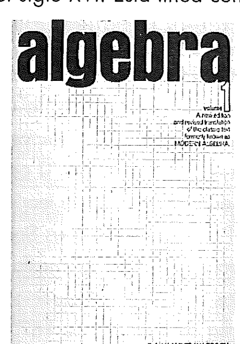
SUMA 20
noviembre 1995

Un libro de álgebra moderna que ha hecho historia

ALGEBRA (Una nueva edición y traducción revisada del texto clásico antiguamente llamado MODERN ALGEBRA)
B. L. Van der Waerden
Traducción del alemán al inglés de Fred Blum y John R. Schulenberger.
(El primer tomo es traducción de la séptima edición alemana de 1966 y el segundo de 1967 la quinta publicado por Springer Verlag).
Editorial Frederick Ungar Publishing Co.
New York, 1970, 2 vols.

La obra del holandés B. L. van der Waerden *Modern Algebra* marcó, en el momento de su primera edición alemana de 1930, un punto de inflexión en la exposición del álgebra. Hasta ese momento, los grandes libros de texto de álgebra se movían dentro de las coordenadas marcadas por los algebristas italianos del siglo XVI. Esta línea consideraba que el objetivo fundamental del álgebra era el manejo y la fundamentación del cálculo literal y la resolución de las ecuaciones algebraicas y la realización de un estudio pormenorizado de sus soluciones El estudio sistemático de la resolución de ecuaciones algebraicas culminó, desde el punto de vista de la investigación, con las aportaciones de Galois (1811-1832), pero las ideas de Galois tardaron cerca de tres siglos en gestarse y casi medio en ser apreciadas y difundidas por la comunidad científica.



Cuando se echa un mirada somera a la historia del álgebra desde el siglo XVI al siglo XIX se puede apreciar que el objetivo fundamental del álgebra era la resolución de ecuaciones de grado superior con la esperanza de obtener unas fórmulas análogas a las que habían obtenido Tartaglia, Cardano (1502-1576) y Del Ferro (1465-1526) para la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado que permitieran resolver las ecuaciones de quinto grado, sexto... Esto es, la línea de investigación central consistía en la búsqueda de una fórmula que permitiera expresar las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual que cinco mediante radicales. Es en esta dirección en la que realizaron importantísimas aportaciones autores como Lagrange (1736-1813), Ruffini (1765-1822) o Gauss (1777-1855). Pero la aportación más importante la realizó Abel que demostró la imposibilidad de obtener una fórmula con radicales que permitiera resolver las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro.

RECENSIONES

La demostración de Abel (1802-1829) de que no se podía obtener una fórmula mediante radicales que permitiera resolver todas las ecuaciones de quinto grado, ni para las de sexto, ni séptimo cerró una línea de trabajo, peor por eso no se dejó de investigar, aunque las pesquisas siguieron otra dirección. Partiendo de que era posible la resolución de algunas ecuaciones particulares se planteó la pregunta de cuáles debían ser las condiciones que debía cumplir una ecuación algebraica para poder ser resuelta mediante el uso de radicales. Naturalmente, como se podían resolver mediante el uso de radicales ecuaciones algebraicas hasta grado cuarto, podrían resolverse mediante radicales aquellas ecuaciones, no importa de qué grado, que, mediante modificaciones o sustituciones, se transformaran en ecuaciones de grado cuatro o menor.

La dificultad de determinar por simple observación qué ecuaciones admitían tales transformaciones que las convertían en una ecuación resoluble por radicales y cuáles no tenían esa propiedad era enorme, por no decir imposible, pero todavía ofrecía mayor dificultad establecer cuáles eran las ecuaciones para las que no existían tales transformaciones y que, por lo tanto, no serían resolubles por radicales.

Galois emprendió la investigación de cómo debían presentarse los coeficientes de una ecuación algebraica para que ésta pudiera resolverse por reducción. Para llegar a fijar la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica fuera resoluble por radicales se valió de unos nuevos conceptos que aplicó al estudio de las ecuaciones, a saber, el concepto de grupo y el concepto de irreducibilidad de un polinomio dentro de un cuerpo. Con los descubrimientos de Galois el álgebra se abrió hacia unos nuevos horizontes. A partir de él trabajar en álgebra no iba a ser solamente el estudio de ecuaciones algebraicas, sino el estudio de las herramientas que permitieran decidir si dichas ecuaciones podían o no ser resueltas por radicales. De este modo, los conceptos abstractos de grupo y de cuerpo estaban llamados a transformarse en el meollo de los estudios algebraicos.

Pero el protagonismo de los conceptos de cuerpo y grupo en el panorama del álgebra no iba a alcanzarse de inmediato. La obra de Galois era densa y no fue comprendida por sus contemporáneos, de hecho, no fue dada a conocer su obra hasta 1870 con la obra de Camille Jordan (1838-1921) en que se aplicó la teoría de grupos a las ecuaciones algebraicas. Por su parte, Mathius Sophus Lie (1842-1899) creó la teoría de grupos continuos de transformaciones y lo aplicó a la resolución de las ecuaciones diferenciales y Félix Klein (1849-1925) en su *Programa de Erlangen* de 1872 sistematizó toda la geometría a partir de la teoría de grupos.

A partir de este momento la teoría de grupos y la de cuerpos comenzó a tener en álgebra la misma consideración que la teoría de ecuaciones algebraicas por parte de un buen sector de los matemáticos. Si el álgebra hubiera reducido su ámbito de influencia al estudio exclusivo de las ecuaciones algebraicas, tras las aportaciones de Galois se habría encontrado en una vía muerta y es la nueva metodología aportada por Galois y sus seguidores la que proporciona un nuevo filón al álgebra. Esta nueva álgebra se denominó durante muchos años álgebra moderna y en su implantación en el mundo científico tuvo una importancia vital el *Algebra* de Van der Waerden, publicada en 1930.

B. L. Van der Waerden afirma en la introducción de su *Algebra Modern* que el álgebra abstracta (formal o axiomática) ha sido como una ráfaga de aire fresco que ha soplado sobre el álgebra, dando lugar a nuevas formulaciones de las ideas del álgebra clásica, produciendo reformulaciones y profundas investigaciones en teoría de grupos, teoría de campos, teoría de ideales y de números hipercomplejos.

El *Algebra Modern* de B. L. de Van der Waerden tiene el mérito de ser el primer libro de texto que trató de un modo sistemático y coherente la mayor parte de los tópicos del álgebra moderna. El objetivo del libro es introducir al lector en todos lo temas del álgebra, por ese motivo se destacan en primer plano conceptos y métodos y muchos resultados particulares que caen dentro del álgebra clásica son propuestos como ejercicios.

Reconoce y aprecia trabajos anteriores sobre teoría de grupos como el de A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, publicada en Berlín en 1927, en teoría de cuerpos *Höhere Algebra I, II and Aufgabensammlung zur Hölerem Algebra* de H. Hasse, publicada entre 1926-27, para álgebra clásica la obra de O. Perron, *Algebra I, II* de 1927 y para álgebra lineal el Dickson, L. E. *Modern Algebraic Theories*, publicada en Chicago en 1926. En estas obras se basa Van der Waerden para hacer una introducción breve y completa a estas materias en los tres primeros capítulos del tomo primero.

No obstante, el autor reconoce en la introducción como fuente fundamental de inspiración de este libro los cursos que siguió en Alemania entre los años 1924 y 1926 que fueron las lecciones que recibió de Emil Artin en Hamburgo en el verano de 1926, un seminario sobre *Teoría de Ideales* dirigido por E. Artin, W. Blaschke, O. Schreier y el propio B. L. Van der Waerden en Hamburgo en el invierno de 1926-27, los cursos de Emmy Noether (1882-1935) sobre *Teoría de Grupos y Números Hipercomplejos* en Gotinga en los inviernos de 1924-25 y 1927-1928.

De este modo B. L. Van de Waerden estudió matemáticas en las universidades de Amsterdam, Gotinga y Hamburgo. Cuando llegó a Gotinga estaba interesado por el álgebra y la geometría algebraica, en la rama conocida como álgebra moderna. Los autores alemanes habían obtenido importantes resultados en esta materia, pero los fundamentos no estaban claros. El álgebra que aprendió en Alemania con Artin y Noether proporcionaron a B. L. Van de Waerden las herramientas necesarias para elaborar un libro con sólidos fundamentos lógicos para el estudio del álgebra y la geometría algebraica.

B. L. Van de Waerden estudió el álgebra abstracta de su tiempo en los lugares en los que los más significativos matemáticos de la época la estaban produciendo y elaboró una obra que ponía en común a las producciones de las distintas escuelas. En su obra quedaron firmemente asentados los fundamentos del álgebra de las estructuras y su aplicación a la geometría, a las funciones algebraicas, al álgebra topológica y a un variado repertorio de temas que se recogen en el siguiente

Índice de la obra

TOMO I

CAPÍTULO I.- NÚMEROS Y CONJUNTOS: Conjuntos. Aplicaciones. Cardinalidad. El número natural. Conjuntos finitos y numerables. Particiones.

CAPÍTULO II.- GRUPOS: El concepto de grupo. Subgrupos. Complejos. Clases. Isomorfismos y automorfismos. Homomorfismos, subgrupos normales y grupo cociente.

CAPÍTULO III.- ANILLOS Y CUERPOS: Anillos. Homomorfismos e isomorfismos. El concepto de cuerpo de cocientes. Anillo de polinomios. Ideales. El anillo de las clases de residuos. Divisibilidad. Ideales primos. Anillos euclidianos y anillos de ideales principales. Factorización.

CAPITULO IV.- ESPACIO VECTORIAL Y ESPACIO TENSORIAL: Espacio vectorial. Invarianza dimensional. El espacio vectorial dual. Ecuaciones vectoriales sobre un SKEW cuerpo. Transformaciones lineales. Tensores. Formas multilineales antisimétricas y determinantes. Producto tensorial. Contracción y traza.

CAPÍTULO V.- POLINOMIOS: Diferenciación. Los ceros de un polinomio. Fórmulas de interpolación. Factorización. Criterios de irreducibilidad. Factorización en un número finito de pasos. Funciones simétricas. resultante de dos polinomios. La resultante como función simétrica de las raíces. Descomposición en fracciones simples.

CAPÍTULO VI.- TEORÍA DE CAMPOS: Subcuerpos. Cuerpos primos. Adjunción. Extensión simple de un cuerpo. Extensión finita de un cuerpo. Extensiones algebraicas de un cuerpo. Raíces de la unidad. Campos de Galois (cuerpos finitos conmutativos). Extensiones separables e inseparables. Cuerpos perfectos e imperfectos. Simplicidad de extensiones algebraicas. Teorema del elemento primitivo.

CAPÍTULO VII.- CONTINUACIÓN DE LA TEORÍA DE GRUPOS. Grupos con operadores. El operador isomorfismo y el operador isomorfismo. Las dos leyes de isomorfismo. Series normales y series composición. Grupos de orden P^n. Producto directo. Carácter de G. Simplicidad del grupo alternado. Transitividad y primitividad.

CAPÍTULO VIII.- TEORÍA DE GALOIS: El grupo de Galois. El teorema fundamental de la teoría de Galois. Grupos conjugados, cuerpos conjugados y elementos. Cuerpos ciclotómicos. Cuerpos cíclicos y ecuaciones puras. Solución de ecuaciones mediante radicales. Ecuación general de grado n. Ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Construcciones con regla y compás. Cálculo del grupo de Galois. Ecuaciones con un grupo simétrico. Bases normales.

CAPÍTULO IX.- ORDENACIÓN Y BUENA ORDENACIÓN DE CONJUNTOS: Conjuntos ordenados. El axioma de elección y el lema de Zorn. El teorema de la buena ordenación. Inducción transfinita.

CAPÍTULO X.- EXTENSIONES INFINITAS DE CUERPOS: Cuerpos algebraicamente cerrados. Extensiones simples trascendentes. Dependencia e independencia algebraica. El grado de transcendencia. Diferenciación de funciones algebraicas.

CAPÍTULO XI.- CAMPOS REALES: Cuerpos ordenados. Definición de número real. Ceros de funciones reales. El cuerpo de los números complejos. Teoría algebraica de los cuerpos reales. Teorema de existencia para campos reales formales. Sumas de cuadrados.

TOMO II

CAPÍTULO XII.- ÁLGEBRA LINEAL: Módulos sobre un anillo. Módulos sobre anillos euclidianos. Divisores elementales. Teorema fundamental de los grupos abelianos. Representaciones y representaciones modulares. Formas normales de un matriz en un cuerpo conmutativo. Divisores elementales y funciones características. Formas cuadráticas y hermitianas. Formas bilineales antisimétricas.

CAPÍTULO XIII.- ÁLGEBRAS: Sumas directas e intersecciones. Ejemplos de álgebras. Productos y productos cruzados. Las álgebras como grupos con operadores. Módulos y representaciones. Radicales. Producto Star ($a*b = a+b-ab$). Anillos con condición minimal. Descomposiciones laterales y centrales. Anillos simples y primitivos. El anillo de endomorfismos de una suma directa. Teoremas de estructura para anillos semisimples y simples. El comportamiento de las álgebras bajo la extensión del cuerpo base.

CAPÍTULO XIV.- TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN DE GRUPOS Y ÁLGEBRAS: Exposición del problema. Representación de álgebras. representación del centro. Trazas y caracteres. Representaciones de grupos finitos. Carácter de un grupo. La representación de los grupos simétricos. Semigrupos de transformaciones lineales. Dobles módulos y producto de álgebras. Campo de descomposición de un álgebra simple. El grupo de Bauer. Sistemas multiplicativos.

CAPÍTULO XV.- TEORÍA GENERAL DE IDEALES Y ANILLOS CONMUTATIVOS: Anillos noetherianos. Producto y cociente de ideales. Ideales primos y primarios. El teorema general de descomposición. El primer teorema de unicidad. Componentes aisladas y potencias simbólicas. Teoría de ideales relativamente primos. Ideales simples-primos. Anillos cociente. Intersección de todas las potencias de un ideal. La longitud de un ideal primario. Cadenas de ideales primario en un anillo noetheriano.

CAPÍTULO XVI.- TEORÍA DE IDEALES DE POLINOMIOS: Variedades algebraicas. El campo universal. Ceros de un ideal primo. La dimensión. El teorema de los ceros de Hilbert. Sistemas resultantes para ecuaciones homogéneas. Ideales primarios. Teorema de Noether. Reducción de ideales multidimensionales a ideales cero dimensionales.

CAPÍTULO XVII.- ELEMENTOS ALGEBRAICOS ENTEROS: R-módulos finitos. Elementos enteros sobre un anillo. Los elementos enteros de un cuerpo. Fundamento axiomático de la teoría clásica de ideales. Inversión y extensión de los resultados. Ideales fraccionarios.Teoría de ideales de un dominio entero arbitrario íntegramente cerrado.

CAPÍTULO XVIII.- CAMPOS CON VALORACIONES: Valoraciones. Extensiones completas. Valoraciones del campo de los números racionales. Valoraciones de campos extensión algebraica: caso completo. Valoraciones de campos extensión algebraica: caso general. Valoraciones de campos de números algebraicos. Valoración de un campo de funciones racionales. Teoremas de aproximación.

CAPÍTULO XIX.- FUNCIONES ALGEBRAICAS DE UNA VARIABLE: Desarrollo en serie en la variable uniformizada. Divisores y múltiplos. La clase g. Vectores y covectores. Diferenciales. El teorema de los índices especiales. El teorema de Riemann-Roch. Generación separable de campos de funciones. Diferenciales e integrales en el caso clásico. Prueba del teorema de los residuos.

CAPÍTULO XX.- ÁLGEBRA TOPOLÓGICA: El concepto de espacio topológico. Base de entornos. Continuidad. Límites. Axiomas de separación y numerabilidad. Grupos topológicos. Entornos de la unidad. Subgrupos y grupo cociente. T-anillos. T-cuerpos. Compleción de un grupo por sucesiones fundamentales. Filtros. Compleción de un grupo mediante filtros de Cauchy. Espacios vectoriales topológicos. Compleción de anillos. Compleción de cuerpos.

Estos son los índices de la séptima edición alemana del tomo primero y la quinta del segundo de las que se hizo la traducción inglesa. Pero la obra sufrió profundas modificaciones en las sucesivas ediciones alemanas.

Así, enumerando algunas variaciones de las diferentes ediciones del tomo primero se pueden destacar una serie de variaciones significativas tales como las siguientes. En la segunda edición la teoría de la valoración se amplió y en la tercera edición del tomo primero en 1950 se le concedió mayor importancia a la teoría de números y a la geometría algebraica. Igualmente en la tercera se le dedicó un capítulo aparte a la teoría de la valoración en el que se trataba este tema de un modo más amplio y con mayor claridad y se volvió a incluir una sección sobre el buen orden y la inducción transfinita, que fue eliminada en la segunda edición. Esta sección se emplea para fundamentar la teoría de campos de Steinitz de forma general. En la cuarta edición de 1955, siguiendo la sugerencia del algebrista Brandt le cambió el nombre a la obra de *Modern Algebra* a *Algebra*.

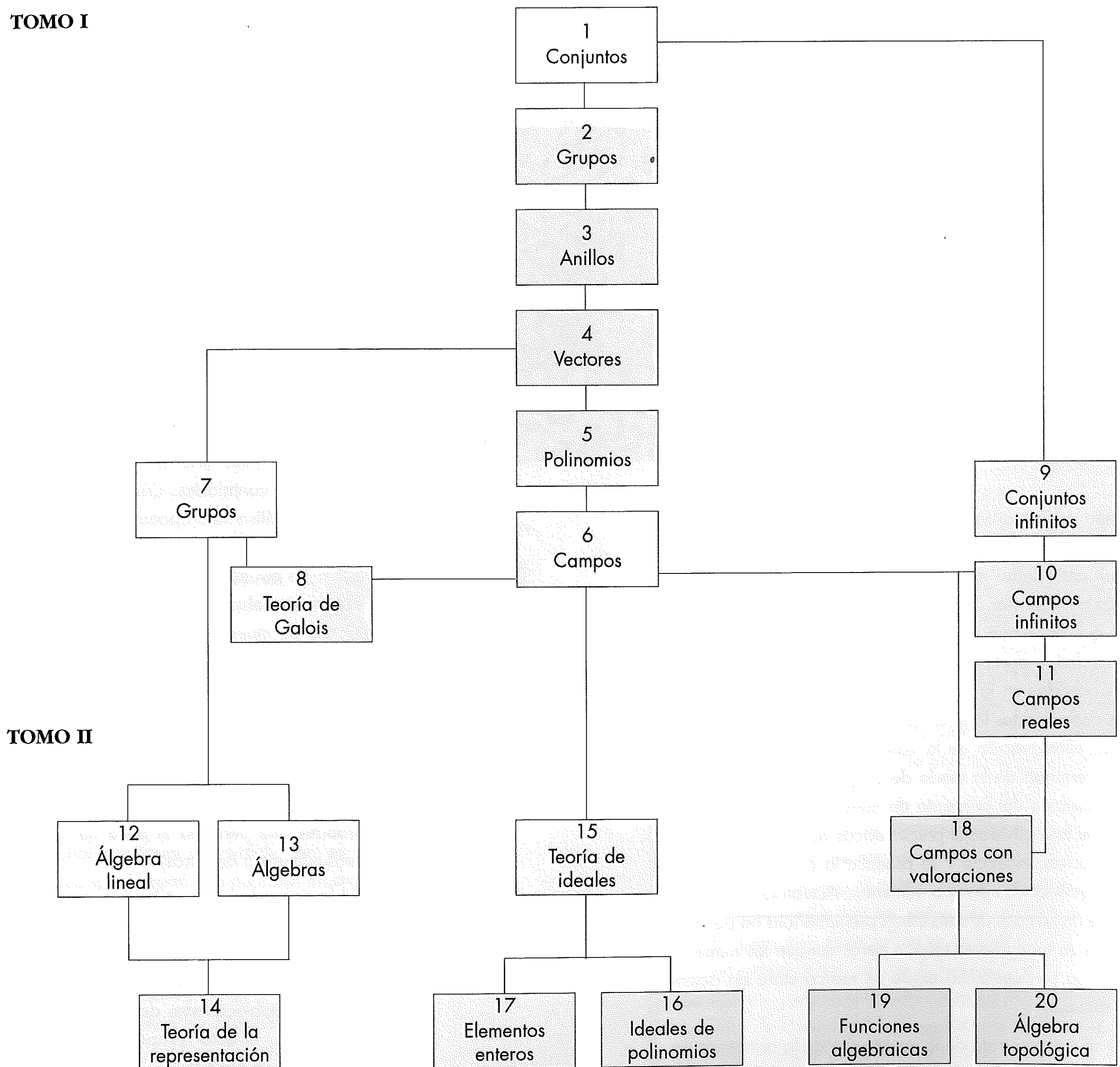
En la séptima edición de 1966 del tomo primero manifiesta B.L.Van der Waerden que en la primera edición de 1930 pretendía una introducción de los aspectos más novedosos del álgebra moderna es por lo que parte del álgebra clásica y, en particular, la teoría de determinantes eran supuestos conocidos. En 1966 el libro era usado de modo general por los estudiantes como una primera introducción al álgebra, esta circunstancia motivó que en la séptima edición se incluyera un capítulo sobre espacios vectoriales y tensoriales en el que se exponen las principales ideas del álgebra lineal y, en particular, la teoría de determinantes. En esta edición el tema primero de números y conjuntos se hizo más corto, tratándose la ordenación y la buena ordenación en el capítulo noveno, el lema de Zorn se dedujo a partir del axioma de elección y el teorema de la buena ordenación lo dedujo utilizando el mismo método, siguiendo a H. Kneser. En la teoría de Galois reconoce haber adoptado ciertas ideas del libro de Artin.

Al tomo segundo le añadió en la cuarta edición de 1959 dos nuevos capítulos. El primero sobre funciones de una variable que llega hasta el teorema de Riemann-Roch para campos arbitrarios de constantes y el segundo sobre álgebra topológica, estrechamente relacionados con la compleción de grupos topológicos, anillos y cuerpos. En la misma edición la teoría de ideales fue ampliada con los resultados de Krull sobre potencias simbólicas de ideales primos y cadenas de ideales. En el capítulo sobre álgebras se dan muchos ejemplos y en la teoría del radical manifiesta haber seguido a Jacobson sin imponer las más delicadas condiciones y las ideas de

Emmy Noether sobre suma directa e intersecciones las enfatiza en esta edición consiguiendo, combinando los métodos de Jacobson y Noether, simplificar muchas demostraciones. En la quinta edición alemana de 1967 del tomo segundo, siguiendo con la necesidad impuesta de que el libro era seguido como libro de texto coloca el álgebra lineal al principio dejando el libro reducido a los tres grandes bloques temáticos fundamentales siguientes:

- Capítulos 12-14: Álgebra Lineal, Algebras y Teoría de la Representación,
- Capítulos 13-17: Teoría de Ideales.
- Capítulos 18-22: Campos con Valoraciones, Funciones Algebraicas y Álgebra topológica.

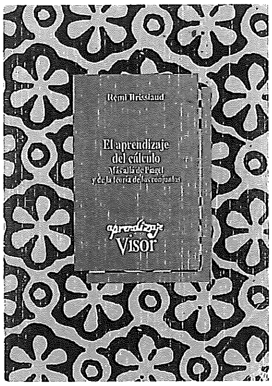
La subdivisión de los distintos temas queda claramente expresado en la siguiente guía esquemática de la obra completa en sus dos volúmenes:



El estudio detallado de las siete ediciones del primer tomo y las cinco del segundo de la obra de B.L.Van der Waerden, con sus adiciones de temas, algunos temas desechados, otros que desaparecen de una edición y aparecen en la otra aportaría mucha luz sobre la historia de la implantación del Álgebra Moderna en el panorama matemático. Además de poder apreciar cómo un libro que inicialmente había sido escrito para los matemáticos con el fin primordial de fundamentar el Álgebra Moderna, liberarla de ciertas incorrecciones y presentar todos los tópicos de la misma de una manera coherente y uniforme se llega a transformar en libro de texto con el que se han formado durante más de treinta años generaciones de matemáticos alemanes.

Víctor Arenzana

EL APRENDIZAJE DEL CALCULO (MÁS ALLÁ DE PIAGET Y DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS)
Remi Brissiaud
Visor, Madrid, 1993
(Traducción de «Comment les enfants apprennent a calculer», Editions Retz, 1989)
ISBN: 84-7774-090-9
233 páginas



La enseñanza del número en la escuela ha sido objeto de grandes controversias. Las viejas preocupaciones de los pedagogos por construir actividades numéricas que desterraran el recuento y la práctica de «calcular con los dedos», consideradas técnicas mecánicas que impedían una buena comprensión del número, fueron sustituidas, a partir de los años setenta, por nuevas preocupaciones basadas en la necesidad de que los niños desarrollasen unas capacidades lógicas generales –inclusión de clases, transitividad, conservación de la cantidad– y se familiarizasen con algunos términos de la teoría de conjuntos como paso previo a la adquisición del concepto de número. Nacen así en la escuela infantil las actividades prenuméricas de ordenación, clasificación y correspondencia y se produce la casi total desaparición de las actividades de tipo numérico. Actualmente, la consideración de dichas actividades como prenuméricas ha perdido gran parte de su fundamento teórico pero, aunque los números han recuperado su puesto, no existe un marco claro de actuación en la escuela.

El libro que nos ocupa trata de la enseñanza de la aritmética en las primeras etapas de la escolaridad (Educación Infantil y primer curso de Primaria) pero, a diferencia de muchos otros libros que tratan este mismo tema, no es un simple resumen de las aportaciones más relevantes de la psicología sobre la adquisición del concepto de número, sino que en él se proponen pautas claras de intervención didáctica en el aula. Además, la fundamentación teórica de estas propuestas didácticas, que se realiza en la parte final del libro, pone de manifiesto que el autor conoce los trabajos más importantes sobre los primeros aprendizajes numéricos y los ha tenido en cuenta a la hora de construir su método. Por todo ello, creemos que este libro puede ser valioso para los maestros de Educación Infantil y primer ciclo de Primaria y también, como libro de texto, para los profesores y alumnos universitarios de didáctica de las matemáticas.

El libro se compone de tres partes. En la primera parte se estudian las dos maneras que, inicialmente, en la historia, han permitido la comunicación de cantidades: las colecciones de objetos en correspondencia biunívoca con la que nos interesa cuantificar (colecciones de muestra) y las palabras-número. Partiendo de la dificultad de los niños pequeños para comprender que la última palabra-número pronunciada en la acción de contar se refiere, no sólo al último objeto señalado, sino también a toda la colección se analizan las ventajas e inconvenientes de recurrir a cada una de estas formas de comunicar cantidades. Como consecuencia de este análisis se propone un método mixto basado, bien en la acción de contar como punto de partida complementado, posteriormente, por el uso de constelaciones (colecciones de muestra con determinadas configuraciones espaciales) para hacer énfasis en el aspecto cardinal, bien en la ausencia inicial de recuentos y la representación de la cantidad mediante configuraciones de dedos para pasar después a utilizar la técnica de contar. Por último, se presentan actividades que permiten el paso de las palabras-número a las cifras.

En la segunda parte se trata el tema de la enseñanza del cálculo. Ante el obstáculo que las prácticas infantiles de «contar todo» o «contar lo que queda» pueden suponer para el establecimiento de buenas técnicas de cálculo, el autor propone de nuevo un método mixto basado, por un lado, en la utilización de colecciones de muestra para que los niños resuelvan los cálculos con números pequeños sin necesidad de contar y, por otro, en la práctica de los recuentos para