SUMA 20
noviembre 1995, pp. 9-18

Algunas reflexiones sobre nudos conceptuales a propósito del espacio*

Francesco Speranza

ARTÍCULOS

Introducción

Estas reflexiones se refieren a algunos problemas que están en la base del «pensamiento geométrico-espacial». En mi opinión, es importante que cada profesor reflexione sobre estos aspectos, que generalmente se pasan por alto.

I) Hablaremos sobre tópicos que se refieren también a los primeros pasos en el proceso de enseñanza/aprendizaje: por tanto, como se verá más tarde, a menudo, algunos tópicos «teóricos» permiten una cierta clarificación de cuestiones «elementales». Además, las cuestiones conceptuales son muy importantes, incluso desde el punto de vista epistemológico, y en esta perspectiva es útil repensar algunas ideas que se han ido elaborando en el ámbito de importantes tradiciones filosóficas.

II) En este contexto, no se puede pretender la misma precisión del significado a la que todos los matemáticos están habituados: de hecho, una cierta indeterminación semántica puede ser útil, a veces. Aquí querría distinguir entre dos adjetivos, considerados a menudo como sinónimos: *espacial* y *geométrico*:

«Geométrico» se usará en el contexto de una teoría, aunque sea elemental: «conceptos geométricos» (que son el primer paso para una organización teórica), «magnitudes geométricas». «Espacial» se refiere a lo que tiene relación con la experiencia del mundo que nos rodea, se usará para hablar de nuestra forma de ver y de actuar en el espacio, de nuestro hablar del espacio («habilidad espacial»): si bien debe señalarse que algunas tendencias epistemológicas tienden a ocultar esta contraposición. Pero no opondremos «espacial» a «plano», pues muchas veces el entorno en el que actuamos es bi-dimensional.

* Artículo traducido por Florencio Villarroya Bullido de *L'Educazione Matematica*, Año XV, Serie IV, vol. 1, n.° 2, mayo 1994. pp. 95-116. Revista cuatrimestral del «Centro di ricerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari», que amablemente ha autorizado la publicación en SUMA.

Tenemos que precisar este punto. Muchos dicen que la realidad física es, de todos modos, tridimensional y que, por tanto, se debe dar prioridad a las tres dimensiones. No estoy de acuerdo con esta conclusión, incluso cuando actuamos físicamente, operamos normalmente, en el nivel de modelos mentales, y estos pueden ser bi-dimensionales. Por tanto, la dimensión es un carácter de las imágenes mentales espaciales.

III) Recordemos brevemente el «programa de Erlangen». A partir de la constatación de la existencia de geometrías distintas de la geometría euclídea (elemental), por ejemplo la geometría proyectiva y la topología, Félix Klein (1872) propuso una sistematización global: existen muchas geometrías, cada una de ellas basada en un criterio de equivalencia de figuras geométricas: Dado un grupo G de transformaciones, dos figuras se dicen *G-equivalentes* cuando existe un elemento de G que transforma la primera en la segunda. La *G-geometría* es el estudio de las propiedades invariantes respecto del grupo G: en particular, los mismos conceptos geométricos son *relativos al grupo G.* Un concepto es admisible en la G-geometría si su «extensión» (el conjunto de figuras incluidas en ella) es invariante respecto de G. De hecho, podemos considerar significativa una geometría si hay un campo de experiencias (en el sentido más amplio de la palabra: puede tratarse de una experiencia puramente mental) que nos lleva a operar de acuerdo con el grupo G; hay otras geometrías privilegiadas en este sentido (por ejemplo, las ya citadas): pero muchas personas reconocen que, hablando en general, en torno a cada grupo se puede desarrollar una clase de intuición (ver Speranza, 1992).

IV) Cuando hablamos de «concepciones del espacio», no siempre se tratará de teorías matemáticamente elaboradas; sino que, a veces, ni siquiera estarán claramente expresadas. Por esto, tales «filosofías implícitas» pueden condicionar fuertemente nuestro modo de pensar (y condicionar la comunicación entre el enseñante y el estudiante). Esto puede surgir de un pensamiento «primitivo» (en el sentido etnológico o psicológico), o de una enseñanza-aprendizaje pre o extraescolares. El profesor (o el investigador) tiene que comprender sus propias concepciones y analizarlas (y estar abierto a todas ellas); también debe de estar preparado para encontrar en sus alumnos diferentes concepciones: incluso diferentes de unos alumnos a otros[1].

En mi opinión, el mejor modo de abordar el problema de esas diferentes concepciones de espacio consiste en poner en evidencia algunas contraposiciones. Algunas veces son de naturaleza puramente epistemológica (elemental), y las dos alternativas pueden incluso coexistir, en el sentido de que un mismo individuo «aplica» unas veces una, y otras veces otra (por ejemplo, espacio independiente o no independiente). Otras corresponden a diferentes elecciones que se pueden emplear en una teoría geométrica o física (por ejemplo, espacio limitado o ilimitado). Otras se sitúan en un plano decididamente filosófico (por ejemplo, ¿es el espacio una cosa real o una «forma» de nuestra mente?

...el mejor modo de abordar el problema de esas diferentes concepciones de espacio consiste en poner en evidencia algunas contraposiciones.

Espacio no independiente/ espacio independiente

«Espacio no independiente» significa que pensamos primero o esencialmente en los objetos (o en las figuras); el espacio es sólo la coexistencia de estos o estas. Alguno incluso habla de «concepciones relacionales». Por contra, «espacio independiente» significa que la primera cosa en que pensamos es el espacio y después en él, localizamos los objetos (las figuras).

En el pensamiento primitivo, el espacio es no-independiente; igual que para Aristóteles (basta pensar que para Aristóteles es el «lugar de un cuerpo»: la superficie interna que lo circunda).

Platón es más partidario de una visión independiente del espacio: «Hay una primera especie, que es ... no generada, no perecedera ...; hay una segunda, generada y siempre móvil ..., y hay, por fin, una tercera, la del espacio, que no admite destrucción y ofrece un sitio para todas las cosas generadas, ...» (*Timeo*, XVIII).

Posiblemente Platón fue precedido por los atomistas que admitían la existencia del vacío, y de aquí, pasando del plano físico al geométrico, se empieza a pensar en el espacio «en sí mismo».

En un artículo reciente, Manara observa que, mientras Euclides no habla de «espacio», en cambio la palabra aparece a menudo en los nuevos currículos. En realidad, Euclides no concibe el espacio como independiente, sólo considera las figuras en sí mismas (sólo excepcionalmente, por ejemplo en la «demostración» del primer criterio «de igualdad» de triángulos, se consideran dos figuras a la vez). Resulta natural, para el que piensa de este modo, no usar ni siquie-

1 La importancia de la idea de espacio en nuestra cultura está subrayada por las metáforas espaciales, de las que tan ricas son las lenguas indoeuropeas (según algunos, en especial las neolatinas); es decir, situaciones que son no espaciales se describen con palabras que hablan del espacio. Por ejemplo, «punto de vista», «en este punto», «incluir», «trasladar», «forma«, «concentrado», «substancia» (de sub y estar), «cuadrado»... No es así en todas las lenguas, como ha demostrado, por ejemplo Whorf en sus estudios sobre las lenguas indias de América [Whorf, 1936].

ra las palabras que se refieren al «entorno» entero, es decir a la propia palabra «espacio». Así parece Euclides más aristotélico que platónico (la idea de un Euclides platónico es probablemente «propaganda» hecha por los neoplatónicos, uno de los cuales era Proclo).

Hoy por el contrario, al menos entre los matemáticos, la idea de espacio tiene prioridad. Es un ejemplo significativo de la importancia de un análisis de las filosofías implícitas subyacentes a las matemáticas.

También en este sentido, es importante tener presentes los muchos factores que en la época moderna han impulsado (quizá incluso contra su voluntad) hacia el espacio independiente:

- El «sistema del mundo» de Newton.
- La geometría analítica, (no en la forma primitiva de Descartes, sino en el momento en que los continuadores dicen: «fijamos dos ejes en un plano...»).
- Las transformaciones geométricas y después, el programa de Erlangen.
- La consideración de espacios «extraños», estudiados en la geometría del siglo XX.

El espacio en el arte (I)

Las concepciones del espacio han influido en las artes y, recíprocamente, éstas han contribuido a orientar el modo de pensar el espacio. Desgraciadamente, estamos acostumbrados a considerar como ámbitos separados, la ciencia, el arte, la filosofía, mientras en otras épocas, éstas han interactuado más o menos explícitamente (hoy, obviamente de un modo menos evidente: pero entonces es todavía más importante darse cuenta de ello).

Las concepciones del espacio han influido en las artes y, recíprocamente, éstas han contribuido a orientar el modo de pensar el espacio.

De las artes, aquéllas que me parece que pueden dar indicaciones más significativas son, por un lado, la arquitectura y el urbanismo (que actúan construyendo espacios), y por otro, la pintura (que está obligada a representar las tres dimensiones en dos y que, por tanto, se encuentra confrontada con los problemas de las representaciones). Para nuestro propósito, son especialmente interesantes las afirmaciones de Erwin Panofsky (sobre la pintura desde la Antigüedad al Renacimiento) y Pierre Francastel (sobre la pintura del Renacimiento al cubismo) y de Bruno Zevi (sobre la arquitectura): antes de nada, en el primero encontramos indicaciones fuertemente relacionadas con el problema del espacio independiente o puramente relacional.

El ensayo de Panofsky *Die Perspektive als «symbolische Form»* (1924) se relaciona explícitamente con el pensamiento del filósofo Ernst Cassirer: a través de una «forma simbólica» «un particular contenido espiritual se conecta con un concreto signo sensible e identificado íntimamente con este». Según Panofsky, la perspectiva del Renacimiento es la realización visible de una nueva concepción del espacio, de una visión neoplatónica del mundo. Hay que advertir que Panofsky reclama más de una vez algunos aspectos de geometría y pone en evidencia la estrecha interrelación entre espíritu artístico y espíritu científico de los «creadores» de la perspectiva.

Una de las ideas fundamentales para comprender una época de la historia de la pintura es, según Panofsky, la concepción del espacio de aquel tiempo: encontramos algo análogo a nuestra contraposición entre «espacio independiente o no». Sin embargo, en esto Panofsky es más «rígido» al distinguir entre la era antigua y la medieval y moderna: «así como los artistas de la Antigüedad no podían imaginar este espacio sistemático, tampoco los filósofos de la Antigüedad, podían pensarlo [...]. Ninguna [de las teorías antiguas] había llegado a dar una definición de espacio como un sistema de meras relaciones entre altura, anchura y profundidad [...]. La totalidad del mundo es siempre algo fundamentalmente discontinuo [incluso en] Demócrito [y en] Platón [...]». (p. 53). Probablemente aquí Panofsky está pensando en la influencia que la geometría analítica ha tenido sobre las concepciones del espacio[2].

«El arte clásico [...] no ponía juntos pictóricamente en una unidad espacial los elementos singulares tridimensionales materialmente [...] sino que los fundía [...] en un conjunto de grupos. Lo mismo sucedió [con] el helenismo [...] el espacio no se siente como algo capaz de circunscribir y resolver la contraposición entre cuerpos y no-cuerpos [...]» (p. 51).

Después Panofsky examina la pintura medieval, aquélla que para nosotros supone un alejamiento del naturalismo de la Antigüedad tardía, para él es «componer una unidad real que antes se había configurado como una multiplicidad», unidad obtenida, por ejemplo con procedimientos «colorísticos y luminosos; Proclo (410-482) había afirmado que «el espacio no es otra cosa que la luz más sutil» (pp. 51-52).

Con el florecimiento de la pintura toscana, a partir de mediados del siglo XIII, se advierte la emergencia de un

2 Algunas veces, los matemáticos son incluso demasiado «tímidos» al considerar los profundos cambios que en el pensamiento se han producido por el desarrollo de las matemáticas. La separación de las culturas, que pesa de modo devastador en la cultura de hoy, es un obstáculo para estas interacciones, y por tanto, es aún más urgente reflexionar sobre estos temas.

nuevo sentido de la espacialidad (que se refuerza con los elementos arquitectónicos, presentes con frecuencia en la pintura), de la unidad compositiva: Panofsky cita, por encima de los demás a Duccio da Boninsegna (c. 1255-c. 1318), Giotto (1266-1337) y Ambrogio Lorenzetti (c 1290?-1348?). En estos pintores se va desarrollando gradualmente una perspectiva, no todavía «matemática», sino probablemente empírica, capaz, sin embargo, de «unificar el espacio» de un modo cada vez más sistemático.

Con el siglo XV, la teorización matemática de la perspectiva (L. B. Alberti, 1435) «llega a realizar plenamente, incluso en el plano matemático, la imagen del espacio, que hacía mucho tiempo que había sido unificada» (Panofsky). Es sabido que la «perspectiva matemática» no corresponde exactamente a la visión efectiva, debido a que la retina, incluso si sólo una pequeña parte de la superficie interna del ojo se interesa en la visión, no es plana. Las técnicas para resolver este problema las conocían ya en la Antigüedad (por ejemplo, los constructores de templos). Haber renunciado a estas técnicas en favor de una perspectiva rigurosamente matemática es un signo de una nueva concepción del espacio, en el umbral de una renovada tradición platónica, por la cual se considera el mundo de las ideas, con su perfección ultraterrena, como la verdadera realidad. Según Francastel: «[...] Antes de Brunelleschi y de Paolo Ucello [...] no se comprendía que las relaciones geométricas y matemáticas creaban un puente entre cosas de diferente naturaleza [...] El hecho de que en el siglo XV, grupos de artistas y científicos prosiguiendo las investigaciones iniciadas en el período medieval, descubrieran que no sólo las cosas, sino también el vacío podía ser medido, y que entre el espacio y las cosas existe una identidad racional y no substancial, [...], dio lugar, no solamente, a una nueva pintura, y una nueva arquitectura sino también a una nueva sociedad y [...] a un nuevo mundo». (pp. 31-32). «Por primera vez después de Grecia, se asiste a la elaboración de un sistema fundado en una visión racional del mundo [...]». (p. 105).

Según Argan, con Brunelleschi, empieza una nueva concepción del espacio en la arquitectura (Argan, 1946): «el espacio [...] está por todo, es, a la vez, continente y contenido, envolvente y es envuelto». (Francastel, 1950, p. 27).

En el siglo XV, el espacio se convierte en el protagonista de la propia pintura (Van Eyck, Masaccio, Beato Angélico,...) y es significativa, una vez más, la presencia constante de la arquitectura, sobre todo, si se tiene presente que, como observa Zevi, el espacio es propiamente el tema esencial de la obra arquitectónica. Algún tiempo después, Pomponio Gaurico expresará de modo clarísimo el principio del espacio independiente en el arte: «Atqui locus prior necesse est quam corpus locatum, Locus igitur primus disegnabitur».[3]

Hablar de espacio absoluto significa afirmar que es posible individualizar cada punto en sí mismo; hablar de espacio relativo quiere decir que un punto puede ser individualizado sólo en relación con algún objeto (es decir con un sistema de referencia).

3 Pero es necesario que el espacio exista primero, por tanto, el Espacio se delimitará en primer lugar.

Se observa como contraste, que los manieristas conocerán bien la *técnica* de la perspectiva, pero el concepto de la pintura cambiará profundamente. Francastel observa: «Se llegará así, al principio del siglo XVI, a una visión del espacio más escenográfica que euclídea [...]» (p. 106).

Todavía, la importancia del espacio se vuelve a encontrar, por ejemplo, en las obras del período italiano de El Greco, y en la madurez de Vermeer.

Espacio absoluto/espacio relativo

Hablar de espacio absoluto significa afirmar que es posible individualizar cada punto en sí mismo («la astronave intergaláctica n.° 1 está exactamente en el punto en que estaba la n.° 2 hace un año»); hablar de espacio relativo quiere decir que un punto puede ser individualizado sólo en relación con algún objeto (es decir con un sistema de referencia).

Esta contraposición ha sido fundamental en la historia de la física. Incluso cuando pensamos en términos terrestres, tenemos un sistema seguro de referencia «natural»: por tanto, pensamos en términos de espacio absoluto (lo que es más espontáneo para un niño). Se ha necesitado pensar en términos extraterrestres para llegar a concebir el espacio relativo (¿Parménides?, ¿los atomistas? ¿Nicola de Cusa?). Galileo pensaba en términos de espacio relativo para refutar a los aristotélicos; pero Newton volvió al espacio absoluto como soporte de su dinámica (por ejemplo pensemos en el principio de inercia). Leibniz se oponía a él con el «nuevo buen sentido»; las dos concepciones han funcionado a su vez, como un obstáculo epistemológico, una respecto de la otra.

La contraposición se puede explicar desde el punto de vista del programa de Erlangen: el espacio absoluto es aquél, en el que el grupo fundamental se reduce a la identidad; la relatividad del espacio «se mide» basándose en el grupo fundamental.

Para Einstein «espacio absoluto» hay que emparejarlo con «espacio independiente», y «espacio relativo» con «espacio no independiente»: es una hipótesis sugestiva, pero negada por la historia: el espacio del pensamiento primitivo (como el de Aristóteles) es absoluto y no-independiente; el espacio de la geometría elemental de hoy es relativo e independiente (al menos después de Klein).

Espacio homogéneo o no-homogéneo. Espacio isótropo o anisótropo

Un espacio se dice homogéneo si todos sus puntos son equivalentes; un espacio se dice isótropo si todas las direcciones que pasan por un punto son equivalentes.

El espacio de nuestra experiencia física, no es isótropo, (hay una dirección privilegiada: la vertical); puede considerarse homogéneo si nos encerramos en experiencias limitadas y bastante descontextualizadas (por ejemplo, olvidando que existen las paredes de la habitación).

El espacio de la cosmología aristotélica es no-homogéneo y no-isótropo (la Tierra no equivale a las demás esferas celestes, y la dirección arriba/abajo está privilegiada), el de la geometría euclídea es homogéneo e isótropo. Koyré pone el acento en la revolución cusiana-galileana-newtoniana que ha «impuesto» a la física la adopción de la geometría euclídea.

Las dos contraposiciones se pueden interpretar en el programa de Erlangen: un espacio es homogéneo cuando su grupo fundamental es transitivo (dados dos puntos, existe una transformación que lleva el uno al otro); y es isótropo cuando el subgrupo que deja un punto fijo opera transitivamente en las direcciones que salen del punto.

Por encima de todo, una tarea importante en la escuela elemental es promover y cuidar el paso de un espacio anisótropo (y no homogéneo, de algún modo) del niño al espacio isótropo (y homogéneo) de la geometría.

Espacio limitado/espacio ilimitado

Hay bastante confusión, en la literatura clásica, sobre estos términos: habitualmente se pensaba en un espacio en el que las distancias tenían (o no) un límite superior (lo que quiere decir que se debía de tratar, antes que nada, de un espacio métrico). Pero «limitado» también puede significar «dotado de un límite» (una frontera), y esto nos lleva a una distinción topológica (es un claro ejemplo de como la matemática más avanzada puede aportar luz sobre los modos de pensar anteriores).

El pensamiento griego, al menos en la mayoría de los casos, trata de rechazar lo «ilimitado» por considerarlo una forma de imperfección. Para Aristóteles, más allá del cielo de las estrellas fijas no hay espacio.[4] Por tanto, la superficie externa del cielo de las estrellas fijas no es, hablando en términos modernos, un «confín»: aparece aquí la «infantil» objeción atribuida a Architas «y si, una vez llegado allí, extendiera mi mano ...».

El pensamiento griego, al menos en la mayoría de los casos, trata de rechazar lo «ilimitado» por considerarlo una forma de imperfección. Para Aristóteles, más allá del cielo de las estrellas fijas no hay espacio.

Otros filósofos posteriores han admitido, un límite en el cosmos, pero sin embargo, con la existencia de un «espacio» fuera de él (Sambursky, 1956). El espacio de la geometría (al menos de Euclides en adelante) es *potencialmente* ilimitado: por tanto el espacio de la geometría está profundamente diferenciado del de la cosmología (pensemos también en las cuestiones de homogeneidad e isotropía). La separación entre la geometría y la física duró hasta la edad moderna: «La Matemática no es el estilo de la Naturaleza», «a la Naturaleza no le convienen las sutilezas matemáticas». Se ha observado (Cornford, 1936) que el cosmos finito ha sido un obstáculo epistemológico para poder aceptar el espacio infinito de la geometría euclídea. Y este era un obstáculo epistemológico para poder aceptar el espacio limitado de muchas teorías relativistas.

La mayor parte de las revisiones de la geometría euclídea, de finales del siglo XIX, introducen explícitamente, como término primitivo, el de «recta» ilimitada. Con ello, nos alejamos (respecto de la idea de «recta terminada») de la experiencia física y psicológica; pero este «salto» se explica admitiendo el infinito en acto, ahora habitual en las matemáticas (en el ámbito geométrico, la geometría proyectiva también ha hecho su contribución); y con una mayor sencillez *lógica* de la idea de recta, que puede ser pensada independientemente de una estructura de orden.[5]

4 Incluso prescindiendo de la negación aristotélica del vacío, la idea no es realmente tan «extraña»: una región del espacio vacío se puede considerar como la posición potencial de un cuerpo, pero de un cuerpo fuera del cosmos (que incluye todo), sería una contradicción en los términos.

5 Ocurre bastantes veces que entre dos conceptos relacionados, aquél que es psicológicamente más sencillo, es más complejo desde el punto de vista lógico.

El espacio en el arte (II)

Según Erwin Panofsky, el arte grecorromano, coherente con su opción filosófica, huía de la representación del infinito.

Con el cristianismo, hay un infinito en acto, si bien inicialmente limitado a lo divino; pero Duhem observa que «[...] entre las dos proposiciones "el infinito potencial no es contradictorio", "el infinito puede ser realizado en acto», los lógicos del siglo XIV [...] levantaron una barrera [... que] la hemos visto caer; no de golpe [...], sino arruinándose poco a poco en el transcurso de los años, desde 1350 hasta 1500».

También en este punto, juega el arte un papel esencial: también en este sentido la perspectiva representó el papel de forma simbólica. Probablemente, hasta que la perspectiva empírica se orientó hacia la técnica del eje de fuga,[6] la cuestión del infinito pudo quedarse en la sombra, pero con el descubrimiento del punto de fuga, *el infinito se hace representable*, superando así, también, el infinito potencial de Euclides: «El espacio infinito del mundo convertido en una realidad accesible al espíritu» (Francastel). De nuevo, la intuición artística ha precedido a la ciencia en la sustitución del cosmos cerrado de Aristóteles por la geometría del espacio de Euclides:

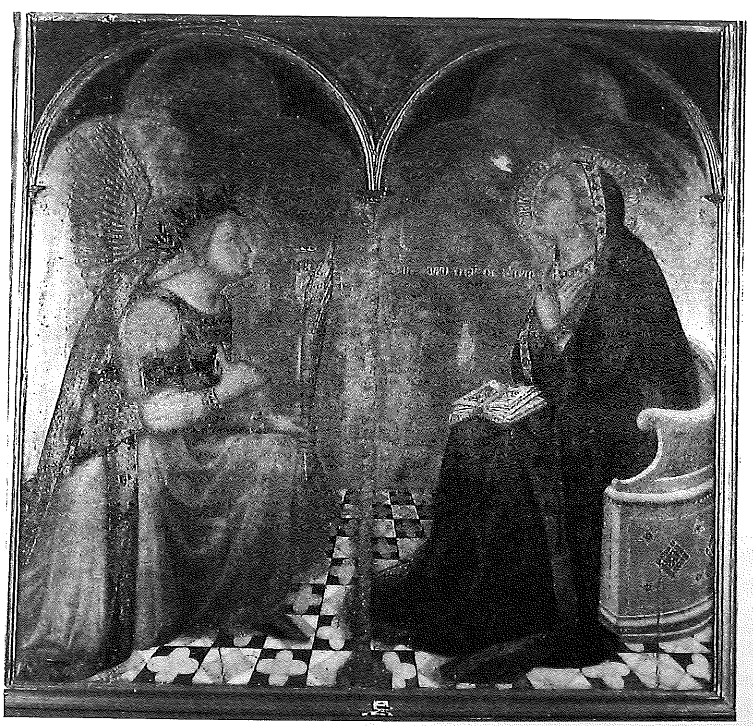
«Los astrónomos del Renacimiento descubrieron los espacios vacíos del universo: pero antes que Copérnico y Galileo, los arquitectos y los pintores tenían ya la sensación y la experiencia de esta extensión transparente que la geometría construye y mide» (Francastel).

La afirmación de la idea del infinito en la pintura, es estudiada además de por Panofsky y Francastel, por el sabio Claude Frontisi, que observó que en los primeros tiempos (por ejemplo en la «Anunciación» de Ambrogio Lorenzetti, 1344), los artistas, como si estuviesen molestos por haber «descubierto el infinito», lo ocultaban con un fondo de oro, que simbolizaba una dimensión ultraterrestre (anticipando la distinción del Cusano entre el *infinitum* divino y el *indeterminatum* espacial). Pero un siglo después, Alberti dirá: «sunt qui [...] aurum putant quandam historiae afferre maiestatem. Eos ipse plane non laudo».[7]

Frontisi observa que, hacia el final del siglo XV, esta «representación del infinito» queda limitada a la refiguración de la divinidad: con Benozzo Gozzoli (frescos del palacio Medici-Riccardi de Florencia), también se aplica a lo cotidiano.

6 Según esta técnica, las imágenes de las rectas paralelas de un mismo plano horizontal, convergen en un punto, pero éste, depende del plano: varía en una recta vertical. (Panofsky).

7 «algunos piensan que [...] el oro añade alguna majestad a la historia. Yo, ciertamente, no les alabo».



Ambrogio Lorenzetti. *Anunciación* (1344)

Espacio finito e infinito

Aquí «finito» quiere decir «formado por un número finito de puntos».

Probablemente la más antigua concepción del espacio, estaba en esta línea; la crisis de los inconmensurables impuso un nuevo pensamiento general. La geometría aventajó a la aritmética, porque ésta no podía representar la riqueza de los entes geométricos.[8] Euclides geometrizó la aritmética y el álgebra (hasta el siglo XIX hay que esperar, para asistir al regreso de la aritmética: pero, en mi opinión, todavía está por construir una presentación equilibrada entre las dos grandes áreas).

Hoy se sabe que existen «geometrías finitas» que son (a nivel axiomático) modelos alternativos de sistemas axiomáticos más sencillos. En la práctica, su aplicabilidad no vas más allá de los axiomas de incidencia (y de paralelismo), debido a que en los casos más significativos son modelos que se pueden construir sobre un cuerpo, y se sabe que no existen cuerpos ordenados finitos.

Por tanto, pueden existir espacios finitos a un nivel de pensamiento muy elemental y a uno muy abstracto; aquí, de nuevo, pueden aparecer obstáculos epistemológicos funcionando en sentidos opuestos (el pensamiento elemental frente a la aceptación de una figura como un conjunto infinito de puntos; y esta idea, una vez aceptada, contra las geometrías finitas).

Se observa que, desde un punto de vista «experimental», una afirmación como: «un espacio tiene un número finito de puntos» no es falsable, porque después de haber «seleccionado» un cierto número de puntos, si no puedo agotarlos todos, no se si en cierto momento acabará o no la selección de puntos. De acuerdo con el «falsacionismo ingenuo» esta afirmación no podría ser incluida como axioma de una teoría científica (una teoría científica debe necesariamente estar «disponible» para la falsación).

...pueden existir espacios finitos a un nivel de pensamiento muy elemental y a uno muy abstracto...

8 (Sólo como divagación, puesto que la historia no se hace con los «sí»): Y ¿si los griegos hubieran elegido (en lugar de renunciar a aplicar su aritmética a la geometría) renunciar a algunas otras partes de la geometría?

Espacio como conjunto de puntos o como continuo irreducible

¿Hay que pensar en el espacio como un conjunto de puntos o como un «conjunto irrompible» como la *durée* de Bergson?

En la concepción proto-pitagórica, el espacio era, probablemente, un conjunto de puntos-átomos, en número finito. Si se abandona la hipótesis de finitud, se puede pensar en un sistema de infinitos puntos sin dimensiones, pero esto habría chocado con el rechazo de los griegos del infinito, en particular del infinito *en acto*. Además, algunas paradojas de Zenón, probablemente, tienden a rechazar esta hipótesis (la flecha, el estadio). Aristóteles se preocupó en refutarla, más tarde, (basándose en el «sentido común» de las sucesiones finitas, como si los puntos de una recta fuesen seguidos unos de otros, como las cuentas de un collar); concluye diciendo que «no se puede pensar el continuo como compuesto de indivisibles, y en particular, no se puede pensar que una línea esté compuesta de puntos». Si en una recta se fija un punto, ya no hay una recta, sino dos.

Euclides en sus *Elementos* tuvo cuidado de no contradecir a Aristóteles, por ejemplo, dice que «los extremos de una línea son puntos», pero nada más; nunca habla del «lugar de puntos tales que...». Se puede decir que para Euclides, una línea está *potencialmente* constituida por puntos.

Con la plena entrada en funcionamiento del método de las coordenadas, el espacio tiene que ser considerado como el conjunto de sus puntos, y las figuras geométricas como «el lugar de los puntos tales que...». Hoy estamos acostumbrados a leer todo en términos de conjuntos: es un caso típico en el que dos filosofías implícitas, (la conjuntista, ligada a la geometría analítica, y la aristotélico-euclídea), pueden entrar en colisión, sobre todo a nivel didáctico.

Para juzgar sobre la naturaleza de ambas hipótesis, también hay que tener presente que los propios puntos son «figuras geométricas» (idealización de objetos físicos muy pequeños); de hecho, las figuras geométricas están muy lejos de la experiencia común (más que las líneas y las superficies).

En los años veinte, Whitehead elaboró una teoría del espacio-tiempo basada en la inclusión de «regiones» y no en la pertenencia de los puntos e instantes al espacio y al tiempo. Después de todo, no tenemos la experiencia de lo que puede ser un instante, sino sólo de un intervalo corto (que son los que están medidos aproximadamente). Bergson admite la reducción del espacio a «indivisibles», pero no del tiempo, lo que ha permitido elaborar recientemente otras «geometrías sin puntos».

El espacio ¿es real? o ¿es una forma de nuestra sensibilidad? (o...)

Se presenta como una «contraposición fuerte», desde Platón (que en el *Timeo* considera el espacio como «la tercera entidad», entre el mundo de las ideas y el de las cosas sensibles), hasta Newton que en el *Scholium generale* a los *Principia* lo llama *sensorium Dei*, el espacio es una realidad. Al contrario, Kant considera el espacio como «una forma de la sensibilidad», algo que está en nosotros, una condición para organizar la experiencia. Con la sugestiva imagen de Trudeau, el espacio sería un «procesador de datos».

Confrontado con estas contraposiciones, cualquiera puede llegar a pensar: «No tengo ningún interés en esto, yo hago matemáticas, habrá quien querrá interpretar lo que digo de un modo y quien de otro». Creo que esta es una posición simplista. Puesto que algunas de estas contraposiciones se reflejan inmediatamente en el enfoque que se dé al tratamiento de la geometría (por ejemplo, considerar o no las figuras como conjuntos de puntos). Entonces, cuando nos encontramos confrontados con una contraposición como la anterior, no es indiferente elegir entre Platón y Kant. En algunos casos, desde el primer punto de vista la elección es obligatoria, en otros es (o debe ser) irrevocable. En particular, la decisión es importante cuando *se enseña* geometría.

Pero la geometría siguió después de Kant: cómo éste había puesto en crisis las concepciones precedentes, la llegada de las geometrías no euclídeas ha puesto en crisis a Kant, ¿en qué punto estamos?

Helmholtz, por ejemplo, reconoce que hay «formas *a priori*», pero que éstas no pueden tener un contenido predeterminado (para Kant esto sería la geometría euclídea); en otras palabras es un *procesador de datos* pero, mientras en la idea de Kant, ya estaría dotado de un software, en la nueva concepción el software se va formando a través de la experiencia, o mejor todavía en la interacción entre la experiencia y lo que ya existe en nuestra mente (Enriques, Piaget).

En esta contraposición (convertida en «trilema»), me parece que se puede y se debe hacer una elección: estoy decididamente por la tercera vía. Es lo que se llama, comúnmente, «empirismo en geometría», pero sería más justo incluirlo en el «racionalismo experimental» que, según Enriques, es la concepción fundamental subyacente a la ciencia a partir de Galileo. Lo que nos permite evitar a la vez, la Escila del idealismo (el destino de los kantianos), y la Caribdis del sensismo como el de Sexto Empírico (para el que la geometría no tiene sentido, ya que en la realidad no existen objetos que tengan sólo longitud y no anchura y profundidad).

De hecho, el espacio no es algo que de pronto se necesite «aprender», ni tampoco es una pura y simple estructura mental (o neurológica); al contrario, tiene que ser «formado» con estrategias adecuadas.

Esta tercera vía, en mi opinión, da especial importancia a la enseñanza y al aprendizaje. De hecho, el espacio no es algo que de pronto se necesite «aprender», ni tampoco es una pura y simple estructura mental (o neurológica); al contrario, tiene que ser «formado» con estrategias adecuadas.

El espacio en el arte (III)

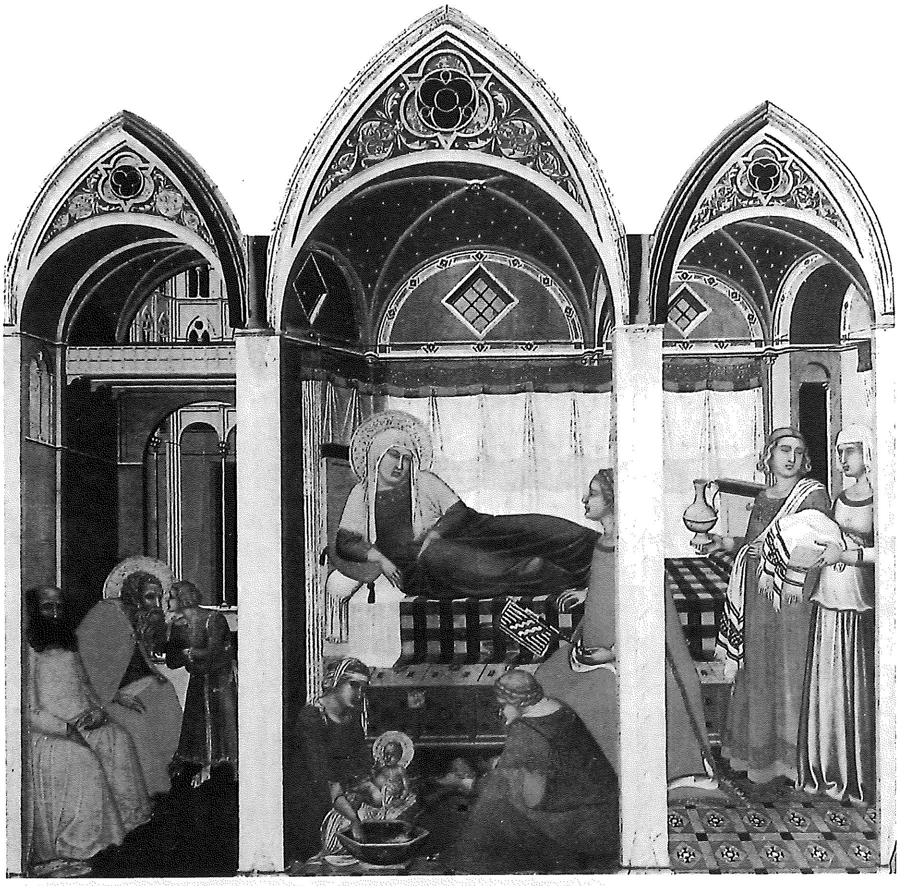
Estamos acostumbrados a pensar en la geometría analítica como en un tema relativamente avanzado: tradicionalmente sólo se enseñaba en los cursos superiores de la secundaria, si bien en algunas escuelas no se llega nunca. Esto se debe a la pretensión de tratarla en un contexto organizado lógicamente y, por tanto, después de haber aparecido otros muchos temas: desde la geometría euclídea hasta los números reales; pero existen numerosas situaciones que claramente preludian el método de coordenadas, empezando por algunos juegos, como el de barcos, justamente así aparecen en los nuevos currículos para la escuela elemental y secundaria. Aquí nos gustaría mencionar una anticipación de la geometría analítica utilizada en la pintura, sobre todo en la toscana del siglo XIV.

Entre los varios métodos empleados por los artistas para «construir», para «unificar» el espacio, uno fue verdaderamente genial, debido a los Lorenzetti, y después adoptado por la mayoría de los artistas: representar sobre el plano horizontal un suelo o una alfombra de diseño cuadriculado. Normalmente, se cita como prototipo la *Anunciación* de Ambrogio de 1344, pero fue precedida por un fresco en la basílica inferior de San Francisco de Asís y por la predela de la *Storie dell'ordine carmelitano* de Pietro, de 1329. Se trata de cinco compartimentos (en la pinacoteca nacional de Siena, justo en frente de la *Anunciación*): en el primero podemos ver un suelo y una cubierta con cuadros, y las rectas que deben de concurrir en el punto de fuga principal, en vez de paralelas, están inclinadas hacia el compartimento central (así, el borde de la cubierta que cae horizontalmente, da la imagen «real» del cuadro); en los dos compartimentos de la derecha se tiene una situación análoga, también con una inclinación hacia el centro; y lo mismo pasa con los techos, en los que líneas análogas están inclinadas hacia abajo. La representación en perspectiva está así realizada mediante cuatro afinidades. Todavía es más sorprendente la aplicación de este principio en el políptico *El nacimiento de la Virgen* (1342), en el Museo de la Catedral en Siena: los lados derecho e izquierdo, son las dos mitades de la misma escena, dividida por una columna que forma parte de la estructura: una persona está un poco de una parte y un poco de la otra.[9]

9 Sin embargo, en otras pinturas, por ejemplo en una que hoy está en Zagreb, también Pietro emplea la perspectiva central.

De este modo, no sólo se da la sensación de profundidad y la organización perspectiva del espacio, sino que para cada persona, para cada detalle se precisa la posición (y queda abierta la posibilidad de representar un personaje más grande de lo que le corresponde por su posición, para destacar su papel). Si el pintor hubiera querido hacer simplemente una decoración, podría haber inventado cualquier cosa más «brillante» que un sencillo suelo pavimentado.

También en este caso, la intuición de un artista ha precedido (en unos 300 años) a la formulación precisa de un matemático (las coordenadas cartesianas). En este punto (¡metáfora espacial!) me parece que se debe revaluar la opinión de Panofsky sobre la «incapacidad» de todas las concepciones espaciales de la Antigüedad: antes de la organización según Lorenzetti-Descartes, el espacio puro de Demócrito y de Platón y el vacío informe; después el espacio está organizado, es una prefiguración de lo que la física llama hoy «campo».



Ambrogio Lorenzetti.
El nacimiento de la Virgen
(1342)

Bibiografía

ALBERTI, L. B. (1435): *De Pictura.*

ARGAN, G. C. (1946): «The Architecture of Brunelleschi and the Origins of Perspective Theory in the Fifteenth Century», *Journ. of the Warburg and Courtauld Inst*, IX.

ARISTÓTELES, *Física.*

CAPEK, M. (ed.) (1976): *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston.

CAPEK, M. (1976): «Introduction», en M. CAPEK, *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston.

CORNFORD, F. M. (1936): «The invention of space», en M. CAPEK, *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht-Boston, 3-16, 1976.

CASSIRER, E. (1923 y sig): *Filosofia delle forme simboliche*, La Nuova Italia, Firenze.

DUHEM, P. (1909): *Études sur Léonard de Vinci*, II.

ENRIQUES, F. (1906): *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna.

EINSTEIN, A. (1954): «Introduzione», en JAMMER, *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano, 1954.

FRANCASTEL, P. (1950): *Lo spazio figurativo dal Rinascimento al Cubismo*, Einaudi, Torino.

FRONTISI, C. (1992): «Figures de l'infini: l'exemple de la peinture toscane du XIV et XV siècles», en F. MONNOYEUR (ed), *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Belin, París, 1992.

JAMMER, M. (1954): *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano.

MANARA, C. F. (1988): «La Matematica nella scuola secondaria superiore», *L'ins d. mat. e d. scienze int*, 11, 686-703.

MENGHINI, M. y L. MANCINI PROIA (1988): *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte*, CNR, TID.

NEWTON, I. (1687): *Principi matematici di filosofia naturale*, UTET, Torino.

PANOFSKY, E. (1924): *La prospettiva come forma simbolica*, Feltrinelli, Milano.

PLATÓN, *Timeo.*

POINCARÉ, H. (1902): *La ciencia y la hipótesis.*

POMPONIO GAURICO, *De sculptura.*

SAMBURSKY, S. (1956): *Il mondo fisico dei Greci*, Feltrinelli, Milan.

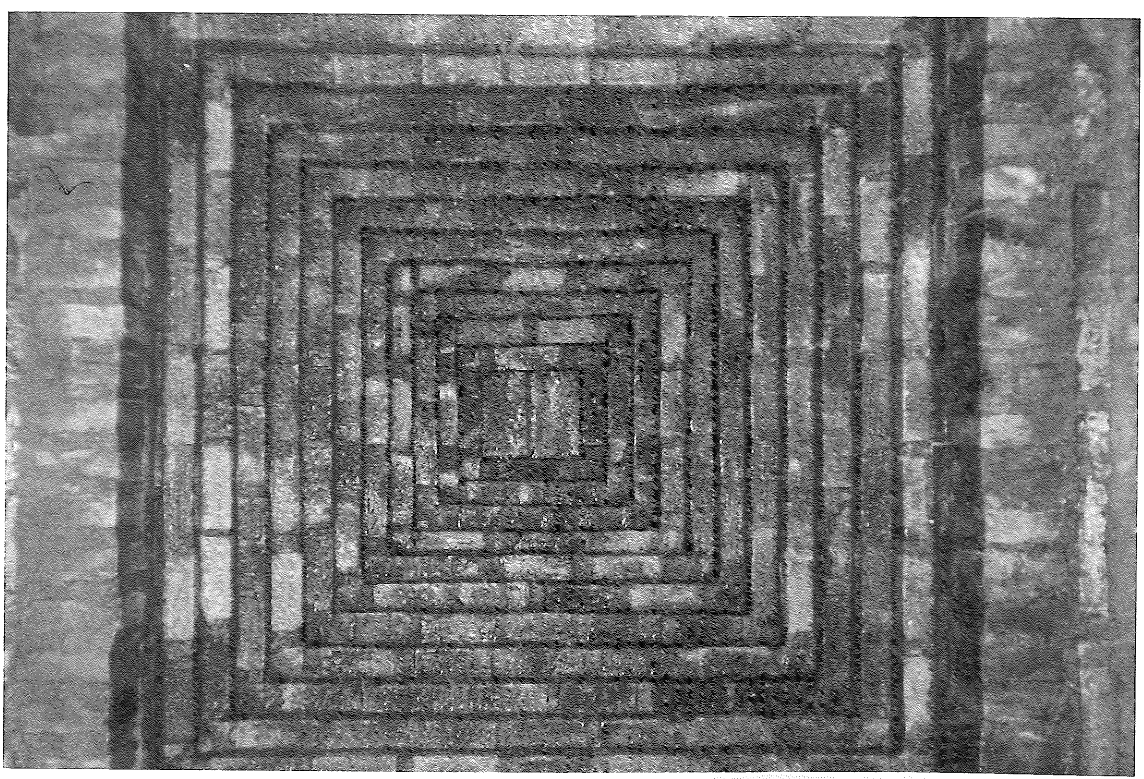
SPERANZA, F. (1992): «La «rivoluzione» di Felix Klein», *Atti sem. Epistemologia della Matematica*, CNR-TID, 269-286.

WHORF, B. (1936): «Un modello d'Universo degli indiani d'America», en *Linguaggio, mente, realtà*, Einaudi, Torino.

ZEVI, B. (1948): *Saper vedere l'archittetura*, Einaudi, Torino.

Francesco Speranza
Universidad de Parma

Traducción:
Florencio Villarroya
IES Miguel Catalán
de Zaragoza
Sociedad Aragonesa
Pedro S. Ciruelo de
Profesores de Matemáticas



Cuadrados en fuga
(VI Olimpiada Matemática Nacional)