. La única dificultad radicaba en problemas de comprensión en torno al concepto de «iteración gráfica»; al alumno, en general, le resulta muy costoso el paso de una iteración numérica a una iteración de tipo gráfico. No se acaba de entender muy bien eso de que haya que representar la diagonal también y luego realizar ese «baile» de rectas hacia uno y otro lado.

Para terminar, es preciso indicar que, en una breve encuesta que les pasé, un 95% de los alumnos se mostraron partidarios del uso de la calculadora gráfica y pensaban que había resultado muy interesante este tema y el estudio de este problema.

Leandro Tortosa
IFP Canastell
San Vicente de Raspeig
(Alicante)

La cuadratura del círculo
(VI Olimpiada Matemática Nacional)

SUMA 20
noviembre 1995, pp. 91-98

Generación de números aleatorios

Vicente Trigo Aranda

MISCELÁNEA

Este artículo se centra en el estudio de los métodos más usuales implementados en el software informático para generar números aleatorios. El análisis de dichos algoritmos se acompaña de una panorámic de su evolución histórica y de tres programas en Turbo Pascal que permiten al lector comprobar determinados aspectos de la exposición teórica.

La gran mayoría de los programas de aplicación científica: lenguajes de programación, hojas de cálculo, paquetes estadísticos, etc., llevan incorporadas una o varias funciones (del tipo RND, RANDOM, ALETU, etc.) que permiten al usuario obtener números aleatorios. La principal utilidad práctica de estos números radica en la simulación de sistemas, aunque no es despreciable su importancia en juegos, sorteos, etc., ni en temas mucho menos prosaicos, como la mecánica cuántica o la teoría de la evolución.

Debe quedar claro que el tema a tratar en este artículo se centra en un aspecto muy concreto y específico: el estudio de los métodos más usuales implementados en el software informático para generar números aleatorios. Es decir, mi objetivo es mostrar al lector una panorámica de cómo los programas de ordenador más comunes «eligen al azar» sin pretender, ni mucho menos, que el aficionado a la informática deba generar sus propios números aleatorios. Por tanto, en el enfoque prima más lo divulgativo que lo práctico.

Otro tema, sin duda mucho más apasionante, es el de utilizar estos números generados aleatoriamente para resolver problemas prácticos, mediante simulación. Por razones de espacio no puedo tratarlo ahora pero, si resulta de interés para los lectores de SUMA, en posteriores números presentaré algún ejemplo de las múltiples ventajas que ofrece la simulación para resolver problemas de toda índole.

¿Qué se entiende por números aleatorios?

No es fácil decidir cuándo una secuencia de números es aleatoria y, de hecho, es un problema que entra de lleno en el terreno filosófico. Así por ejemplo, en palabras de Martin Gardner, «una sucesión de dígitos absolutamente desordenada es un concepto lógicamente contradictorio». Más concreta pero, paradójicamente, a la vez más abstracta, es la definición de aleatoriedad de Kolmogorov: «la longitud del programa más corto que diga a una máquina de Turing como escribir la sucesión de dígitos».

Si nos movemos en un terreno más práctico, se suele admitir que una sucesión de números es aleatoria cuando cumple las dos siguientes condiciones, propuestas por D. H. Lehmer:

1.ª Una persona que desconozca la norma de generación no puede predecir el siguiente término de la sucesión.

2.ª Si analizamos la sucesión mediante cualquier tests de aleatoriedad (serial, rachas, gaps, máximo, CSCS, etc.) lo supera sin problemas.

Lamentablemente, y por razones de espacio, tengo que soslayar ahora el estudio y análisis de los diversos tests de aleatoriedad y uniformidad que analizan la calidad de los números aleatorios generados.

Un último detalle a tener en cuenta. Nuestra meta será encontrar una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo [0,1). El motivo por el cual centramos nuestro estudio en este intervalo es porque a partir de una uniforme [0,1) disponemos de algoritmos matemáticos para generar otras variables aleatorias, ya sean discretas (binomial, Poisson, etc.) o continuas (exponencial, normal, gamma, etc.).

Tengamos presente, además, que aunque en teoría los números aleatorios [0,1) pueden tener infinitas cifras decimales, en la práctica nos tenemos que conformar con un número finito. Una posible forma de generarlo (utilizada en simulación manual) será elegir una serie finita de dígitos aleatorios y considerarla como la parte decimal del número aleatorio; otra posibilidad (utilizada en simulación por ordenador) será elegir un número entero del rango 0..m-1 y dividirlo después por m.

Tablas de números aleatorios

Cuando a comienzos de siglo se descubre la importancia del azar se comienza a estudiar la obtención de números aleatorios. Enseguida se desecharon los métodos primarios, como lanzar dardos a una diana o anotar dígitos uno tras otro según nos parece, porque presentan claros sesgos que los invalidan, y se vio la necesidad de construir tablas de dígitos realmente aleatorios.

En 1927 aparece la primera publicación de este tipo. L. H. C. Tippett cogió el censo de parroquias inglesas y tomó la cifra central de su superficie; su tabla constaba de 41.600 dígitos. Doce años después M. G. Kendall y B. Babington construyeron, con ayuda de una ruleta dividida en diez partes, cien mil dígitos. En 1954 Royo y Ferrer editaron su *Tablas de números aleatorios y estadísticos* con un cuarto de millón de dígitos.

La cumbre de este tipo de tablas se alcanzó con el libro *A million random digits* de Rand Corporation, publicado en 1955. Los dígitos se obtuvieron mediante dispositivos electrónicos que producían cifras binarias aleatorias; tras eliminar los sesgos detectados se transformaban en números decimales, se sumaban por parejas y se seleccionaba el último dígito.

Este tipo de libros, como señala Alfred Bork, son propios de nuestro siglo. Es evidente que nunca antes en la historia del pensamiento científico había tenido ningún sentido su elaboración. ¿Qué habrían pensado Newton o Gauss de unos libros cuyas páginas sólo contenían dígitos y más dígitos?

...se desecharon los métodos primarios, como lanzar dardos a una diana o anotar dígitos uno tras otro según nos parece, porque presentan claros sesgos que los invalidan

Aparecen los ordenadores

Con la llegada de los ordenadores estas tablas, que servían para un uso manual, perdieron su importancia. Por un lado su almacenamiento en la memoria del ordenador sería ciertamente costoso; baste pensar en el tiempo que se emplearía en cargarlos y en el espacio que ocuparían. Por otro lado, y aunque resulte sorprendente para mucha gente, un millón de dígitos es un número insuficiente para bastantes simulaciones. Por cierto, y para terminar con este tema de las tablas de números aleatorios, Warren Weaver descubrió que en cualquiera de ellas los dígitos más pequeños aparecen con mayor frecuencia.

Los matemáticos se pusieron a buscar algoritmos matemáticos para generar números aleatorios de forma que, mediante una simple fórmula matemática, pudiesen obtenerse millones y millones de estos números. De esta forma el costo computacional de generación sería ciertamente bajo; además se tendría la ventaja adicional de poder reproducir la sucesión estudiada en cualquier momento, lo que facilita enormemente la tarea de depuración de los programas de simulación.

Los métodos más prácticos resultan ser los aritméticos; es decir, aquellos en que cada término de la sucesión se obtiene mediante una expresión aritmética que depende del término anterior:

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

y el que da origen a la sucesión, X_0, se denomina *semilla.*

En realidad estos números no serán aleatorios y sería más exacto calificarlos como «pseudoaleatorios», pero si la sucesión satisface las dos condiciones anteriores fijadas por Lehmer, en la práctica puede ser considerada como aleatoria.

Históricamente el primer método fue propuesto por John von Neumann en 1946 y se conoce como «Método del centro del cuadrado». En él se toma como semilla un número de 2n dígitos y se eleva al cuadrado; como éste tendrá 4n dígitos (si es preciso se añaden ceros a la izquierda) se toma como siguiente término el formado por las 2n cifras centrales.

Por ejemplo, si $2n = 4$ y $X_0 = 1996$ se tendrá la sucesión:

$X_0 = 1996$	$X_0^2 = 03\ 9840\ 16$
$X_1 = 9840$	$X_1^2 = 96\ 8256\ 00$
$X_2 = 8256$	$X_2^2 = 68\ 1615\ 36$
$X_3 = 1615$	$X_3^2 = 02\ 6082\ 25$

El programa CENTROCUA adjunto codifica este método con números de cuatro cifras y, ejecutándolo, puede comprobarse que resulta poco eficiente. Basta considerar semillas como, por ejemplo, 3317 o 3792.

Vista la poca utilidad de este método Lehmer propuso otro del mismo estilo. Se parte de una semilla X_0 de n cifras y un multiplicador k de m cifras y se calcula el producto, que tendrá n + m cifras; se tomará como siguiente número de la sucesión el resultante de restar a las n últimas cifras del producto las m primeras.

...el primer método fue propuesto por John von Neumann en 1946 y se conoce como «Método del centro del cuadrado».

PROGRAMA CENTROCUA

```
PROGRAM Centro_del_cuadrado;

USES CRT;

VAR  num,r,n:LONGINT;
     ch:CHAR;

BEGIN
  REPEAT
     CLRSCR;
     GOTOXY(22,12);
     WRITE('Introduce la semilla (4 cifras):  ');
     READ(num);
     REPEAT
        n:=0;
        CLRSCR;
        GOTOXY(23,1);
        WRITE('Números generados a partir de  ',num:4);
        GOTOXY(1,3);
        REPEAT
           num:=num*num;
           r:=num MOD 100;
            num:=((num-r) DIV 100) MOD 10000;
            IF (n MOD 10)<>0 THEN
               WRITE(num:6,'  ')
           ELSE
               BEGIN
                  WRITELN;
                  WRITE(num:6,'  ');
               END;
           n:=n+1;
        UNTIL (n=100);
        GOTOXY(20,25);
        WRITE('Repetir (R), Continuar (C), Terminar (T) ?');
        REPEAT
            ch:=READKEY;
        UNTIL (ch IN ['c','C','t','T','r','R']);
     UNTIL NOT(ch IN ['c','C']);
  UNTIL (ch IN ['t','T']);
  CLRSCR;
END.
```

PROGRAMA LEHMER

```
PROGRAM Primer_metodo_de_Lehmer;

USES CRT;

VAR  ch:CHAR;
  num,r,n,k:LONGINT;

BEGIN
   REPEAT
       CLRSCR;
       GOTOXY(22,12);
       WRITE('Introduce la semilla:  ');
       READ(num);
       GOTOXY(22,15);
       WRITE('Introduce el multiplicador:  ');
       READ(k);
       REPEAT
           n:=0;
           CLRSCR;
           GOTOXY(12,1);
           WRITE('Números generados a partir de  ',num:4);
           WRITE('Multiplicador ':20,k);
           GOTOXY(1,3);
           REPEAT
               num:=k*num;
               num:=(num MOD 10000) - (num DIV 10000);
               IF (n MOD 10)<>0 THEN
                       WRITE(num:6,'  ')
                   ELSE
                       BEGIN
                           WRITELN;
                           WRITE(num:6,'  ');
                       END;
               n:=n+1;
           UNTIL (n=100);
           GOTOXY(20,25);
           WRITE('Repetir (R), Continuar (C), Terminar (T) ?');
           REPEAT
               ch:=READKEY;
           UNTIL (ch IN ['c','C','t','T','r','R']);
       UNTIL NOT(ch IN ['c','C']);
   UNTIL (ch IN ['t','T']);
   CLRSCR;
END.
```

Por ejemplo, si k = 57 y X_0 = 2345 se tendrá la sucesión:

$kX_0 = 13\ 3665 \Rightarrow X_1 = 3665 - 13 = 3652$

$kX_1 = 20\ 8164 \Rightarrow X_2 = 8164 - 20 = 8144$

$kX_2 = 46\ 4208 \Rightarrow X_3 = 4208 - 46 = 4162$

$kX_3 = 23\ 7234 \Rightarrow X_4 = 7234 - 23 = 7211$

Como este algoritmo tampoco es muy útil para obtener números aleatorios (puede comprobarse con el programa LEHMER adjunto), Lehmer continuó su búsqueda y en 1948 propuso el método que vemos seguidamente.

Método congruencial lineal

Dado un número entero positivo m (módulo), la sucesión de números aleatorios se generará mediante la fórmula:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m$$

donde a (multiplicador), c (incremento) y X_0 son naturales inferiores a m.

Por ejemplo, si partimos de los valores:

$m = 17 \quad a = 7 \quad c = 1 \quad X_0 = 3$

la sucesión obtenida será: 5, 2, 15, 4, 12, 0, 1, 8, 6, 9,....

Es evidente que tarde o temprano alguno de los números de la sucesión tendrá que repetirse, entrándose así en un bucle cíclico, cuya longitud se denomina *período*. Así, en el ejemplo anterior puede comprobarse que el período es 16; en cambio si la semilla hubiese sido X_0 = 14 el período sería 1.

Como es lógico, los cuatro parámetros de partida determinan la calidad de la sucesión y es casi un arte elegirlos adecuadamente. Por una parte es conveniente que el período de la sucesión sea lo mayor posible y por otra que sus términos tengan una cierta calidad aleatoria; es decir, que superen una serie de tests empíricos.

Si nos centramos en lo referente al máximo período, el valor del módulo parece sensato fijarlo en función del ordenador; así, si éste trabaja con palabras de 2^{32} bits parece aconsejable tomar precisamente m = 2^{32}. En cuanto a los parámetros, *a* y *c*, se eligen de acuerdo con el siguiente resultado:

Teorema: La sucesión congruencial lineal tiene período máximo, e igual a m, si y sólo si se cumple:

i) c y m son primos entre sí.
ii) a–1 es múltiplo de todos los primos que dividen a m.
iii) Si m es múltiplo de 4, a–1 también lo es.

Tan útil y cómodo de codificar es este método ideado por Lehmer que resulta numerosísimo el software basado en él para simular el azar. Así, por ejemplo, en Turbo Pascal el generador de números aleatorios de tipo REAL sigue un algoritmo de congruencia lineal con los siguientes parámetros:

$$m = 2^{32} \quad c = 1 \quad a = 134.775.813$$

También se emplea este método en la rutina MTH$RANDOM de la librería VAX/VMS, con los valores:

$$m = 2^{32} \quad c = 1 \quad a = 69.069$$

El tercer programa adjunto, CONGRUEN, codifica este algoritmo de congruencia lineal y permite trabajar con datos de tipo LONGINT. Además, si el usuario así lo decide, estudia si los datos introducidos satisfacen las tres condiciones del teorema anterior, generándose de esta forma una secuencia de período máximo.

Generadores multiplicativos puros

El método multiplicativo puro es un caso particular del algoritmo congruencial, en donde el incremento se toma nulo. Por tanto, en estos generadores la expresión recurrente podrá escribirse en la forma:

$$X_{n+1} = a^n X_0 \mod m$$

Es evidente que, de acuerdo con el teorema anterior, el período no podrá ser nunca *m* pero, a cambio, la rapidez de generación de estos números será mayor. Además, con un poco de cuidado puede obtenerse un período igual a m–1, lo que en la práctica es lo mismo que si fuese *m*. Para ello hay que basarse en el siguiente resultado:

Tan útil y cómodo de codificar es este método ideado por Lehmer que resulta numerosísimo el software basado en él para simular el azar.

PROGRAMA CONGRUEN

```
PROGRAM Algoritmo_de_congruencia_lineal;
{$N+,E+}

USES CRT;

VAR a,c,m,x,semilla:LONGINT;
    decimales:EXTENDED;
    contador:1..80;
    tecla,pulsar:CHAR;

FUNCTION primo(x:LONGINT):BOOLEAN;
VAR z:LONGINT;
BEGIN
    primo:=TRUE;
    IF (x MOD 2 = 0) AND (x>2) THEN primo:=FALSE
      ELSE
        FOR z:=1 TO TRUNC(SQRT(x)/2) DO
          IF x MOD (2*z+1)=0 THEN primo:=FALSE;
END;

FUNCTION primos_entre_si(u,v:LONGINT):BOOLEAN;
VAR a1,a2,r:LONGINT;
BEGIN
    IF (u=1) OR (v=1) THEN primos_entre_si:=TRUE
      ELSE
        BEGIN
          IF u>=v THEN BEGIN a1:=u;a2:=v; END
            ELSE BEGIN a1:=v;a2:=u; END;
          REPEAT
            r:= a1 MOD a2;
            a1:=a2;
            a2:=r;
          UNTIL r=0;
          IF a1=1 THEN primos_entre_si:=TRUE
            ELSE primos_entre_si:=FALSE;
        END;
END;

PROCEDURE periodo;
VAR p:LONGINT;
BEGIN
    IF primo(m) THEN WRITE('PERIODO NO MAXIMO') ELSE
    IF (m MOD 4=0) AND ((a-1) MOD 4 <>0) THEN
                        WRITE('PERIODO NO MAXIMO')
    ELSE IF primos_entre_si(m,c)=FALSE THEN
                        WRITE('PERIODO NO MAXIMO')
      ELSE
        BEGIN
          FOR p:=2 TO TRUNC(SQRT(m)) DO
            BEGIN
              IF (m MOD p=0) AND (primo(p)) THEN
                BEGIN
                  IF ((a-1) MOD p)<>0 THEN
                    BEGIN
                      WRITE('PERIODO NO MAXIMO');
                      EXIT;
                    END;
```

```
                END;
              IF (m MOD p=0) AND (primo(m DIV p)) THEN
                BEGIN
                  IF ((a-1) MOD (m DIV p))<>0 THEN
                    BEGIN
                      WRITE('PERIODO NO MAXIMO');
                      EXIT;
                    END;
                END;
            END;
          WRITE('PERIODO MAXIMO');
        END;
END;

BEGIN
   REPEAT
      {Introducción de datos}
      CLRSCR;
      GOTOXY(10,8);WRITE('¿Valor de a? ');READLN(a);
      GOTOXY(10,11);WRITE('¿Valor de c? ');READLN(c);
      GOTOXY(10,14);WRITE('¿Valor de m? ');READLN(m);
      GOTOXY(10,17);WRITE('¿Semilla? ');READLN(semilla);
      REPEAT
        GOTOXY(10,20);
        WRITE('¿Deseas saber si alcanza periodo máximo?
(S/N) ');CLREOL;
        GOTOXY(57,20);pulsar:=READKEY;
      UNTIL pulsar IN ['s','S','n','N'];

      IF UPCASE(pulsar)='S' THEN
        BEGIN
          periodo;
        REPEAT UNTIL KEYPRESSED;
      END;

      {Cálculo de la secuencia aleatoria}
      x:=semilla;
      REPEAT
        CLRSCR;
        GOTOXY(10,2);WRITE('a = ',a);
        GOTOXY(35,2);WRITE('c = ',c);
        GOTOXY(60,2);WRITE('m = ',m);
        GOTOXY(1,4);
        FOR contador:=1 TO 80 DO
          BEGIN
            WRITE(x:9,' ');
            IF contador MOD 8=0 THEN WRITELN;
            decimales:=FRAC((1.0*a*x+c)/m);
            x:=ROUND(decimales*m);
          END;
        GOTOXY(20,24);
        WRITE('Repetir (R), Continuar (C), Terminar (T) ? ');
        REPEAT
          tecla:=READKEY;
        UNTIL (tecla='R') OR (tecla='C') OR (tecla='T')
          OR (tecla='r') OR (tecla='c') OR (tecla='t');
      UNTIL (tecla<>'C') AND (tecla<>'c');
   UNTIL (tecla='T') OR (tecla='t') ;
   CLRSCR;
END.
```

Teorema: Consideremos una sucesión congruencial lineal de módulo m, número primo mayor que 2, e incremento c nulo. Tendrá período máximo, e igual a m–1, si para todos los divisores primos q de m–1 se satisface que $a^{(m-1)/q}$ no es congruente con 1 módulo m.

Por ejemplo, si tomamos los siguientes parámetros:

$$m = 2^{16} + 1 = 65.537 \qquad a = 75$$

podemos comprobar que se satisfacen las condiciones del teorema anterior y, por tanto, su período será 65.536:

Es sencillo ver que m es primo y como el único divisor primo de m–1 es 2, basta con calcular el valor de ($75^{32.768}$ mod 65.537). Ya se haga manualmente o con ayuda del ordenador, es fácil obtener que el resto de esa potencia no es 1, sino 65.536.

Curiosamente éste era el generador de números aleatorios que llevaba implementado el BASIC del popular y querido ZX-Spectrum.

Pero los generadores multiplicativos puros no sólo se empleaban en aquellos entusiastas años del nacimiento de la microinformática. En la actualidad también hay muchos programas que los utilizan; así, por ejemplo, lo podemos encontrar en la librería de rutinas matemáticas y estadísticas IMSL, con los parámetros:

$$m = 2^{31} - 1 = 2.147.483.647$$
$$a = 950.706.376$$

Por último, indicar que cuando el módulo m no es primo se acostumbra trabajar con valores que sean potencias de 2 o de 10. En el primer caso ($m = 2^z$, con $z > 3$) el período máximo posible es m/4 y exige que a sea 3 o 5 módulo 8. Si $m = 10^z$, con $z > 4$, y la semilla no es múltiplo de 2 o 5 el período máximo es $5 \cdot 10^{z-2}$ si y sólo si a módulo 200 es alguno de los valores siguientes: 3, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91, 109, 117, 123, 131, 133, 139, 141, 147, 163, 171, 173, 179, 181, 187, 189 y 197.

Epílogo

Existen muchos otros métodos en la literatura científica para generar números aleatorios (congruencias aditivas, lineales generales, mezcla de varias, etc.) pero, hoy por hoy, los congruenciales lineales continúan siendo los predominantes en la industria informática ya que, con parámetros apropiados (y todos los comentados anteriormente lo son), se pueden generar en poco tiempo sucesiones formadas por miles de millones de números aleatorios que superan sin problemas los test empíricos de aleatoriedad y uniformidad.

A estas alturas, y para concluir este breve paseo por el mundo de la implementación del azar en los ordenadores, quizás lo más apropiado sea citar la célebre frase del matemático R. Coveyou: «La generación de números aleatorios es demasiado importante para dejarla en manos del azar».

Vicente Trigo
IB Félix de Azara
Zaragoza

Bibliografía

AGUARON, J. y otros (1993): *Simulación*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GARDNER, M. (1975): *Carnaval matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

KNUTH, D. E. (1969): *The art of computer programming, II*, Addison Wesley, Massachusetts.

TRIGO, V. y R. AGUSTÍN (1994): *Prácticas de Estadística por Ordenador*, Librería Belén, Zaragoza.

MATERIAL DIDÁCTICO DEL PROFESORADO EN SUS AULAS

La FESPM ha acordado presentar una exposición de materiales educativos realizados por profesores y profesoras de la Federación en el ICME-8 que se celebrará en Sevilla en julio de 1996. Ha sido nombrado coordinador de esta actividad Arturo Mandly Manso de la Sociedad Extremeña.

Todos los socios de las sociedades federadas que lo deseen pueden participar de acuerdo con las siguientes condiciones:

- No se considerará como material didáctico el que se limite a una mera descrición de actividades.
- Los programas informáticos que desarrollen actividades didácticas para el aula también podrán incluirse, para lo cual deberán acompañar las condiciones mínimas que debe cumplir el ordenador sobre el que debe rodar la aplicación.
- Se especificarán los autores y autoras y la sociedad a la que pertenecen.
- Se incluirá un valor aproximado de los materiales, dado que se realizará un seguro de la exposición.
- Junto con cada material debe presentarse una guía de utilización y descripción del material, así como el nivel educativo al que va dirigido y tres descriptores. Se utilizará formato DIN A4. es obligatorio presentarlo en castellano y, si es posible, también en inglés.
- Si el material necesitase para su funcionamiento el estar conectado a la red eléctrica, u otro tipo de necesidades, deberá especificarse claramente a efectos de tenerlo previsto a la hora de su ubicación en la exposición.
- Los materiales y la documentación serán enviados a la dirección particular infraescrita antes del 29 de febrero de 1996.
- Una vez finalizado el ICME-8 los materiales serán devueltos.

Dirección particular:
Arturo Mandly Manso
Plaza de las Albercas, 8, 2.° C
06400-DON BENITO (Badajoz)
Tno.: (924) 81 05 47

Dirección del centro de trabajo:
IES Cuatro Caminos
Calle Torres Isunza, s/n
06400-DON BENITO (Badajoz)
Tno.: (924) 81 07 02
Fax: (924) 81 14 74

NUEVA DIRECCIÓN

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

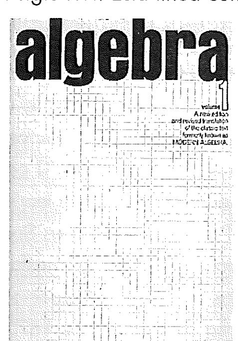
Tno.: (976) 76 13 49
Fax: (976) 76 13 45

SUMA 20
noviembre 1995

Un libro de álgebra moderna que ha hecho historia

ALGEBRA (Una nueva edición y traducción revisada del texto clásico antiguamente llamado MODERN ALGEBRA)
B. L. Van der Waerden
Traducción del alemán al inglés de Fred Blum y John R. Schulenberger.
(El primer tomo es traducción de la séptima edición alemana de 1966 y el segundo de 1967 la quinta publicado por Springer Verlag).
Editorial Frederick Ungar Publishing Co.
New York, 1970, 2 vols.

La obra del holandés B. L. van der Waerden *Modern Algebra* marcó, en el momento de su primera edición alemana de 1930, un punto de inflexión en la exposición del álgebra. Hasta ese momento, los grandes libros de texto de álgebra se movían dentro de las coordenadas marcadas por los algebristas italianos del siglo XVI. Esta línea consideraba que el objetivo fundamental del álgebra era el manejo y la fundamentación del cálculo literal y la resolución de las ecuaciones algebraicas y la realización de un estudio pormenorizado de sus soluciones El estudio sistemático de la resolución de ecuaciones algebraicas culminó, desde el punto de vista de la investigación, con las aportaciones de Galois (1811-1832), pero las ideas de Galois tardaron cerca de tres siglos en gestarse y casi medio en ser apreciadas y difundidas por la comunidad científica.



Cuando se echa un mirada somera a la historia del álgebra desde el siglo XVI al siglo XIX se puede apreciar que el objetivo fundamental del álgebra era la resolución de ecuaciones de grado superior con la esperanza de obtener unas fórmulas análogas a las que habían obtenido Tartaglia, Cardano (1502-1576) y Del Ferro (1465-1526) para la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado que permitieran resolver las ecuaciones de quinto grado, sexto... Esto es, la línea de investigación central consistía en la búsqueda de una fórmula que permitiera expresar las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual que cinco mediante radicales. Es en esta dirección en la que realizaron importantísimas aportaciones autores como Lagrange (1736-1813), Ruffini (1765-1822) o Gauss (1777-1855). Pero la aportación más importante la realizó Abel que demostró la imposibilidad de obtener una fórmula con radicales que permitiera resolver las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro.

RECENSIONES

La demostración de Abel (1802-1829) de que no se podía obtener una fórmula mediante radicales que permitiera resolver todas las ecuaciones de quinto grado, ni para las de sexto, ni séptimo cerró una línea de trabajo, peor por eso no se dejó de investigar, aunque las pesquisas siguieron otra dirección. Partiendo de que era posible la resolución de algunas ecuaciones particulares se planteó la pregunta de cuáles debían ser las condiciones que debía cumplir una ecuación algebraica para poder ser resuelta mediante el uso de radicales. Naturalmente, como se podían resolver mediante el uso de radicales ecuaciones algebraicas hasta grado cuarto, podrían resolverse mediante radicales aquellas ecuaciones, no importa de qué grado, que, mediante modificaciones o sustituciones, se transformaran en ecuaciones de grado cuatro o menor.

La dificultad de determinar por simple observación qué ecuaciones admitían tales transformaciones que las convertían en una ecuación resoluble por radicales y cuáles no tenían esa propiedad era enorme, por no decir imposible, pero todavía ofrecía mayor dificultad establecer cuáles eran las ecuaciones para las que no existían tales transformaciones y que, por lo tanto, no serían resolubles por radicales.

Galois emprendió la investigación de cómo debían presentarse los coeficientes de una ecuación algebraica para que ésta pudiera resolverse por reducción. Para llegar a fijar la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica fuera resoluble por radicales se valió de unos nuevos conceptos que aplicó al estudio de las ecuaciones, a saber, el concepto de grupo y el concepto de irreducibilidad de un polinomio dentro de un cuerpo. Con los descubrimientos de Galois el álgebra se abrió hacia unos nuevos horizontes. A partir de él trabajar en álgebra no iba a ser solamente el estudio de ecuaciones algebraicas, sino el estudio de las herramientas que permitieran decidir si dichas ecuaciones podían o no ser resueltas por radicales. De este modo, los conceptos abstractos de grupo y de cuerpo estaban llamados a transformarse en el meollo de los estudios algebraicos.

Pero el protagonismo de los conceptos de cuerpo y grupo en el panorama del álgebra no iba a alcanzarse de inmediato. La obra de Galois era densa y no fue comprendida por sus contemporáneos, de hecho, no fue dada a conocer su obra hasta 1870 con la obra de Camille Jordan (1838-1921) en que se aplicó la teoría de grupos a las ecuaciones algebraicas. Por su parte, Mathius Sophus Lie (1842-1899) creó la teoría de grupos continuos de transformaciones y lo aplicó a la resolución de las ecuaciones diferenciales y Félix Klein (1849-1925) en su *Programa de Erlangen* de 1872 sistematizó toda la geometría a partir de la teoría de grupos.

A partir de este momento la teoría de grupos y la de cuerpos comenzó a tener en álgebra la misma consideración que la teoría de ecuaciones algebraicas por parte de un buen sector de los matemáticos. Si el álgebra hubiera reducido su ámbito de influencia al estudio exclusivo de las ecuaciones algebraicas, tras las aportaciones de Galois se habría encontrado en una vía muerta y es la nueva metodología aportada por Galois y sus seguidores la que proporciona un nuevo filón al álgebra. Esta nueva álgebra se denominó durante muchos años álgebra moderna y en su implantación en el mundo científico tuvo una importancia vital el *Algebra* de Van der Waerden, publicada en 1930.

B. L. Van der Waerden afirma en la introducción de su *Algebra Modern* que el álgebra abstracta (formal o axiomática) ha sido como una ráfaga de aire fresco que ha soplado sobre el álgebra, dando lugar a nuevas formulaciones de las ideas del álgebra clásica, produciendo reformulaciones y profundas investigaciones en teoría de grupos, teoría de campos, teoría de ideales y de números hipercomplejos.

El *Algebra Modern* de B. L. de Van der Waerden tiene el mérito de ser el primer libro de texto que trató de un modo sistemático y coherente la mayor parte de los tópicos del álgebra moderna. El objetivo del libro es introducir al lector en todos lo temas del álgebra, por ese motivo se destacan en primer plano conceptos y métodos y muchos resultados particulares que caen dentro del álgebra clásica son propuestos como ejercicios.

Reconoce y aprecia trabajos anteriores sobre teoría de grupos como el de A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, publicada en Berlín en 1927, en teoría de cuerpos *Höhere Algebra I, II and Aufgabensammlung zur Hölerem Algebra* de H. Hasse, publicada entre 1926-27, para álgebra clásica la obra de O. Perron, *Algebra I, II* de 1927 y para álgebra lineal el Dickson, L. E. *Modern Algebraic Theories*, publicada en Chicago en 1926. En estas obras se basa Van der Waerden para hacer una introducción breve y completa a estas materias en los tres primeros capítulos del tomo primero.

No obstante, el autor reconoce en la introducción como fuente fundamental de inspiración de este libro los cursos que siguió en Alemania entre los años 1924 y 1926 que fueron las lecciones que recibió de Emil Artin en Hamburgo en el verano de 1926, un seminario sobre *Teoría de Ideales* dirigido por E. Artin, W. Blaschke, O. Schreier y el propio B. L. Van der Waerden en Hamburgo en el invierno de 1926-27, los cursos de Emmy Noether (1882-1935) sobre *Teoría de Grupos y Números Hipercomplejos* en Gotinga en los inviernos de 1924-25 y 1927-1928.

De este modo B. L. Van de Waerden estudió matemáticas en las universidades de Amsterdam, Gotinga y Hamburgo. Cuando llegó a Gotinga estaba interesado por el álgebra y la geometría algebraica, en la rama conocida como álgebra moderna. Los autores alemanes habían obtenido importantes resultados en esta materia, pero los fundamentos no estaban claros. El álgebra que aprendió en Alemania con Artin y Noether proporcionaron a B. L. Van de Waerden las herramientas necesarias para elaborar un libro con sólidos fundamentos lógicos para el estudio del álgebra y la geometría algebraica.

B. L. Van de Waerden estudió el álgebra abstracta de su tiempo en los lugares en los que los más significativos matemáticos de la época la estaban produciendo y elaboró una obra que ponía en común a las producciones de las distintas escuelas. En su obra quedaron firmemente asentados los fundamentos del álgebra de las estructuras y su aplicación a la geometría, a las funciones algebraicas, al álgebra topológica y a un variado repertorio de temas que se recogen en el siguiente

Índice de la obra

TOMO I

CAPÍTULO I.- NÚMEROS Y CONJUNTOS: Conjuntos. Aplicaciones. Cardinalidad. El número natural. Conjuntos finitos y numerables. Particiones.

CAPÍTULO II.- GRUPOS: El concepto de grupo. Subgrupos. Complejos. Clases. Isomorfismos y automorfismos. Homomorfismos, subgrupos normales y grupo cociente.

CAPÍTULO III.- ANILLOS Y CUERPOS: Anillos. Homomorfismos e isomorfismos. El concepto de cuerpo de cocientes. Anillo de polinomios. Ideales. El anillo de las clases de residuos. Divisibilidad. Ideales primos. Anillos euclidianos y anillos de ideales principales. Factorización.

CAPITULO IV.- ESPACIO VECTORIAL Y ESPACIO TENSORIAL: Espacio vectorial. Invarianza dimensional. El espacio vectorial dual. Ecuaciones vectoriales sobre un SKEW cuerpo. Transformaciones lineales. Tensores. Formas multilineales antisimétricas y determinantes. Producto tensorial. Contracción y traza.

CAPÍTULO V.- POLINOMIOS: Diferenciación. Los ceros de un polinomio. Fórmulas de interpolación. Factorización. Criterios de irreducibilidad. Factorización en un número finito de pasos. Funciones simétricas. resultante de dos polinomios. La resultante como función simétrica de las raíces. Descomposición en fracciones simples.

CAPÍTULO VI.- TEORÍA DE CAMPOS: Subcuerpos. Cuerpos primos. Adjunción. Extensión simple de un cuerpo. Extensión finita de un cuerpo. Extensiones algebraicas de un cuerpo. Raíces de la unidad. Campos de Galois (cuerpos finitos conmutativos). Extensiones separables e inseparables. Cuerpos perfectos e imperfectos. Simplicidad de extensiones algebraicas. Teorema del elemento primitivo.

CAPÍTULO VII.- CONTINUACIÓN DE LA TEORÍA DE GRUPOS. Grupos con operadores. El operador isomorfismo y el operador isomorfismo. Las dos leyes de isomorfismo. Series normales y series composición. Grupos de orden P^n. Producto directo. Carácter de G. Simplicidad del grupo alternado. Transitividad y primitividad.

CAPÍTULO VIII.- TEORÍA DE GALOIS: El grupo de Galois. El teorema fundamental de la teoría de Galois. Grupos conjugados, cuerpos conjugados y elementos. Cuerpos ciclotómicos. Cuerpos cíclicos y ecuaciones puras. Solución de ecuaciones mediante radicales. Ecuación general de grado n. Ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Construcciones con regla y compás. Cálculo del grupo de Galois. Ecuaciones con un grupo simétrico. Bases normales.

CAPÍTULO IX.- ORDENACIÓN Y BUENA ORDENACIÓN DE CONJUNTOS: Conjuntos ordenados. El axioma de elección y el lema de Zorn. El teorema de la buena ordenación. Inducción transfinita.

CAPÍTULO X.- EXTENSIONES INFINITAS DE CUERPOS: Cuerpos algebraicamente cerrados. Extensiones simples trascendentes. Dependencia e independencia algebraica. El grado de transcendencia. Diferenciación de funciones algebraicas.

CAPÍTULO XI.- CAMPOS REALES: Cuerpos ordenados. Definición de número real. Ceros de funciones reales. El cuerpo de los números complejos. Teoría algebraica de los cuerpos reales. Teorema de existencia para campos reales formales. Sumas de cuadrados.

TOMO II

CAPÍTULO XII.- ÁLGEBRA LINEAL: Módulos sobre un anillo. Módulos sobre anillos euclidianos. Divisores elementales. Teorema fundamental de los grupos abelianos. Representaciones y representaciones modulares. Formas normales de un matriz en un cuerpo conmutativo. Divisores elementales y funciones características. Formas cuadráticas y hermitianas. Formas bilineales antisimétricas.

CAPÍTULO XIII.- ÁLGEBRAS: Sumas directas e intersecciones. Ejemplos de álgebras. Productos y productos cruzados. Las álgebras como grupos con operadores. Módulos y representaciones. Radicales. Producto Star ($a*b = a+b-ab$). Anillos con condición minimal. Descomposiciones laterales y centrales. Anillos simples y primitivos. El anillo de endomorfismos de una suma directa. Teoremas de estructura para anillos semisimples y simples. El comportamiento de las álgebras bajo la extensión del cuerpo base.

CAPÍTULO XIV.- TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN DE GRUPOS Y ÁLGEBRAS: Exposición del problema. Representación de álgebras. representación del centro. Trazas y caracteres. Representaciones de grupos finitos. Carácter de un grupo. La representación de los grupos simétricos. Semigrupos de transformaciones lineales. Dobles módulos y producto de álgebras. Campo de descomposición de un álgebra simple. El grupo de Bauer. Sistemas multiplicativos.

CAPÍTULO XV.- TEORÍA GENERAL DE IDEALES Y ANILLOS CONMUTATIVOS: Anillos noetherianos. Producto y cociente de ideales. Ideales primos y primarios. El teorema general de descomposición. El primer teorema de unicidad. Componentes aisladas y potencias simbólicas. Teoría de ideales relativamente primos. Ideales simples-primos. Anillos cociente. Intersección de todas las potencias de un ideal. La longitud de un ideal primario. Cadenas de ideales primario en un anillo noetheriano.

CAPÍTULO XVI.- TEORÍA DE IDEALES DE POLINOMIOS: Variedades algebraicas. El campo universal. Ceros de un ideal primo. La dimensión. El teorema de los ceros de Hilbert. Sistemas resultantes para ecuaciones homogéneas. Ideales primarios. Teorema de Noether. Reducción de ideales multidimensionales a ideales cero dimensionales.

CAPÍTULO XVII.- ELEMENTOS ALGEBRAICOS ENTEROS: R-módulos finitos. Elementos enteros sobre un anillo. Los elementos enteros de un cuerpo. Fundamento axiomático de la teoría clásica de ideales. Inversión y extensión de los resultados. Ideales fraccionarios.Teoría de ideales de un dominio entero arbitrario íntegramente cerrado.

CAPÍTULO XVIII.- CAMPOS CON VALORACIONES: Valoraciones. Extensiones completas. Valoraciones del campo de los números racionales. Valoraciones de campos extensión algebraica: caso completo. Valoraciones de campos extensión algebraica: caso general. Valoraciones de campos de números algebraicos. Valoración de un campo de funciones racionales. Teoremas de aproximación.

CAPÍTULO XIX.- FUNCIONES ALGEBRAICAS DE UNA VARIABLE: Desarrollo en serie en la variable uniformizada. Divisores y múltiplos. La clase g. Vectores y covectores. Diferenciales. El teorema de los índices especiales. El teorema de Riemann-Roch. Generación separable de campos de funciones. Diferenciales e integrales en el caso clásico. Prueba del teorema de los residuos.

CAPÍTULO XX.- ÁLGEBRA TOPOLÓGICA: El concepto de espacio topológico. Base de entornos. Continuidad. Límites. Axiomas de separación y numerabilidad. Grupos topológicos. Entornos de la unidad. Subgrupos y grupo cociente. T-anillos. T-cuerpos. Compleción de un grupo por sucesiones fundamentales. Filtros. Compleción de un grupo mediante filtros de Cauchy. Espacios vectoriales topológicos. Compleción de anillos. Compleción de cuerpos.

Estos son los índices de la séptima edición alemana del tomo primero y la quinta del segundo de las que se hizo la traducción inglesa. Pero la obra sufrió profundas modificaciones en las sucesivas ediciones alemanas.

Así, enumerando algunas variaciones de las diferentes ediciones del tomo primero se pueden destacar una serie de variaciones significativas tales como las siguientes. En la segunda edición la teoría de la valoración se amplió y en la tercera edición del tomo primero en 1950 se le concedió mayor importancia a la teoría de números y a la geometría algebraica. Igualmente en la tercera se le dedicó un capítulo aparte a la teoría de la valoración en el que se trataba este tema de un modo más amplio y con mayor claridad y se volvió a incluir una sección sobre el buen orden y la inducción transfinita, que fue eliminada en la segunda edición. Esta sección se emplea para fundamentar la teoría de campos de Steinitz de forma general. En la cuarta edición de 1955, siguiendo la sugerencia del algebrista Brandt le cambió el nombre a la obra de *Modern Algebra* a *Algebra*.

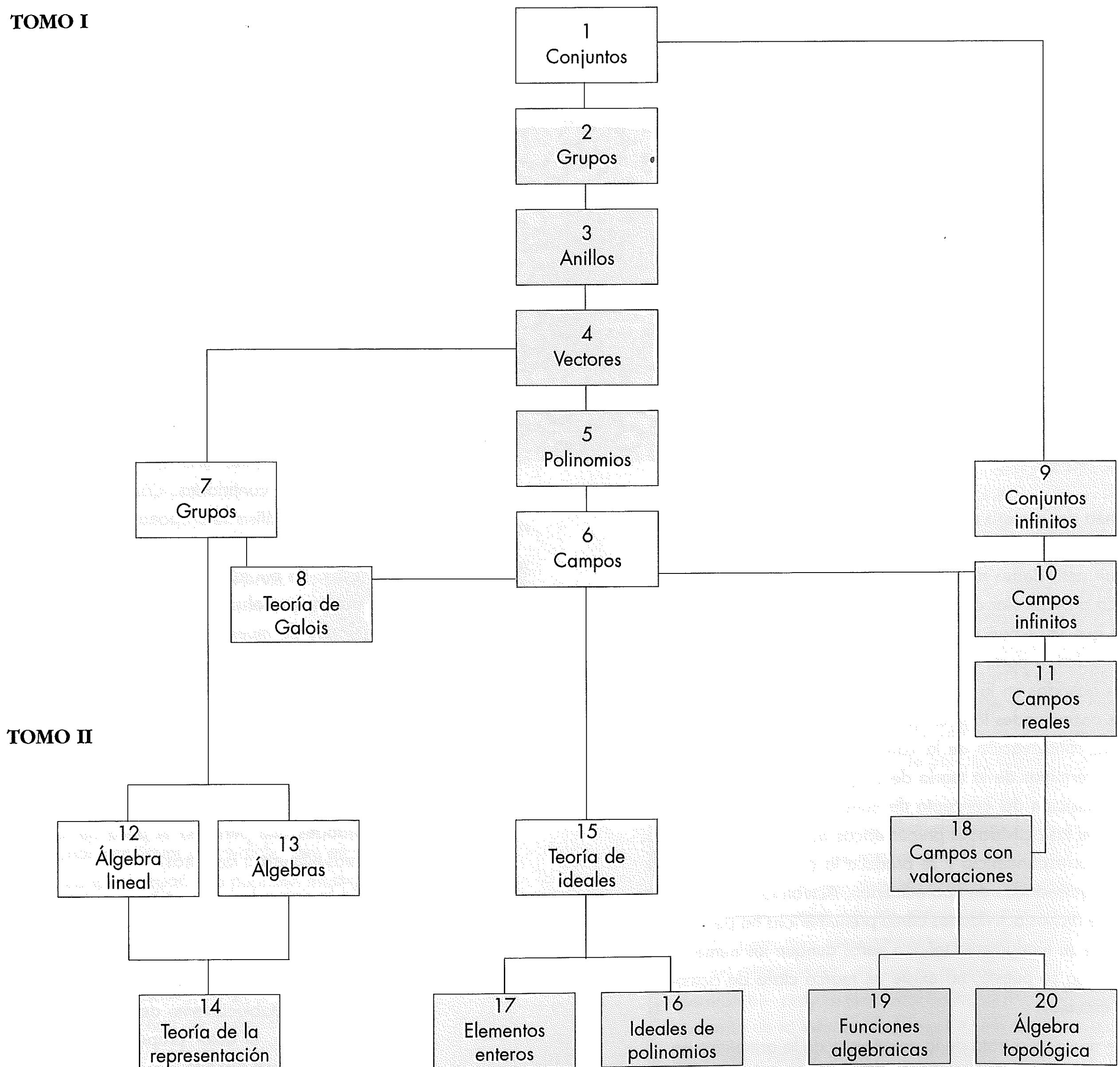
En la séptima edición de 1966 del tomo primero manifiesta B.L.Van der Waerden que en la primera edición de 1930 pretendía una introducción de los aspectos más novedosos del álgebra moderna es por lo que parte del álgebra clásica y, en particular, la teoría de determinantes eran supuestos conocidos. En 1966 el libro era usado de modo general por los estudiantes como una primera introducción al álgebra, esta circunstancia motivó que en la séptima edición se incluyera un capítulo sobre espacios vectoriales y tensoriales en el que se exponen las principales ideas del álgebra lineal y, en particular, la teoría de determinantes. En esta edición el tema primero de números y conjuntos se hizo más corto, tratándose la ordenación y la buena ordenación en el capítulo noveno, el lema de Zorn se dedujo a partir del axioma de elección y el teorema de la buena ordenación lo dedujo utilizando el mismo método, siguiendo a H. Kneser. En la teoría de Galois reconoce haber adoptado ciertas ideas del libro de Artin.

Al tomo segundo le añadió en la cuarta edición de 1959 dos nuevos capítulos. El primero sobre funciones de una variable que llega hasta el teorema de Riemann-Roch para campos arbitrarios de constantes y el segundo sobre álgebra topológica, estrechamente relacionados con la compleción de grupos topológicos, anillos y cuerpos. En la misma edición la teoría de ideales fue ampliada con los resultados de Krull sobre potencias simbólicas de ideales primos y cadenas de ideales. En el capítulo sobre álgebras se dan muchos ejemplos y en la teoría del radical manifiesta haber seguido a Jacobson sin imponer las más delicadas condiciones y las ideas de

Emmy Noether sobre suma directa e intersecciones las enfatiza en esta edición consiguiendo, combinando los métodos de Jacobson y Noether, simplificar muchas demostraciones. En la quinta edición alemana de 1967 del tomo segundo, siguiendo con la necesidad impuesta de que el libro era seguido como libro de texto coloca el álgebra lineal al principio dejando el libro reducido a los tres grandes bloques temáticos fundamentales siguientes:

- Capítulos 12-14: Álgebra Lineal, Algebras y Teoría de la Representación,
- Capítulos 13-17: Teoría de Ideales.
- Capítulos 18-22: Campos con Valoraciones, Funciones Algebraicas y Álgebra topológica.

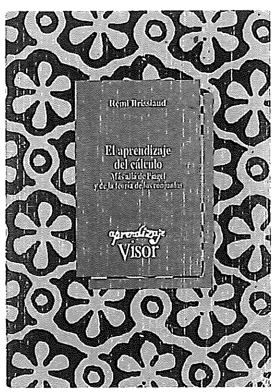
La subdivisión de los distintos temas queda claramente expresado en la siguiente guía esquemática de la obra completa en sus dos volúmenes:



El estudio detallado de las siete ediciones del primer tomo y las cinco del segundo de la obra de B.L.Van der Waerden, con sus adiciones de temas, algunos temas desechados, otros que desaparecen de una edición y aparecen en la otra aportaría mucha luz sobre la historia de la implantación del Álgebra Moderna en el panorama matemático. Además de poder apreciar cómo un libro que inicialmente había sido escrito para los matemáticos con el fin primordial de fundamentar el Álgebra Moderna, liberarla de ciertas incorrecciones y presentar todos los tópicos de la misma de una manera coherente y uniforme se llega a transformar en libro de texto con el que se han formado durante más de treinta años generaciones de matemáticos alemanes.

Víctor Arenzana

EL APRENDIZAJE DEL CALCULO
(MÁS ALLÁ DE PIAGET Y DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS)
Remi Brissiaud
Visor, Madrid, 1993
(Traducción de «Comment les enfants apprennent a calculer»,
Editions Retz, 1989)
ISBN: 84-7774-090-9
233 páginas



La enseñanza del número en la escuela ha sido objeto de grandes controversias. Las viejas preocupaciones de los pedagogos por construir actividades numéricas que desterraran el recuento y la práctica de «calcular con los dedos», consideradas técnicas mecánicas que impedían una buena comprensión del número, fueron sustituidas, a partir de los años setenta, por nuevas preocupaciones basadas en la necesidad de que los niños desarrollasen unas capacidades lógicas generales –inclusión de clases, transitividad, conservación de la cantidad– y se familiarizasen con algunos términos de la teoría de conjuntos como paso previo a la adquisición del concepto de número. Nacen así en la escuela infantil las actividades prenuméricas de ordenación, clasificación y correspondencia y se produce la casi total desaparición de las actividades de tipo numérico. Actualmente, la consideración de dichas actividades como prenuméricas ha perdido gran parte de su fundamento teórico pero, aunque los números han recuperado su puesto, no existe un marco claro de actuación en la escuela.

El libro que nos ocupa trata de la enseñanza de la aritmética en las primeras etapas de la escolaridad (Educación Infantil y primer curso de Primaria) pero, a diferencia de muchos otros libros que tratan este mismo tema, no es un simple resumen de las aportaciones más relevantes de la psicología sobre la adquisición del concepto de número, sino que en él se proponen pautas claras de intervención didáctica en el aula. Además, la fundamentación teórica de estas propuestas didácticas, que se realiza en la parte final del libro, pone de manifiesto que el autor conoce los trabajos más importantes sobre los primeros aprendizajes numéricos y los ha tenido en cuenta a la hora de construir su método. Por todo ello, creemos que este libro puede ser valioso para los maestros de Educación Infantil y primer ciclo de Primaria y también, como libro de texto, para los profesores y alumnos universitarios de didáctica de las matemáticas.

El libro se compone de tres partes. En la primera parte se estudian las dos maneras que, inicialmente, en la historia, han permitido la comunicación de cantidades: las colecciones de objetos en correspondencia biunívoca con la que nos interesa cuantificar (colecciones de muestra) y las palabras-número. Partiendo de la dificultad de los niños pequeños para comprender que la última palabra-número pronunciada en la acción de contar se refiere, no sólo al último objeto señalado, sino también a toda la colección se analizan las ventajas e inconvenientes de recurrir a cada una de estas formas de comunicar cantidades. Como consecuencia de este análisis se propone un método mixto basado, bien en la acción de contar como punto de partida complementado, posteriormente, por el uso de constelaciones (colecciones de muestra con determinadas configuraciones espaciales) para hacer énfasis en el aspecto cardinal, bien en la ausencia inicial de recuentos y la representación de la cantidad mediante configuraciones de dedos para pasar después a utilizar la técnica de contar. Por último, se presentan actividades que permiten el paso de las palabras-número a las cifras.

En la segunda parte se trata el tema de la enseñanza del cálculo. Ante el obstáculo que las prácticas infantiles de «contar todo» o «contar lo que queda» pueden suponer para el establecimiento de buenas técnicas de cálculo, el autor propone de nuevo un método mixto basado, por un lado, en la utilización de colecciones de muestra para que los niños resuelvan los cálculos con números pequeños sin necesidad de contar y, por otro, en la práctica de los recuentos para aquellos problemas aritméticos en los que intervengan números más grandes. La secuencia didáctica se completa con el uso del simbolismo aritmético para desarrollar un cálculo mental escrito (cálculo pensado) que permita a los niños ampliar el campo de las relaciones numéricas que conocen. Finalmente se afronta el problema de la enseñanza de la numeración y la suma de números de dos cifras.

En la tercera parte el autor explicita los principios psicológicos en que se basan sus propuestas didácticas y los compara con los defendidos por Piaget, Gelman, Fuson, Steffe y von Glasersfeld, entre otros. También analiza los principios didácticos que sustentan su método, relacionándolos con la teoría de la zona de desarrollo próximo de Vigotsky y la teoría de las situaciones de Brousseau. El hecho de que la fundamentación teórica aparezca al final del libro y en relación directa con las propuestas didácticas efectuadas produce un discurso teórico de una concisión y pertinencia muy de agradecer.

Eva Cid

AVENTURAS MATEMÁTICAS
Una ventana hacia el caos y otros episodios
Miguel de Guzmán
Pirámide, Madrid,1995
ISBN: 84-368-0900-9
318 páginas + 1 disquete

En algunas ocasiones se ha dicho que en el mundo editorial español se publican muchos títulos, pero las reediciones son escasas. Esta afirmación global, al menos la segunda parte, es mucho más cierta en el caso de las matemáticas. Desconozco si la producción editorial matemática de España es comparable a la de otros países, pero lo que sí es fácilmente constatable es el bajo número de libros que se reeditan si se excluyen, obviamente, los manuales de texto. El libro que nos ocupa es una excepción, constituye una nueva edición aumentada de la publicada en 1987 por Labor. Desde entonces ha sido traducido a cuatro idiomas –francés, portugués, finlandés y chino– lo cual ya sí que supone, no sólo una excepción, sino una autentica rareza en el panorama bibliográfico de la divulgación científica en nuestro país.

El éxito de esta obra se debe, sin duda, a la personalidad científica y a la capacidad comunicativa de su autor. Para escribir un buen libro de divulgación científica es preciso conocer muy bien los temas de los que se habla –lo cual no siempre ocurre–, y saberlos «contar». Miguel de Guzmán cumple los dos requisitos; sería pretencioso por mi parte entrar en el primero y para comprobar el segundo basta con leer alguna de sus obras o escuchar algunas de sus conferencias o charlas en cualquiera de las muchas actividades dirigidas al profesorado en las que participa. Tiene el raro don de explicar cosas complicadas con rigor, de forma sencilla y amena, que cautiva al lector o al oyente y le convierten en el máximo exponente de la alta divulgación matemática en España, algo así como el Martin Gardner nacional.

Aventuras matemáticas, está estructurado en 19 capítulos, de los que son nuevos en esta edición los cinco últimos. En el capítulo 0 se ofrecen una serie de estrategias para resolver problemas y constituye el germen que daría lugar más tarde a Para pensar mejor. A lo largo de los capítulos 1 a 13 se exponen desde problemas clásicos y no tan clásicos hasta juegos de distinto tipo, pasando por cuestiones geométricas, de teoría de números, etc. Cada uno de los capítulos termina con unas notas en las que el autor enmarca los diferentes tópicos tratados en teorías más generales, o da unas breves pinceladas de tipo histórico, o incluso esboza su opinión sobre cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los capítulos nuevos de esta edición tratan aspectos matemáticos muy actuales, como muestra el solo enunciado de sus títulos: «Una iniciación a los fractales», «Una ventana hacia el caos», «El teorema de Fermat y otras conjeturas», «Los números primos y el espionaje. Criptografía de clave pública» y «Sobre el teorema de Gödel». Para ilustrar los cuatro primeros, y aunque su lectura se puede hacer de forma totalmente independiente, se acompaña un disquete de ordenador con unos programas preparados para usar con el programa de cálculo simbólico DERIVE (versión 2.5 o siguientes).

En conjunto se trata de un libro que hará pasar muy buenos ratos a los amantes de las matemáticas y creo que es recomendable para lectores de muy diverso tipo, por supuesto a los profesores de distintos niveles por las ideas que pueden obtener para sus clases, pero muy especialmente a estudiantes y recién licenciados en matemáticas, ya que la lectura de esta obra –y de otras semejantes– proporciona una visión de las matemáticas complementaria de la más académica obtenida en la licenciatura y que es imprescindible para una formación matemática más global, sobre todo, para quienes vayan a dedicarse profesionalmente a la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.

Emilio Palacián

LA MATEMÁTICA APLICADA A LA VIDA COTIDIANA
Fernando Corbalán
Editorial Graó, Barcelona, 1995
ISBN: 84-7827-122-8
172 páginas

La diferencia entre un texto escrito por un teórico de la enseñanza o por un enseñante radica, a mi juicio, en el referente que cada uno tiene en su cabeza a la hora de escribir, y aun cuando el hipotético lector hacia el que va dirigida la obra de ambos sea el mismo, nosotros los «profes», el teórico escribe para sí mismo y el enseñante para sus alumnos. Esto se hace patente, una vez más, en este libro. Y aun cuando el autor señale que va dirigido a los profesores, en muchas ocasiones, son los alumnos el objeto directo de sus disertaciones, lo que hace que su lectura resulte mucho más agradable y cercana a los que vivimos de o para esta profesión.

El título del libro, y algunas de las intenciones manifestadas en su introducción, evocan los planteamientos de la «línea genovesa» dentro de la didáctica de las matemáticas que presentaron en Madrid Paolo Boero y Ana M.ª Rossi en 1985 en representación del «Grupo de Investigación sobre la didáctica de las matemáticas y la formación científica en la escuela obligatoria» de la Universidad de Génova. Ideas con un marcado contenido social y humanista, al menos en cuanto a sus planteamientos, de las que participaba el autor en aquellos años y que resultaban sorprendentes por lo que suponían de severo contraste con la línea anglosajona de moda en ese momento, mayoritariamente aceptada por los miembros de los MRP y que a la postre acabaría imponiéndose.

Recoge también el libro algunos elementos que el autor ha ido incorporando a su trabajo didáctico y que se han ido poniendo de manifiesto a través de sus cursos, artículos y colaboraciones periodísticas. Sobre todo y fundamentalmente, pero no exclusivamente, la incorporación de la prensa como recurso didáctico. No obstante, releyendo el título del libro a uno le asalta la duda de si la prensa forma parte de la vida cotidiana de nuestros alumnos. Es más: si la realidad de los demás, de los adultos en concreto, forma parte de su propia realidad. Es posible que en ambos casos la respuesta sea no. Precisamente por ello, el libro, y esta es para mi su mayor aportación, hace propuestas para remediar esta situación al incorporar la información, no sólo de prensa, radio y televisión, sino incluso de la publicidad a la realidad del aula y por lo tanto de la vida cotidiana de los alumnos y alumnas, acostumbrándoles a someter, los datos en particular, y las noticias y anuncios publicitarios en general, al tamiz del análisis riguroso de sus contenidos.

Junto a ello se incorporan otros temas «más matemáticos» que tocan la realidad de lo que habitualmente se admite como «vida cotidiana» de una forma tangencial. Y, aunque en la introducción el autor manifiesta que están tocados del mismo espíritu, éste queda diluido en una estética de marcado carácter puramente matemático.

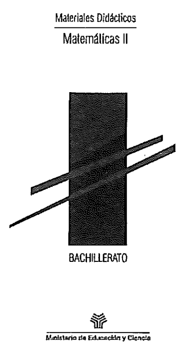
Por otro lado, me gustaría destacar dos cuestiones en las que coincido con el criterio puesto de manifiesto en la obra: la primera en su «elogio de la paciencia» como argumento didáctico, que construido sobre el referente de las palabras de Bruno Bettelhein alude al tratamiento de temas como el que ocupa el segundo capítulo del libro (los porcentajes). La segunda en el tratamiento que hace de la bibliografía: huyendo de la pedantería habitual de incorporar al final del libro (nunca se sabe muy bien en aras de qué oportunidad) una larga lista de obras de autores varios, españoles y extranjeros (por supuesto), va referenciando a lo largo del mismo aquellos que estima oportuno.

Me comentaba alguien que había ojeado el libro que los problemas que contenía no eran originales ni novedosos. Es posible, esto viene sucediendo desde que existen los problemas en matemáticas; si se quiere un buen ejemplo basta considerar una obra de principios de siglo (1904), que a buen seguro tampoco es original, En el reino del ingenio de E. I. Ignatiev para ver que muchos de los problemas de los innumerables libros de ingenio, de no menos innumerables y famosos autores, ya estaban allí. Lo cual no tiene por qué ser malo: si uno tiene un buen problema para ilustrar una situación ¿por qué buscar otro mediocre en aras de la originalidad? Por otro lado ¿quién tiene acceso a las ideas originales?, ¿acaso no hemos aprendido todos gracias a las imnumerables reediciones de las mismas ideas? Es también muy posible que mi interlocutor, y constituye un defecto bastante extendido entre el profesorado de matemáticas, restringiese la lectura de un libro con problemas al enunciado de los mismos. En este caso, las ideas sugeridas, que constituyen el grueso de la obra, son a menudo más interesantes que los problemas propuestos en ella. Si bien es cierto que, como siempre, esa cualidad de ser interesantes y su proyección al aula dependen de la predisposición con que el lector se acerque a los distintos capítulos del libro.

Una consideración más para terminar, referida a la portada: creo que ACE Disseny le hace un flaco favor al libro con ese diseño que genera bastante confusión acerca de las edades a las que va dirigido. Tampoco me gusta ni el aspecto economicista, quizás sólo monetarista, que parece conceder al tandem matemáticas-vida cotidiana, ni el aspecto frío del diseño con evocaciones al plástico y a la posmodernidad que sugiere un contenido más bien de tipo hipotético o teórico.

Carlos Usón Villalba

MATEMÁTICAS II
(Materiales didácticos. Bachillerato)
M.ª Dolores Rodríguez Soalleiro y Ángel Sánchez Catalán
Coordinación: Javier Brihuega Nieto
MEC, Madrid,1993
ISBN: 84-369-2410-X
85 páginas



Estos materiales, publicados por el MEC, tienen como finalidad, como se indica en el prólogo, «...facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas».

En el documento, después de unas breves orientaciones didácticas y para la evaluación, se diseña una programación general de la asignatura y se desarrolla con detalle un ejemplo de unidad didáctica. Finaliza con un apartado dedicado a bibliografía y recursos y como anexo se transcribe el currículo oficial de la asignatura.

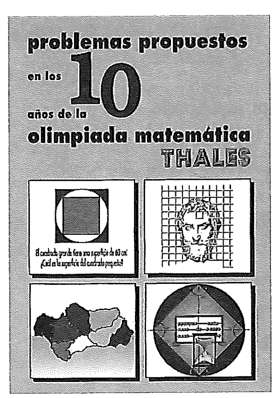
En la programación general, cada una de las partes de la materia –álgebra, análisis y geometría–, después de una breve introducción, se divide en unidades didácticas (tres en álgebra, cuatro en análisis y geometría) que corresponden casi exactamente a los apartados del currículo oficial. Para cada una de estas unidades didácticas se explicitan objetivos, contenidos y se dan unas indicaciones sobre el tipo de actividades más adecuadas.

La unidad didáctica que se desarrolla es la unidad 3 de álgebra: «Sistemas de ecuaciones lineales». Después de una revisión de los conceptos previos necesarios en la unidad y para cada uno de los contenidos conceptuales se hace una breve exposición teórica del mismo y se proponen algunas actividades resueltas totalmente y otras propuestas para que las resuelvan los alumnos individualmente o en grupo. Finalmente se proponen dos pruebas de evaluación, una para realizarla en el transcurso de la unidad y la otra cuando se haya finalizado la misma.

La duda que nos queda –y que no es achacable a los autores, sino a la estructura misma del bachillerato– es si con cuatro semanas (16 períodos de 50 minutos) que se adjudica a la unidad se puede, partiendo de la revisión de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, llegar al estudio de un sistema general con parámetros y para ello utilizar métodos activos por parte de los alumnos, trabajo en grupo, dedicar alguna sesión a la utilización del ordenador, utilizar dos sesiones para los controles...

Se trata de unos materiales que enfocan la asignatura con un sentido muy realista, que siguen rigurosamente el currículo oficial, que, sin duda, serán muy útiles a la hora de planificar las clases y que tendrán la virtud (¿o el defecto?) de tranquilizar a una parte del profesorado que se sentía «algo nervioso» ante la reforma de esta asignatura y que comprobará que las cosas no van a cambiar tanto, como se decía, respecto a COU.

Emilio Palacián



PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS 10 AÑOS DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Luis Berenguer Cruz y otros (edit.)
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Granada,1995
ISBN: 84-920056-1-0
212 páginas

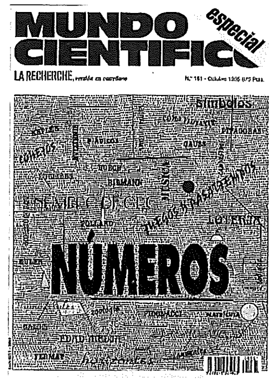
Las olimpiadas en EGB han producido diversos materiales que recogen problemas y actividades matemáticas con, muchas veces, mayor interés que algunos de los repertorios que, dentro del epígrafe de «matemáticas recreativas», circulan por el mercado editorial.

En esta ocasión la Sociedad Thales, una de las pioneras en este tipo de actividades, acaba de publicar una recopilación de todos los problemas propuestos en las fases provinciales y regionales de las diez ediciones de su olimpiada.

El libro perfectamente editado (quizás con la única excepción de la tipografía de la introducción) recoge cerca de dos centenares de problemas con sus correspondientes soluciones, unas realizadas por los editores y otras muchas reproduciendo facsimilarmente las respuestas que en su día dieron los chicos y chicas participantes. Todos los problemas aparecen ilustrados, con bastante gracia y estilo, por alumnos del IB Nicolás Salmerón de Almería.

Es preciso agradecer a Thales su iniciativa por esta obra y felicitar no sólo a los editores –también a ellos–, sino a todos aquellos profesores que a lo largo de estos diez años han ido recopilando problemas de diversas fuentes o creándolos ellos mismos, hasta llegar a formar esta colección que, sin duda, será de gran utilidad, no sólo de cara a las propias olimpiadas sino, y lo que es más importante, como banco de actividades para la clase de cada día en la secundaria obligatoria.

Emilio Palacián



MUNDO CIENTÍFICO
ESPECIAL NÚMEROS
Varios autores
N.°161, volumen 15
Octubre 1995
Páginas 799-894

Puede parecer poco normal que una sección de rescensiones incluya la mención a una revista. Sin embargo, creo que en esta ocasión está plenamente justificado ya que se trata de un número especial dedicado a los números en una publicación de divulgación científica.

En este tipo de revistas, la difusión de las matemáticas ocupa en general un escaso espacio, casi siempre limitado al apartado de los entretenimientos matemáticos, y escasamente orientado a la presentación de los avances de nuestra ciencia o de las líneas de investigación que están desarrollándose en la actualidad. Parece como si el interés por el avance científico sólo se orientase hacia otras ciencias como la biología, la cosmología, la física de partículas elementales, los avances de la técnica, etc., más «ligadas al mundo, más comprensibles», mientras que las matemáticas fuesen un área para el esparcimiento o la divagación y en la que el público interesado por la ciencia se sintiese incómodo debido a su abstracción y «alejamiento de la realidad». Por eso hay que dar la bienvenida a iniciativas como esta.

Los mayoría de los catorce artículos que contiene pueden agruparse en dos categorías: los números a través de la historia de las matemáticas y la presentación de campos activos de la matemática ligados a los números. Es este último grupo de artículos el que más me interesa como matemático que aún siente curiosidad por lo que no ha aprendido de nuestra ciencia, por lo que se está descubriendo o investigando. Con ello no quiero restar importancia al otro enfoque, que desde el punto de vista del profesor de matemáticas es imprescindible conocer para tener conciencia de las dificultades que pueden aparecer en el transcurso de la enseñanza, o como una inagotable fuente de recursos didácticos.

Hace más o menos un año (Suplemento *Futuro* de *El País,* 13 de abril de 1994), podíamos leer la noticia del esfuerzo informático que propuesto para la factorización de RS 129, un número de 129 cifras empleado en criptografía. Poco después dicho esfuerzo alcanzó el éxito. Poco más que eso pudimos saber: ¿qué algoritmos se emplean para decidir si un número es primo o no?, ¿qué tiempo de cálculo exigen?, ¿cómo se diseñan los números compuestos que se emplean en criptografía?, etc. Desgraciadamente estas preguntas y otras «de carácter técnico», al parecer no interesan al gran público y no hay un medio, a mitad de camino entre la banalización y la prensa científica especializada, en el que encontrar las respuestas. Este lugar debería ser la divulgación científica, en nuestro caso matemática.

Alguno de los artículos del especial de *Mundo Científico,* dedicado a los números va por ese camino. Así, tenemos el texto de H. Cohen, «Los números primos», en el que va más allá de la fascinación que este tipo de números han provocado desde la antigüedad, para relatar aspectos relacionados con la criptografía de clave pública o los métodos de identificación de grandes números primos. D. Barsky y G. Christol, proporcionan una introducción a «Los números p-ádicos», que están en la base de la demostración de A. Wiles del teorema de Fermat, pero que también podrían emplearse en la descripción de la estructura última del espacio-tiempo sobre la que especulan los físicos teóricos. Los métodos de representación de los números reales por los ordenadores son la fuente de errores de redondeo potencialmente devastadores por sus consecuencias prácticas. Eso hace de este tópico un campo de investigación muy activo, cuyos problemas y logros describe J. M. Muller en «Ordenadores en busca de aritmética». También en el ámbito de la informática, hay otros problemas numéricos de interés, por ejemplo, la importancia de la transmisión electrónica de datos, codificados en bits, hace necesaria la búsqueda de sistemas eficaces para la corrección de errores. G. Lachaud y S.Vladut, dan una panorámica de este importante campo.

Podría continuar dando un repaso al resto de los artículos contenidos en la publicación, pero los ya citados pueden dar una perspectiva del interés que creo tiene este especial de Mundo Científico. Tan sólo resaltaré, porque creo que puede ser usado directamente en clase con alumnos como un texto resumen y para trabajar sobre él, el artículo de M. Mashaal que abre la revista, titulado «Zoología de los números», en el que se describen brevemente las grandes «especies» de números y alguno de sus «ejemplares» más notables.

En resumidas cuentas, una publicación interesante y que me gustaría viniese seguida de otras dedicadas a otros campos de la matemática.

Julio Sancho

LA TEORÍA DEL CAOS
La naturaleza de las cosas
David Suzuki
CBC. Canadian Broadcasting Corp, 1994
Castellano
Distribución:
Metrovídeo española
C/ Torres Quevedo 1
28760 Tres Cantos
Tfno.: 8032142
VHS, 54 minutos

Este vídeo, dirigido al segundo ciclo de secundaria obligatoria y a bachillerato, presenta los siguientes contenidos:

- Introducción: fenómenos predecibles y fenómenos impredecibles.
- Teoría de caos. Sistemas dinámicos generados por ordenador.
- La geometría de los griegos: herramienta para explicar el orden de los objetos creados por el hombre. La geometría fractal: búsqueda de un nuevo orden en la naturaleza.
- Fractales: entrevista a Benoit Mandelbrot. Ejemplos: la longitud de una costa. Obtención de fractales con ordenador.
- Los fractales, instrumento para la comprensión de la naturaleza: construcción de paisajes fractales con ordenador y estructura fractal en las plantas.
- Fractales y gráficos por ordenador aplicados al estudio de aspectos dinámicos en la naturaleza: crecimiento de las plantas, simulación de diversas condiciones climáticas.
- Orden dentro del caos: regularidades en movimientos turbulentos –vientos, radiación de las galaxias...
- El desorden en los fenómenos regulares: movimientos caóticos impredecibles –el péndulo bajo la influencia de un imán.
- Entrevista a Ed Lorentz: previsiones metereológicas, simulaciones de laboratorio. Sensibilidad ante las mínimas variaciones de las condiciones iniciales. El efecto mariposa.
- Comportamientos caóticos: la bolsa, la historia, la sociología, el deporte.
- Música generada por ordenador: estructura y sorpresa.
- El sistema solar: inestabilidad generada por la órbita de Plutón. Impredecibilidad a largo plazo de los movimientos de los planetas.
- El cerebro humano: «mapas fractales» de pensamientos.
- Epílogo: imágenes comparadas de fenómenos naturales y fractales generados por ordenador.

El vídeo presenta, de forma amena y con el apoyo de imágenes espectaculares, una aproximación no formal a la teoría del caos y a la geometría fractal.

La estructura es lineal, sin bloques separados y no cuenta con apoyos gráficos –subtítulos, esquemas...– para reforzar las ideas fundamentales que caracterizan los fenómenos caóticos, impredecibilidad y sensibilidad a las mínimas variaciones de las condiciones iniciales que, por otra parte, quedan suficientemente resaltadas a lo largo del vídeo.

La estructura de documental hace que carezca de separaciones por bloques y de elementos de resumen o repaso de contenidos así como de refuerzos visuales infográficos. Es decir, los contenidos no están presentados en forma de vídeo didáctico.

No sólo presenta hechos y conceptos sino que aborda directamente contenidos actitudinales al realizar interesantes reflexiones acerca del valor de la geometría a la hora de aproximarse a cualquier explicación de los fenómenos naturales.

La presentación de los contenidos se hace de forma muy atractiva tanto por su estructura en forma de documental científico de carácter divulgativo como por la agilidad narrativa y la belleza de las imágenes. No requiere conocimientos matemáticos especiales para seguir el hilo conductor, ni tampoco pretende hacer un desarrollo matemático profundo de la teoría del caos o de la geometría fractal.

Aunque no se ajusta de manera rigurosa a ninguno de los contenido de los currículos actuales es un material muy aconsejable para su utilización en clase por varios motivos:

- Presenta una visión dinámica de las matemáticas y aproxima a públicos no especialistas una de sus más recientes teorías.
- Sus reflexiones sobre el papel de la ciencia, en general, y la importancia de las matemáticas, en particular, como instrumento para explicar el mundo real, expuestas de forma sencilla y atractiva, incide directamente en los contenidos actitudinales de la LOGSE.

- El tono ameno y la belleza impactante de las imágenes lo convierten en un material atractivo para los alumnos y, por qué no, para los profesores.

Las imágenes son fundamentalmente de dos tipos:

- Imagen real de origen muy diverso, entrevistas, imágenes atractivas de fenómenos naturales, imágenes de laboratorios, archivos de noticiarios...
- Imágenes generadas por ordenador.

Están muy logradas las comparaciones entre formas naturales y fractales de ordenador en las secuencias en que se suceden alternativamente unas y otras. Las imágenes de fractales generados por ordenador se utilizan para reforzar la idea de que esta geometría sirve para explicar multitud de formas naturales y de procesos dinámicos.

Como en casi todos los documentales, un gran proporción de la información se encuentra en la locución y en el sonido real en las entrevistas. Las secuencias de fenómenos naturales dinámicos cuentan con sonido real. El fondo musical no distrae y armoniza bastante bien con las imágenes.

El doblaje se ha superpuesto sobre la locución original en inglés que se percibe en un suave segundo plano sonoro.

El vídeo no cuenta con guía didáctica, pero la amplia bibliografía existente sobre teoría del caos y fractales permiten al profesor tener a su alcance numerosas fuentes de documentación complementaria.

Su excesiva duración, 54 minutos, hace que la información contenida resulte excesiva para utilizarlo en un solo visionado con los alumnos. Es aconsejable realizar al menos dos visionados fragmentados para conseguir un mayor aprovechamiento didáctico.

Antonio Pérez Sanz

GEOMOUSE
Julio Castiñeira y Jorge Pascual

Equipo necesario: ordenador compatible con IBM que posea:

- Tarjeta gráfica (preferiblemente VGA o superior),
- Unidad de disco flexible de 720 K,
- Ratón,
- Versión 3.00 (o superior) del sistema operativo MS-DOS.

Se trata de un programa del Proyecto Atenea que permite construcciones geométricas con regla y compás.

Es un programa: *atractivo*, ya que dispone de una caja de herramientas en la parte inferior de la pantalla y se pueden usar hasta 16 colores en el trazado de líneas; *fácil de manejar*, sólo se usa el botón izquierdo del ratón y, cuando se elige una herramienta, aparece una línea de ayuda en la parte superior de la pantalla que dice cómo se usa la herramienta; *sustituye con ventaja a los instrumentos de dibujo habituales*, puede trazar segmentos y sus puntos medios, rectas paralelas y perpendiculares, ángulos, circunferencias..., además, para una mayor precisión en los dibujos, los datos pueden introducirse por medio del teclado, en vez de con el ratón; *pueden borrarse fácilmente las líneas auxiliares* empleadas en la construcción de figuras; *dispone de una regla graduada y de un transportador* de ángulos para hacer mediciones...; *las figuras realizadas pueden grabarse* en un disquete o imprimirse en un papel.

Esto permite dos cosas: guardar las figuras para una edición posterior y servir de ayuda en la evaluación del trabajo realizado por los alumnos. Es también importante hacer notar que puede darse un nombre descriptivo a las figuras grabadas, lo que facilita su localización posterior en el disquete.

El autor de la reseña ha usado el programa con alumnos de 3.° de BUP, tratando de conseguir los objetivos siguientes: descubrir algunas propiedades sencilla de figuras planas y resolver problemas sencillos en el plano con regla y compás.

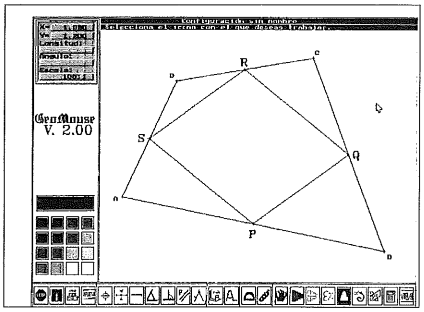


Figura 1

La figura 1 muestra una propiedad interesante e inesperada de los cuadriláteros: el hallazgo de cierta regularidad en una figura irregular. Esta actividad da pie a otras preguntas que los alumnos pueden hacerse (o que puede hacerles el profesor) y que quizá habrían de contestar fuera de la clase de EAO: «¿es cierta también en cuadriláteros cóncavos?», «¿y en "cuadriláteros" que tengan lados que se corten?», «¿qué cuadriláteros dan lugar a rectángulos?, ¿por qué?»,...

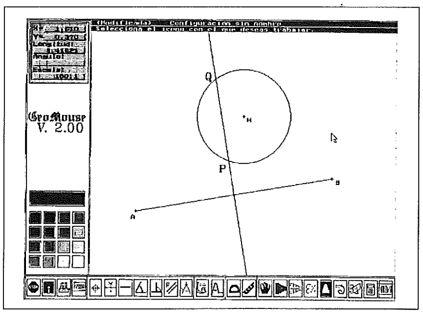


Figura 2

La figura 2 resuelve el problema siguiente: «¿Dónde ha de ubicarse un depósito de gas propano si ha de distar 80 m, como mínimo, de un horno de cerámica H y ha de equidistar de dos casas próximas A y B?»

El programa parece también adecuado, además de en Bachillerato, para los dos ciclos de la ESO, sobre todo si las figuras que han de realizar los alumnos no requieren mucha precisión.

F. Javier Santabárbara

SUMA 20
noviembre 1995

VII JAEM, VI Olimpiada Matemática Nacional, IX CIAEM,...

CRÓNICAS

VII JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Los días 14, 15 y 16 de septiembre, y con un programa muy apretado, se han celebrado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid las VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, organizadas en esta edición por la SMPM Emma Castelnuovo.

La *conferencia inaugural* estuvo a cargo precisamente de la ilustre y entrañable profesora italiana que presta su nombre a la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas. En esta conferencia «Las representaciones gráficas en matemáticas: un estudio histórico-crítico», Emma Castelnuovo, con su estilo ameno y didáctico, hizo un recorrido sobre la utilización de los gráficos matemáticos a lo largo de la historia, resaltando el hecho de que su utilización es a la vez un fenómeno antiguo (ya en el neolítico podemos encontrar gráficos con contenidos matemáticos) y a la vez reciente (la utilización sistemática de gráficos matemáticos para presentar información es un fenómeno del siglo XX, encontrando seria resistencia a su uso en los siglos anteriores). Emma nos dejó dos interrogantes que deben ser objeto de una seria reflexión:

- ¿Por qué estos medios visuales tuvieron tantas dificultades para penetrar en la sociedad?
- ¿Quién ha dificultado esta penetración? ¿Sólo unos matemáticos puristas? ¿ No se temería que poniendo al alcance de todos, a través de un medio visual, los hechos sociales más variados, la gente adquiriese la posibilidad de intervenir en problemas de ciencias, de política, de economía...?

En la *conferencia de clausura* el profesor Abraham Arcavi, del Weizmann Institute of Science de Israel, nos planteó la perspectiva de «La educación matemática hacia el año 2000», resaltando el papel de las nuevas tecnologías cognitivas, en especial la informática, y su influencia en los procesos educativos en Matemáticas. Hizo hincapié asímismo en la importancia de la Investigación Cognoscitiva en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, centrándose en cuatro aspectos destacados:

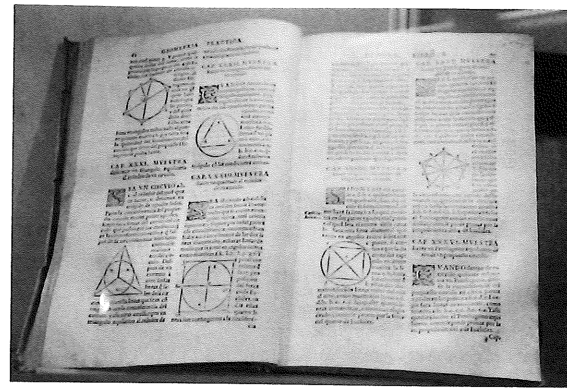
- La naturaleza del proceso de aprendizaje.
- La naturaleza del «error».
- Procesos metacognitivos y creencias.
- La interacción social.

Entre ambas conferencias se desarrolló un amplísimo programa de conferencias, ponencias, mesas redondas, comunicaciones, talleres, presentación de materiales informáticos y audiovisuales y paneles, estructurados en once grupos temáticos más uno especial dedicado a las didácticas específicas de las distintas ramas de las Matemáticas.

GRUPOS TEMÁTICOS

1. Matemáticas de ahora y enseñanza de las matemáticas.
2. Concepciones epistemológicas de las matemáticas y de su enseñanza.
3. Historia de las matemáticas: ¿qué enseñar, qué nos enseña?
4. Lenguaje y matemáticas.
5. Las matemáticas en la educación infantil y primaria
6. Las matemáticas en los nuevos bachilleratos.
7. Tratamiento de la diversidad en el aula de matemáticas.
8. Influencia de las nuevas tecnologías en el currículo y en la intervención educativa.
9. Matemáticas lúdicas en la escuela.
10. Innovación, formación e investigación en didáctica de las matemáticas.
11. Análisis crítico de los últimos 15 años de innovación didáctica en España.

Exposición: Cartografía



Exposición: La educación matemática a través de los libros de texto

EXPOSICIONES

- Fotografía matemática.
- Cartografía.
- La educación matemática a través de los libros de texto.
- Medidas tradicionales y oficios.
- Filatelia matemática.
- Instrumentos de cálculo.

Exposición: Instrumentos de cálculo

Como es imposible resumir en este espacio el contenido de todas las colaboraciones, y cualquier omisión sería lamentable, basta indicar que el número de ponencias, comunicaciones... alcanzó la nada despreciable cifra de 147 y que la media de asistencia a las actividades de los grupos temáticos estuvo alrededor de 50 personas.

Especial mención merecen las actividades de animación matemática, entre las que destacan las seis exposiciones permanentes y las «Rutas Matemáticas por Madrid», que pusieron a numerosos asistentes en el dilema de elegir entre sacrificar alguna ponencia, comunicación o taller de su interés o sacrificar la comida (o sustituirla por un bocata rápido). Cada exposición contaba con una guía didáctica de carácter práctico con modelos de utilización en clase de este tipo de materiales.

Entre los nuevos recursos tecnológicos merecen especial mención las presentaciones del nuevo ordenador de bolsillo TI-92 y sus aplicaciones en el aula a cargo de Bert Waits y el Taller de iniciación al software informático CABRI-GEOMETRE II, a cargo de Bernard Capponi.

Lo más importante de estas jornadas ha sido, sin duda, los asistentes. La respuesta del profesorado de matemáticas de todo el Estado ha sido notable, tanto en asistencia como en participación, a pesar de las dificultades que para muchos profesores y profesoras suponía la celebración de las JAEM en estas fechas de septiembre (comienzo del curso en primaria, claustros en secundaria y EE.MM). En total han asistido 620 personas de las cuales dos tercios eran mujeres.

En la sesión de clausura se convocaron ya las VIII JAEM. La Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas recibió y aceptó el encargo de su organización para 1997, cuya sede será con casi seguridad la ciudad de Salamanca.

Antonio Pérez Sanz.

Comité Organizador de las VII JAEM

VI OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Del día 23 al 29 del pasado mes de junio se celebró la VI Olimpiada Matemática Nacional (OMN), organizada por la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana (SEMCV) *Al Khwarizmi*. En esta ocasión han participado 30 chicos y 16 chicas que representan a los miles de chicos y chicas que han acudido a las diferentes fases que se organizan en 13 comunidades autónomas y en Andorra. A los participantes les acompañaron un total de 18 coordinadores y coordinadoras.

El proyecto originario de esta Olimpiada se empezó a gestar en el transcurso de la IV Olimpiada Nacional y, a lo largo de dos cursos académicos, fue cuajando tras un arduo trabajo preparativo. Se seleccionó la Escuela de Vela de Benicàssim y el Centro Educativo Medio Ambiental (CEMA) como marco de las actividades, que asociados con la frase de Galileo, «el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático», dieron como resultado el lema de la olimpiada: *Naturaleza Matemática*.

En los días que los participantes han estado juntos ha habido tiempo para todo y así, se han realizado cuatro pruebas de entorno matemático, actividades educativo-divulgativas, otras actividades de ocio y turísticas, y claro, algún acto oficial.

Se celebraron las preceptivas pruebas individual, en la que se plantearon cinco problemas, y por parejas, que denominamos «Papiroflexia» ya que en ella se planteaba un problema geométrico que debía ser resuelto mediante el doblado de papel. Además se plantearon dos pruebas adicionales: la primera de ellas por equipos, denominada «Clorofila», en la que se planteó una situación centrada en un problema ecológico, —para el que había que obtener una estimación aritmética orientativa como solución—, y una prueba fotográfica, —también por parejas—, denominada «Lente Matemática». En ella, cada pareja buscó motivos fotográficos con sentido matemático, realizando un total de 12 fotos, de las que posteriormente seleccionaron 4 a las que dieron título para luego ser expuestas. La selección de las fotos ganadoras la realizaron por votación los mismos participantes. Finalmente resultaron elegidas, si no las mejores fotos desde el punto de vista fotográfico, las más simpáticas.

En las pruebas, la organización admitió a un representante de Asturias, que cursando 6.° de EGB hacía una adaptación curricular de matemáticas de 8.°. Posteriormente, tras debate entre los coordinadores, se le declaró participante invitado fuera de concurso ya que no satisfacía las base de la olimpiada que hace referencia a la necesidad de estar matriculado en 8.° de EGB. Se decidió, así mismo, trasladar a la siguiente Junta de la Federación, la necesidad de que los estatutos de la OMN dejen claro este punto para ediciones futuras.

Las actividades educativo-divulgativas realizadas fueron:

- Visita al planetario de Castellón.
- Sesión astronómica en el CEMA.
- Sesión ceramista en el CEMA
- Taller de energías alternativas.
- Taller etnológico y ecológico.

Entre las actividades realizadas cabe destacar la sesión astronómica del CEMA por el interés que suscitó entre los participantes y la gran sorpresa que provocó en el ponente y en los coordinadores. La actividad comenzó alrededor de la medianoche, después de un día de mucho ajetreo por el traslado de sede y la visita con baño al parque de agua «Aqualandia». A la una y cuarto se daba por terminada la ponencia que se había seguido en silencio con mucha atención, y comenzaba la que sería una animada y fluida sesión de preguntas. Aquí fue donde los chicos y chicas dieron la puntilla: el ponente emocionado, ellos más y los coordinadores admirados y derrotados. A las dos y media se terminó porque el ponente cerró el turno de preguntas y comenzó la visita al telescopio con la que acabamos la jornada alrededor de las tres y media.

La Olimpiada Nacional de Matemáticas pretende proporcionar la oportunidad, a un grupo de chicos y chicas, provenientes de todas las partes de nuestro estado, de convivir juntos unos días y conocer algunos lugares de una de nuestras comunidades autónomas. Para ello siempre se han previsto oportunidades para el ocio y el turismo, que en esta ocasión fueron las siguientes:

- Visita a Benicàssim, Desierto de las Palmas, Castellón, Benidorm, Alicante, San Juan y Santa Pola.
- Aunque el tiempo no acompaño como hubiésemos deseado, los participantes pudieron bañarse en la playa de Peñíscola, parque de agua «Aqualandia» de Benidorm y en la playa de Santa Pola.

La organización facilitó a todos, listados con los nombres de los participantes por comunidades, así como la formación de las parejas y equipos desde un principio. Esto provocó una gran movilidad y al cabo de una hora ya se conocían todos los participantes, formando un grupo compacto y dando la impresión de haber sido compañeros toda la vida, dado el grado de interrelación y camaradería visible y que se mantuvo a lo largo de toda la semana.

En el transcurso de la Olimpiada es natural la existencia de actos oficiales con asistencia de autoridades locales y académicas, en las que los participantes ven reconocidos los méritos por los cuales han concurrido al certamen. Desde un principio se tuvo en cuenta que las recepciones se redujeran al mínimo, dada la edad de los participantes. Por ello, en esta VI Olimpiada sólo ha habido dos actos oficiales:

— La cena de bienvenida, ofrecida por el ayuntamiento de Benicàssim, con la asistencia de personalidades y que tuvo lugar en la misma residencia donde nos alojábamos.

— La recepción ofrecida por el ayuntamiento de Alicante, con el acto de entrega de premios y posterior lunch de despedida, que tuvo lugar en el cuartel de Felipe II del castillo de Santa Bárbara de Alicante.

El acto de entrega de premios estuvo presidido por el concejal de cultura del ayuntamiento de Alicante, D. Pedro Romero, acompañado por el presidente de la FESPM, Ricardo Luengo, el presidente de la SEMCV, Luis Puig, el presidente honorario de la asamblea de Castellón de la SEMCV, Jesús Ibáñez, el presidente de la asamblea de Alicante de la SEMCV, Joan Josep Anna, actuando como mantenedor el coordinador nacional de la OMN, José L. García.

El premio más importante que reciben los participantes es la propia asistencia a la OMN y la semana de convivencia en la comunidad anfitriona. Además, como resultado de las actividades realizadas se otorgan unos premios simbólicos a los mejores resolutores de problemas (ver premiados en el cuadro adjunto).

Para la presente edición, el material escogido para la realización del premio ha sido el barro, por su relación indiscutible con el lema de la olimpiada. El encargado de la realización de los trofeos ha sido el profesor y ceramista Emili Boix, que realizó unos platos de cerámica rústica de Agost.

Los premiados recibieron a su vez unas calculadora científicas, obsequiadas por *Texas Instruments*. También colaboró *Anaya-Educación* obsequiando a todos los participantes con un libro de divulgación de matemáticas y con el premio al participante más joven.

Por último, lo único que cabe decir es que, a pesar del cansancio, las negativas, las promesas incumplidas, las soledades, son la alegría, el interés y entusiasmo vistos en la convivencia con estos chicos y chicas las que hacen gratificante el esfuerzo que todos los implicados realizamos para sacar la olimpiada adelante.

José Luis García Valls
Coordinador de la VI OMN

PREMIADOS

VI OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Prueba individual

1.º) Ramón José Aliaga Varea
Valencia

2.º) Carlos Domingo Más
Valencia

3.º) Mario Ramírez Ferrero
Castilla-León

Prueba por parejas

1.º) Adrián Milés Rosario López
Galicia
Anna Moreno Montero
Cataluña

2.º) Sergio Romeu Torres
Galicia
M.ª Eugenia González Vara
Canarias

3.º) Mario Ramírez Ferrero
Castilla-León
Rafael Montero Meléndez
Andalucía

Prueba por equipos

1.º) Andrés Leo Fernández
Madrid
Rebeca Fernández Álvarez
Cataluña
M.ª Luisa Alava Aguerri
Navarra

2.º) Ramón J. Aliaga Varea
Valencia
Rafael Montero Meléndez
Andalucía
Sara Prieto Honorato
Extremadura
José Luis Gómez Giner
Murcia

Lente matemática

1.º) Eduardo de Orduña Salazar
Extremadura
Marcos Ororbia Tejero
Navarra

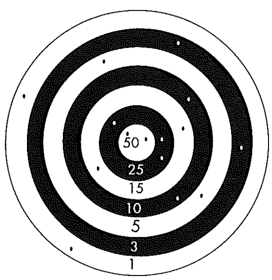
2.º) Igor Cebrián Muiño
Aragón
Miguel Ángel Luengo Oroz
Asturias

Mención especial

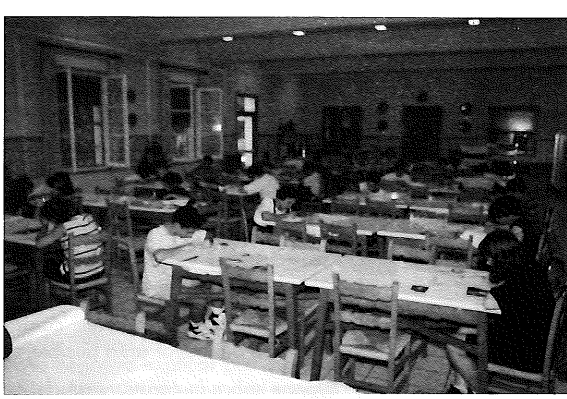
Alberto Suárez Real
Asturias

PRUEBA INDIVIDUAL

Los tres arqueros
Tres arqueros han realizado, cada uno, 5 disparos contra la diana: en ella se han indicado los puntos de impacto. En el centro sólo han atinado dos veces. ¿Qué puntuación ha obtenido cada arquero, teniendo en cuenta que al final han empatado y cuál puede haber sido la secuencia de puntos de los cinco disparos de cada uno?



La reina cautiva
Una reina cautiva, con su hijo y su hija, fueron encerrados en lo alto de una torre. En la parte exterior de la ventana había una polea de la que pendía una soga con una canasta atada en cada extremo; ambas canastas de igual peso. Los cautivos lograron escapar sanos y salvos usando una pesa que había en la habitación. Habría sido peligroso para cualquiera de los tres descender pesando más de 15 kg que el contenido de la canasta inferior, porque habría bajado demasiado rápido; y se las ingeniaron para no pesar tampoco menos de esa diferencia de 15 kg. La canasta que bajaba hacía subir naturalmente a la otra.
¿Cómo lo consiguieron?
La reina pesaba 75 kg, la hija 45, el hijo 30 y la pesa 15 kg.



Prueba individual

El campo triangular
Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos son iguales a 529, 256 y 81 Ha. ¿Cuál es la superficie del campo triangular?

Los siete sultanes
Siete sultanes tienen en total 2.879 mujeres. No hay dos con la misma cantidad. Si dividimos la cantidad de mujeres de uno cualquiera de esos harenes por la cantidad de mujeres de cualquier otro harén menor, el resultado es siempre un número entero.
Dime, infiel, cuántas mujeres hay en cada uno de los harenes.

El premio
Un preparador decide dar un premio cada día al grupo de muchachos o muchachas cuyas edades sumaran más.
El primer día sólo asistieron un chico y una chica, como la edad del chico duplicaba a la de la chica, el premio fue para él.
Al día siguiente, la chica llevó a su hermana. Se descubrió que la edad de ambas era doble de la del chico, con lo que las jóvenes ganaron el premio.
Al tercer día un hermano del joven le acompañó, resultando que la suma de las edades de ellos duplicaba esta vez a la de las jóvenes. Aquel día ganaron ellos el premio.
El cuarto día las jóvenes acudieron acompañadas por su hermana mayor que había cumplido 21 años el día anterior. En esta ocasión las edades de las tres duplicaba la edad de los dos hermanos. La pugna entre unos y otras continuó pero no es necesario que el problema vaya a más. Deseamos saber la edad de aquel primer joven.

PRUEBA POR EQUIPOS
LA PRODUCTIVIDAD DEL LIMONERO

1. Preliminares
Consideraremos a los árboles como una fábrica que, a partir de materias primas (agua, minerales y CO_2) y energía solar, producen materia orgánica mediante un proceso que genera residuos que se reciclan al cien por cien en el mismo lugar que se producen.
Estudiaremos y analizaremos la productividad del limonero *(citrus limonum)*: árbol de 3 a 6 m de altura, formado por ramas irregulares, copa abierta y hojas coriáceas y perennes, dentadas y puntiagudas.

2. Elementos y conceptos
La *clorofila* se encuentra principalmente en la parte superior de las hojas. Por cada gramo de clorofila se producen alrededor de 175 gramos de carbono (C) por año. cada gramo de carbono equivale a 2,6 veces más de materia orgánica seca. 425 mg de clorofila se obtienen por cada m^2 de hojas de limonero.
La *capacidad productora* del limonero (o de un árbol, en general) está relacionada con la superficie de las hojas que contienen clorofila, sin contar la clorofila de los tallos verdes que puede despreciarse.
Las hojas se disponen para absorber luz directa o reflejada de forma que la estructura (tronco, ramas...) necesaria sea la óptima para realizar las funciones de sostén y de transporte. Una indicación de esta disposición es la relación entre la superficie del conjunto de las hojas y su proyección sobre el suelo. Esta relación se denomina *índice foliar* (IF).

El IF indica el número de hojas que se superponen desde la copa hasta el suelo en promedio.

3. Datos que hay que determinar en el limonero asignado

a) Índice foliar.
b) Cantidad de clorofila anual.
c) Producción de carbono anual.
d) Producción de materia orgánica seca por año.

4. Instrucciones para los participantes

I. Se dispondrá por equipo del siguiente material:

- Un cordel.
- Papel milimetrado (varias hojas).
- Papel normal.
- Lápices y gomas de borrar.
- Cinta métrica.

II. Se procederá del siguiente modo anotando cuantas explicaciones se consideren necesarias:

1. *Estimación del número de hojas.* Elegimos una rama de tamaño medio, contamos el número de ramas de segundo orden en que se divide; elegimos otra de tamaño medio y volvemos a contar el número de ramas de 3.er orden,... Finalmente, contamos el número de hojas de la rama del último orden que consideremos, y lo multiplicamos por el número de ramas de cada orden para conocer de forma aproximada el número de hojas del árbol.

2. *Determinación de la superficie de una hoja mediana.* Dibujamos el contorno de varias hojas sobre papel milimetrado y estimamos la superficie media.

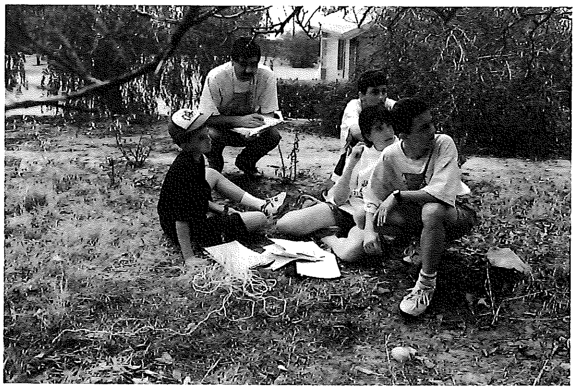
3. *Cálculo de la proyección del árbol sobre el suelo.* Seguimos el contorno de la proyección del árbol e intentamos adaptarlo a la forma de una circunferencia para estimar su área.

4. *Cálculo del índice foliar,*

5. *Cálculo de la producción del árbol.* Utilizando los datos calculados se pide obtener las cantidades de clorofila, carbono y producción de materia orgánica seca anualmente.

Se hará constar con claridad los resultados y la forma de obtener los mismos del apartado II.

NOTA: Se recomienda leer con cuidado todo el protocolo.



Prueba por equipos

5. Instrucciones complementarias para los observadores

a) Se prestará atención al modo de proceder para estimar el número de hojas del árbol, y a la forma de medir la superficie de cada hoja.

b) Análogamente, se prestará atención al modo de obtener el contorno de la proyección del árbol y al cálculo de su superficie.

c) Se observará con cuidado el modo de trabajar en equipo y de organizarse para conseguir datos fiables. Se indicará si el peso del trabajo recae en todos los componentes del equipo o sólo en algunos.

Se añadirá cuanto se considere oportuno.

d) No se podrá mantener ningún diálogo con el equipo observado. Las respuestas a las posibles preguntas las dará el coordinador de la actividad.

e) La duración de la prueba será de 1h 30m.

PRUEBA POR PAREJAS
PAPIROFLEXIA

Instrucciones para los participantes

Material: Hojas de papel DIN-A4 (cuantas se deseen). Tijeras. Enunciados y guión de los distintos informes que se cumplimentarán con bolígrafo. Un sobre tamaño folio.

Procedimiento: En la construcción de las figuras pedidas sólo se podrá trabajar con las manos, plegando las hojas o cortándolas con las tijeras. No se tomarán medidas. Caso de necesitar comprobar si dos longitudes o amplitudes son iguales, o caso de requerirse el transporte de distancias, se recurrirá a superposiciones o dobleces.

Documentación que hay que entregar: En el sobre que se facilita con el material se introducirán las figuras construidas y el informe de construcción de cada una.

Puntuación: Primer enunciado, hasta 8 puntos; segundo y tercero, hasta 8 puntos, distribuidos así: construcción de la figura y apartado C del informe, 1 punto, resto de apartados 2 puntos cada uno.

Duración: 1 hora y 30 m.

Enunciado 1

A partir de una hoja de tamaño DIN-A4, mediante plegados y cortes, constrúyase *el cuadrado* de mayor área posible.

Informe sobre la construcción del cuadrado
Responde a cada uno de los siguientes apartados:

1A) Planteamiento: ¿Qué ideas han llevado a la solución?
1B) Método: Explicar el orden en que se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.
1C) Justificación: ¿Por qué no puede haber un cuadrado de mayor área?

Enunciado 2
A partir de una hoja de tamaño DIN-A4, mediante plegados y cortes, constrúyase *el triángulo equilátero* de mayor área que quepa dentro del cuadrado construido en 1).

Informe sobre la construcción del triángulo equilátero
Responde a cada uno de los siguientes apartados:
2A) Planteamiento: ¿Qué ideas han llevado a la solución?
2B) Método: Explicar en qué orden se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.
2C) Justificación: ¿Por qué no puede haber un triángulo equilátero de mayor área dentro del cuadrado?
2D) Ampliación: Si no se hubiera exigido que el triángulo cupiera dentro del cuadrado sino que se hubiera dejado utilizar toda la hoja de papel, ¿existiría un triángulo equilátero de mayor área?
En caso negativo explicar por qué no.
En caso afirmativo dibujar cuál y explicar por qué el área sería mayor que la del triángulo construido.

Enunciado 3
A partir de una hoja de tamaño DIN-A4, mediante plegados y cortes, constrúyase *el octógono regular* de mayor área que quepa dentro del cuadrado construido en 1).

Informe sobre la construcción del octógono regular
Responde a cada uno de los siguientes apartados:
3A) Planteamiento: ¿Qué ideas han llevado a la solución?
3B) Método: Explicar en qué orden se han efectuado los dobleces y los cortes para la construcción de la figura.
3C) Justificación: ¿Por qué no puede haber un octógono regular de mayor área dentro del cuadrado?
3D) Ampliación: Si no se hubiera exigido que el octógono cupiera dentro del cuadrado sino que se hubiera dejado utilizar toda la hoja de papel, ¿existiría un octógono regular de mayor área?
En caso negativo explicar por qué no.
En caso afirmativo dibujar cuál y explicar por qué el área sería mayor que la del octógono construido.

IX Conferencia Interamericana de Educación Matemática (IX CIAEM)

Entre los días 30 de julio y 4 de agosto de 1995 se celebró en Santiago de Chile la IX Conferencia Interamericana de Educación Matemática. La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas estuvo representada por Gonzalo Sánchez Vázquez y Luis Balbuena Castellano a propuesta de la Junta de Gobierno.

A este evento asistieron 550 profesores de los siguientes países: Chile, Argentina, Uruguay, Paraguay, Bolivia, Brasil, Perú, Venezuela, Colombia, Costa Rica, México, Estados Unidos, Canadá y España. Se celebraron seis conferencias plenarias, ocho no plenarias, cuatro paneles, doce grupos de trabajo y discusión, presentándose, además, unas 150 comunicaciones cortas. También se expusieron posters y material bibliográfico, entre otro material didáctico.

En el acto de clausura, cuya conferencia plenaria estuvo a cargo de Miguel de Guzmán, se realizó la presentación del ICME-8. Se distribuyeron cuatrocientos ejemplares del primer anuncio, interviniendo en el acto Miguel de Guzmán para explicar los aspectos científicos del programa, Luis Balbuena expuso los objetivos de la Federación Española y Gonzalo Sánchez dio a conocer los datos sobre la organización.

Se realizó una reunión de responsables de sociedades de profesores a la que acudieron México, Chile, Venezuela, Argentina, Bolivia, Perú, Brasil y España.

Se tomaron los siguientes acuerdos:

1. Elaborar un boletín informativo que difunda entre la comunidad iberoamericana noticias en torno a encuentros, publicaciones, revistas, cursos de doctorado, master, tesis sobre educación matemática, etc. Se encargan de coordinarlo Brasil y Paraguay.
2. Iniciar un proceso de convergencia entre las sociedades presentes y otras a las que se invite, para lograr crear una Federación Iberoamericana que se constituya el año 2000. La comisión de trabajo estará formada por Venezuela, México y España.
3. Propiciar el intercambio de publicaciones y otras informaciones que mantengan viva la colaboración y el apoyo mutuo.

Se celebró también una reunión de la Comisión Iberoamericana Coordinadora del CIBEM. Se acordó celebrar el III CIBEM en Caracas –Venezuela– a principios de agosto de 1998. El coordinador será Cipriano Cruz y se espera publicar el primer anuncio durante el ICME-8 de Sevilla, que se celebrará en el mes de julio de 1995.

Por lo que se refiere a la Conferencia cabe destacar:

La conferencia plenaria de Claude Gaulín en la que expuso las conclusiones extraídas de una encuesta realizada a especialistas en didáctica de la geometría de prestigio internacional. Indicó que aún está por hacer la publicación que haga una síntesis del tema a nivel internacional. Hay algunos intentos pero son parciales e incompletos (Handbook, Colette Laborde, etc.). Resumió las opiniones vertidas por los especialistas, concluyendo en las siguientes reflexiones y orientaciones:

- Estudio del software y su importancia para enseñar geometría.
- ¿Qué hacer con el caos, los fractales...?
- Para los ciclos 10-15 años: ¿geometría experimental o abstracta?, ¿cómo enseñar geometría a través de la resolución de problemas?, etc.
- Se hace necesario contar con una buena síntesis internacional sobre los temas e investigaciones relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El profesor Ubiratan D'Ambrosio en su conferencia plenaria llamó la atención sobre la necesidad de adaptar la matemática y la educación matemática a unos tiempos nuevos siempre cambiantes. Se vive desde hace años un proceso globalizador sin precedente que ha modificado ideas tales como la propiedad, la comunicación, el trabajo, los transportes, etc. A la educación *acrítica* debe suceder una educación *crítica* y en esto, apunta, tenemos gran responsabilidad los profesores de matemáticas que no debemos limitarnos a transmitir conocimientos al margen de los muchos problemas y acontecimientos que ocurren en el mundo.

La Federación española posee un ejemplar del resumen de las comunicaciones cortas. Son 156 páginas (la mitad al hacer fotocopias) que pueden ser solicitadas a la Secretaría General de la Federación (Apartado de Correos 329. 38201 La Laguna –Tenerife–).

Gonzalo Sánchez

Luis Balbuena

Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

CONSTITUCIÓN DEL GRUPO DE TRABAJO «MATEMÁTICA RECREATIVA»

Durante la celebración de las 7.as Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Madrid, septiembre de 1995) un grupo de participantes a las mismas constituyeron el grupo de trabajo «Matemática recreativa» cuyo principal objetivo es intercambiar información y ofrecer al profesorado materiales que le sirvan de ayuda en sus clases de matemáticas.

Los participantes constituyentes del grupo son: David Barba Uriach, Fernando Corbalán Yuste, Jordi Deulofeu Piquet, Luis Ferrero de Pablo, Julio Ferro Marra, Elvira Figueras Latorre, Manuel García Déniz, Juan Emilio García Jiménez, Rafael Losada Liste, Antonio R. Martín Adrián, Manuel Pazos Crespo, Pascual Pérez Cuenca y Luis Segarra Neira.

En la primera y única reunión mantenida se tomaron los siguientes acuerdos:

- El intercambio de experiencias y materiales se hará mediante publicaciones periódicas, a ser posible, a través de la revista Suma. Una primera publicación, con carácter experimental, estará formada por una serie de actividades recreativas presentadas por los participantes.
- El grupo tiene carácter abierto a todos aquellos compañeros y compañeras que deseen participar en él.
- Se nombra coordinador del grupo a Manuel Pazos (Coque) y se constituye una comisión permanente de coordinación de actividades formada por Juan Emilio García, Luis Ferrero y Manuel Pazos.

Los profesores y profesoras interesados en participar en el grupo pueden ponerse en contacto con el coordinador del mismo: Manuel Pazos, en el CEFOCOP de A Coruña. Teléfono: (981)290688. Fax: (981)290157.

Luis Ferrero

ICME-8
20 PME

El ICME-8 y los profesores españoles

La celebración del Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8) en Sevilla el próximo mes de julio, proporciona una oportunidad única al profesorado español. Al celebrarse por primera vez en España este acontecimiento y ser el español idioma oficial, es más fácil la asistencia masiva y la participación de los profesores de nuestro país en un congreso que, cada cuatro años, orienta la investigación y la práctica de la enseñanza de las matemáticas en todo el mundo. Pero, además, puede y debe servir para impulsar con fuerza el mejoramiento en España de la preparación y puesta al día del profesorado y de la didáctica de esta materia.

Varios cauces han sido abiertos por la FESPM, que convocó el congreso por designación de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática, y por la SAEM Thales, que lo organiza. Y esos cauces son, tanto de tipo económico, como de participación activa en las tareas del congreso.

Las facilidades económicas ofrecidas a todos los socios de la Federación comenzaron por la posibilidad de inscribirse con un coste de sólo un 70% de la tarifa general. Este plazo preferente terminó el 30 de septiembre del año actual, y a él se han acogido más de 500 profesores españoles y portugueses. Estos últimos, de acuerdo con el convenio firmado entre la FESPM y la Associaçao Portuguesa de Profesores de Matemáticas, que concede iguales facilidades a los socios correspondientes para participar en las actividades o adquirir sus publicaciones.

Sigue abierta la inscripción, según los plazos y tarifas señalados en el «Segundo anuncio», que se publicará a fines de octubre (donde también se expone detallada-

CONVOCATORIAS

mente el programa científico, las fechas límites para devoluciones, alojamiento, envío de comunicaciones breves, exposiciones y proyectos, y solicitudes para bolsas de ayuda). Este segundo anuncio será enviado sólo a los profesores inscritos, a las sociedades federadas, a las instituciones académicas y administrativas, y a aquellos socios de la Federación que lo soliciten expresamente.

Siguiendo con las facilidades materiales, la organización ha elaborado, de acuerdo con la agencia oficial del congreso, una amplia oferta de alojamiento formada por residencias universitarias y los principales hoteles de la ciudad. Especialmente debe señalarse el hecho de que las residencias dispondrán de unas 1.700 plazas, asignadas por riguroso orden de petición, y a precios asequibles a los profesores, tanto españoles como extranjeros, y donde podrán alojarse también los estudiantes universitarios de matemáticas y de su didactica, que colaborarán con la organización.

En este aspecto económico, finalmente, se destaca también la concesión de bolsas de ayuda, a las que se destinará un 10% de los ingresos por inscripciones. Compatible con este fondo, pero independientemente, la Federación y la SAEM Thales sufragarán la inscripción de 75 profesores y profesoras de América Latina, cuyos países atraviesan una profunda crisis, por lo que su presencia, que el ICME-8 estima muy importante, queda en parte garantizada.

Pero, sobre todo, la Federación y la SAEM Thales quieren hacer hincapié en la participación activa de los profesores españoles en el desarrollo del ICME-8. Por ello, todas las sociedades federadas, sin excepción, han aportado nombres de profesores para el programa científico, bien como conferenciantes regulares (son siete de los sesenta en total), bien como coordinadores locales o como ponentes de los 52 grupos de trabajo o temáticos, bien como coordinadores de las actividades nacionales propuestas por la propia Federación.

Hace falta que los profesores españoles se vuelquen en estas tareas, poniéndose en contacto con los coordinadores. En el caso de las «Actividades nacionales», vale la pena mencionar algunas en las que esta colaboración resulta indispensable: «Medidas tradicionales en España», «Material didáctico del profesorado en sus aulas», «Fotografía y Matemática», y el «Panorama cultural e histórico», en que cada sociedad podrá exponer una visión de su comunidad.

Especialmente, la participación activa del profesorado español debe notarse, en cantidad y calidad, en la presentación de «Comunicaciones Breves», que consisten en exposiciones de cuestiones relacionadas con los «Grupos de Trabajo» o «Grupos Temáticos», en un horario que se detallará en el programa definitivo del congreso, ajustándose dicha presentación al formulario y a las condiciones que se señalan en el Segundo Anuncio.

Resumiendo, el ICME-8 representa un desafío transcendental para la comunidad matemática de investigadores y profesores españoles, que deben sentirse no sólo invitados sino protagonistas de un congreso, que debe marcar las líneas de la educación matemática de cara al siglo XXI.

Gonzalo Sánchez Vázquez
Presidente del Comite Nacional

ICME 8

SEVILLA, 1 996

8.° Congreso Internacional de Educación Matemática

El próximo mes de julio tendrá lugar en Sevilla, el 8.° Congreso Internacional de Educación Matemática. El ICME-8 pretende continuar el objetivo de los ICME anteriores: impulsar el desarrollo de la educación matemática, tanto en la investigación como en el mejoramiento de su aprendizaje y de su enseñanza. Se propone también extender solidariamente sus actividades para que participen profesores del mayor número posible de países, contribuyendo así a la realización de una de las metas señaladas para la celebración del Año Matemático Mundial en el 2000, bajo los auspicios de la Unión Matemática Internacional.

ICME-8 contendrá un extenso y rico programa científico en el que las claves de los temas de Educación Matemática serán tratadas con una amplia gama de actividades dentro de un contexto internacional. El español e inglés serán las lenguas oficiales del Congreso.

En el n.° 19 de Suma ya se presentó una detallada información de los distintos tipos de actividades que incluye el programa ya a él nos remitimos para saber el alcance de cada una de ellas. Sin embargo, en estos momentos es posible precisar más el contenido de alguna de ellas. Así pues incluimos gran parte de los títulos de las conferencias y nombres de los conferenciantes (cuadro 1). También se dan, cuando es posible, los nombres de responsable, ponentes y coordinador local (ver cuadros 2 y 3) de los Grupos de Trabajo (WG) y Grupos Temáticos (TG).

Algunos países con representación en el ICMI presentarán, en sesiones de una hora, los principales aspectos de la educación matemática en cada uno de ellos.

España, como país anfitrión, hará una presentación especial, coordinada por el Profesor Modesto Sierra y organizará una mesa redonda sobre Matemáticos españoles en el siglo XX, coordinada por el Profesor Alberto Aizpún.

Comunicaciones breves

La intención de la organización del ICME-8 es facilitar la participación activa del mayor número de profesores y profesoras. Por ello, siguiendo la tradición de los ICME, anuncia la posibilidad de presentaciones en el Congreso mediante Comunicaciones Breves.

Por Comunicación Breve se entiende cualquier exposición de temas relacionada con los WG o TG, presentada mediante carteles, vídeos o programas informáticos. Para la exposición de tales comunicaciones se detallará un horario concreto en el programa del Congreso, debiendo los autores permanecer en el lugar y horario fijados por la organización para dialogar con los interesados en su comunicación.

Los interesados en presentar una Comunicación Breve deberán:

a) Cumplimentar el formulario correspondiente incluido en el segundo anuncio, indicando expresamente el WG o TG al que mejor se ajuste la comunicación presentada. En el caso de una comunicación mediante vídeo o programa informático deberá describirse el producto a presentar y especificarse con cierto detalle las características del material requerido. La organización no garantiza, de antemano, que los materiales y sistemas requeridos por los autores o autoras, para la presentación mediante vídeo o programa informático, puedan ser facilitados.

b) Presentar un resumen de la comunicación.

La propuesta de Comunicación Breve deberá ser remitida a:

Profesor *Ricardo Luengo González*
Comunicaciones Breves ICME-8
Facultad de Educación. Universidad de Extremadura.
Avenida de Elvas, s/n
06070-Badajoz. España

La aceptación o rechazo de las propuestas presentadas se comunicará antes del 15 de marzo de 1996.

Dentro de las actividades permanentes, que incluyen exposiciones y talleres, de las que ya se dio noticia en nuestro anterior número, cabe resaltar la presentación de Proyectos. Por tales serán considerados aquellos trabajos desarrollados durante varios años por un equipo preferiblemente de carácter internacional y que sea de un interés claro para la comunidad educativa. Las propuestas de presentaciones de Proyectos deben ser remitidas antes del 15 de febrero a:

Profesor *Luis Rico Romero*
Proyectos ICME-8
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Facultad de Educación. Universidad de Granada
Campus Cartuja.
18071-Granada. España.
E-mail: lrico@goliat.ugr.es

La propuesta consistirá en una descripción concreta del proyecto a presentar, materiales a exhibir y necesidades técnicas y de espacio requeridas. La aceptación o rechazo de la propuesta será comunicada en el mes de febrero.

Bolsas de ayuda

Es deseo de la organización del ICME-8 que todo profesor o profesora de matemáticas que quiera presentar algún trabajo pueda acudir al congreso. Por ello, aparte de otras posibles ayudas que puedan obtenerse, la Organización Local destinara el 10% de sus ingresos por inscripciones a becas que permitan financiar en parte la asistencia de profesores y profesoras que de otra manera, no podrían participar.

A) REQUISITOS. Quien considere que debe y puede acogerse a estas ayudas deberá dirigir una carta a la organización del Congreso:

Comité Local de Organización ICME-8
SAEM Thales. Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla.
Apartado 1160
41080-Sevilla. España

En dicha carta deberá hacer constar:

1) Datos personales y profesionales.
2) Descripción de su participación en el ICME-8.
3) Difusión que puede realizar, en su entorno, de las actividades del Congreso.
4) Ayudas financieras que espera obtener por otras vías.
5) Necesidades personales, aportando los datos necesarios que permitan juzgar dichas necesidades.

Se sugiere, además, que el/la solicitante aporte una *carta de recomendación* de una persona conocida en el terreno de la educación matemática, preferiblemente del país de origen del solicitante.

B) CRITERIOS. La Organización Local nombrará un Comité de Becas secreto y soberano en sus decisiones. Dicho Comité tendrá en cuenta los siguientes criterios de carácter general: 1) La ayuda económica será siempre parcial, salvo en casos muy excepcionales. En dicha ayuda se contemplará inscripción y/o alojamiento y/o desplazamiento. 2) Interés de la contribución que el solicitante piensa presentar al Congreso. 3) Número de participantes del país (o región) de origen del solicitante (el Comité Local de Organización pretende que en el Congreso estén presentes el mayor número de países para conseguir una máxima difusión y repercusión de sus actividades y conclusiones). Sólo se aceptarán las solicitudes que estén en poder de la Organización Local antes del 15 de febrero de 1996.

Becas de inscripción para profesores iberoamericanos

Compatible con las becas anteriores, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y la SAEM Thales han dispuesto, de sus finanzas particulares, la creación de un fondo de ayuda para sufragar la inscripción de 75 profesores y profesoras de América Latina, a cuyo fin se nombrará un subcomité de selección. Los requisitos y criterios son los señalados en el apartado anterior, por lo que no es necesaria una petición independiente.

Inscripciones

La Organización Local del ICME-8 prevé dos tipos de inscripciones: la de los participantes y la de los acompañantes. Las personas inscritas como participantes tendrán derecho a participar en todas las actividades del Congreso tanto científica como sociales y culturales y recibirán gratis una copia de las Actas. Las personas inscritas como acompañantes podrán tomar parte en los actos sociales y culturales pero su inscripción no les dará derecho a participar en el programa científico ni a recibir las Actas.

Cuotas de inscripción

	Hasta 31 enero 1996	Hasta 31 mayo 1996	Después 31 mayo 1996
Congresistas	44.000 pts.	50.000 pts.	58.000 pts.
Acompañantes	14.000 pts	16.000 pts	19.000 pts

Alojamiento

La Agencia oficial del congreso, VIAJES BOREAL ha elaborado una amplia oferta de alojamientos formada por residencias universitarias y los principales hoteles de la ciudad.

Todas las peticiones de reserva recibidas antes del 15 de junio de 1996, recibirán confirmación postal desde la Agencia Oficial, indicando el nombre del alojamiento asignado, precio y cualquier otra información que pueda ser de su interés. Para las peticiones de alojamiento recibidas con posterioridad a esta fecha, la confirmación del alojamiento reservado se comunicara solo vía fax o E-mail; cuando la Secretaria Técnica no disponga de esta información, se comunicará, el alojamiento reservado, a la llegada de los participantes en cualquiera de los puntos de Información de los que dispondrá ICME 8.

Todos los participantes alojados a través de la oferta oficial ICME-8 obtienen de manera gratuita su traslado diario a la Sede del Congreso y regreso a su alojamiento.

Para obtener información adicional más detallada sobre inscripciones, el tipo de alojamiento, precios, etc., contactar con la Secretaria Técnica y Agencia Oficial:

Secretaría Técnica ICME-8
Apartado 4172
41080 Sevilla. España
fax: (95)4218334

Viajes BOREAL
Dpto. Congresos
Federico Sánchez Bedoya, 7-2º B
41001 Sevilla. España.
teléfonos: (95)4218984/4218985
fax: (95)4218334

CUADRO 1: Conferencias

SESIONES PLENARIAS

Durante el ICME-8 tendrán lugar las siguientes sesiones plenarias:

- Conferencias Plenarias.
  Los conferenciantes invitados son:
  Miguel de Guzmán, (España): *Sobre el papel del Matemático en Educación Matemática.*
  Paolo Freire, (Brasil): *Aspectos socio-filosóficos de la Educación Matemática.*
  Anna Sierpinska, (Canadá): *¿A dónde va la Educación Matemática?*
  David Tall, (Reino Unido): *Tecnología Informática y Educación Matemática: Entusiasmo, Posibilidades y Realidades.*
- Mesa Redonda Internacional.
  Estará dedicada a: *Los profesores de matemáticas como forjadores de decisiones: cambios y desafíos.*
  Moderador: Alan Bishop (Australia). Participantes: Gail Burrill (USA). Ruhama Even (Israel). Francisco Hernán (España). Maria Salett (Brasil). Tang Ruifen (China).

CONFERENCIAS ORDINARIAS

Durante el Congreso tendrán lugar sesenta Conferencias Regulares sobre los diversos aspectos de la educación matemática. Los siguientes conferenciantes han confirmado su participación y el titulo de su charla:

- Abrantes, Paulo (Portugal): *El trabajo de proyecto como un componente del curriculum de Matemáticas.*
- Arboleda, Luis Carlos (Colombia): *Las concepciones de Maurice Frèchet sobre Matemáticas y Experiencia.*
- Artigue, Michèle (Francia): *Procesos de enseñanza-aprendizaje en análisis elemental.*
- Balbuena, Luis (España): *Innovación en Educación Matemática.*
- Bartolini-Bussi, Maria G. (Italia): *Instrumentos de dibujo: aspectos históricos y didácticos.*
- Bender. Peter (Alemania): *Imágenes y Formas Básicas de Comprensión do Conceptos Matemáticos en todos los Niveles.*
- Brousseau, Guy (Francia): *Las Condiciones de Desequilibrio del Sistema Didáctico.*
- Campbell, Patricia F. (USA): *La transformación de la Educación Matemática en todos los Niveles Educativos: El Uso de la Investigación en la Práctica Escolar Efectiva.*
- Cooney, Thomas J. (USA): *Conceptualización del desarrollo profesional del profesorado.*
- Dalmasso, Juan Carlos (Argentina): *Olimpiada Matemática Argentina: pasado, presente y futuro.*
- D'Ambrosio, Ubiratan (Brasil): *Etnomatemáticas: ¿de dónde viene y a dónde va?*
- Dinh Tri, Nguyen (Vietnam): *Algunos aspectos del currículum matemático universitario para ingenieros.*
- Doerfler,Willibald (Austria): *Los medios del significado.*
- Doudy, Adrien (Francia): *Visualización y razonamiento en espacios paramétricos.*
- Ernest, Paul (Reino Unido): *El constructivismo social como una filosofía de las matemáticas.*
- Fortuny, Josep Mª (España): *Rango de capacidades. La enseñanza y evaluación del conocimiento geométrico en un contexto de entorno.*
- Fujita, Hiroshi (Japón): *Luces y sombras del curriculum japonés en las matemáticas de secundaria.*
- Galbraith, Peter (Australia): *Aspectos de la evaluación: la historia interminable.*
- Gerdes, Paulus (Mozambique): *Cultura y educación matemática en Africa (del sur).*
- Gjone, Gunnar (Noruega): *Un nuevo papel para los documentos curriculares: ¿desde la inspiración hacia los planes de producción?*
- Gu, Lingyuan (China): *Un experimento en Qingpu. Un informe de la reforma educativa en matemáticas del estándar contemporáneo en China.*
- Hart, Kath (Reino Unido): *¿Qué responsabilidades tienen los investigadores para con los profesores de matemáticas y los alumnos?*
- Howson, Geoffrey (Reino Unido): *Matemáticas y sentido común.*
- Keitel, Christine (Alemania): *Ansiedad al enseñar matemáticas: un círculo de aversión a las matemáticas con alumnos y profesores.*
- Kieran, Carolyn (Canadá): *La cara cambiante del álgebra escolar.*
- Kirchgraber, Urs (Suiza): *Algunos aspectos de la enseñanza de las matemáticas en secundaria en Suiza.*
- Krainer, Konrad (Austria): *Algunas consideraciones sobre los problemas y perspectivas de la formación permanente del profesorado.*
- Lange, Jan de (Holanda): *Problemas reales con matemáticas del mundo real.*
- Leder, Gilah (Australia): La educación matemática y aspectos de género.
- Luelmo, Mª Jesús (España): *Género y matemáticas: un punto de vista español.*
- Moore, David S. (USA): *Nueva pedagogía y nuevo contenido el caso de la Estadística.*
- Nesher, Pearla (Israel): *Problemas estereotipo de enunciado en la escuela y la naturaleza abierta de las aplicaciones.*
- Oteiza, Fidel (Cuba): *Matemáticas en contexto: un enfoque integrado para el desarrollo del curriculum.*
- Papastavridis, Stavros G. (Grecia): *Evaluación de la efectividad de las aplicaciones didácticas en matemáticas.*
- Pérez Fernández, Javier (España): *Los manipuladores simbólicos en la enseñanza de las Matemáticas.*
- Puig, Luis (España): *Lo que he aprendido sobre resolución de problemas a partir de la historia y la investigación.*
- Qiu, Zonghu (China): *Competiciones matemáticas en China. Éxitos y deficiencias.*
- Rico, Luis (España): *Programas de investigación doctorales y académicos en Educación Matemática en las Universidades españolas.*
- Schmidt, Siegbert (Alemania): *Estructuras semánticas de los problemas de enunciado.*
- Schupp, Hans (Alemania): *Regeometrización de la geometría en la escuela. ¿Con ordenadores?*
- Sfard, Anna (Israel): *Sobre metáforas y modelos para el cambio conceptual en matemáticas*
- Straesser. Rudolf (Alemania): *Las matemáticas en el trabajo. Una perspectiva didáctica.*
- Streefland, Leen (Holanda): *Aprendizaje histórico para futura enseñanza, o volviendo la esfera del revés. Sin arrugas.*
- Szendrei, Julianna (Hungría): *El papel de la lengua materna en el aprendizaje de las matemáticas.*
- Thompson, Alba (USA): *Orientaciones conceptuales y de cálculo en la enseñanza de las matemáticas.*
- Vergnaud, Gérard (Francia): *Cambios cognitivos importantes en el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva de desarrollo.*
- Vicente, José Luis (España): *Geometría y Cálculo Simbólico.*
- Viggiani-Bicudo, Maria Aparecida (Brasil): *Filosofía de la Educación Matemática: un enfoque fenomenológico.*
- Wang, Changpei (China): *Educación matemática. Un punto de vista oriental.*

Los siguientes profesores participarán también como conferenciantes:

Borwein, Jonathan (Canadá).	Cobb, Paul (USA)
Doudy, Adrien (Francia).	Garfunkel, Sol (USA).
Gaulin, Claude (Canadá).	Janvier, Bernadette (Canadá).
Lesh, Richard (USA).	Meyer, Ives (Francia).
Osta, Iman (Líbano).	Skovsmose, Ole (Dinamarca).
Vasco, Carlos (Colombia).	Volmink, John (Sudáfrica).

CUADRO 2: Grupos de Trabajo

Durante el Congreso, 26 Grupos de Trabajo discutirán temas claves en educación matemática. Cada grupo se reunirá cuatro veces, en sesiones de noventa minutos. Cada congresista se adscribirá a un Grupo de Trabajo. Para ello, deberá solicitar, en su inscripción, dos grupos por orden de prioridad.

WG1. *Comunicación en clase.*
RESPONSABLE (R): Hermann Maier (Alemania). PONENTES, (P): Susan Pirie (Canadá), Heinz Steinbring (Alemania). Tom Kieren (Canadá) COORDINADORA LOCAL (CL): M. Victoria Sánchez (España).

WG2. *Formas del conocimiento matemático.*
R: Dina Tirosh (Israel). P: Tom Kieren (Canadá), Lena Lindenskov (Dinamarca). CL: Javier Brihuega (España).

WG3. *Actitudes y motivación del alumnado.*
R: Nobuniko Nohda (Japón) (Por confirmar). P: Douglas Mcleod (USA). CL: Manuel Torralbo (España).

WG4. *Dificultades del alumnado en el aprendizaje de las matemáticas.*
R: Ivan Jezik (Austria) (Por confirmar). P: Luciano Meira (Brasil), J. M. Alvarez Falcón (España). C: José A. Rupérez (España).

WG5. *Enseñar en clases con habilidades diversas.*
R: Liora Linchevski (Israel). P: Margaret Cozzens (USA), ZmiraMevarech (Israel), Nada Stehlikova (Rep. Checa). CL: Francisco Esteban (España).

WG6. *Género y matemáticas.*
R: Barbro Grevholm (Suecia). P: Jeff Evans (Reino Unido), Roberta Mura (Canadá), Fidela Velázquez (España). CL: Mª Eugenia Jiménez (España).

WG7. *Matemáticas para alumnos con talento.*
R: Vladimir Burjan (Eslovaquia). P: Fou Lai Lin (China-Taiwan), John Webb (Sudáfrica). CL: Diego Alonso Cánovas (España).

WG8. *Matemáticas para alumnos con necesidades especiales.*
R: Jens Holger Lorenz (Alemania). P: Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Francia), Nuria Rosich (España), Olof Magne (Suecia). CL: Luis Mª Casas García (España).

WG9. *Innovación en evaluación.*
R: Antoine Bodin (Francia). P: Kenneth Travers (USA), Bengt Johansson (Suecia), Nitsa Movshovitz-Hadar (Israel), Vicente Riviere (España). CL: Adela Jaime (España).

WG10. *Lenguajes y matemáticas.*
R: María A. Ortiz (España). (Por confirmar). P: Ferdinando Arzarello (Italia), Joop van Dormolen (Israel), David Kirshner (USA). CL: Alicia Bruno (España).

WGll. *Revisión del curriculum partiendo de cero.*
R: Anthony Ralston (USA). P: Hugh Burkhardt (Reino Unido), Nerida Ellerton (Australia), Susan Groves (Australia), R. Hedren (Suecia). CL: Salvador Guerrero (España).

WG12. *Cambios curriculares en la enseñanza primaria.*
R: Mary Lindquist (USA). P: María Canals (España), Michala Kaslova (Rep. Checa), Hans Nygaard Jensen (Dinamarca). CL: Carmen Burgués (España).

WG13. *Cambios curriculares en la enseñanza secundaria.*
R: Martin Kindt (Holanda). P: Abraham Arcavi (Israel), Margaret Brown (Reino Unido), Eizo Nagasaki (Japón), F. Villarroya (España). CL: Francisco García (España).

WG14. *Relaciones de las matemáticas con otras materias escolares.*
R: Fred Goffree (Holanda). P: Rolf Biehler (Alemania), Mario Carretero (España), Kurt Kreith (USA), Howard Tanner (Reino Unido). CL: Mariano Domínguez (España).

WG15. *El impacto de la tecnología en el curriculum de matemáticas.*
R: Michal Yerushalmy (Israel). P: David Chazan (USA), Al Cuoco (USA), Koeno Gravemeijer (Holanda), John Monaghan (Reino Unido). CL: Jacinto Quevedo (España).

WG16. *El papel de la tecnología en la clase de matemáticas.*
R: Marcello Borba (Brasil). P: Manuel Armas (España), Jim Fey (USA), Maria Mascharello (Italia). CL: Miguel de la Fuente (España).

WG17. *Matemáticas instrumentales en el nivel universitario.*
R: Eric Muller (Canadá). P: F.Alvarez (Colombia) (Por confirmar), Fred Simons (Holanda). CL: Ceferino Ruiz (España).

WG18. *Formación matemática para adultos.*
R: Gail Fizsimons (Australia). P: Diana Cohen (USA). CL: Antonio Renguiano (España).

WG19. *Formación inicial y permanente del profesorado.*
R: Marjorie Carss (Australia). P: Barbara Jaworski (Reino Unido), Milan Koman (Rep. Checa). CL: José Ramón Pascual (España).

WG20. *Evaluación de la enseñanza, los medios y los sistemas educativos.* R: David Robitaille (Canadá). P: Hernández-Guarch (España), Norman L. Webb (USA). CL: Antonio Molano (España).

WG21. *La enseñanza de las matemáticas en las diferentes culturas.*
R: Jerry Becker (USA). P: Sunday A. Ajose (USA), Andy Begg (Nueva Zelanda), T. Fujii (Japón), Martha Villavicencio (Perú). CL; Andrés Marcos (España).

WG22. *Matemáticas, educación, sociedad y cultura.*
R: Richard Noss (Reino Unido). P: Cyril Julie (Africa del Sur), Jean M. Kantor (Francia), Catherine Vistro-Yu (Filipinas). C L:José L.Alvarez (España).

WG23. *Cooperación en educación matemática entre paises y regiones.*
R: Bienvenido Nebres (Filipinas). P: Emma García Mora (España), Bernardo Montero (Costa Rica). CL: Mercedes García (España).

WG24. *Criterios de calidad y pertinencia en la investigación en la educación matemática.*
R: Kenneth Ruthven (Reino Unido). P: Robert Davis (USA), Angel Gutiérrez (España). CL: Salvador Llinares (España).

WG25. *La didáctica de la matemática como disciplina científica.*
R: Nicolina Malara (Italia). P: Carmen Azcárate (España), Hans-Georg Steiner (Alemania), Stephen Lerman (Reino Unido). CL: María del Carmen Batanero (España).

WG26. *Conexiones entre investigación y práctica en educación matemática.*
R: Beatriz D'Ambrosio (Brasil). P: Luciana Bazzini (Italia), Morten Blomhoj (Dinamarca), Sandy Dawson (Canadá). CL: Lorenzo Blanco (España).

CUADRO 3: Grupos temáticos

Cada Grupo Tematico dispondrá de dos sesiones de noventa minutos. El objetivo de estos grupos es el de presentar la situación actual de los temas respectivos. Cada Congresista se asignará a un Grupo Temático. Para ello, deberá solicitar, en su inscripción, dos Grupos por orden de prioridad.

TG1. *Matemáticas en la enseñanza primaria.*
RESPONSABLE: Regine Douady (Francia). PONENTES:Jost Klep (Holanda), Helen Mansfield (USA). COORDINADOR LOCAL: Francisco T. Sánchez Cobo (España).

TG2. *Matemáticas en la enseñanza secundaria.*
R: Glenda Lappan (USA). P: Dirk Janssens (Bélgica), Hans C. Reichel (Austria). CL: Juan Gallardo (España).

TG3. *Matemáticas en la enseñanza universitaria.*
R: Joel Hillel (Canadá). P: Francine Gransard (Bélgica), Habiba El Bouazzaoui (Marruecos), Lee Peng Yee (Singapur). CL: José Carmona Álvarez (España).

TG4. *Matemáticas en la enseñanza a distancia.*
R: Haruo Murakami (Japón). P: Emilio Bujalance (España), John Mason (Reino Unido). CL: José M. Gairín (España).

TG5. *La enseñanza de las matemáticas para el trabajo.*
R: Annie Bessot (Francia). P: Marilyn Mays (USA), Jim Ridgway (Reino Unido). CL: M. Dolores Eraso (España).

TG6. *La enseñanza de las matemáticas desde un punto de vista constructivista.*
R: Ole Bjoerkqvist (Finlandia). P: Jere Confrey (USA), Tadao Nakahara (Japón). CL: M.V. García Armendáriz (España).

TG7. *Estímulo y desarrollo de la creatividad matemática.*
R: Erkki Pehkonen (Finlandia). P: J .G. Greeno (USA), Yoshihiko Hashimoto (Japón). CL: Lluis Segarra (España).

TG8. *Demostraciones y demostrar: por qué, cuándo y cómo.*
R: Michael de Villiers (Sudáfrica). P: Fulvia Furinghetti (Italia), David Pimm (Reino Unido). CL: Encarnación Castro (España).

TG9. *Estadística y probabilidad en el nivel secundario.*
R: Brian Phillips (Australia). P: Ruma Falk (Israel), Juan A. García-Cruz (España) CL: Eliseo Borrás (España).

TG10. *La resolución de problemas en el curriculum.*
R: Kaye Stacey (Australia). P: Maria L. Callejo (España), Mary Falk (Colombia), Diana Lambdin (USA). CL: José Carrillo (España).

TG11. *El futuro del cálculo infinitesimal.*
R: Ricardo Cantoral (México). P: Peter Bero (Eslovaquia). Paul Zorn (USA). CL: Jordi Deulofeu (España).

TG12. *El futuro de la geometría.*
R: Joe Malkevitch (USA). P: Maria A. Mariotti (Italia), Richard Pallascio (Canadá). CL: Francisco Castro (España).

TG13. *El futuro del álgebra y la aritmética.*
R: Joaquin Gimenez (España). P: Teresa Rojano (México), Barbara Wittington (USA). CL: Bernardo Gómez Alfonso (España).

TG14. *Procesos infinitos en el curriculum.*
R: Bruno D'Amore (Italia). P: Monica Neagoy (USA), Vera W. de Spinadel (Argentina). CL: M. Carmen Penalva (España).

TG15. *Arte y matemáticas.*
R: Dietmar Guderian (Alemania). P: Nat Friedman (USA), Doris Schattschneider (USA). CL: Rafael Pérez-Gómez (España).

TG16. *Historia y enseñanza de la matemática.*
R: Louis Charbonneau (Canadá). P: Evelyne Barbin (Francia), Man Keong Siu (Hong Kong). CL: Santiago Fernández (España).

TG17. *Modelización matemática y aplicaciones.*
R: Joao Pedro da Ponte (Portugal). P: Werner Blum (Alemania), Qi-Xiao Ye (China). CL: Carles Lladó (España).

TG18. *Uso de las calculadoras en clase.*
R: Pedro Gómez (Colombia). P: Néstor Aguilera (Argentina), Bert Waits (USA). CL: Juan R. García-Dozagarat (España).

TG19. *Entornos informáticos de aprendizaje interactivo.*
R: Nicolas Balacheff (Francia). P: James J. Kaput (USA), Tomas Recio (España). CL: Claudio Sánchez (España).

TG20. *La tecnología y la representación visual.*
R: Rosamund Sutherland (Reino Unido). P: Gord Doctorow (Canadá), Joel Schneider (USA). CL: Francisco Martin Casadelrrey (España)

TG21. *Enseñanza de las matemáticas basada en materiales manipulativos.*
R: Ana García Azcárate (España). P: David Fielker (Reino Unido), Marion Walter (USA) (por confirmar). CL: Ladislao Navarro (España).

TG22. *Juegos y rompecabezas matemáticos.*
R: Aviezri Fraenkel (Israel). P: David Singmaster (Reino Unido), Fernando Corbalán (España). CL: Manuel García-Denis (España).

TG23. *Formas futuras de publicaciones en educación matemática.*
R: Don Albers (USA). P: Gerahrd Koenig (Alemania), David L. Rodgers (USA), Sixto Romero (España). CL: Jose Cobos Bueno (España).

TG24. *Competiciones matemáticas.*
R: Patricia Fauring (Argentina). P: Claude Deschamps (Francia). Anton Vrba (Rep. Checa). CL: Pedro J. Martínez (España).

TG25. *Clubes matemáticos.*
R: (Por confirmar). P: Pedro Esteves (Portugal) (por confirmar). CL: José Macías Marín (España)

TG26. *Investigaciones internacionales comparativas.*
R: Gabriele Kaiser (Alemania). P: Jean Paul Ginestier (Canadá), Juan Díaz-Godino (España). Murad Jurdak (Líbano), Eduardo Luna (Rep. Dominicana). CL: Juan Calderón (España).

20ª Conferencia anual del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)

El Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, organiza la 20ª conferencia anual del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20) entre los días 9 y 12 de julio de 1996.

El PME existe desde 1976 en que fue creado en el transcurso del ICME3. Sus principales objetivos son: 1) Promover contactos internacionales e intercambios de información científica sobre Psicología de la Educación Matemática. 2) Promover y estimular investigaciones interdisciplinares en la citada área con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas. 3) Fomentar una profunda y mejor comprensión de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de las implicaciones que de ellas se sigan.

El PME está abierto a toda las personas cuyas investigaciones concuerden con los propósitos del grupo o estén profesionalmente interesados en los resultados de sus investigaciones. Para ser miembro hay que satisfacer una cuota anual (30US$), estando la correspondiente al año 1996 en la cuota de inscripción de la conferencia.

El programa científico de la conferencia incluye las siguientes actividades:

Sesiones plenarias

Representan una variedad de perspectivas relevantes de la comunidad del PME. Consta de:

- Tres conferencias plenarias
- Un panel plenario cuyo título es Matemáticas y lenguaje.

Presentaciones personales:

- Foro de investigación: su objetivo es ofrecer a los miembros del PME presentaciones más elaboradas, reacciones, y discusiones sobre temas en los que han sido emprendidas investigaciones sustanciales y que continúan manteniendo el interés de un amplio subgrupo del PME. Los temas seleccionados para el PME 20 son:
  1. Investigaciones sobre pensamiento numérico no elemental.
  2. Investigación sobre enseñanza y aprendizaje de matemáticas en entornos tecnológicos.
  3. Investigación sobre el profesor de matemáticas: desarrollo, cambio y creencias.
- Informes de investigación: que pueden ser de dos tipos, (A) Informes sobre estudios empíricos o (B) ensayos teóricos.
- Comunicaciones orales cortas.
- Posters: en los que en formato pictórico o gráfico, pueden presentarse informes de investigación, desarrollos de softwares, innovaciones curriculares, programas educativos, etc., relacionados con la Psicología de la Educación Matemática

Actividades de grupo

- Grupos de trabajo: cuyo propósito es permitir un mayor intercambio de información y contacto continuado entre sus miembros que el que podría ser posible de otros modos.
- Grupos de Discusión: que proporcionan un foro en el que los interesados pueden discutir y compartir perspectivas en temas específicos de Psicología de la Educación Matemática. Las propuestas para el foro de investigación deben estar en manos de la organización antes del 30 de noviembre de 1995. Las propuestas para los informes de investigación, antes del 15 de enero de 1995. Para el resto de actividades, la fecha límite es el 1 de marzo de 1996.

La cuota de inscripción a la conferencia es de 36.000 pts por persona. Aquellos que estén interesados en participar en el PME 20 pueden realizar una preinscripción pagando antes del 15 de enero de 1996 un depósito de 15.000 pts., lo que asegurará la recepción del Segundo (y final) Anuncio.

Para obtener información actualizada sobre el PME 20, preferentemente mediante e-mail y fax, es posible dirigirse a:

Ángel Gutiérrez
Universitat de València.
EU de Magisterio.
Dept. de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045
46071 Valencia (Spain)
Tno.: 96-3864486
Fax: 96-3864487
E-Mail: angel.gutierrez@uv.es

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS, o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)

☐ N.^{os} sueltos: ______________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM