

Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares

J. M^a Cardenoso
P. Azcárate

En los últimos años ha habido intensos debates sobre la idoneidad de la introducción de la probabilidad y la estadística en la escuela y en relación al momento oportuno para tal introducción. A partir de las investigaciones y discusiones realizadas, numerosos argumentos se han ido consolidando a favor de dicha inclusión, entre los que cabe destacar:

- Su interés para la resolución de problemas relacionados con el mundo real y con otras materias del currículo.
- Su influencia en la toma de decisiones de las personas cuando disponen sólo de datos afectados de incertidumbre.
- Su dominio facilita el análisis crítico de la información recibida a través, por ejemplo, de los medios de comunicación.
- Su comprensión proporciona una filosofía del azar de gran repercusión para la comprensión del mundo actual.

El ritmo del cambio en la sociedad actual es cada vez más acelerado, lo que supone la necesidad de una formación que proporcione al ciudadano recursos para toda la vida, que le permitan enfrentarse y comprender la complejidad de la sociedad en la que está inmerso. El estudio de la probabilidad proporciona una información válida para enfrentarse con los problemas cotidianos y permite un acercamiento diferente a dichos problemas, una forma distinta de analizarlos, facilitando a los estudiantes la exploración de sucesos y situaciones que son relevantes en su vida diaria.

El reconocimiento de su valor educativo ha llevado a incluir paulatinamente el conocimiento estocástico tanto en los análisis y reflexiones más generales sobre el currículo matemático obligatorio, como en los currículos escolares concretos de cada país.

En este artículo se analizan los diferentes proyectos y propuestas curriculares relacionadas con el tratamiento del conocimiento estocástico, los contenidos que recogen y las orientaciones que sugieren para su tratamiento en el aula centradas la mayoría de ellas en un estudio frecuencialista del fenómeno aleatorio.

Propuestas curriculares globales

Un claro reflejo de la importancia adquirida por la educación estocástica en los últimos años y de su reconocimiento como parte integrante de la cultura matemática de los individuos es su inclusión en las propuestas de carácter general sobre la educación matemática.

— Un ejemplo son los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, publicados en 1989 por la NCTM. En ellos se recogen los informes y reflexiones de un gran número de profesionales de la educación matemática y se formula lo que se considera como contenido básico del currículo escolar matemático, tanto en su contenido como en la orientación de su enseñanza, en respuesta a las demandas de la sociedad sobre la necesidad de cambio de las matemáticas escolares. Entre sus introducciones novedosas, encontramos la sugerencia del tratamiento del conocimiento estocástico a lo largo de todos los años de escolaridad.

La justificación de su inclusión se apoya en la consideración de que, para ser un ciudadano integrado en la sociedad actual, es necesario estar bien informado y para ello es esencial entender los conceptos y técnicas fundamentales de la probabilidad y la estadística y sus relaciones:

«La recogida, organización, presentación e interpretación de los datos, así como la toma de decisiones y predicciones basadas en dicha información, son todas ellas destrezas que tienen cada vez más importancia en una sociedad que se base en la tecnología y la comunicación... El estudio de la estadística y la probabilidad subraya la importancia que tiene plantear preguntas, hacer conjeturas y buscar relaciones durante la formulación y resolución de problemas del mundo real... constituyen conexiones importantes con otras áreas de contenido, como Ciencias Sociales y Naturales... Su docencia debe estar impregnada de un espíritu de investigación y exploración» (NCTM, 1991, 54).

Desde los *Estándares* se propone introducir «la exploración del azar» y el tratamiento del «concepto de casualidad» desde el nivel de la Educación Infantil. Su tratamiento en los sucesivos niveles educativos va progresivamente dirigido a la elaboración de modelos, experimentales y teóricos, de situaciones probabilísticas, que les sirvan como referentes en situaciones cotidianas, a la hora de determinar o hipotetizar posibilidades de ocurrencia, y tomar decisiones en función de ello. En sus orientaciones metodológicas apunta la necesidad de implicar a los niños de forma activa en su aprendizaje y de tomar como punto de partida situaciones que surjan del mundo cotidiano, no como concreciones ejemplificadoras del contenido proba-

Un claro reflejo de la importancia adquirida por la educación estocástica en los últimos años y de su reconocimiento como parte integrante de la cultura matemática de los individuos es su inclusión en las propuestas de carácter general sobre la educación matemática.

bilístico aislado, sino para tratar la totalidad de contenidos implicados y sus interrelaciones.

— En la misma línea están las recomendaciones indicadas en el llamado *Informe Cockcroft*, resultado de un estudio realizado sobre la enseñanza de las matemáticas en el Reino Unido. En él se recoge un breve análisis sobre la situación específica de la enseñanza de la probabilidad y la estadística, resaltando los pocos trabajos e investigaciones desarrolladas sobre el tema cuando, curiosamente, se considera al Reino Unido como uno de los países con mayor experiencia en la enseñanza del conocimiento estocástico.

Comenta que, en general, estos conocimientos son iniciados en el nivel de secundaria y, a menudo, se insiste en la aplicación directa de técnicas o fórmulas sin más explicaciones de su significado. Un tratamiento de estas características provoca habitualmente un desarrollo del conocimiento probabilístico, lejos de la comprensión de los alumnos al no incidir en la discusión de los datos disponibles, en su interpretación y en las posibles conclusiones alternativas en función del contexto de aplicación. Como contrapunto, afirma que estas materias no pueden ser consideradas como un conjunto de técnicas, sino como una actitud mental diferente que permite admitir «la incertidumbre y la variabilidad en los datos y en la recogida de éstos y permite tomar decisiones a pesar de esa incertidumbre» (Cockcroft, 1985, p. 286). Sin entrar en especificar contenidos concretos, puntualiza que son conocimientos que deben de ser enseñados con lentitud, a través de todas aquellas situaciones y actividades necesarias para que las ideas se comprendan, desarrollen y afiancen. Mantiene, además, que «los años de primaria poseen un valor intrínseco: el de un período en que se abren las puertas a una amplia gama de experiencias» (Cockcroft, 1985, p. 104) y que proporcionarán una base de estimable valor para la actividad matemática en los años posteriores.

Propuestas curriculares específicas

En la literatura también podemos encontrar propuestas de carácter más específico en relación con el tratamiento del conocimiento estocástico en los diferentes niveles escolares. Como sugieren Ahlgren y Garfield (1991), existen diferentes aproximaciones al currículum estocástico: aquellas cuya organización se basa exclusivamente en un conjunto de actividades secuenciadas y con sentido en sí misma; las que se organizan como unidades completas, independientes y separadas; incluso las que se presentan como todo un curso completo también diferenciado en sí mismo. En la revisión realizada hemos podido detectar algunos ejemplos de estas diferentes aproximaciones.

Si bien en todos los estudios consultados se constata la casi total ausencia de un material escolar apropiado para el trabajo en el aula, sí hemos encontrado interesantes propuestas curriculares específicas sobre el tratamiento del conocimiento probabilístico o estadístico a lo largo de los distintos niveles educativos.

— Entre ellas podemos citar la propuesta por Vargas y Dumont (1973) en *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 a 14 ans*, en la que proponen una secuencia de trabajo a lo largo de los ocho primeros cursos de la enseñanza (6-14), dirigida fundamentalmente a la adquisición de habilidades y destrezas. Su punto de partida es la recogida de información a través de la experiencia. A continuación se introduce a los niños en los aspectos combinatorios y, progresivamente, en la búsqueda de los posibles resultados del evento o experimento aleatorio. También tratan los distintos aspectos del conocimiento estocástico, los diversos tipos de sucesos, la equiprobabilidad, la frecuencia, la construcción e interpretación de las diferentes clases de tablas, gráficas, conceptos, medidas y representaciones posibles, hasta finalizar en el último curso, con la introducción de la visión

...en todos los estudios consultados se constata la casi total ausencia de un material escolar apropiado para el trabajo en el aula

conjuntista de las probabilidades y de las medidas fundamentales de centralización y dispersión.

Desde nuestra perspectiva, los planteamientos de Vargas y Dumont desvinculan de la realidad el conocimiento y comprensión de estos conceptos con demasiada rapidez. Al finalizar la Primaria, en una edad donde los niños aún no están capacitados para un tratamiento formal de estos conocimientos, ¿cómo puede representar la interpretación del conjunto de sucesos como un álgebra de conjuntos? Todo el desarrollo de la propuesta se apoya en una presentación cercana al conocimiento formal de la probabilidad y la estadística, situando la combinatoria en la base de dicho conocimiento. En sus orientaciones metodológicas sugiere la necesidad de acceder a estos conocimientos a partir de la experimentación en situaciones especialmente planificadas y tratadas con un material concreto. Son situaciones entendidas como elementos de experimentación, diseñados más en función del contenido y su estructura, que desde la realidad e intereses del niño. Pueden servir de referencia para su inclusión en proyectos o unidades más amplias que otorguen un sentido a su tratamiento.

— Una propuesta más cercana a las ideas actuales es la presentada por Díaz Godino, Batanero y Cañizares (1988) en su libro *Azar y Probabilidad*; en la que también se recoge la necesidad de su tratamiento desde los primeros niveles. En dicha propuesta, completada con un estudio teórico sobre el tema, se analiza la imposibilidad de enfocar la enseñanza elemental de estas nociones hacia su adquisición formal, dada la incapacidad cognitiva de los niños de estas edades. Como alternativa, enfocan su trabajo hacia la construcción de intuiciones, basadas en la propuesta de una amplia fenomenología. Dicha construcción constituirá un momento previo y base de la adquisición de conceptos formales, propio de etapas educativas posteriores.

Se presentan una serie de «unidades didácticas» que pueden ser desarrolladas en las aulas desde los primeros niveles, incluido el Infantil, hasta la Educación Secundaria, con un tratamiento escalonado del conocimiento estocástico, a modo indicativo y orientativo de un proceso global de formación. La secuencia de presentación va en progresivo aumento de complejidad de los conceptos implicados, fenómeno aleatorio, juegos combinatorios, frecuencias relativas, el lenguaje del azar, comparación y asignación de probabilidad, etc. En el desarrollo de las unidades propuestas siempre parten de situaciones experienciales en las que los niños han de tomar parte activa, pero son situaciones puntuales, al margen de todo contexto global, que no representan en sí mismas ningún proceso, ni una relación con situaciones más amplias.

— La propuesta presentada por Bisson (1983) es una adaptación de la teoría de situaciones didácticas plantea-

da por Brousseau (1986). Su punto clave está en la elección de problemas significativos que preservan el sentido del conocimiento implicado, inmersos en una situación más amplia en la que esté envuelto todo el sistema de interacciones: *la situación didáctica*. Plantea los tres tipos de situaciones didácticas que, según Brousseau, deben de ponerse en juego en un proceso de enseñanza/aprendizaje del conocimiento matemático, según el tipo de dialéctica que establezcan: de la acción, de la formulación y de la validación:

- En las situaciones que domina la dialéctica de la acción se plantean problemas al estudiante cuya solución esté relacionada con el concepto que se pretende enseñar. Se debe posibilitar el contraste entre distintas soluciones y ajustar su acción en función de la información que recibe de la propia situación.
- En la situación de formulación el alumno debe elaborar el modelo intuido de la fase anterior, construyendo un lenguaje que permita el intercambio de información con sus compañeros. Como resultado, el alumno crea un modelo explícito que puede ser reformulado con ayuda de signos o reglas.
- El tercer tipo es la situación de validación en la que el objetivo es conseguir que el estudiante avance en el proceso de matematización, al probar la validez del modelo para interpretar hechos diferentes y convencer de su validez a otros compañeros.

Tal como están descritas, consideramos que las situaciones en donde se plantea la dialéctica de la acción, siempre inmersas en contextos más amplios que conecten con la realidad del niño, son las idóneas para poner en juego en los primeros años de la primaria. Son aquellas en la que los problemas planteados están en relación con el concepto que se pretende enseñar y en las que se pone al niño en contacto con la experiencia directa.

— Hay otras propuestas, focalizadas exclusivamente en los niveles de Secundaria, como son :

- La presentada por el Grupo Cero (1984) en *Un proyecto de currículum de Matemáticas*. De él, no nos interesa tanto los contenidos que proponen: recogida, tratamiento y análisis de los datos; reconocimiento de situaciones de azar; juegos de azar y su tratamiento estadístico; frecuencia relativa; probabilidad, etc.; sino sus orientaciones metodológicas. Defiende la introducción lenta del estudio de conceptos probabilísticos y estadísticos, concediendo tiempo suficiente a las discusiones y experiencias subyacentes a partir de variadas situaciones. En todo su trabajo se enfatiza la perspectiva frecuencialista de los sucesos y el subsiguiente tratamiento estadístico de los datos.
- La propuesta presentada por el School Council Project on Statistical Education (1980), *Statistics in your world*, en la Universidad de Sheffield, cuna, junto con la de

Bielefeld, de gran parte de los trabajos e investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística. En su trabajo ofrecen una serie de cuadernos de actividades para el alumno (11-16) y de notas para el profesor. Su orientación metodológica parte, básicamente, del desarrollo del conocimiento en contextos prácticos vinculados con el mundo del niño. Plantean una adquisición progresiva tanto de las técnicas como de los conceptos y la no necesidad de una justificación teórica completa en estos niveles de la educación. Ponen de manifiesto el carácter interdisciplinar de estas materias y, por tanto, su potencialidad para relacionar el conocimiento matemático con otras áreas del currículo. Una adaptación de dicho proyecto es *L'estadística en el votre mon*, publicada por el ICE de la UAB en 1990. En dicho proyecto se presentan diferentes materiales para el alumno y libros para el profesor, en los que se proponen una colección de actividades y situaciones de experimentación que intentan estar conectadas, en cierta forma, con problemas cotidianos y con el mundo real.

— Existen también propuestas de situaciones o tareas de enseñanza en donde se presentan experiencias accesibles a todos los niveles educativos e integrables en diferentes procesos. Un ejemplo es el, ya clásico, libro de Engel (1988), *L'Enseignement des Probabilités et de la Statistiques*. En él, Engel presenta una recopilación exhaustiva de problemas y situaciones, discutidas y desarrolladas, con un claro carácter instructivo. Sus ejemplos han sido fuente de un gran número de experiencias sobre la enseñanza de la probabilidad y la estadística, realizadas por profesionales de diferentes niveles, tanto en sus aulas como en sus trabajos de investigación.

En su propuesta, aunque plantea inicialmente la necesidad de integrar estos conocimientos en todos los niveles de la enseñanza, en su desarrollo real diri-

Engel presenta una recopilación exhaustiva de problemas y situaciones, discutidas y desarrolladas, con un claro carácter instructivo.

ge el estudio de las probabilidades hacia los niveles de Secundaria. La mayoría de las situaciones propuestas por Engel necesitan para su desarrollo de unos mínimos conocimientos matemáticos, algunos no accesibles a los niños de Primaria. Aún así, su obra es de gran significación por aportar multitud de ideas útiles para trabajar en la escuela el conocimiento estocástico.

Muchas de estas propuestas se caracterizan por pretender dar protagonismo a los niños en el desarrollo de las distintas actividades, pero presentan un formato muy específico, cerrado en muchos casos y lineal; con una secuencia determinada *a priori* e independiente del contexto en donde pueden adquirir significado para el niño. Presentación controvertida, en cierta forma, con la idea que tenemos sobre el sentido del tratamiento del conocimiento matemático en la escuela, cuyo principal problema es la construcción del sentido de los objetos matemáticos, hecho dependiente del contexto real de aplicación (Thom, 1974).

Todas estas reflexiones, proyectos y estudios, desarrollados en los últimos años, han ido configurando nuevas propuestas en cuanto a la enseñanza de la matemática, en general, y de la estocástica en particular. Propuestas que paulatinamente se han ido reflejando en la letra de los distintos sistemas educativos.

Nuestro currículo prescriptivo

El sistema educativo de un país es el reflejo de las necesidades socio-económicas, culturales y políticas, la reforma del sistema surge cuando las necesidades de dicha sociedad evolucionan y sus demandas se modifican. El cambio de las necesidades sociales y el mayor conocimiento sobre el tema, a partir de los estudios e investigaciones realizadas, han provocado la transformación de la opinión de aquellos elementos de la sociedad que piensan sobre la enseñanza de la Matemática en los diferen-

... en el caso del conocimiento estocástico la definitiva integración en el ámbito escolar se está dando a un ritmo lento y difícil, entre otras razones, por el escaso conocimiento que aún se dispone sobre la didáctica de la estocástica, la carencia de profesores cualificados y su particular naturaleza epistemológica.

tes países. Desde ellos se procede a la selección de los contenidos que se deben enseñar, configurando las propuestas oficiales, en función de las demandas de la sociedad. La inclusión oficial, en los currículos escolares elementales de los aspectos relacionados con el conocimiento estadístico y probabilístico, es fruto de dicho movimiento.

Esta selección, por otra parte, es el resultado de lo que, el propio Chevalard (1991), denomina *trabajo externo de la transposición didáctica*, y es lo que determina, a partir del saber científico, los objetos del saber que deberán de ser enseñados, es decir el currículo *pretendido*, que se propone, en gran parte, por mediación de los programas oficiales (Traves y Westbury, 1989). No obstante, este paso no es suficiente, pues en el caso del conocimiento estocástico la definitiva integración en el ámbito escolar se está dando a un ritmo lento y difícil, entre otras razones, por el escaso conocimiento que aún se dispone sobre la didáctica de la estocástica, la carencia de profesores cualificados y su particular naturaleza epistemológica. Razones ya indicadas por Råde (1986), pero que mantienen gran parte de su vigencia. Por tanto, su inclusión en el currículo *ejecutado* en el ámbito del aula y su reflejo en el currículo *alcanzado* por los alumnos está aún muy lejos de ser una realidad en un gran número de países, entre ellos España.

En un informe elaborado por la International Commission on Mathematical Instruction denominado *School Mathematics in the 1990s*, publicado en España en 1988 como *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90* (Howson y Wilson, 1988), se presenta una revisión sobre los currículos de diferentes países y en ella se constata un alto grado de uniformidad entre las diferentes propuestas en lo referente a aritmética y álgebra, no tanto si nos fijamos en los contenidos de geometría, y una gran variedad con respecto al estudio de la probabilidad y la estadística. Hay países con un largo camino recorrido en la enseñanza de estos temas desde la escuela elemental, como Inglaterra o Alemania, y otros en que su tratamiento en los currículos es prácticamente insignificante.

En *España* no ha sido incluido en el desarrollo curricular de la enseñanza primaria hasta la ordenación del año 1992, con las nuevas propuestas resultado del desarrollo de la LOGSE y su concreción en las distintas autonomías. En el currículo español, en las sucesivas ordenaciones de la Educación Obligatoria (1970, 1981, 1984), no encontramos ninguna referencia en los primeros ciclos en cuanto a objetivos/contenidos ni en el campo de las orientaciones metodológicas, para el tratamiento matemático de nociones asociadas al azar y a la probabilidad. En la enseñanza básica actual las nociones asociadas al mundo de la incertidumbre están prácticamente ausentes, basta analizar los libros de texto de EGB para constatarlo.

Sin embargo, en la regulación del Ciclo Superior de la EGB, en los llamados Programas Renovados, si se recoge un bloque de contenidos, denominado «Estadística descriptiva», centrado en la introducción de las técnicas elementales de tratamiento y representación de datos, sin ninguna alusión al tratamiento de la probabilidad y sus relaciones, dejando estos contenidos para el BUP, comentando explícitamente que «este tema enlaza en BUP con el estudio de las distribuciones estadísticas y de la probabilidad, instrumento matemático que utiliza la estadística inductiva» (*Programas Renovados de la EGB. Ciclo Superior*, 1981, p.175). Traves y Westbury (1989), en un análisis exhaustivo de los currículos matemáticos, ya advierten que, en general, éstos se centran más en el dominio de la estadística, porque «aparentemente la probabilidad no es suficientemente importante a nivel internacional como para justificar el rótulo de Probabilidad y Estadística» (p. 16), entre sus contenidos.

En el ámbito metodológico de los Programas Renovados había unos principios explícitos que orientaban al profesor hacia la necesaria implicación activa del alumno, respetando y adaptando la enseñanza a su ritmo de aprendizaje. Pero, sin embargo, la presentación de una secuenciación de objetivos y contenidos perfectamente delimitados y organizados jerárquicamente, induce a los profesores, y fundamentalmente a los del Ciclo Superior, a presentar los conceptos previamente de forma teórica, para luego aplicarlos a la resolución de ejercicios.

Habitualmente, en nuestro medio educativo la enseñanza de la probabilidad se ha iniciado alrededor de los quince años. En los programas del Bachillerato actual aparece en los cuestionarios oficiales de primer curso un solo objetivo formulado en relación al conocimiento probabilístico: «Introducir la teoría combinatoria y la noción de probabilidad para el caso de un universo finito». Este planteamiento ha llevado generalmente a una presentación de la teoría matemática de la probabilidad desde una perspectiva clásica, en la que la asignación de las probabilidades iniciales a los sucesos se basa en la regla de Laplace y en el cálculo combinatorio. El tema se desarrolla de forma axiomática, sin considerar que en estos niveles la gran mayoría de los alumnos no pueden comprender un desarrollo axiomático de la teoría matemática, y mucho menos cuando adolecen de toda preparación intuitiva que es necesaria y previa a cualquier conocimiento formal de la probabilidad. El resto de los contenidos regulados están relacionados con el conocimiento estadístico y, en general, no se establecen conexiones entre ellos.

En sus planteamientos metodológicos subyace la misma idea señalada para el caso de los Programas Renovados. Los conceptos aparecen en los cuestionarios como objetos matemáticos sobre los cuales, en primer lugar, se ha de estudiar su definición y propiedades, para luego ser

En los programas del Bachillerato actual [...] el tema se desarrolla de forma axiomática, sin considerar que en estos niveles la gran mayoría de los alumnos no pueden comprender un desarrollo axiomático de la teoría matemática, y mucho menos cuando adolecen de toda preparación intuitiva que es necesaria y previa a cualquier conocimiento formal de la probabilidad.

aplicados a casos particulares, a modo de ejemplo. «Es el marco de una enseñanza clásicamente estructurada en curso teórico y ejercicios, es decir, «tu aprendes, yo explico»» (Margolinas, 1993, p. 175).

La nueva regulación del sistema educativo español, producto del desarrollo de la LOGSE, ha incidido significativamente en el tratamiento de este campo del conocimiento matemático en los currículos oficiales. Por primera vez se recoge su enseñanza desde los primeros niveles educativos y a lo largo de toda la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria.

Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO)

Con respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria, dentro de sus objetivos, se presenta la necesidad de incorporar al lenguaje y modos de argumentación habitual, la forma probabilística de expresión matemática y las diversas formas de explicar la realidad determinada/aleatoria. Así mismo, recoge la utilización de técnicas sencillas de recogidas de datos, tanto referidos a fenómenos causales como aleatorios y a la interpretación de dichos datos. En el apartado de contenidos se presenta un bloque denominado «Tratamiento del azar», en él se recogen los diferentes conocimientos, tanto conceptuales, procedimentales, como actitudinales, que se han de trabajar en este nivel. Básicamente se centran en: reconocer y caracterizar los fenómenos aleatorios; asignar probabilidades a determinados sucesos tanto en experimentos simples como compuestos; introducir el concepto de probabilidad a través del estudio frecuencial de los fenómenos; introducir la probabilidad laplaciana como correspondiente a casos sencillos y equiprobables.

Entre los procedimientos a poner en juego propone la utilización de distintas fuentes de información para asignar probabilidades, y de diversas técnicas y procedimientos para su cálculo. Y entre las estrategias más generales: reconocer fenómenos aleatorios en la vida cotidiana-

na y en el conocimiento científico; argumentar conjeturas sobre su comportamiento; y tomar decisiones en los distintos contextos en función de la información obtenida. Estrategias que llevarían a los alumnos a una valoración positiva de la información probabilística, a la hora de tomar decisiones ante situaciones de incertidumbre, adquiriendo cautela y sentido crítico ante las creencias populares sobre los diferentes fenómenos aleatorios.

En las orientaciones específicas sobre el tratamiento del azar, plantean la introducción progresiva de la idea de azar y probabilidad desde los primeros años de la etapa. El trabajo debe estar dirigido al desarrollo de una intuición sobre la probabilidad, para lo que propone directamente el enfoque frecuencial, tanto para el estudio de la probabilidad como del significado y comportamiento de la aleatoriedad, permitiendo detectar sus «regularidades». Da un papel relevante a la actividad manipulativa y al juego y considera a la combinatoria como un método idóneo para afrontar ciertas situaciones probabilísticas.

Paralelamente se presenta un bloque de «Interpretación, representación y tratamiento de la información» que propone directamente el estudio estadístico de los datos pero que, curiosamente, se divide en dos grandes apartados:

- El tratamiento de la información sobre los fenómenos causales, en el que introduce el significado de la proporcionalidad.
- El tratamiento de la información sobre fenómenos aleatorios.

Mantiene un tratamiento paralelo con el otro bloque de contenidos, donde se incidía en la conceptualización del fenómeno aleatorio a través de parámetros probabilísticos, complementarios de los estadísticos; en ningún momento, en las orientaciones sobre su tratamiento, se presenta referencia alguna sobre las posibles relaciones entre ambos bloques.

Sus orientaciones metodológicas, acordes con las orientaciones psicopedagógicas generales de todo el sistema edu-

Ya en el segundo ciclo [de Secundaria] propone la adquisición de una idea más precisa del concepto de probabilidad como medida de lo esperable en la ocurrencia de un suceso y sus posibles aplicaciones, pero sin llegar a su axiomática.

cativo español, recogen los planteamientos constructivistas del conocimiento y defienden los siguientes aspectos: la importancia de los conceptos previos de los alumnos como punto de partida; el papel de las aproximaciones contextuales e inductivas al conocimiento matemático; el proceso de actividades como algo abierto y flexible con variedad de métodos de trabajo y organizaciones; con estrategias válidas y necesarias para provocar un aprendizaje significativo.

Por último, en la secuencia sugerida desde las propuestas oficiales, (MEC, 1992b), se considera al primer ciclo como una continuación del trabajo desarrollado en Primaria sobre los fenómenos en los que interviene el azar, llegando a cierto nivel de formalización de una medida del grado de incertidumbre que le permita asignar probabilidades a través fundamentalmente del recuento. Ya en el segundo ciclo propone la adquisición de una idea más precisa del concepto de probabilidad como medida de lo esperable en la ocurrencia de un suceso y sus posibles aplicaciones, pero sin llegar a su axiomática.

Existen otras secuenciaciones, sugeridas por distintos grupos de profesores, como las tres propuestas recogidas en el libro del MEC (1993), en las que encontramos opciones muy diferenciadas, desde la consideración de los conocimientos probabilísticos y estadísticos como un bloque único, hasta una fuerte tendencia hacia lo estadístico en detrimento de lo probabilístico, retrasando su tratamiento al segundo ciclo. La propuesta *Actividades sobre Azar y Probabilidad*, presentada por Cruz, González y Llorente (1993) como material curricular, esta centrada en el tratamiento de la probabilidad y el azar a través de diferentes experiencias y situaciones, localizando también el tratamiento de estos temas a partir del segundo ciclo.

Educación primaria

Con respecto a la Educación Primaria, el currículum español presentado en el Real Decreto del 1679/91 sobre la regulación de la Educación Primaria (BOE del 13/9/1991), recoge la enseñanza de estos conceptos en un bloque único denominado «Organización de la información». En su desarrollo se concretan los objetivos y los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales para la iniciación del conocimiento estadístico y probabilístico a lo largo de los distintos ciclos de la primaria (MEC, 1992a).

En el desarrollo del bloque encontramos, de nuevo, una mayor carga en la introducción de conocimientos y técnicas elementales de la estadística descriptiva, si bien es cierto que plantea la necesidad de construir el conocimiento probabilístico en interrelación con el propio conocimiento estadístico. El conocimiento probabilístico es iniciado desde la introducción del carácter aleatorio de una experiencia hasta las primeras asignaciones del grado de

probabilidad de un suceso. En la secuenciación sugerida por el MEC, la iniciación en la probabilidad y la caracterización de los tipos de sucesos, se propone en el tercer ciclo de Primaria, sesgando todos los otros ciclos hacia un tratamiento exclusivamente estadístico, en el que se incluyen recuentos, tablas, gráficos e interpretaciones de los datos representados, todo previamente a la introducción de una interpretación probabilística de la información.

En sus orientaciones más generales, acordes como ya dijimos con los presupuestos constructivistas, se plantea la necesidad de partir de la experiencia del niño y de sus conocimientos previos sobre el tema, respetar sus ritmos de aprendizaje y guiar su aprendizaje a través del diseño de una secuencia de actividades, relacionadas entre sí en la medida de lo posible, pero de distintas categorías: actividades de presentación, de desarrollo, de generalización y de profundización. Matiza al final que es útil comprobar que los objetivos se han cumplido al finalizar el proceso.

Más concretamente, para el tratamiento del «Azar y la probabilidad», proponen como introducción idónea partir de la experimentación y análisis de los juegos de azar, confrontando las estimaciones realizadas y los resultados obtenidos. Consideran que los niños de estas edades «ya pueden apreciar el carácter aleatorio de un suceso mediante la observación de fenómenos de la vida cotidiana y mediante la realización de juegos... pueden decidir de forma sencilla e imprecisa el grado de probabilidad de un suceso» y que, por tanto, las actividades apropiadas para «el tratamiento de estos contenidos son en su mayoría lúdicas y motivadoras y suponen el trabajo con objetos concretos y conocidos, por lo cual no ofrecen gran dificultad para su enseñanza y aprendizaje» (MEC, 1992a, p. 94). Podemos percibir la sugerencia de una introducción de este conocimiento a través de un camino puramente intuitivo y experimental que puede provocar su comprensión parcial y desvirtuada.

En la propuesta presentada por la Junta de Andalucía (BOJA del 20/6/1992), autonomía a la que pertenecemos, no hay una presentación explícita de un bloque relacionado con algún aspecto del conocimiento estocástico. Pero, como podemos comprobar están recogidos implícitamente en los distintos objetivos generales. En la colección de materiales curriculares presentados por la Junta de Andalucía para la Educación Primaria (Junta de Andalucía, 1992), podemos señalar, por ejemplo, que entre los objetivos presentados en el área de las Matemáticas hay dos que están claramente vinculados con el aprendizaje del conocimiento estocástico:

(Obj. 1) «Utilizar los códigos y conocimientos matemáticos para apreciar, interpretar y producir informaciones sobre hechos o fenómenos conocidos, susceptibles de ser matematizados.» (Tomo I, p. 103).

*[En primaria]
podemos percibir
la sugerencia de
una introducción
de este
conocimiento
a través de
un camino
puramente
intuitivo y
experimental que
puede provocar su
comprensión
parcial y
desvirtuada.*

(Obj. 6) «Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.» (Tomo I, p.104).

Este hecho se refleja a lo hora de sugerir una cierta organización y secuenciación de los contenidos propuestos desde el Decreto de la Educación Primaria, recogida en el Tomo II de dicho desarrollo. Así encontramos indicaciones del tipo:

En el segundo ciclo y, curiosamente, dentro del desarrollo del bloque «Números y operaciones», la siguiente sugerencia:

- «Exploración sobre la causalidad. Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias» (Tomo II, p. 99).

Ya en el tercer ciclo, y dentro del mismo bloque de «Números y operaciones», encontramos las siguientes indicaciones:

- «Recogida, organización, representación, análisis y valoración de datos de forma cada vez más sistemática. Formulación de sencillas inferencias. Presentación de manera ordenada y clara de los resultados».
- «Aproximación a la idea de probabilidad. Exploración del grado de probabilidad de sucesos sencillos» (Tomo III, p. 100).

En otro bloque distinto «Conocimiento, orientación y representación espacial», pero también en el tercer ciclo, encontramos reflejado el tratamiento estadístico de los datos, de forma muy especial:

- «Representaciones espaciales de ideas y situaciones no espaciales. Elaboración e interpretación de tablas y gráficas estadísticas» (Tomo III, p. 99).

Dicha organización no parece reconocer la problemática específica del conocimiento estocástico cuya naturaleza (Azcárate, 1995) difiere sustancialmente de otros campos del conocimiento matemático, como el numérico o el geométrico. Su presentación, diluida y

dispersa, sin referencia a la necesaria relación entre el campo empírico y teórico para su elaboración, puede producir gran confusión a los profesores a la hora de su tratamiento en el aula.

En el apartado de las orientaciones metodológicas, presentado por la Junta de Andalucía, hay algunas indicaciones referidas a estos temas. Así, indican que los niños del segundo ciclo suelen tener un especial interés por situaciones donde ha de analizarse y preverse la probabilidad de un suceso o la posible repetición de un suceso. Aclaran que, siempre en un tono investigativo y lúdico, se le pueden proponer a los niños actividades tendentes a discriminar lo seguro, lo posible, lo probable, etc. Igualmente se consideran importantes las actividades experimentales sobre modelos de probabilidad, localizadas en el tercer ciclo. En ellas se ha de enfrentar al alumno con experiencias concretas en situaciones de naturaleza probabilísticas, en las que tengan que prever el resultado y comprobarlo experimentalmente, «descubriendo progresivamente que puede saberse qué suceso es más probable, y 'cuánto' más probable es» (Junta de Andalucía, 1992, p. 96).

Hay una cierta tendencia de nuevo hacia el estudio de sucesos fundamentalmente repetibles, en todas las propuestas oficiales. «Se trata de comprobar que los alumnos empiezan a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o sucesos que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición» (MEC, 1992, p. 29), es decir, factibles de ser analizados fundamentalmente desde una perspectiva frecuentista y tratados desde la estadística elemental, considerando la perspectiva clásica como un caso especial en situaciones de equiprobabilidad.

Este planteamiento puede tener ciertos problemas dada la dificultad que supone en un contexto práctico, por un lado, asegurar la equivalencia de los sucesivos experimentos y, por otro, su posible repetición infinita, lo cual lleva

*Gran parte de las
propuestas
curriculares
analizadas
respetan la idea
general de unas
matemáticas
escolares
adaptadas a las
necesidades del
momento actual y
desarrolladas
desde las
perspectivas
surgidas en el
estudio de los
procesos de
enseñanza/
aprendizaje de
las matemáticas*

en muchos casos a resultados contradictorios. Al querer confirmar rápidamente los resultados previstos por el modelo de referencia pueden considerar ciertos sesgos de la intuición probabilística, asociados al uso del heurístico de representatividad, como también comenta Serrano (1993) en su trabajo. Aunque, al dar un papel significativo a las concepciones iniciales de los sujetos en sus orientaciones metodológicas, se facilita la consideración de las predicciones previas formuladas por los alumnos, de carácter subjetivo, como soporte de la enseñanza de la probabilidad, en contraste con las sugerencias relativas a una aproximación frecuencial de la probabilidad.

Reflexión final

Gran parte de las propuestas curriculares analizadas respetan la idea general de unas matemáticas escolares adaptadas a las necesidades del momento actual y desarrolladas desde las perspectivas surgidas en el estudio de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, partiendo de los presupuestos que conlleva una construcción significativa del conocimiento. Todas las orientaciones quedan particularizadas, directamente, al tratamiento del conocimiento estocástico, sin embargo no hay en ningún caso una mención especial sobre los problemas específicos de la comprensión de estos conceptos, ni sobre su naturaleza epistemológica, opuesta en cierta medida a la estructura lógica formal del conocimiento matemático.

En nuestro sistema educativo actual, la probabilidad y la estadística son introducidas en los niveles de secundaria y se pueden diferenciar dos formas de acercamiento a estos saberes matemáticos desde las orientaciones y secuenciaciones de contenidos propuestas y desarrolladas. Una aproximación intuitiva, focalizada en experimentos, juegos de azar o situaciones reales, utilizando conceptos como frecuencia, frecuencia relativa, proporciones numéricas o simetrías, para llegar a definir la probabilidad como límite de la frecuencia relativa. Después de esta fase más experimental e intuitiva de la enseñanza hay una progresión en la introducción de los métodos y conceptos más elaborados. En muchos casos es una presentación operativizada de los conceptos caracterizados, simplemente, por su utilización y sus posibles aplicaciones.

Alternativamente, quizás en niveles superiores, se introducen un número de conceptos básicos como: suceso aleatorio, resultado, suceso elemental, suceso cierto o imposible, espacio muestral, etc., que se consideran que son la base sobre la que se construye la estructura matemática, como si «el sentido de un nuevo saber deba emanar enteramente de los conceptos fundamentales ya conocidos» (Steinbring, 1988, p. 312). Desde esta perspectiva se suele definir la probabilidad en términos laplacianos. A veces hay una secuencia temporal entre estas dos formas de

acercarse al conocimiento estocástico, primero se realiza un trabajo experimental concreto para luego ir desarrollando, sobre esas «intuiciones» primarias construidas, la teoría formal, bien desde presupuestos frecuentistas o bien laplacianos; cuando, en realidad, son simplemente perspectivas diferentes del mismo concepto: el de probabilidad.

En cualquier caso, en los currículos propuestos no quedan explícitamente recogidos dos de los aspectos básicos relacionados con la comprensión del conocimiento estocástico: la noción de suceso aleatorio y el problema del significado de la probabilidad en los posibles contextos de aplicación. Este último aspecto es un tema de gran controversia histórica aún sin resolver que no puede ser ignorado o reducido a una interpretación homogénea del concepto.

El intento de fundamentación del conocimiento matemático producido en este siglo se ha reflejado en diversas posturas filosóficas y epistemológicas sobre la fundamentación de la probabilidad: clásica, logicista, frecuentista, subjetivista, axiomática. Todas estas controversias han promovido interpretaciones diferentes del significado de la probabilidad y de su campo de aplicación. Desde esta visión tan compleja del significado del concepto en su aplicación al mundo real es difícil justificar la introducción de una interpretación homogénea y universal del concepto en el mundo educativo. Al contrario, la escuela debe combinar ideas desde diferentes perspectivas, desde los primeros niveles:

- * Lo estocástico como la matemática de los fenómenos de masa.
- * Lo estocástico como la lógica de la incertidumbre.
- * Lo estocástico como la técnica que transforma los datos en indicadores.
- * Lo estocástico como teoría de la decisión» (Dinges, 1981 p. 51).

Por otro lado, la idea de aleatoriedad y de suceso aleatorio es normalmente considerada como algo ya conocido e intuitivo por los sujetos y no suele ser objeto de estudio en sí misma. La noción de azar o de aleatoriedad no son analizadas ni en relación con su significado en la vida real, ni en relación a como alcanza su modelización matemática. En general, «el experimento azaroso es una idea introductoria que es apoyada matemáticamente y lingüísticamente de muchas maneras, sin desarrollar su significado preciso y la representación subyacente a lo largo de la enseñanza» (Steinbring, 1991, p. 141).

Esto puede tener consecuencias importantes a la hora de la comprensión de una realidad, fundamentalmente azarosa, como la que nos rodea, y para el propio aprendizaje del conocimiento estocástico pues, como nos dicen Konold y otros (1991, p. 2), «la noción de aleatoriedad es ambigua y compleja, pero las variantes del concepto son,

La probabilidad es una materia difícil de aprender y enseñar.

[...]

El aprendizaje de la probabilidad supone para el sujeto una revolución similar a la acaecida en la historia del conocimiento ante su tratamiento.

sin embargo, el corazón del pensamiento probabilístico y estadístico».

Siendo estas dos nociones: la de probabilidad y la de aleatoriedad, las dos ideas básicas sobre las que se apoya toda la estructura matemática del Cálculo de Probabilidades, su significado, no suele ser cuestionado ni analizado al ser introducidos en la escuela. La probabilidad es una materia difícil de aprender y enseñar. La causalidad es lógicamente mucho más clara, pero el azar es una realidad y, por tanto, su tratamiento en el aula es ineludible. El aprendizaje de la probabilidad supone para el sujeto una revolución similar a la acaecida en la historia del conocimiento ante su tratamiento. Los estudiantes han de aceptar la presencia de la incertidumbre como algo inherente a la realidad y adoptar la convención de representar dicha incertidumbre cuantitativamente a través del Cálculo de Probabilidades (Falk y Konold, 1992).

El tratamiento del conocimiento estocástico y la negociación de sus significados en el aula, han de ser desarrollados desde una perspectiva dinámica que refleje, no sólo la interrelación entre la modelización matemática y los hechos empíricos, sino también entre las distintas interpretaciones de su significado (Azcarate, 1995). Un proceso metodológico que refleja una organización sistémica del conjunto de tareas o actividades permite la elaboración comprensiva de los conceptos y la integración de interpretaciones variadas en su desarrollo, su reconocimiento y su contraste.

Referencias bibliográficas

- AHLGREN, A. y J. GARFIELD (1991): «Analysis of the Probability Curriculum», en KAPADIA y BOROVCHICK (eds.), *Chance Encounters. Probability in Education*, Kluwer, Amsterdam.
- AZCÁRATE, P. (1995): *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la Educación Primaria*, Tesis Doctoral inédita, Universidad de Cádiz.

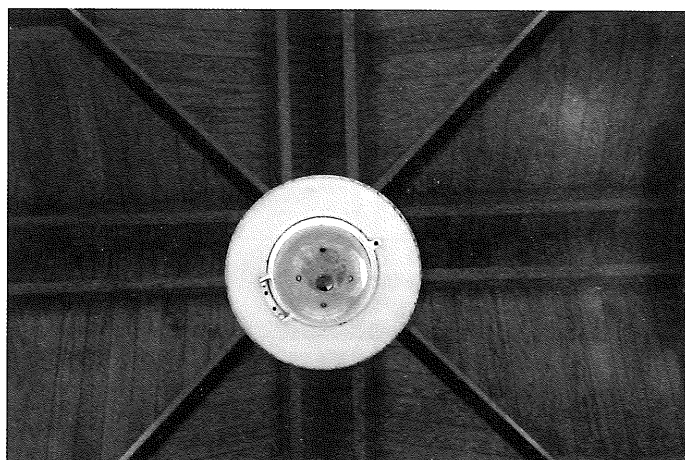
- BISSON, D. (1983): *Du hasard aux probabilités. Quel enseignement des probabilités?*, Memoria de DEA de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Bordeaux, Bordeaux.
- BOE del 13/9/91: *Real Decreto 1679/91, por el que se establecen las Enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria.*
- BOJA del 20/6/92: *Real Decreto 105/92, por el que se establecen las Enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en Andalucía.*
- BROUSSEAU, G. (1986): *Theorisations des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis de estado, IREM de Burdeos, Burdeos.
- CHEVALARD, Y. (1991): *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- COCKCROFT, W. H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan*, Servicio de Publicaciones del MEC, Madrid.
- DÍAZ GODINO, J., M. C. BATANERO y M. J. CAÑIZARES (1988): *Azar y Probabilidad*, Síntesis, Madrid.
- DINGES, H. (1981): «Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Schule», en DÖRFLER y FISCHER (eds.), *Stochastik im Schulunterricht*, Teubner, Stuttgart.
- ENGEL, A. (1988): *Probabilidad y Estadística*, 2 vols., Mestral Universidad, Valencia (Original tomo 1, 1973; Original tomo 2, 1976).
- FALK, R. y C. KONOLD (1992): «The Psychology of Learning Probability», en GORDON y GORDON (eds.), *Statistics for the Twenty-First Century*, Mathematical Association of America, Washington, DC.
- KONOLD, C. y otros (1991): «Nocives views on randomness», trabajo presentado en The Thirteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education, Blacksburg VA.
- GRUPO CERO (1984): *De 12 a 16. Un Proyecto de curriculum de matemáticas*, Grupo Cero, Valencia.
- HOWSON, G. y B. WILSON (dir.) (1988): *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90*, Mestral, Valencia.
- JUNTA DE ANDALUCÍA, (1992): *Colección de materiales curriculares para la Educación Primaria.*
- MARGOLINAS, C. (1993): *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- MEC, (1981): *Programas Renovados de la EGB. Ciclo Superior*, Escuela Española, Madrid.
- MEC (1992a): *Documentos para la Reforma. Educación Primaria.*
- MEC (1992b): *Documentos para la Reforma. Educación Secundaria.*
- MEC (1993): *Propuestas de Secuencias Matemáticas*, Escuela Española, Madrid.
- NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.
- SCHOOLS COUNCIL PROJECT ON STATISTICAL EDUCATION, (1980): *Statistics in your world*, Foulsham Educational, England.
- SERRANO, L. (1993): *Una aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: un estudio de concepciones iniciales*, Memoria de Tercer Ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.
- STEINBRING, H. (1988): «Nature du savoir mathématiques dans la pratique de l'enseignant», en LABORDE, C. (ed.): *Actes du premier colloque Franco-Allemand de Didactiques des Mathématiques et de l'Informatique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- STEINBRING, H. (1991): «The Theoretical nature of probability in the classroom», en KAPADIA y BOROVNICK (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer, Dordrecht.
- THOM, R. (1974): «Matemáticas modernas y matemáticas de siempre», en HERNÁNDEZ (ed.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Universidad, Madrid.
- TRAVES, K. J. y J. WESTBURY (1989): *Study of Mathematics I: Analysis of Mathematics Curricula*, Pergamon Press, Oxford.
- VARGAS, T. y M. DUMONT (1973): *Combinatoire, Statistiques et Probabilités de 6 à 14 ans*, OCDL, París.

J. M.ª Cardeñoso

Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Universidad de Granada

P. Azcárate

Departamento de Didáctica (D. de las Matemáticas)
Universidad de Cádiz



Intersección
(VI Olimpiada Matemática Nacional)