

Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa

Bernardo Gómez Alfonso

Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos, se pueden considerar en general y en particular; es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo, esta proposición; la suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que esta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, por que solo se aplica a los números 11, 5 y 55.

Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramos generales, de los cuales el que trata de leyes, es el álgebra, y el que trata de los hechos es la Aritmética. (Vallejo, Introducción al tratado, pie, p. XLIV).

Introducción

Ideas que articulan el presente trabajo

- La aritmética no debe enseñarse como una colección de habilidades independientes, sino como un sistema matemático organizado según principios definidos. Los principios unificadores, las relaciones y el contenido deben estar organizados de manera que el alumno advierta la estructura lógica y coherente del tema (Flournoy, 1969, p. 19).
- El álgebra es una herramienta apta para comprender las generalizaciones, captar conexiones estructurales y argumentar en matemáticas.
- Álgebra y aritmética no son sistemas matemáticos aislados, de hecho el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis.

Una consecuencia lógica que se extrae de estas tres ideas es que la enseñanza de la aritmética y del álgebra debe-

En este trabajo se defiende el interés educativo de los métodos alternativos de cálculo aritmético recogidos por la tradición escrita, como dominio para hacer intervenir el álgebra en su papel de herramienta privilegiada para hacer emerger la estructura formal de la operatoria aritmética.

ría organizarse evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ellos, respetando naturalmente la naturaleza secuencial de ambos sistemas matemáticos. Sin embargo, se ha constatado (Lee y Wheeler, 1989) que existe disociación entre la aritmética y el álgebra que es mayor de la que cabría esperar entre los estudiantes que resuelven con éxito las tareas algebraicas estándar. Esta disociación pone de manifiesto que estos estudiantes no ven la relevancia del álgebra en aquellas situaciones aritméticas que requieren de este otro tipo de razonamiento, como tampoco ven la importancia de usar la aritmética para determinar la verdad o falsedad de una expresión algebraica.

En relación con esta disociación se ha observado en un trabajo reciente (Gómez, 1994) que los estudiantes no sienten la necesidad de expresar sus procedimientos de cálculo mental en el lenguaje horizontal del álgebra, mientras lo pueden hacer con una combinación de lenguajes: aritmético de columnas, retórico de órdenes de unidades y coloquial.

Esto es un indicio de que uno de los problemas que debemos enfrentar los profesores al introducir el lenguaje algebraico es lograr que los estudiantes capten la funcionalidad del sistema de signos del álgebra para las situaciones aritméticas y adviertan relaciones aritméticas en las fórmulas algebraicas.

Para lograr este objetivo parece que no basta con la práctica usual de plantear ejercicios de traducción como una formalización de lo que ya se sabe o resolver ejercicios con expresiones literales como un nuevo tipo de cálculo reglado, porque esto no es suficiente razón para lograr que los estudiantes cambien un lenguaje en el que ya están familiarizados por otro en el que no lo están, sino que sería necesario hacer que el nuevo lenguaje aparezca como una herramienta para obtener nuevas cosas o para estructurar las que ya se conocen.

Pero de esta doble naturaleza del álgebra, operacional y estructural, que se supone que deberían percibir los estudiantes, parece que en la escuela predomina la primera. Mi idea es que es necesario aumentar la percepción de la segunda y que para ello es preciso que los estudiantes y profesores dispongan de dominios valiosos de conocimientos que les permitan trabajar el álgebra en este sentido. Parece obvio que el campo natural para que el álgebra encuentre estos dominios es la aritmética.

El lenguaje algebraico como herramienta para mostrar la estructura interna de los procesos aritméticos

Desde que en el siglo XIX los libros de aritmética asumieron elementos del lenguaje del álgebra, éstos fueron ganando en claridad, brevedad y estructuración. Desde entonces el lenguaje horizontal de igualdades y paréntes-

Uno de los problemas que debemos enfrentar los profesores al introducir el lenguaje algebraico es lograr que los estudiantes capten la funcionalidad del sistema de signos del álgebra para las situaciones aritméticas y adviertan relaciones aritméticas en las fórmulas algebraicas.

sis se utiliza en las secuencias de operaciones combinadas y en la presentación de las propiedades estructurales. Pero ha parecido que por la propia naturaleza reglada de los algoritmos de cálculo este lenguaje no iba con ellos. Bajo esta creencia, a los estudiantes no se les ha dado ocasión para conocer y aprovecharse de las ventajas que éste ofrece para poner de relieve las leyes, propiedades y principios que sustentan los procesos de cálculo aritméticos.

Es cierto que en la edad temprana en la que se enseñan los algoritmos de cálculo a los niños resulta un despropósito acompañarlos de una justificación algebraica, sin embargo en el periodo de la iniciación al álgebra el programa sí que ofrece oportunidades para dar pie a la revisión de las ideas aritméticas bajo este nuevo lenguaje. Pero como esto no se suele hacer, se producen fenómenos de disociación que podrían explicar el que haya estudiantes que, por ejemplo, ignoren que el algoritmo de la multiplicación y la multiplicación algebraica de polinomios es en esencia la misma cosa, que se rigen por las mismas leyes y principios y que un caso sólo es la traducción formal del otro.

Dicho de otra manera, no todos los estudiantes han tenido la oportunidad de analizar juntas las dos parejas de algoritmos siguientes:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 36 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2X + 4 \\ 3X + 6 \\ \hline 2 \cdot 6 \cdot X + 6 \cdot 4 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot X^2 + 3 \cdot 4 \cdot X \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot X^2 + (2 \cdot 6 + 3 \cdot 4) \cdot X + 6 \cdot 4 \end{array}$$

Lo mismo se puede decir del algoritmo de la división numérica y el algoritmo de la división de polinomios. Si el lector está interesado puede preguntarse qué es lo que tienen en común y en qué se diferencian.

$$\begin{array}{r} 624 \mid 23 \quad 6 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 4 \mid 2 \cdot X + 3 \\ - 46 \quad 2 \quad - 4 \cdot X^2 + 6 \cdot X \quad 2 \cdot X \\ \hline 164 \quad \dots \\ \dots \end{array}$$

La aritmética como campo de aplicación y validación de fórmulas algebraicas

Recíprocamente, los estudiantes pocas veces tienen la oportunidad de contemplar desde la aritmética las fórmulas algebraicas que han estudiado, lo que les hace ignorar su aplicabilidad en situaciones numéricas donde son valiosas. En efecto, veamos algunos ejemplos:

La fórmula de la diferencia de cuadrados

$$(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$$

se traduce aritméticamente en un método rápido de cálculo mental para situaciones en que los dos factores tienen el número central o intermedio acabado en cero

$$49 \times 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

La regla es: Para multiplicar dos números como por ejemplo 49×51 se toma el número central, 50, se eleva al cuadrado, 2500 y se le resta el cuadrado de la diferencia entre los dos números dados, 1. Total 2499.

Si el lector está interesado puede practicar mentalmente esta regla con cualquiera de estos números: 39×41 , 38×42 ,... 98×102 , 97×103 ,... 998×1002 ,...

Análogamente las fórmulas del cuadrado del binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

se traducen aritméticamente en dos métodos rápidos de cálculo mental para situaciones en las que se quiera calcular el cuadrado de un número próximo a otro cuyo cuadrado es conocido:

$$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 + 1 = 441$$

$$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 + 1 = 361$$

La regla es: Para hallar el cuadrado de un número, por ejemplo, de dos cifras, se halla el cuadrado del número de la decena inferior más próxima y se le suma el duplo de este mismo número por la cifra de las unidades y al resulta-

do se le suma el cuadrado de la cifra de las unidades. Si el lector está interesado puede probar a enunciar la regla para hallar el cuadrado de un número usando la decena superior más próxima. La práctica mental de esta regla es conveniente con números como. 49^2 , 51^2 , 48^2 , 52^2 ,... 99^2 , 101^2 , 98^2 , 102^2 ,... 999^2 , 1001^2 , 998^2 , 1002^2 ,...

Propuesta experimental

Los ejemplos anteriores abundan en la idea de la existencia de una disociación entre la aritmética y el álgebra en el caso de los métodos de cálculo aritméticos y determinados métodos y fórmulas de cálculo algebraico. Para trabajar en contra de esta disociación se presenta a continuación, como propuesta experimental, un análisis de viejos métodos de cálculo, tomados de las aritméticas antiguas, en el que se utiliza el lenguaje algebraico para mostrar la estructura interna de los mismos. Después se propone el trabajo inverso, a partir de algunas de las fórmulas obtenidas en el desarrollo algebraico se pide que se enuncien las reglas de cálculo aritmético correspondientes. Este trabajo de ida y vuelta resume una experiencia escolar con futuros maestros desarrollada durante varios años en la Escuela de Magisterio de Valencia. Esta experiencia ha puesto de manifiesto que los viejos métodos de cálculo son un dominio de conocimientos valioso, motivador y fructífero para ayudar a los estudiantes a entender la estructura interna de los procesos aritméticos y para familiarizar a los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra.

De las fórmulas a las reglas

Entre el lenguaje algebraico con letras y el lenguaje reglado de los métodos de cálculo, existe un tipo de lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis donde los números vienen dados en forma multiplicativa, también llamada polinómica. En este lenguaje para expresar el producto de 23×45 escribimos:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (2 \times 10 + 3) \times (4 \times 10 + 5) = \\ & = (2 \times 10 + 3) \times 4 \times 10 + (2 \times 10 + 3) \times 5 = \\ & = 2 \times 4 \times 100 + 10(2 \times 5 + 3 \times 4) + 3 \times 5 \end{aligned}$$

Al generalizar esta expresión obtenemos una expresión algebraica

$$\begin{aligned} (2) \quad & (10a + b) \times (10c + d) = \\ & = (10a + b) \times 10c + (10a + b) \times d = \\ & = 100ac + 10(ad + bc) + bd \end{aligned}$$

que suministra una regla práctica, por lo que se puede considerar como una fórmula¹, que es precisamente un viejo método de cálculo usual en las aritméticas hasta el siglo XIX por medio del cual se obtiene el producto final

...los viejos métodos de cálculo son un dominio de conocimientos valioso, motivador y fructífero para ayudar a los estudiantes a entender la estructura interna de los procesos aritméticos y para familiarizar a los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra.

¹ Toda expresión que suministra una regla práctica, se llama fórmula; de manera, que fórmula es una expresión analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operación, o alguna propiedad de una cantidad (Vallejo, *Compendio*, p. 137).

sin escribir los productos parciales intermedios, sólo se escriben los factores y el producto final. Este método era conocido como de «la cruceta», por ejemplo en Treviso (1478), y sobre un ejemplo es como sigue:

(3) Para multiplicar 23×25 , se dice: 5 por 3, 15. Se escribe el 5 y se lleva 1. 5 por 2, 10 y 1 que se lleva 11; 4 por 3 son 12 y 11 son 23. Se escribe el 3 y se llevan 2. 4 por 2 son 8 y 2 que se llevan 10. Se escribe el 10 y resulta 1035

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times \\ 45 \\ \hline 1035 \end{array}$$

Si se comparan las formas (1) y (2) y (3) se advierte que las tres describen el mismo proceso, pero con lenguajes diferentes. La forma (1) es reglada, necesaria para ejecutar la operación. La forma (2) actúa de puente entre la (1) y la (3), necesaria para muchos estudiantes que necesitan moverse en el terreno concreto de los números antes de saltar al más general de las letras. La forma (3) sintetiza el proceso y muestra los principios y leyes que rigen la ejecución. En efecto, se advierte en las formas (2) y (3) que el resultado se ha obtenido aplicando la propiedad distributiva dos veces y después agrupando por factores comunes. Esto, que queda oculto en la forma (1), es precisamente la gran ventaja de este lenguaje, su capacidad para mostrar la estructura interna de la operatoria.

Al mismo tiempo, las formas (2) y (3) también explican con brevedad como ha de procederse, ya que indican que el resultado se obtiene a partir de tres sumandos, uno es el producto de las unidades, otro es la suma de los dos productos de las unidades por las decenas y el tercero es el producto de las centenas.

Mostramos a continuación, en una cita de Vallejo, cómo se explicaba este método cuando no se usaba el lenguaje algebraico, para que el lector puede apreciar las ventajas e inconvenientes de uno y otro lenguaje.

«... si se observan con atención los productos parciales de algunas multiplicaciones, se ve que todos están dispuestos de manera que los mismos órdenes de unidades se hallan en una misma columna vertical; y analizando su formación, se verá además que las unidades por las unidades deben siempre dar unidades, pudiendo también dar decenas, pero nada más; que para tener todas las decenas, es necesario añadir este exceso de decenas que provienen de las unidades por las unidades; 1º a las decenas por las unidades; 2º a las unidades por las decenas, lo que podrá dar centenas además; que para tener todas las centenas es necesario añadir este exceso; 1º a las centenas por las unidades; 2º a las unidades por las centenas; 3º a las decenas por las decenas, lo que podrá ocasionar millares además; que para tener todos los millares es necesario añadir este exceso, 1º a los millares por las unidades; 2º a las unidades por los millares; 3º a las centenas por

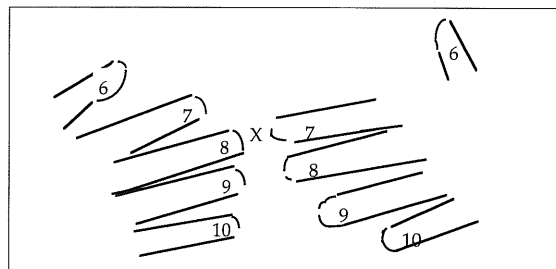
las decenas; 4º a las decenas por las centenas; lo que podrá dar decenas de millar, etc.

Luego podremos establecer esta regla general para encontrar a un tiempo el producto de dos factores cualesquiera. Multiplíquense las unidades por las unidades; escríbanse las unidades del producto y reténganse las decenas; multiplíquense después las decenas por las unidades; luego las unidades por las decenas, y a su suma agrégense las decenas retenidas; escríbanse las decenas de esa suma total, y reténganse las centenas; multiplíquense las centenas por las unidades, las unidades por las centenas, y las decenas por las decenas, al total añádanse las centenas retenidas; escríbanse las centenas contenidas en este nuevo total, y reténganse los millares para añadirlos a la suma de los millares por las unidades, de las unidades por los millares, de las centenas por las decenas, de las decenas por las centenas, etc.»

De las reglas a las fórmulas

Una vieja y muy conocida técnica para multiplicar número dígitos, llamada multiplicación «a la Turca», en la Aritmética de Chuquet, el Triparty (cit. Complugio, 1992), operaba con los dedos de la siguiente manera:

Cada dedo está asociado a un número del 6 al 10. Para multiplicar dos de esos números se juntan los dedos correspondientes hasta tocarse. Los dedos que se tocan y los que quedan por arriba son la cifra de las decenas. Los que quedan por debajo se multiplican, los de una mano por los de otra, y dan la cifra de las unidades.



$7 \times 8 =$ Los dedos que se tocan y los de arriba dan la cifra de las decenas: $3 + 2$ son cinco decenas. Los dedos que quedan por abajo de los que se tocan en una mano se multiplican por los que quedan en la otra mano. Esto da la cifra de las unidades: 2×3 , son 6.

Total: 56

Se puede hacer de esta regla el punto de arranque para plantear otras. ¿Habrá alguna regla con los dedos para trabajar los números ente 5 y 9 en vez de entre 6 y 10? ¿Y entre 15 y 19 o entre 16 y 20?

También cabe plantearse cuestiones matemáticas: ¿Cómo se explica esta regla? ¿En qué leyes, principios, relaciones o propiedades se sustentan?

El primer tipo de cuestiones es fácil de contestar, basta asignar números a los dedos, y como se sabe el resultado de los productos basta con indagar como serán las reglas. Con paciencia se puede obtener una regla general que agrupe a toda la casuística, pero este es un camino lento que va de lo particular a lo general. Cabe la posibilidad de tomar el camino inverso, el que va de lo general a lo particular. Para allanar esta otra ruta voy a presentar una nueva regla ciertamente parecida a la anterior, llamada multiplicación «del Perezoso» que aparece en Corachán (1699).

Para multiplicar por ejemplo 7 por 8, se escriben los números y a su derecha sus diferencias a 10.

7 diferencia a 10 3
8 diferencia a 10 2

La diferencia entre un factor y la diferencia a 10 del otro da la cifra de las decenas, $7-2=5$. El producto de las diferencias da la cifra de las unidades, $2 \times 3=6$. Total 56.

A continuación la transcribo tal como viene en la aritmética de Pérez de Moya (1573), una de las tres más influyentes aritméticas españolas de los siglos XVI y XVII, para que se puedan comparar los diversos estilos de lenguaje.

«Si quieres multiplicar un número Dígito por sí mismo, o por otro cualquiera número Dígito, como ocho veces seis, o siete veces seis, asentarás un número (cualquiera de ellos) encima del otro, poniendo delante de cada uno hacia la mano derecha lo que le faltare para llegar a diez, como si dijéramos ¿ocho veces siete cuánto montan? Pon el uno encima del otro, poniendo delante del ocho un

*¿Cómo se explica esta regla?
¿En qué leyes, principios, relaciones o propiedades se sustenta?*

dos, y poniendo delante del siete un tres (que es lo que les falta para diez) como parece:

8 ——— 2
7 ——— 3

Hecho esto, multiplicarás las faltas que a los tales números les falta para llegar a diez la una por la otra, ¿como son? y tras, diciendo dos veces tres hacen seis, estos seis se asentarán debajo de la raya por unidades como parece:

8 ——— 2
7 ——— 3
—————
6

Y luego restarás la falta del un número del otro número contrario, y no importa que sea cualquiera, quiero decir que el tres (que es la falta del siete) lo restas del ocho o los dos (que es la falta del ocho) lo restas del siete, que de una manera y de otra quedarán cinco, los cuales harás dieces, y juntarlos has con los seis que tenías de la multiplicación del dos por el tres, y montarán cincuenta y seis, y tanto dirás que montan ocho veces siete.

8 ——— 2
7 ——— 3
—————
5 6

Nota, que cuando la suma de ambos los dos números que multiplicamos no pasara de 10, no curarás de esta regla porque, será cosa más embarazosa que comprensible».

Estas dos reglas, a la turca o de los dedos y la del perezoso, presentan un parecido asombroso, casi se diría que son la misma regla, ¿lo son? De hecho, ambas constan de dos partes, una suma y un producto, este último obtenido multiplicando los mismos valores, el 3 y el 2. Por otra parte, qué interés puede tener una regla para multiplicar dos números dígitos, como el 8 y el 7, si en realidad hay que multiplicar otros dos, el 3 y el 2, ¿qué ventaja es esto? En la época en la que se utilizaba estas reglas, la práctica de la multiplicación no era algo tan frecuente como lo es hoy en día para nuestros escolares, la gente prefería recurrir a este tipo de reglas para multiplicar los números mayores que 5, pues así no tenían que hacer el esfuerzo de memorizar las tablas de multiplicar más allá de la de este valor.

Pero no sólo eso, la tabla del perezoso es perfectamente generalizable. En efecto, véase el siguiente método, llamado en Dalmáu (1898) de «los complementos», recomendado para el caso en que el producto de los complementos sea más fácil que el producto de los datos dados. Transcribo literalmente:

Método de los Complementos, para factores con igual número de cifras.

Se toma la diferencia entre uno de los factores y el complemento del otro a una potencia de 10, colocando a la derecha tantos ceros como tenga esta potencia; se añade a este resultado el producto de los dos complementos, y la suma es el producto buscado.

Sea la multiplicación 989×998 :

Producto de los complementos a 1000	$11 \times 2 =$	22
$998 - 11 = 987$, añadiendo tres ceros		<u>987000</u>
Suma, que es el producto		987022

Método de los Complementos, generalizado a factores con desigual número de cifras. Si ambos factores no tienen igual número de cifras, se practica la regla dada en el caso anterior, igualando antes las cifras, añadiendo los ceros necesarios a la derecha del factor que tenga menos, teniendo cuidado de suprimir después estos ceros de la derecha del producto.

Sea la multiplicación 9986×95 . Igualando las cifras del segundo factor, tendremos 9986×9500 .

Producto de los complementos a 10000	$14 \times 500 =$	7000
$9986 - 500 = 9486$, añadiendo cuatro ceros		<u>94860000</u>
Suma que es el producto		94867000

Método de los Complementos, para factores iguales, o lo que es lo mismo, para hallar el cuadrado de cualquier número. Podemos aplicar el recomendable método de los complementos aritméticos, que ya hemos explicado.

Hallaremos el cuadrado de 896.

Producto de los complementos a 1000	$104 \times 104 =$	10816
$896 - 104 = 792$, añadiéndole tres ceros		<u>792000</u>
Suma, que es la segunda potencia buscada		802816

Llegados a este punto, una vez conocidas estas reglas para multiplicar, el lector advertirá que todas ellas tienen algo en común. Si la curiosidad le espolea querrá saber que es ello. Incluso es posible que le asalten otras preguntas, como por ejemplo cuando en la regla de los complementos se halla la diferencia entre el primer dato que se escribe y el complemento del otro, que pasaría si cambiáramos los datos y escribiéramos primero el otro dato. Obviamente en ambos casos ha de dar lo mismo, porque la regla no debe depender del dato que se escriba primero. Pero, ¿es igual restarle a un dato el complemento del otro, que al revés? Si esto es verdad estamos ante una ley que no es evidente a primera vista. ¿Qué ley es ésta?

Formulación de esta ley.

$$a - (10 - b) = b - (10 - a).$$

En efecto $a - (10 - b) = a + b - 10 = b - (10 - a)$.

Con esta ley hemos iniciado el proceso para pasar de las reglas a las formulas. Continuemos con ello. ¿Qué ley o fórmula se encierra en las reglas enunciadas?

Recordemos la formula del perezoso, en ella para calcular el producto de dos números 7 y 8 se halla el producto de sus complementos $(10 - 8)(10 - 7)$ y la diferencia de un dato por el complemento del otro, $10[8 - (10 - 7)]$. Esto último es la cifra de las decenas, lo que se escribe en el lenguaje horizontal con un cero a la derecha. En con-

secuencia el método del perezoso se puede reescribir así:

$$8 \times 7 = (10-7)(10-8) + 10[7 - (10-8)] = (10-7)(10-8) + 10[8 - (10-7)]$$

Ahora para conocer hasta qué punto esta regla es general, basta con reescribirla con letras donde hay números:

$$ab = (10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)]$$

y demostrar que es cierta para cualesquier dígitos a y b, para lo cual es suficiente con efectuar el cálculo literal de $(10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)]$ y comprobar que efectivamente resulta ab. En efecto:

$$(10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)] = 100 - 10a - 10b + ab + 10a - 100 - 10b = ab$$

A continuación, y por analogía, resulta fácil formular el método de los complementos:

$$ab = (100-a)(100-b) + 100[a - (100-b)]$$

$$ab = (1000-a)(1000-b) + 1000[a - (1000-b)]$$

...

Y ahora, regresando al método de los dedos o a la turca, para calcular el producto de dos números, por ejemplo 7 y 9, se asigna el 7 al dedo índice y el 9 al dedo medio, después se juntan estos dedos. La cifra de las decenas se obtiene sumando el número de dedos que se tocan y los que quedan por arriba, es decir, $2+4$. Adviértase que en vez del 7 contabilizamos un 2 y en vez del 9 contabilizamos un 4, esto es como si prescindieramos de 5 de las unidades de cada uno de estos números 7 y 9. Por otra parte, se multiplica el número de dedos que quedan por abajo de los que se tocan, es decir 3×1 , adviértase que esto es como si hiciéramos el producto de los complementos a diez de los datos dados, $(10-7)(10-9)$, igual que en el método del perezoso. Por lo tanto, la regla se puede escribir en el lenguaje horizontal así:

$$7 \times 9 = (10-7)(10-9) + 10[(7-5) + (9-5)]$$

Y por analogía la fórmula debe ser:

$$ab = (10-a)(10-b) + 10[(a-5) + (b-5)]$$

Para demostrarla es suficiente con hacer el correspondiente cálculo literal. Una vez se ha llegado aquí, es el

... el método de los dedos o a la turca no es más que una reformulación del método del perezoso y viceversa.

momento de poner juntas las fórmulas del perezoso y la de los dedos para tratar de analizar lo que tienen en común.

$$ab = (10-a)(10-b)+10[a-(10-b)]$$

$$ab = (10-a)(10-b)+10 [(a-5)+(b-5)]$$

Salta a la vista que la parte que tienen diferente, $10[a-(10-b)]$ y $10 [(a-5)+(b-5)]$ no lo es tanto pues una se sigue de la otra. En efecto:

$$a-(10-b) = (a+b-10) = (a-5)+(b-5)$$

En consecuencia, podemos decir que el método de los dedos o a la turca no es más que una reformulación del método del perezoso y viceversa. Como el método del perezoso se generaliza en el método de los complementos, cabe pensar que también el método de los dedos se generaliza por analogía. Su estudio se deja en las manos, nunca mejor dicho, del lector.

De las fórmulas a las reglas

En el intermedio del proceso anterior aparece una fórmula para la que no se ha dado la regla. En efecto se vio que

$$a-(10-b) = (a-5)+(b-5) = (a+b-10)$$

por lo tanto se tiene aquí un tercer método, cuya fórmula es:

$$ab = (10-a)(10-b)+10 [a+b-10]$$

La regla correspondiente puede enunciarse así: Para multiplicar dos números dígitos se resta de 10 cada factor y también se resta diez de su suma. El primer resultado da la cifra de las unidades y el segundo la cifra de las decenas.

Epílogo

Los métodos utilizados anteriormente forman parte de la tradición escrita en los libros de aritmética. El aprendizaje de estos métodos es de por sí una actividad lúdica que puede ser utilizada con una finalidad motivadora, pero lo que aquí se ha pretendido mostrar es que también pueden ser utilizados con una intención matemática. En este sentido, la tradición aritmética es rica y valiosa, como muestra ofrezco algunas

El aprendizaje de estos métodos es de por sí una actividad lúdica que puede ser utilizada con una finalidad motivadora, pero lo que aquí se ha pretendido mostrar es que también pueden ser utilizados con una intención matemática.

otras de estas reglas para que sean analizadas y se haga emerger su estructura común a través de sus fórmulas correspondientes.

Reglas de la tabla Mayor: Son las que se utilizaban para multiplicar los números de dos cifras, es decir los comprendidos entre 10 y 100. A continuación las presento tal y como vienen en Bruño (1932), incluyendo su generalización a números entre 100 y 110 y entre 1000 y 1010.

Caso general

Para multiplicar dos números de dos cifras iguales en decenas.

Se añaden al uno las unidades del otro, se multiplica la suma por las decenas y por 10, y se añade al resultado el producto de las unidades de ambos factores.

Ejemplo:

$$25 \times 27 = (32 \times 20) + 35 = 640 + 35 = 675.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 25 \times 27 &= (20+5)(20+7) = (20+5)20 + (20+5)7 = \\ &= (20+5)20 + 20 \times 7 + 5 \times 7 = (20+5+7)20 + 7 \times 5 = 32 \times 20 + 5 \times 7 \end{aligned}$$

Casos particulares

1.º Los dos números están comprendidos entre 10 y 20.

La operación es más sencilla por tener cada factor sólo una decena

$$13 \times 18 = (13+8)10 + 8 \times 3 \dots$$

2.º Los dos factores sólo difieren en las cifras de sus unidades, las cuales suman 10.

El aplicar la regla general equivale, en este caso, a multiplicar la cifra común de las decenas por la misma aumentada de 1, multiplicar el resultado por 100 y añadir el producto de las unidades.

Ejemplos: $89 \times 81 = (8 \times 9)100 + (9 \times 1) = 7.209$

Nota: Esta regla es particularmente ultrarrápida cuando se aplica al caso de un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo. Esta regla viene en Santillana de la siguiente manera:

«Los productos de 15×15, 25×25, 35×35, 45×45, etc., acaban en 25.

Observa cómo se obtiene el producto completo:

$$1 \text{ siguiente } (2) = 2; 15 \times 15 = 225.$$

3.º Los dos números están comprendidos entre 100 y 110.

Se podrá también aplicar la regla general, teniendo en cuenta que cada factor tiene 10 decenas; luego, después de añadir a uno de los factores las unidades del otro, se

multiplicará por 100, y se añadirá el producto de las unidades de los dos números.

Ejemplos: $103 \times 106 = (109 \times 100) + 3 \times 6 = 10.918$

4.º Los dos números están comprendidos entre 1.000 y 1.010.

Ejemplo: $1.005 \times 1.008 = (1.013 \times 1.000) + (5.8) = 1.013.040$

5.º Los dos números están comprendidos entre 90 y 100.

Ejemplo: 92×97 . Por la regla general resulta

$$(92+7)90 + (2 \times 7) = (99 \times 90) + 14 = 8.910 + 14 = 8.924$$

De la misma forma que hay reglas para números de dos cifras iguales en decenas, particularizando según sea el caso, también hay reglas para números iguales en unidades. En la Aritmética de Polo (190?), se incluye la siguiente:

Método para multiplicar dos números de dos cifras iguales en las cifras de las unidades y tales que las de las decenas suman 10:

Ejemplo. $34 \times 74 = 2.516$. Se multiplican las cifras de las decenas, al producto se le suma la cifra de las unidades, y el total son las centenas del producto que se quiere averiguar, a las que se añade el producto de las unidades por sí mismas.

Por último, y para no hacer mas larga esta selección, se incluye el siguiente método de las diferencias, tomado de Donovan & William (1965). Para multiplicar números iguales comprendidos entre 25 y 50:

$$\begin{array}{r} 46 \times 46 = \quad 46 - 25, 21 \quad \times 100 \quad 2100 \\ \quad \quad \quad 50 - 46, 4 \quad \quad 4 \times 4 \quad \quad + 16 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2116 \end{array}$$

Nota final: He aquí algunas soluciones:

$$(10a+b)(10a+c) = 100a(a+1)+bc$$

$$(10a+b)(10a+c) = 10a[(10a+b)+c]+bc$$

$$(10a+b)(10c+b) = 100(ac+b)+b^2$$

$$(10a+b)(10c+b) = 100(ac+b)+b^2, \text{ con } a+c = 10$$

$$N^2 = 100(N-25) + (50-N)^2$$

Referencias bibliográficas

BRUÑO (1932, serie reeditada): *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada. Curso Sup.*, (2.ª ed.), Ed. La instrucción popular, Madrid, Barcelona.

COMPIGLIO, A. y V. EUGENI, (1992): *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo*, (Trad. de *Dalle dita al calculatore*), Ed. Paidós, Barcelona.

CORACHÁN, J. B. (1699): *Aritmética Demonstrada Teórico-Práctica para lo matemático y mercantil*, Valencia.

DALMÁU CARLES, J. (1898, serie reeditada): *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*, (Libro del alumno. Grado profesional), Barcelona, Madrid y Gerona.

DONOVAN, A. J. y H. G. WILLIAM (1965, Serie, 1.ª ed., 1960): *Exploring Mathematics on your short cuts in calculations*, vol. 9, Ed. John Murray, Londres.

FLOURNOY, F. (1969): *Las matemáticas en la escuela primaria*, Troquel, Buenos Aires. (Título de la obra en inglés: *Elementary School Mathematics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964).

GÓMEZ ALFONSO, B. (1994): *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*, Tesis doctoral, Universitat de Valencia.

GÓMEZ, B. (1988): *Numeración y Cálculo*, Síntesis, Madrid.

LEE, L. y D. WHEELER (1989): "The arithmetic connection", *Educational Studies in mathematics*, 20, 41-45.

PÉREZ DE MOYA, J. (1573): *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural*, Alcalá de Henares.

POLO, R. (¿Final del XIX?): *Aritmética*, Librería de F. Pablos, Salamanca.

SANTILLANA (Ediciones de 1982, 1988. Serie reeditada): *Libro de texto para la EGB*.

TREVISIO (1478): *Aritmética* (Trad. de D. E. Smith), en Frank J. SWETZ, *Capitalism y Arithmetic. The New Math of the 15 th Century*, (1987, ed 1989), La Salle, Illinois, Open Court.

VALLEJO, J. M. (1813, 4.ª ed. 1841): *Tratado Elemental de Matemáticas*, Tomo I, Madrid.

Bernardo Gómez
Departamento de
Didáctica de la Matemática.
Universitat de València

SUSCRIPCIONES:

Particulares: 3.000 pts. (3 números)

Centros: 3.500 pts. (3 números)

Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA