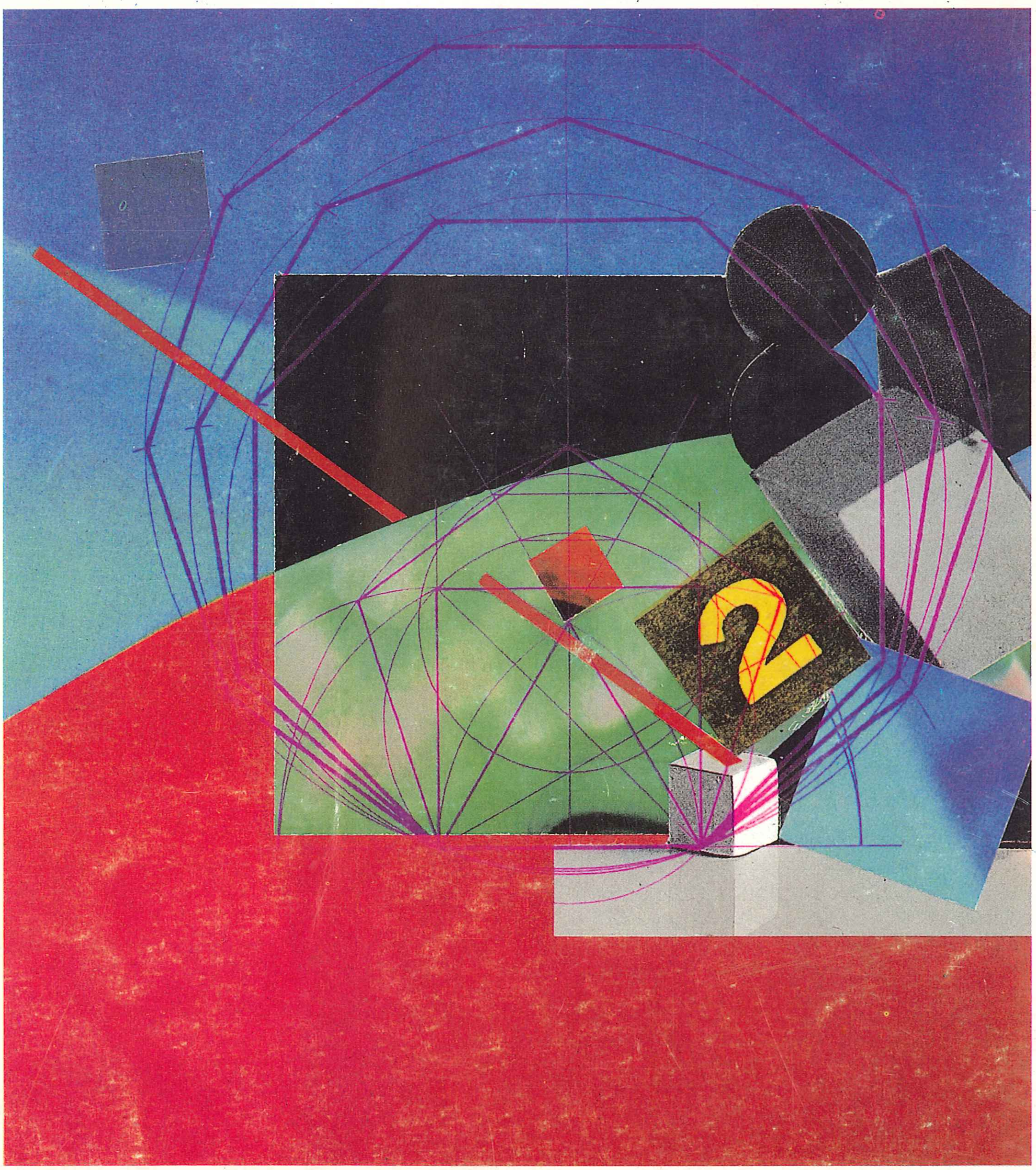
# SUMA

Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Año I. Vol. I. 2 Febrero 1989



## PANEL DE COLABORADORES

SUMA
revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
n.º 2, año I, vol. I febrero 1989

*Edita*
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas:

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez.
Apartado 1160. 41080-Sevilla.

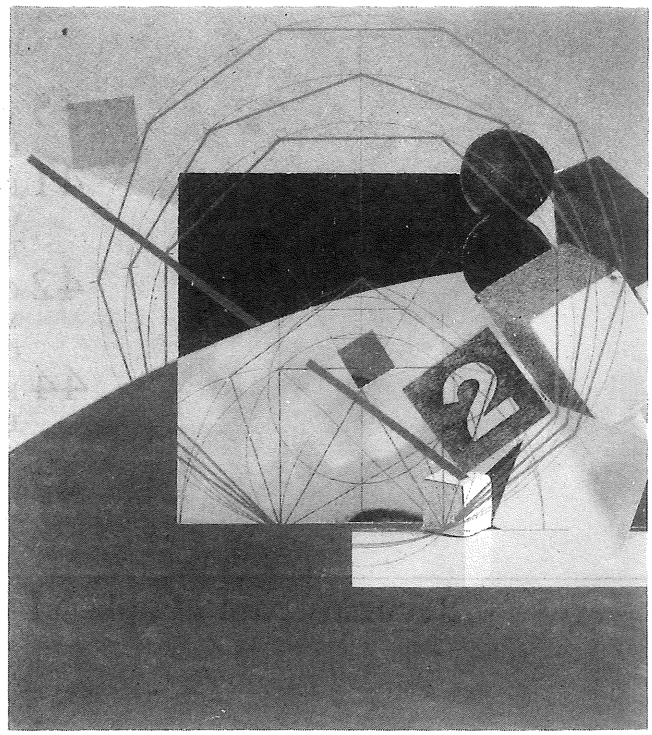
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «P. Sánchez Ciruelo».
Presidente: Rosa Pérez García.
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza.

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton».
Presidente: Luis Balbuena Castellano.
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife).

# SUMA

Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Año I. Vol. I. Febrero 1989

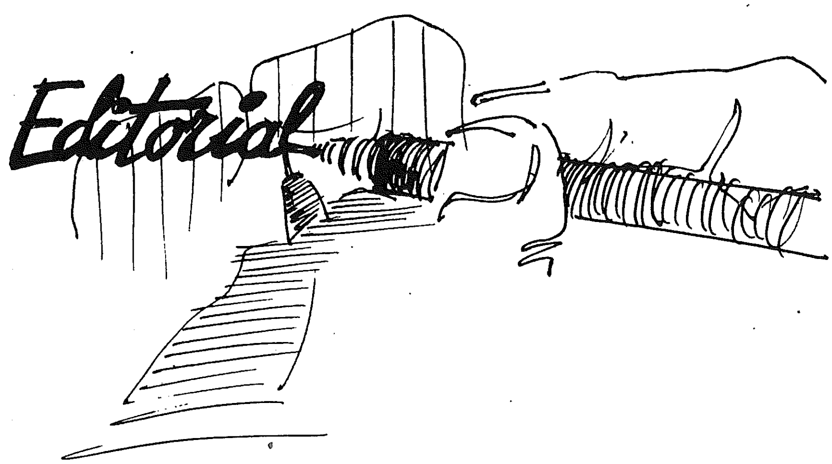


*Depósito legal*
Gr. 752-1988

*Impresión*
GRAFSUR, Armilla (Granada)

*Suscripciones*
Revista SUMA
Apdo. 1017. 18080-Granada

*Condiciones de suscripción*
Particulares: 2.500 PTA (tres números).
Centros: 3.000 PTA (tres números).
Números sueltos: 1.200 PTA.




Si en el número 1 hacíamos la presentación de esta Revista y describíamos el camino seguido hasta hacerla realidad, es lógico que en éste queramos dar a conocer la línea que pretendemos trazar.

*SUMA* tiene un subtítulo: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esperamos recibir artículos, ideas, recursos, información, etc., sobre todo lo concerniente a los problemas que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tiene, actualmente, planteados.

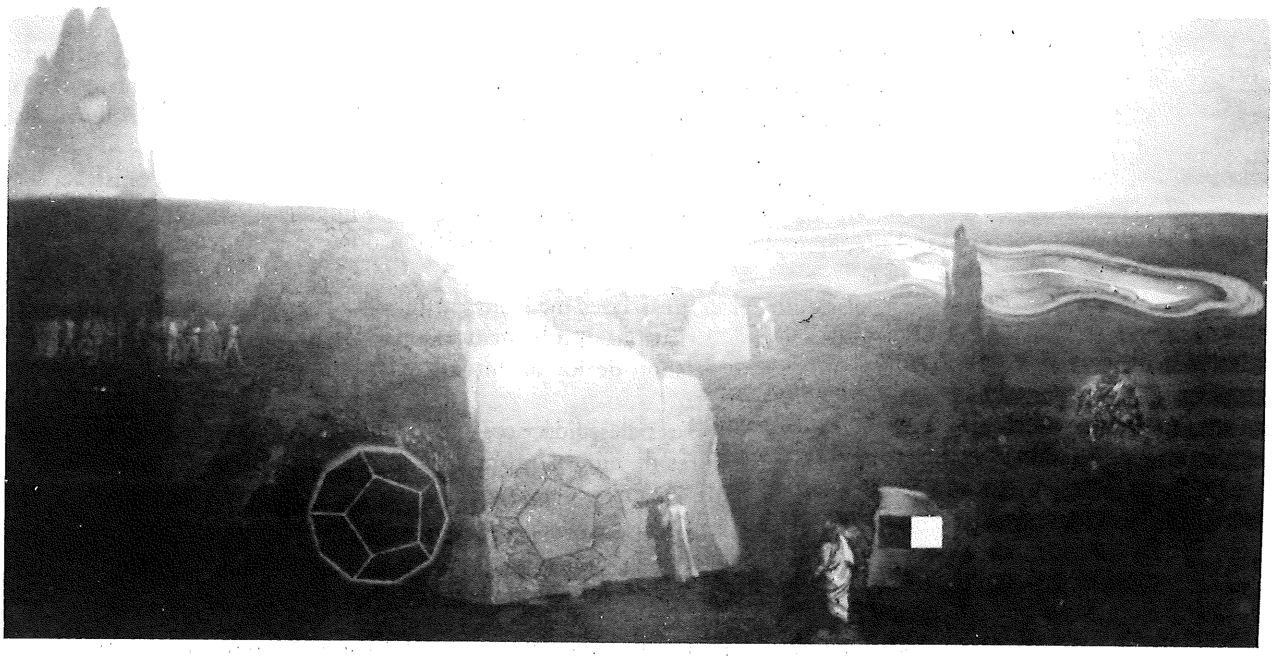
Nos gustaría publicar trabajos que no tengan como únicos protagonistas a los contenidos de matemáticas, estando especialmente interesados en difundir aquellos que contemplen alguno de los aspectos relacionados con su enseñanza o su aprendizaje:

- planificación de unas fases mediante las que facilitar el aprendizaje;
- utilización de situaciones problemáticas abiertas;
- adaptación de alguno de los distintos lenguajes al nivel de conocimientos de los alumnos;
- utilización de materiales didácticos que provoquen la reflexión y que actúen como generadores de nuevos problemas;
- previsión de la dinámica de grupo según la fase del aprendizaje de que se trate;
- ...

Estamos convencidos de que con el paso del tiempo se irá afianzando esta línea editorial. Poco a poco iremos dando prioridad a los trabajos experimentales sobre los teóricos, es decir, a los trabajos que en su redacción indiquen los procesos de razonamiento seguidos por los alumnos o qué heurísticos, estrategias o métodos han usado para resolver las situaciones problemáticas planteadas o detallen la evaluación de los recursos empleados y el nivel alcanzado por esos alumnos, etc. Pero también tendrán cabida cuantas ideas, recursos e informaciones, en general, puedan ser útiles a quienes desarrollan su trabajo en el aula.

Finalmente queremos manifestar nuestra satisfacción por la favorable acogida que nos han dispensado colegas, instituciones, medios de comunicación y otras publicaciones con fines similares a *SUMA*. Esperamos seguir trabajando con renovada ilusión y responder con eficacia a las expectativas creadas.

EL CONSEJO EDITORIAL



El pasado 23 de enero moría en Figueras el genial Salvador Dalí. Ahora que surgen, de manera más o menos interesada, ramos de flores junto a algunos de sus cuadros, odas sobre su persona, lamentaciones por su irreparable pérdida..., queremos recordar aquí sus palabras: *«nada de ensoñaciones sino topología trascendental»* con las que justificó en alguna ocasión su pintura. Como profesores de Matemáticas deseamos rendirle un modesto homenaje a título póstumo, para lo que pedimos a nuestros lectores la contemplación, si les parece, y análisis de uno de sus cuadros, *En busca de la cuarta dimensión,* en el que pone de manifiesto su profundo conocimiento de la Geometría a la que tenía en tan alta estima que refiriéndose a Gala decía que *«a pesar de no conocer los cinco sólidos platónicos, es un ángel»*.

# Un problema cualquiera (*)

Domingo de la Rubia

## Antes de comenzar

Con frecuencia, al leer el encabezamiento de un artículo, el lector intenta hacerse una idea aproximada de lo que puede estar escrito bajo él, aunque no siempre coincida con lo que realmente hay. Para evitar que esto ocurra entre nosotros, y dado que el título resulta bastante genérico, trataré de introducirle con unos breves comentarios, de manera que si no se siente interesado pueda pasar al próximo artículo.

Pero si es un aficionado a los problemas de pasatiempos, o le gusta entretenerse en averiguar cómo otra gente resuelve problemas, o quiere reflexionar sobre el propio pensamiento cuando es usted el resolutor, o está preocupado en líneas generales por la enseñanza, deténgase un momento y concédame un margen de confianza. Esto quizá le pueda interesar.

## Entrando en materia

Este problema no se considera como un fin en sí mismo, sino como un medio o una excusa (como usted prefiera) para comunicar una determinada concepción de lo que significa resolver problemas, con la pretensión de servir de ayuda a aquellas personas que están en contacto con resolutores de problemas, y, por extensión, a los propios resolutores.

Según este enfoque, no importa tanto la solución de cada problema concreto, como la concepción de la naturaleza de la tarea *resolver problemas* con que se aborde cualquier problema concreto, y la percepción que tiene quien lo aborda de los mecanismos que pone en juego mientras lo resuelve. El objetivo ulterior es que con ello el maestro pueda contribuir a hacer posible que sus alumnos dispongan de unos medios precisos para aprender por sí mismos,

(*) Agradezco a Fernando Cerdán y Luis Puig que me hayan empujado a escribir este artículo, cuyo núcleo es uno de los muchos problemas que se desmenuzaron durante un curso de resolución de problemas para futuros docentes, que ellos imparten y al que yo asistí; se trata, concretamente, de uno de los propuestos para el ejercicio de evaluación en junio de 1987.

y que mejoren su capacidad para resolver cualquier tipo de problemas. «Cualquier tipo de problemas», es decir, no sólo los problemas escolares de Matemáticas, sino cualquier situación ante la que de entrada no se tiene una respuesta inmediata, y que puede estar ligada a cualquier faceta de la vida.

Conviene señalar también el diferente grado de complejidad que puede tener un problema según la persona que intenta resolverlo. Dependiendo de los conocimientos previos y de las destrezas particulares de cada individuo, un mismo problema puede pasar de ser un simple ejercicio de reconocimiento (algo que ya se sabe y se recuerda), a un problema de difícil solución. Para mayor claridad, pondré un ejemplo: Si a usted le preguntaran cuántos puntos suman las fichas de dominó, suponiendo que conociera el juego, seguramente se pasaría un rato pensando, y, posteriormente, se vería obligado a hacer alguna que otra suma o multiplicación, o ambas cosas, hasta encontrar la solución: para usted el problema tendría una cierta dificultad; pero si le hicieran la misma pregunta a un experto jugador de dominó, o si usted lo fuera, es posible que diera inmediatamente el valor exacto: 168; en este caso el problema resulta ser un mero ejercicio de reconocimiento, pues le ha bastado recordar lo que ya sabía.

El proceso de resolución de problemas se suele describir dividiéndolo en fases. Una forma clásica de hacerlo es la de Polya (1957) para quien al resolver un problema el resolutor atraviesa las fases de comprensión, planificación, ejecución y revisión o verificación. Ahora bien, esta secuencia de fases sólo se produce cuando quien aborda el problema es un resolutor ideal. El resolutor real se comporta de una manera más anárquica, ya que, dependiendo de las necesidades del momento, se traslada de una fase a otra, pudiendo retroceder, cuando se encuentra atascado, a fases que en la secuencia son anteriores. En definitiva, su actuación para nada es lineal.

Para concluir estas notas introductorias, y con la intención de que usted tenga una idea del arsenal teórico de que disponía el resolutor del problema que aquí se presenta, conviene que cite las cuatro categorías de conocimientos que, según Schoenfeld (1985), ayudan a describir la conducta del resolutor durante el proceso:

— *Recursos.*—Lo que se da en llamar «conocimientos previos» (conocimientos, representaciones, destreza...).

— *Heurística.*—Técnicas, procedimientos, estrategias generales. Las herramientas que ayudan a moverse en el espacio del problema.

— *Gestión o control.*—Toma de decisiones sobre los recursos y reglas que conviene elegir.

— *Creencias.*—Donde interviene desde la idea que se tiene sobre vivir bien, hasta lo que se entiende por «resolver problemas».

Y ahora pasamos a la acción. Comprobemos sobre el terreno lo que he estado comentando. Y la mejor forma parece ser, sin duda alguna, la resolución de un problema.

## El problema

*Los machos de una especie animal provienen de huevos que no han sido fertilizados, esto es, tienen madre, pero no tienen padre. Las hembras, por el contrario, provienen de huevos fertilizados; tienen, por tanto, madre y padre. Yo soy un individuo de esa especie de la 12.ª generación. ¿Cuántos antepasados macho tengo?*

Este problema ha sido tomado de *Thinking Mathematically* (Mason, Burton & Stacey, 1982, págs. 101-102), modificando el enunciado: en ese libro se especifica la especie animal (abejas) y la pregunta es distinta («¿Cuántos antepasados tiene una abeja macho *en* la 12.ª generación hacia atrás? ¿Cuántos de ellos son machos?»). Las modificaciones permiten que el resolutor se identifique con los personajes que aparecen (gracias a que la pregunta se personaliza: «Yo soy [...] tengo?»), hacen que haya que añadir información a la que da explícitamente el enunciado («Yo» puede ser macho o hembra), y aumentan algo la dificultad (al preguntar por el total de antepasados en las doce generaciones anteriores y no el número de antepasados en la 12.ª generación). Seguramente Mason, Burton & Stacey transformaron también una versión anterior del problema, quizá con conejos. Los problemas, como las canciones populares, pasan de mano en mano sin que haya que pagar derechos de autor. Si a usted acaba gustándole este problema, puede buscar la versión con ratas que trae Lange (1987) en la página 46.

## ¿Por qué no lo resuelve?

Pero no puede acabar gustándole si no intenta resolverlo. ¿Lo ha hecho ya? Si no es así, ¡ánimo!, abandone la lectura de este artículo por un momento, coja papel y lápiz, o bolígrafo, o pluma, y manos a la obra...

## El relato de cómo lo resolví yo

A continuación le presento a usted la forma particular como yo resolví hace algo más de un año el problema en cuestión, y cómo describí lo que había hecho para ello. No pretendo que esta manera de resolverlo sea la mejor, ni que sea original o elegante, seguro que no lo es. De hecho, no he querido rectificar nada de lo que escribí originalmente para que pueda verse sobre mi propio ejemplo que no siempre la resolución de un problema sigue una línea recta, sino que se hacen intentos que no fructifican; y cómo, sin embargo, hay planes frustrados que también ayudan a alcanzar la meta. El texto que presento hay que leerlo, pues, como un protocolo.

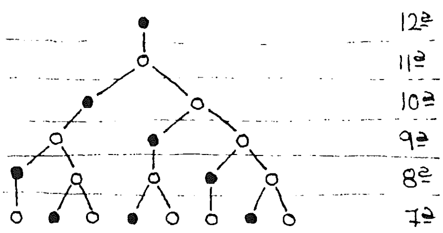
Podrá observar que la narración de la resolución del problema está dispuesta en dos franjas verticales. La de la izquierda se refiere a la resolución del problema propiamente dicha; la franja de la derecha la utilicé para hacer comentarios sobre los procesos que se produjeron durante la resolución. Puede usted leer las dos franjas en paralelo, o, quizá mejor, leer primero la de la izquierda hasta el final, para luego leer la de la derecha, relacionando cada párrafo con lo que le corresponda a su izquierda.

Primero, leo detenidamente el problema, para saber lo que me dicen, y qué tenemos que conseguir a partir de los datos que nos dan.

Observo que no ~~me~~ nos dicen si somos machos o hembras, y me parece que esto variará la solución del problema... Voy a suponer que somos macho.

Bien, voy a explorar, a ver que pasa...

● → Macho
○ → Hembra




Se me complica mucho. Es claro que del árbol puedo sacar algunas conclusiones que me aclaren el problema, pero no es un método práctico para obtener la solución.

— * —

Bueno, una primera idea sería hacer una tabla con los datos que ya sabemos, y así intentar conseguir una pauta que nos dé la pista para solucionarlo:

| GEN. | M | H | TM | TH |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 9 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| 7 | 3 | 5 | 8 | 12 |
| 6 | 5 | 8 | 13 | 20 |

COMPRENSIÓN-EXPLORACIÓN.
Primera fase en la resolución de problemas.
Se estudia el enunciado para conocer el campo en el que nos vamos a desenvolver.
Esta parte no debe terminar a lo largo de todo el problema. Con ello evitaremos interpretaciones erróneas de lectura.

La exploración sistemática es imprescindible.
Debe ser clara y secuencial. No debe suprimirse ningún paso.

Figura o diagrama.
Los procedimientos de representación deben ser adecuados y claros.

<u>Nota</u>: Debo aclarar que los consejos e imperativos que aparecen en estos comentarios, no pretenden sentar cátedra de lo que se debe o no se debe hacer al resolver ~~el~~ un problema, sino que se circunscriben a mi forma particular de resolverlo en este caso concreto. Es evidente que algunas apreciaciones pueden también generalizarse. Pero repito que en mi ánimo no está aleccionar a nadie.

Debe explorarse hasta obtener conjeturas, que no deben desecharse hasta que no se ha demostrado que es falsa.

El símbolo — * —, significa que nos paramos unos instantes a pensar. Interrupción de la acción para recapitular sobre la misma.

Patrón, pauta, regularidad.
Se sigue explorando en busca de una pauta a partir de la cual se pueda establecer un plan a seguir.

Me paro a pensar qué pistas nos da la Tabla:

– Los machos de una generación son iguales a las hembras de la anterior. (Lógico, porque ya el enunciado del problema nos decía que los machos no tienen padre).

– Las hembras de una generación son iguales a la suma de machos y hembras de la anterior. (También se deducía del enunciado, porque todos los individuos, sean machos o hembras, tienen madre).

– Tanto los machos como las hembras de una generación son iguales a la suma de los individuos de su mismo sexo de las dos inmediatas generaciones anteriores (a partir de la anterior a la nuestra).

Hay que darse cuenta que continuamos en la primera fase de la resolución del problema. Seguimos explorando, moviéndonos por el espacio del problema para llegar a comprenderlo.

Se infiere lo que se puede, pero siempre es importante tomar nota de ello.

Con estos datos, se nos hace fácil resolver el problema, sólo tendremos que continuar la tabla cinco generaciones más, hasta llegar a la primera.

Una buena representación sistemática de los datos nos ha permitido obtener las bases precisas para la obtención de la solución.

| GEN | M | H | TM | TH |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 13 | 21 | 33 |
| 4 | 13 | 21 | 34 | 54 |
| 3 | 21 | 34 | 55 | 88 |
| 2 | 34 | 55 | 89 | 143 |
| 1 | 55 | 89 | 144 | 232 |

La solución es, por tanto, 144 machos.

La comprobación del resultado se ha hecho innecesaria, porque la propia sistematicidad de la representación es una prueba más que suficiente.

Ahora nos quedaría resolverlo suponiendo que nosotros fuéramos una hembra, pero no tiene mayor interés pues equivaldría a empezar por la ~~[illegible]~~ décimo-primera generación de la tabla, y añadir una generación cero. Con recontar nuevamente, ya estaría.

Volvemos al enunciado. Al tomar, en un principio, la decisión de ser macho, se había cerrado el problema en un aspecto que estaba abierto.
Ahora retomamos el abánico de posibilidades, y damos a cada caso la solución adecuada.

El problema, por tanto, no ha sido difícil de resolver, pero no nos podemos quedar aquí, pues inmediatamente se nos plantea otro, más general:

"¿Qué pasaría ~~sien~~ si en lugar de ser la 12ª generación, fuera la 58ª, ... o la enésima?

Bien, ya cambia la cuestión.

MÁS ALLÁ

Se intenta sacar el máximo jugo al problema, variando alguna de las condiciones del enunciado.

Con esta modificación podremos observar más claramente las cuatro fases que pueden tener lugar en la resolución de problemas.

Volvemos a empezar. Exploremos la nueva situación. Y para ello podemos recordar lo que ya sabemos:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$$

Esta era nuestra tercera conclusión después de observar la tabla.

Pero, ¿qué podríamos hacer para conseguir esa ecuación que nos dé el resultado general?

COMPRENSIÓN - EXPLORACIÓN.

— * —

ELABORACION DEL PLAN.
Control: Toma de decisiones.
Se decide el procedimiento a seguir.

Un primer intento podría ser observar las diferencias sucesivas entre los distintos componentes de las generaciones, para ver si consigo alguna pauta que me explique mejor lo que pasa, si hay alguna relación:

EJECUCION DEL PLAN.
Tras concebir el plan se pone manos a la obra.
Patrón, pauta, regularidad.

| GEN | TM | |
|---|---|---|
| 12 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 1 |
| 9 | 3 | 2 |
| 8 | 5 | 3 |
| 7 | 8 | 5 |
| 6 | 13 | 8 |
| 5 | 21 | |

Tampoco conseguimos nada, porque la pauta de la diferencia es idéntica a la original.

Por aquí no vamos a ninguna parte.

¿Cómo puedo seguir?

Abandono del plan.
Es infructuoso, y vuelve a realizarse un control para decidir como se continuará.
El plan inicial no tiene porqué ser siempre válido.

— * —

ELABORACIÓN DEL PLAN.
Se concibe otro plan.

Tengo una idea. Vamos a aprovechar el concepto de recurrencia que hemos obtenido antes. Veamos si jugando con ello podemos conseguir algo. $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$

EJECUCIÓN DEL PLAN.

$M_1 = 1$

$M_2 = M_1 + M_0 = 1$

$M_3 = M_2 + M_1 = 2M_1 + M_0 = 2$

$M_4 = M_3 + M_2 = 2M_2 + M_1 = 3M_1 + 2M_0 = 3$

$M_5 = M_4 + M_3 = 2M_3 + M_2 = 3M_2 + 2M_1 = 5M_1 + 3M_0 = 5.$

Así no vamos tampoco a ninguna parte. Es un callejón sin salida.

Nuevo abandono.
Vuelve a demostrarse que no siempre todos los planes son buenos. No siempre se produce el resolutor ideal.

— * —

Aprovechando la idea de antes voy a intentarlo de otra forma:

$$= M_9 + M_7 + M_5 + M_3 + M_2 = M_9 + M_7 + M_5 + M_3 + M_1 + M_0$$

Tampoco sé qué hacer con esto.
Abandono la idea.

Control: Se decide continuar por el mismo camino.
Nuevo intento.

Abandono definitivo.

Me paro. Me alejo del problema por si me he bloqueado, y después vuelvo a él... Reviso desde el principio...

¿Qué quiero hacer? —Buscar una fórmula que me dé el total de machos en cualquier generación.

Ante el bloqueo es adecuado un replanteo total del problema. Volver a retomarlo desde su enunciado, y hacerse una triple cuestión:
- ¿Qué hago?
- ¿Para qué lo hago?
- ¿En qué me va a servir?

— * —

Sigo sin tener una idea que me abra el camino, y me pregunto si verdaderamente tendrá solución, si habrá o no una fórmula...

Bueno, aquí cambia la cuestión, consultaré a algún compañero para ver si la ha encontrado o no. Si la ha encontrado quiere decir que tendré que trabajar más, si no la ha encontrado me apoya la idea de que puede no existir solución.

¿A quién preguntar? ¿A algún experto... Consultaré a Visi...

¡Vaya! Ella también ha consultado a otro experto, y éste la ha conducido a un libro de análisis. Según Visi existe la fórmula, pero no hay por donde cogerla de lo complicada que resulta.

Consulta a un experto.
Este puede ser un método muy eficaz para resolver situaciones problemáticas. La dificultad puede residir en encontrar la persona o la fuente adecuada.

Me lío, no intento cogerla. Pero voy a trabajar un poco más. ¡A funcionar los circuitos...!

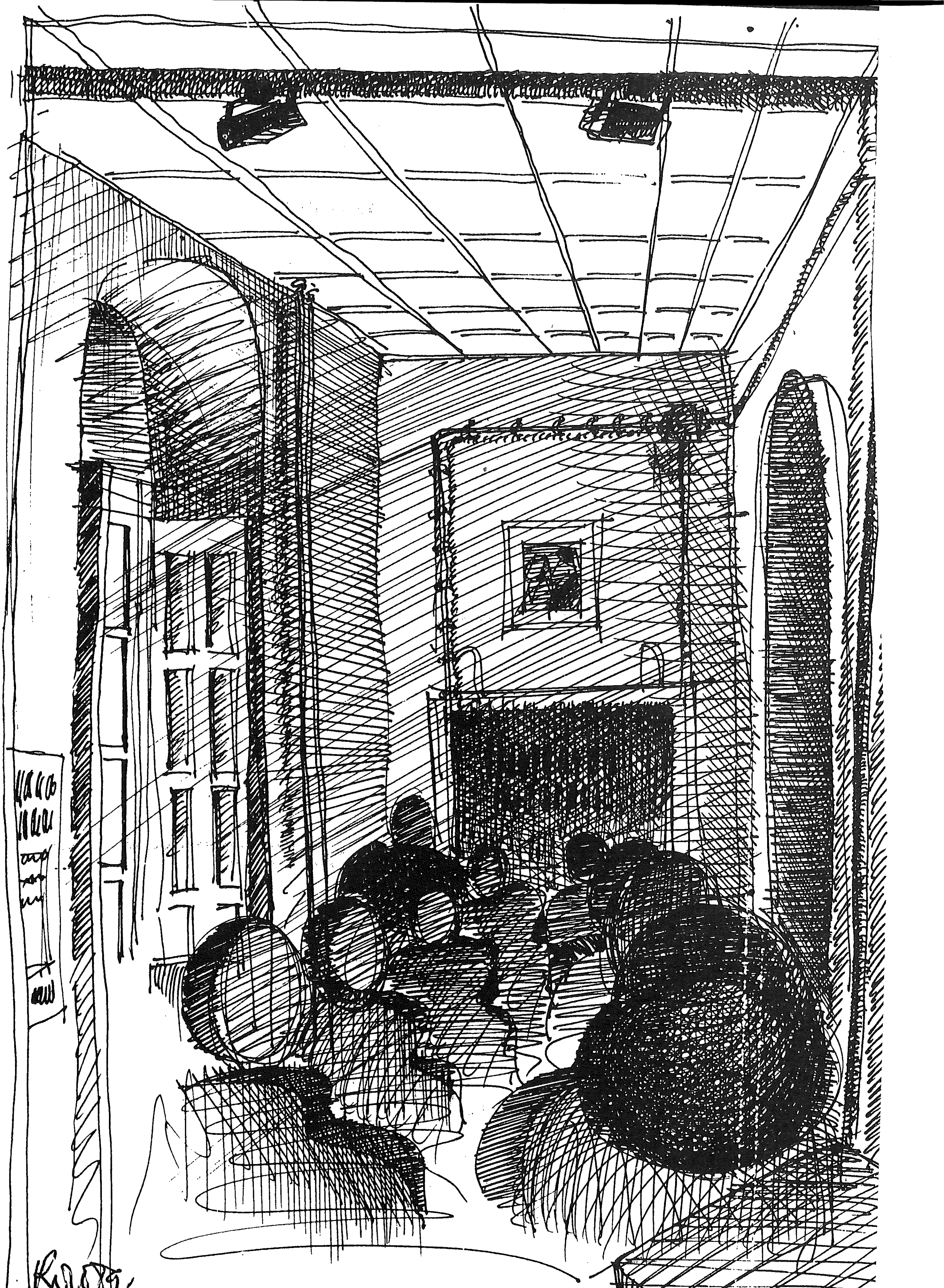
— * —

Control.

Hasta ahora siempre he intentado encontrar una pauta a partir de la diferencia de animales entre generaciones sucesivas. Y estoy pensando que puede que no exista esa pauta "aritmética", pero sí puede existir una pauta "geométrica".

ELABORACIÓN DE UN NUEVO PLAN.
Nuevamente comienza el proceso.

Lo averiguaré dividiendo el nº de machos de cada generación por los que había en la anterior.



EJECUCIÓN DEL PLAN

| GEN | M | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 0 | | |
| 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 1 | |
| 5 | 2 | 2 | |
| 6 | 3 | 1'5 | |
| 7 | 5 | 1'66 | |
| 8 | 8 | 1'6 | |
| 9 | 13 | 1'625 | |
| 10 | 21 | 1'61538 | ¡Esto funciona! |
| 11 | 34 | 1'61904 | |
| 12 | 55 | 1'61764 | |
| ... | | | |
| 16 | 377 | | |
| 17 | 610 | 1'618037135 | |
| ... | | | A mayor generación el intervalo de variación es menor. |
| 39 | 24.157.817 | | |
| 40 | 39.088.169 | 1'618033989 | Este nº ya se repite. |

Se encuentra la pauta.

En general: $\frac{M_n}{M_{n-1}} = 1'618033989$

Por tanto, el resultado puede ser:

$$\frac{M_n}{M_m} = (1'618033989)^{n-m}$$

Se obtiene la solución al plan parcial, y a continuación se pasa a la revisión.

Por ejemplo:

$$\frac{M_{17}}{M_{12}} = (1'618033989)^{17-12}$$

$$\frac{610}{55} = 1'618033989^5$$

$$11'\widehat{09} = 11'09016994$$

Nos da un error de $6'6644 \cdot 10^{-3}$ %. Aceptable.

Revisión.

Es evidente que el error nos quitará exactitud para generaciones muy dispersas, en las que nos podremos ir en varios números.

Vamos a intentar perfeccionarlo.

Una vez conseguida la comprobación de la solución del primer plan parcial, se elabora un segundo plan para perfeccionar el anterior.

Observo otra vez la tabla, y me pregunto cuál será la relación opuesta a la obtenida anteriormente. Si $Mn/Mn\text{-}1 = 1'618033989$, ¿cuánto valdrá $Mn\text{-}1/Mn$?

$$\frac{Mn\text{-}1}{Mn} = 0'618033988$$

Introducción de un dato nuevo.

¡Caracoles! ¡Nos ha dado lo mismo quitándole una unidad! ¿Porqué?

Reconsideración.

— * —

Tengo una idea:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Mn}{Mn\text{-}1} = \dfrac{Mn\text{-}1 + Mn\text{-}2}{Mn\text{-}1} = 1 + \dfrac{Mn\text{-}2}{Mn\text{-}1} \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{Mn\text{-}2}{Mn\text{-}1} = \dfrac{Mn\text{-}1}{Mn} \end{array}\right\} \dfrac{Mn}{Mn\text{-}1} = 1 + \dfrac{Mn\text{-}1}{Mn}$$

Control.
Se trata de dar una explicación razonable a este nuevo dato.
Se intuye que puede ser la pista definitiva para la resolución del problema.
Hay que tener en cuenta que muchos problemas se resuelven intuitivamente, otros gracias a la casualidad, y otros por lo que se da en llamar la idea feliz.

Ya se ve lógico.

Y ya que parece que por esta vía estamos inspirados, vamos a continuar, con la intención de poner una generación en función de la sucesiva, ya que la fórmula que buscamos desde el principio es la que nos relaciona diferentes generaciones.

ELABORACIÓN DEL PLAN
Se tiene confianza en esta organización bastante algebraica, pues a priori parece que todas las piezas van encajando.

Parece más fácil comenzar por dos continuas, cuando ya conocemos más cosas de ellas.

A partir de ahora en lugar de llamar a las generaciones sucesivas Mn y Mn-1, las llamaré "a" y "b", para simplificar.

Se busca una nomenclatura más clara y eficaz, aun a costa de perder información.

Lo dicho, vamos a relacionarlas, despejando una:

EJECUCIÓN DEL PLAN.

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a} \rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1 \rightarrow \frac{a^2 - b^2}{ab} = 1 \rightarrow a^2 - b^2 - ab = 0$$
$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

Resuelvo la ecuación de segundo grado:

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4.1.a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} b_1 = \dfrac{-a(1+\sqrt{5})}{2} \\ b_2 = \dfrac{-a(1-\sqrt{5})}{2} \end{cases}$$

Recuerdo que ~~para~~ lo que para algunas personas puede ser un problema algorítmico (solución de una ecuación de segundo grado), para otras puede ser irresoluble, o al menos mucho más dificultoso en su caso.

¿Por qué salen dos relaciones?

Veamos si con un ejemplo podemos aclararnos:

$$a = M_{16} = 377 \rightarrow b_1 = \frac{-377(1+\sqrt{5})}{2} = -610$$

Este es el posterior.

$$b_2 = \frac{-377(1-\sqrt{5})}{2} = 233.$$

El anterior.

¿Se cumplirá también para números pequeños?

$$a = M_6 = 3 \rightarrow b_1 = \frac{-3(1+\sqrt{5})}{2} = -4'85 \simeq -5$$

$$b_2 = \frac{-3(1-\sqrt{5})}{2} = 1'85 \simeq 2$$

Con mayor error, pero también se cumple.

Consideración de un caso.
Ante una situación problemática en la que no se logra una sólida comprensión, puede considerarse un caso particular que pueda resolvernos la pregunta.

Bien, ya tenemos una fórmula que nos da el nº de machos de la generación anterior y el de la posterior, pero lo que buscamos es poder alcanzar cualquier generación.

¿Qué podemos hacer?

Voy a volver a revisar por encima lo que hemos hecho...

Nuevamente la comprobación de casos particulares nos reafirma nuestra conjetura inicial. Por tanto continuamos avanzando en el problema.
Se volverá a formular otra conjetura, o en su defecto se elaborará un plan que nos permita continuar.
Revisión. Vuelvo a referirme a la conveniencia de revisar lo trabajado. Esto ayuda a no desviarse de la línea establecida, y en ocasiones a caer en la cuenta de cuestiones que pasan inadvertidas, aún cuando son cruciales.

Tengo una idea. Vamos a seguir con el criterio de antes. Si para relacionar generaciones dispersas elevábamos el número 1'618033989 a una potencia que venía dada por la diferencia de generaciones, elevemos nuestro paréntesis a una potencia, y veamos que pasa.

ELABORACIÓN DE UN PLAN

$$a = 377 \rightarrow b_{1_2} = \frac{-377(1+\sqrt{5})^2}{2} = -1974$$

EJECUCION DEL PLAN
Consideración de un caso.

Si miramos la tabla, 1974 es el doble de 987, que es el nº de machos de dos generaciones posteriores a la escogida. Por tanto, también deberemos potenciar el 2 del denominador.

$$a = 377 \rightarrow b_{1,2} = \frac{-377(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = -987.$$

¡Ahora, sí!

Sólo nos queda introducir algunos cambios a la fórmula para hacerla más funcional:

- Quitaremos el signo, para que nos den valores positivos siempre.

Puede observarse que durante todo el desarrollo del problema, aún teniendo claro aquello que buscamos (la fórmula), nos hemos ido conduciendo a partir de la consecución de submetas.
Cuando no es viable un ataque frontal al enemigo, es buena táctica ir minándole poco a poco por varios frentes, en pequeñas batallas.

• Daremos un valor fijo a lo que hasta ahora llamábamos "a". Un valor que sea suficientemente grande como para que los errores no sean excesivos, y no tanto como para que sea una cantidad enorme. Por ejemplo $a = 2584$ de la 20ª generación. También deberemos acordarnos de poner la potencia en función del 20.

• La variable en la fórmula será n, el valor a introducir. Valor de la generación que estamos buscando.

Quedaría así:

$$M_n = \frac{2584 \cdot (1+\sqrt{5})^{n-20}}{2^{n-20}}$$

O mejor:

$$M_n = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n-20}$$

Vamos a comprobarlo:

$$M_7 = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{7-20} = 4'96 \simeq 5 \qquad \varepsilon = 8'06 \cdot 10^{-3}$$

$$M_{40} = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{40-20} = 39088168'8 \simeq 39088169$$
$$\varepsilon = 4'88 \cdot 10^{-9}$$

Error, éste último, achacable a la calculadora.

Y de esta manera hemos llegado al final del problema.

---

Posteriormente podríamos revisar los datos del problema, las condiciones que propone el enunciado, con el fin de conseguir otros planteamientos, otra batería de problemas.

Por ejemplo:

- En lugar de tener las hembras un padre, que tengan dos, o tres, o n padres.
- Que los machos tengan dos madres, ...

Etcétera.

Pero no se alarme, no voy a seguir martirizándole más, únicamente se trata de que comprenda que el problema puede continuar tanto como nosotros estemos dispuestos, y siempre que pensemos que aún nos queda campo por explorar.

SOLUCIÓN

Ya se ha obtenido la fórmula deseada.
Habremos terminado cuando comprobemos que la relación que expresa se verifica realmente.

Una vez revisado y comprobado, se da por finalizado el problema. Sólo queda reconsiderar lo hecho, y tratar de sacar el máximo jugo posible.
Lo que se denomina MARCHA ATRÁS (revisión), y "MAS ALLÁ" (¿Podemos sacarle más jugo a la situación? ¿Puede servirnos para aprender más cosas?).

## Para acabar

Una vez llegados hasta aquí puede que usted se pregunte para qué nos puede servir todo esto y por qué nos empeñamos en calentarnos tanto la cabeza. Una explicación es la siguiente. Para poder ayudar a otra persona a resolver problemas, conviene conocer las fases que tienen lugar en la resolución, el grado de complejidad que puede tener ese problema para la persona concreta que intenta resolverlo, los recursos de que puede disponer, y la heurística más adecuada para ese tipo de problemas; provistos de este conocimiento podemos intentar entender lo que el otro está haciendo. Pero, además, hay que estar atentos a los instantes en que el resolutor toma o ha de tomar decisiones que afectan significativamente al curso de la resolución: interviniendo en esos momentos (mediante sugerencias heurísticas o ayudando a controlar) podemos hacer que nuestra influencia en el proceso sea máxima, y que la perturbación que producimos localmente al intervenir sea mínima.

Es difícil que uno sea capaz de observar todos estos aspectos de la resolución de problemas cuando otra persona está trabajando, si uno mismo no ha sido capaz de describir su propia actividad al resolver un problema. Por eso calentarse la cabeza en alguna ocasión hasta este punto vale la pena si uno ha de enfrentarse con la tarea de enseñar a resolver problemas.

No quiero decir con esto que para prepararse para enseñar a resolver problemas lo único que haya que practicar sea la introspección. Ni siquiera la introspección *dirigida por una teoría* que he presentado aquí. La resolución de problemas en grupo, el análisis del proceso de resolución desarrollado por otras personas..., son igualmente convenientes. Este artículo no pretende ser un documento teórico. Simplemente intenta mostrar un ejemplo de alguna de las cosas que se realizan actualmente en algunas aulas de la Escuela de Magisterio de Valencia. A mí me ha resultado una experiencia digna de tenerse en cuenta. Espero que usted comparta mi opinión.

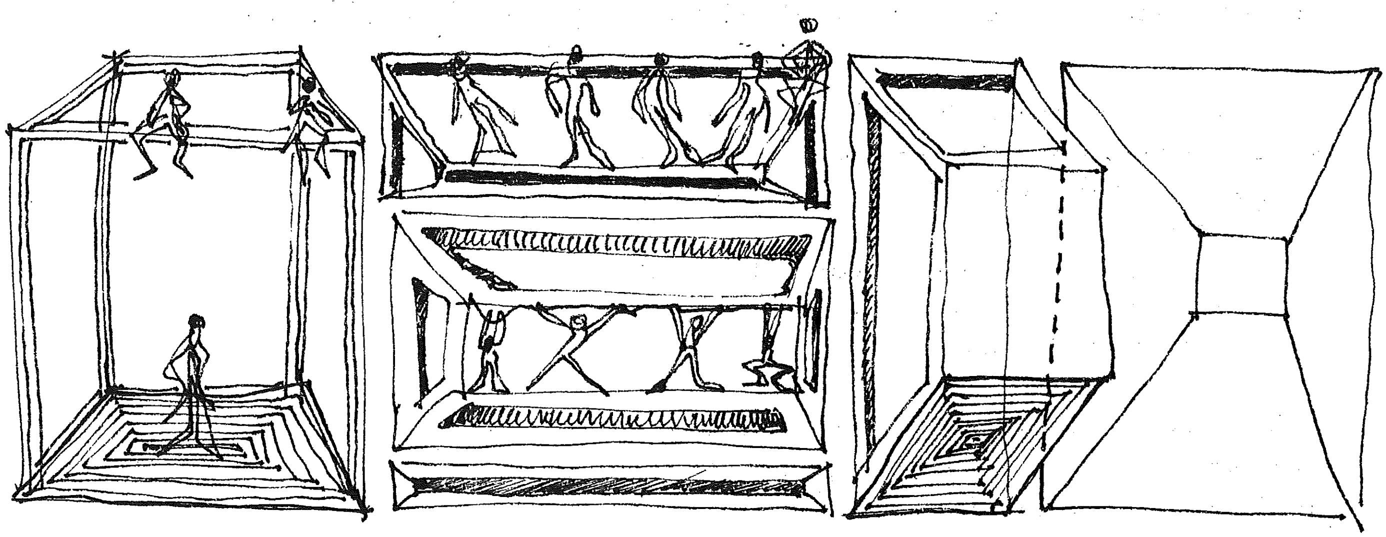
### Referencias bibliográficas


LANGE, J. de, 1987, Mathematics, Insight and Meaning (OW & OC: Utrecht.

MASON, J., BURTON, L. & STACEY, K., 1982, *Thinking Mathematically* (Addison Wesley: London).

POLYA, G., 1957, *How to Solve It,* 2nd edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Trad. castellana, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965).]

SCHOENFELD A. H., 1985, *Mathematical Problem Soslving,* Academic Press: Orlando, F.L).

# Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años

Paolo Boero

## 1. Introducción

En mi conferencia consideraré varias maneras de utilizar la Historia de las Matemáticas en la didáctica de las Matemáticas para la escuela obligatoria; se trata de experiencias y reflexiones relacionadas con la elaboración y la experimentación de currículos para la enseñanza de las Matemáticas en las edades comprendidas entre los 6 y los 13 años, desarrollados a partir de 1975 en el grupo de universitarios y enseñantes que coordino personalmente en Génova. El trabajo se ha efectuado en colaboración con Elda Guala; algunos artículos relacionados con estas cuestiones ya han sido publicados o están en curso de publicación.

El problema del uso de la Historia de las Matemáticas en provecho de la didáctica de las Matemáticas ya ha sido tratado en muchas ocasiones y desde ángulos distintos: los trabajos clásicos de Piaget, para todo lo referente a los aspectos cognoscitivos; y desde el punto de vista didáctico, varias propuestas (incluso en libros de texto) sugieren diversas maneras de utilizar la Historia de las Matemáticas: desde las «notas históricas» que se incorporan cuando se introduce un tema nuevo, hasta itinerarios didácticos inspirados en la progresión histórica que se ha seguido en la construcción de ciertas teorías.

En esta conferencia me referiré exclusivamente a usos de la Historia de las Matemáticas que hayan sido realizados y experimentados efectivamente en clase por el grupo de Génova. Para cada tipo de utilización intentaré exponer algunos problemas teóricos y operativos que se plantean en la elaboración y experimentación de los itinerarios didácticos. Una parte de la terminología utilizada proviene de la investigación francesa en el campo de la didáctica de las Matemáticas (trabajos de Chevallard sobre la transposición didáctica y de Regine Douady sobre la dialéctica instrumento-objeto y sobre el «juego de cuadros»).

## 2. ¿Qué Historia de las Matemáticas?

Como se verá con detalle en los próximos párrafos, todos los tipos de Historia de las Matemáticas permiten una utilización didáctica: tanto la historia interna de la evolución de las ideas y de las teorías matemáticas, elaboradas por los matemáticos profesionales, como la Historia de las Matemáticas relacionada con la cultura y la sociedad del momento, o la historia de la construcción de los conceptos matemáticos anteriores o paralelos a las Matemáticas oficiales. Por lo tanto, son también diversas las fuentes que pueden ser consultadas: libros y artículos de Historia de las Matemáticas, libros y artículos de historia de la ciencia (por ejemplo, ha sido fundamental para nosotros el libro *Historia de las ciencias exactas en la Antigüedad,* de O. Neugebauer), libros que tratan de manera más general la historia de la cultura, incluyendo la historia de la cultura material (por ejemplo, libros como los de G. de Santillana, *Destino antiguo y destino moderno,* o *El molino de Hamlet;* y la *Historia de la tecnología,* de Almyard, Singer *et al.*).

Me parece especialmente relevante para la escuela obligatoria la Historia de la Protomatemática, que está tratada en unas pocas páginas en los manuales de Historia de las Matemáticas; en Italia existe una buena tradición en este campo (sobre todo gracias al «grupo de Historia de las Matemáticas», que nació en Turín alrededor de 1970, impulsado por Tullio Viola, particularmente interesado por la Historia de las Matemáticas de los babilonios). En esta misma dirección, se encuentran también sugerencias útiles en el libro de G. Ifrah, *Historia universal de las cifras,* extensamente consultado por nuestro grupo a fin de recoger de manera organizada y sistemática informaciones, representaciones icónicas y documentos relativos a los primeros desarrollos de la Aritmética.

## 3. Historia de las Matemáticas: fuente de ideas de cara a la «recontextualización» de los conceptos matemáticos como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad

En el año 1976, nuestro proyecto de enseñanza integrada de las Matemáticas y de las otras ciencias para la escuela de 11 a 14 años, nació basándose en la hipótesis de que era posible realizar una enseñanza de las Matemáticas más motivada, menos selectiva, más eficaz en la construcción (o reconstrucción) de los conceptos elementales de base por medio de actividades cognoscitivas de aspectos importantes de la realidad en la que las Matemáticas intervenían como instrumento de organización del conocimiento.

Propusimos entonces (para realizar en los años sucesivos) un doble currículo de temas y de argumentos matemáticos que construiría, consolidaría y aplicaría gradualmente conocimientos y habilidades tanto de tipo matemático como de tipo extramatemático. Dedujimos de la Historia de las Matemáticas (especialmente de la Historia de la Protomatemática) sugerencias que han sido determinantes en nuestra selección de temas extramatemáticos, para los que propusimos construir los conceptos matemáticos; seguimos la idea ingenua (que por otra parte estaba relacionada con elaboraciones teóricas como las de Piaget) de que aquello que había servido en la Antigüedad como «contexto» para la primera elaboración de los conceptos matemáticos podía ser utilizado (al menos en ciertos casos) también como «contexto» para construir en clase los mismos conceptos.

Pero repito que en los primeros años de trabajo de nuestro grupo no existía una reflexión profunda sobre esta selección, sólo intuiciones y primeras aproximaciones que guiaban la elección de ciertos temas, y no de otros. Sin embargo, teníamos algunos criterios que trataremos de explicar:

- la profundización en un tema requería instrumentos matemáticos ya adquiridos por los alumnos, al menos en parte (construidos en la escuela elemental o en actividades desarrolladas sobre temas precedentes), de manera que el esfuerzo que exige de los alumnos la contextualización matemática necesaria para dominar el nuevo tema no fuera excesivo;
- la profundización de un tema requería conocimientos (o experiencias) preliminares sobre el propio tema adquiridos en los temas precedentes ya trabajados o en la experiencia extraescolar del alumno;
- los temas tenían que ser escogidos de manera que en los alumnos se produjese una «tensión cognoscitiva» real. Precisamente por eso, no todos los conceptos matemáticos podían construirse mediante temas que históricamente habían proporcionado el contexto para el desarrollo de ciertas conceptualizaciones: en algunos casos parecía más productivo escoger temas en los que los conceptos matemáticos funcionasen como instrumentos de organización del conocimiento y que son, en cambio, diferentes de aquellos en los que por primera vez se utilizaron tales conceptos. En seguida (como veremos) nos vimos obligados a admitir que desde el punto de vista didáctico la opción de construir los conceptos y las habilidades por medio de actividades cognoscitivas sobre temas extramatemáticos no era útil con todos los contenidos matemáticos (aunque en este caso la Historia de las Matemáticas nos ayudó a encontrar una alternativa).

*

* *

Al albor de los años 80 disponíamos de una extensa experiencia de trabajo sobre secuencias de temas extramatemáticos como «contextos» para la construcción de conceptos y habilidades matemáticas; entre tanto, el proyecto curricular se ampliaba a la escuela elemental, y también en este sector muchos temas de trabajo extramatemáticos fueron seleccionados, al menos en parte, a partir de sugerencias que se derivaban de la historia de la protomatemática.

Entre las mejores secuencias querría destacar:

• el desarrollo de la Aritmética (números y operaciones) en el contexto temático del dominio del tiempo, entre los 6 y los 7 años: desde el ciclo mensual (objeto de trabajo a los 6 años) se pasa sucesivamente al ciclo anual y, posteriormente, al ciclo diurno y al horario. La referencia al contexto del dominio del tiempo nos fue sugerida por la importancia que tenían, en la mayoría de civilizaciones antiguas, la construcción de los calendarios y la medida del tiempo en los primeros desarrollos de la Aritmética;

• el desarrollo de la Aritmética (números y operaciones) en el contexto temático del cálculo económico entre los 6 y los 9 años: el dominio de los valores monetarios, de los mecanismos de compra-venta («valor monetario» frente a «valor de cambio» de las mercancías) y de los mecanismos más simples de formación de costes de producción, corresponden a la construcción histórica de muchos conceptos y técnicas de cálculo (por ejemplo, es notable el hecho de que la subdivisión sexagesimal de los valores monetarios de las monedas egipcias y griegas tuviera un papel importante en el progresivo predominio del sistema de escritura de posición de los números entre los babilonios). En este caso, la Historia de la Protomatemática nos sugiere un contexto temático de trabajo que, a diferencia del «tiempo» no es «natural», sino que es «producto de la evolución cultural del hombre» (y a ello volveremos dentro de poco);

• el desarrollo de los conceptos geométricos (Protogeometría: las conceptualizaciones realizadas antes de Tales y Pitágoras) por medio de actividades cognoscitivas sobre temas de Astronomía y de orientación relacionados con el problema de las sombras, entre 6 y 10 años, y posteriormente, incluso hasta los 11 años (para nuestros alumnos de segunda etapa, que no habían intervenido en el proyecto del grupo en primera etapa). En este caso, la gran potencialidad didáctica de este tema nos había sido sugerida (hacia el año 1975) por los experimentos que ciertos astrónomos italianos habían realizado en las escuelas y, especialmente, por el trabajo de maestros del «grupo romano» (Emma Castelnuovo, Nino Conte, etc.);

• el desarrollo de los conceptos y de la metodología estadística (tanto en la primera etapa como, en un nivel más profundo, a los 12 y 13 años) por medio de investigaciones sobre temas de interés social (estadística demográfica, etc.): cómo entre los siglos XVII y XVIII, instrumentos y metodologías de estadística se introducen y se utilizan para analizar fenómenos de gran interés social, para determinar «parámetros» que de alguna manera representaban situaciones complejas (valor medio, etc.), para analizar «tendencias» y formular «previsiones», etc.;

• el desarrollo de aspectos dinámicos de la Geometría (matemática de las rotaciones, de las traslaciones, etc.), relacionados con el análisis de mecanismos articulados y con problemas de la mecánica de las máquinas, a los 13 y 14 años.

*

* *

La experiencia adquirida en estos años de trabajo en clase y el perfeccionamiento de los instrumentos teóricos (como resultado, tanto de los problemas que se presentan en el trabajo en clase, y que poco a poco vamos definiendo mejor, como de la confrontación con teorías elaboradas en otros lugares —particularmente en Francia— y útiles sobre todo para clarificar estos problemas), ha puesto de relieve una serie de cuestiones sobre las que quisiera insistir.

### 3.1. *Eficacia y límites de la recontextualización de los conceptos matemáticos en temas extramatemáticos sugeridos por la historia*

Nos parece que puede ser útil considerar tres hipótesis diferentes con la finalidad de interpretar la eficacia de la recontextualización «histórica»:

• la correlación entre la evolución cultural del individuo particular y la evolución cultural de la especie humana. Según esta hipótesis, la evolución cultural del individuo obedece a leyes, relativas a los equilibrios y desequilibrios de la dialéctica adaptación-asimilación, que no difieren demasiado de los de la especie;

• presencia en la cultura extraescolar de los alumnos de ideas-guía y de embriones de racionalización que el trabajo escolar puede valorar y desarrollar. Según esta hipótesis, la eficacia de la recontextualización de los conceptos matemáticos en temas sugeridos por la Historia de las Matemáticas depende de que el chico «se interesa», «aprende», «racionaliza en términos matemáticos» determinados argumentos extramatemáticos porque en la experiencia extraescolar que forma parte de su patrimonio cultural ya están presentes (de manera más o menos confusa y distorsionada) elementos sustentadores de la construcción cultural que la escuela les propone;

• funcionamiento de los conceptos matemáticos en el tema extramatemático escogido. Según esta hipótesis, es la estructura matemática intrínseca al tema tratado la que construye (igual hoy que antaño), a lo largo del esfuerzo que requiere su conocimiento, los conceptos matemáticos implicados.

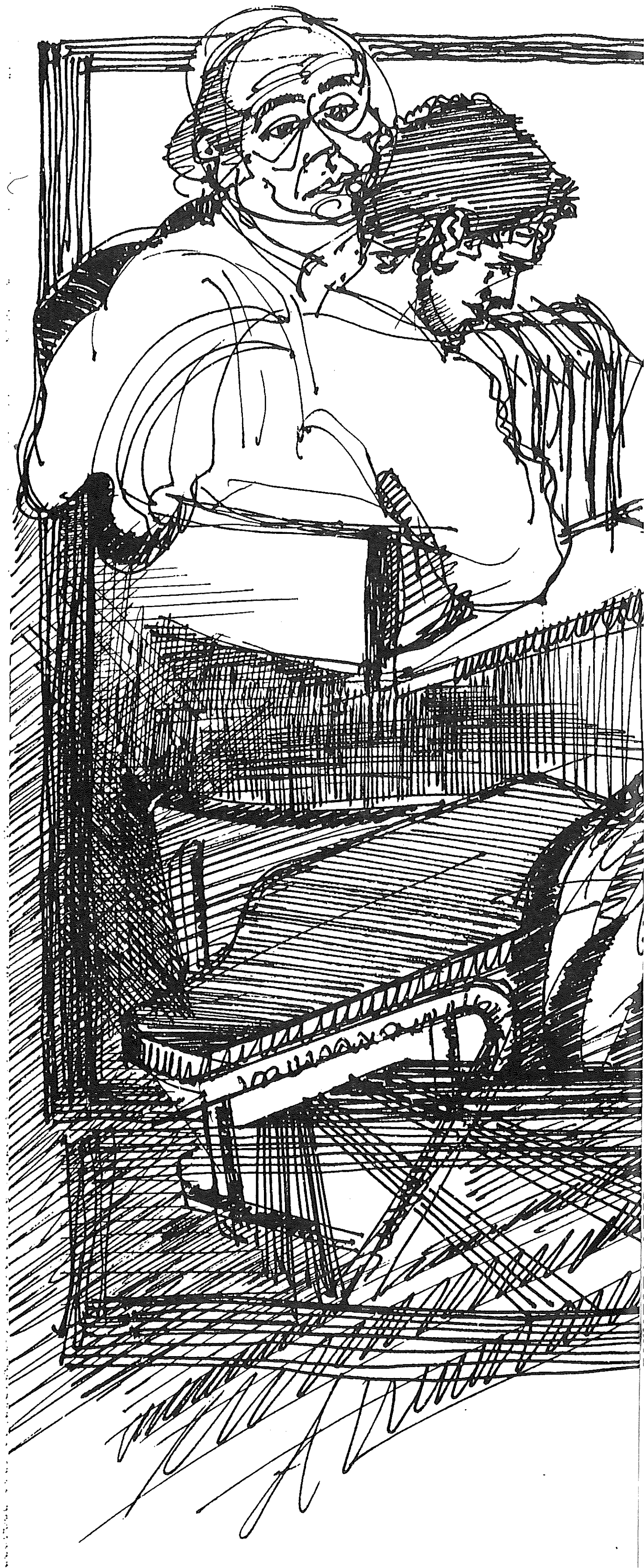
Se trata de hipótesis muy diferentes entre sí, elaboradas en el ámbito de escuelas distintas de psicología del aprendizaje y que hemos citado de forma sumaria como puntos de referencia. Los comportamientos de los alumnos y las dificultades que encuentran, nos parece que confirman sobre todo la segunda y la tercera hipótesis, pero sin excluir la primera (también es posible que cada una de las tres hipótesis «explique» aspectos complementarios de los procesos cognoscitivos de los alumnos).

En lo que respecta a la segunda hipótesis, hemos observado con cierta frecuencia que:

- la práctica extraescolar de ciertos temas favorece mucho el proceso cognoscitivo y de racionalización matemática de los mismos por parte de los alumnos (sobre todo en el caso de «monedas», «calendario», «relojes»); incluso sirven para valorar a los alumnos habitualmente marginados, que alcanzan resultados matemáticos notables (respecto a sus compañeros);
- y viceversa, una concepción extraescolar de tipo «mágico» de ciertos argumentos (lejana y opuesta a la racionalización en términos matemáticos) parece obstaculizar de manera notable el proceso de matematización y adquisición de los conceptos matemáticos implicados (son ejemplares al respecto los obstáculos culturales para el aprendizaje hallados en las relaciones genética-probabilidad a los 12 años y sombra-geometría a los 8 y 9 años);
- no todos los temas históricamente relevantes para la construcción de determinados conceptos han resultado eficaces para ser recontextualizados con una finalidad didáctica, incluso si tenían un cierto interés, al menos inicial, para los alumnos: en particular las cuestiones totalmente extrañas a la cultura de hoy han resultado ser las menos eficaces (como en el caso del trabajo con el ábaco en los primeros años de la escuela elemental).

### 3.2. *Real «natural» y real «artificial» en el proceso de recontextualización del saber matemático*

La segunda de las tres hipótesis consideradas en el punto precedente parece justificar también que, por parte de la mayoría de alumnos, los temas relativos al mundo de la naturaleza (orientación, sombras, etc.) y al mundo construido por el hombre (monedas, máquinas, etc.), así como los temas que están a medio camino de ambos (calendario, reloj, etc.), son igualmente eficaces; y parece también que puede explicar el resultado inferior que se obtiene, con los



alumnos culturalmente menos motivados, en temas que se refieren al mundo de la naturaleza.

En efecto, si un alumno vive una realidad ambiental rica en estímulos y aportaciones culturales para su proceso de racionalización de lo real (léxico, maneras de pensar, etc.), es natural (desde el punto de vista de la eficacia que para él tiene el trabajo escolar) que no haga distinciones entre real «natural» y real «artificial» en lo que se refiere al proceso de recontextualización. Si la eficacia de la recontextualización escolar de los conceptos matemáticos depende principalmente de su inserción en el patrimonio cultural del alumno en relación al tema que se aborda y no de la naturaleza del tema, la sombra, el tiempo o las monedas no se han de considerar como lo que son efectivamente, sino por su presencia en la cultura colectiva (léxico, objetos, manera de decir, etc.). Lo real «artificial» puede únicamente presentar, en muchos casos, la ventaja del mayor grado de racionalización (y por tanto de organización matemática) con que está presente en la cultura extraescolar, precisamente porque está hecho y utilizado sistemáticamente por el hombre; parece muy difícil hacer racionalizar, a los alumnos que provienen de medios sociales pobres en estímulos culturales, lo real «natural» de las sombras y, sobre todo, el de la transmisión de los caracteres hereditarios. Desde el punto de vista de la formación científica, por otra parte, la racionalización de lo real «natural» puede ser, en muchos casos, un objetivo prioritario que justifique ampliamente el esfuerzo que requiere.

### 3.3. *Explicitación y profundización de los conceptos matemáticos construidos por medio de la recontextualización «histórica» de los mismos*

En muchas ocasiones el trabajo con temas extramatemáticos no resulta suficiente para construir el saber matemático hasta el nivel necesario para transferirlo (como «instrumento» de conocimiento) a otros contextos, o para «estabilizarlo» en el tiempo como adquisición permanente, o para reconocerlo y utilizarlo en el marco del mismo itinerario cognoscitivo. Disponemos ya de muchos ejemplos al respecto (el cuadro general de cómo consideramos este problema está expuesto en la ponencia de M. P.. Rogantin, presentada a la CIEAEM de Lisboa del año 1983):

- El concepto de probabilidad ha de ser inmediatamente explicitado para ser utilizado de forma eficaz;
- el concepto de «muestra» en la estadística ha de ser clarificado muy pronto con el objeto de evitar malentendidos en el análisis de los datos (en particular en todo lo que se refiere al problema del número de elementos de la muestra al azar en relación con su credibilidad);

• el concepto de «función» ha de ser gradualmente explicitado para permitir que se use de forma suficientemente eficaz en la creación de modelos de situaciones económicas, tecnológicas, etc.

En otros casos, sin embargo, no creemos en absoluto que sea necesaria una explicitación (más allá de la designación con un «nombre») o un trabajo sobre el objeto matemático con la finalidad de garantizar que se domine su estabilidad y su transferibilidad; éste es el caso de:

• el concepto de ángulo (desarrollado en el marco del trabajo sobre las sombras y el tiempo);

• el número, de las operaciones aritméticas y de sus distintas significaciones (desarrollado a los 6, 7 y 8 años con el trabajo sobre las situaciones problemáticas inherentes al tiempo, a los cambios económicos y a las representaciones espaciales protogeométricas).

Se tiene la impresión de que el «juego de cuadros» que realizamos en muchos casos (... ya lo utilizábamos antes de entrar en contacto con su teorización: ¡ahora nos es muy útil disponer de un lenguaje y un apoyo teórico al cual referirnos!) es suficiente (para algunos conceptos, pero no para otros) para construir un saber que permita controlar su aplicación en otros contextos y también controlar sus reglas internas de funcionamiento. Un ejemplo importante en este sentido nos parece que es precisamente el del trabajo con las monedas, los números del calendario y las mediciones de temperatura a los 6 años: la mayoría de alumnos, cuando terminan el curso, son capaces de confrontar dos números, «en cuanto a tales», refiriéndose al valor monetario, o a los números del mes, o a los valores de la temperatura (según el valor numérico de que se trate), pero hemos observado que muchos alumnos también son capaces de trabajar en la confrontación entre las fechas de acuñación de las monedas (1978, 1980, 1983, 1979, etc.), apartándose de los modelos de referencia y hablando de «centenas», «decenas», etc. («las centenas son las mismas, entonces basta con observar las últimas cifras de los números, ...»).

Nos falta aún un cuadro teórico de referencia preciso para establecer qué características (de los conceptos y/o de las situaciones didácticas y de los cuadros de recontextualización histórica de los conceptos) pueden evitar la monotonía (y la selectividad) de los momentos de institucionalización del saber matemático que, además, presentan el grave problema de saber cuál es el momento en que se han de llevar a cabo (hemos visto que no todos los alumnos son maduros al mismo tiempo para poder realizar la institucionalización y la descontextualización!).

La impresión que tenemos después de una confrontación sistemática con prácticas didácticas tradicionales es que la Historia de las Matemáticas puede sugerir contextos en los cuales recontextualizar el saber matemático, y que conducen por muchos conceptos (con un oportuno «juego de cuadros») a una descontextualización, en gran medida autónoma, por parte de los propios alumnos.

Es posible que también esta «eficacia» esté relacionada con el contexto social general dónde se insieren los alumnos: por ejemplo, el trabajo insistente y profundo en el «cuadro» escolar del calendario o del cambio económico se relaciona con las experiencias extraescolares sobre los mismos temas, y también con las experiencias de los «números» en distintos campos, lo cual implica la transferencia gradual de los comportamientos y los modelos de una situación problemática a otra.

### 3.4. *Situaciones didácticas y secuencias didácticas*

En nuestro trabajo de elaboración curricular hemos extraído de la Historia de las Matemáticas sugerencias para la construcción de determinados conceptos en situaciones didácticas singulares, pero también sugerencias utilizables en secuencias de larga duración (por ejemplo, el itinerario sobre «cálculo económico y aritmética» desde los 6 a los 9 años). Una cuestión interesante al respecto es la que se refiere a la lógica con la que organizar en forma de secuencias las diversas situaciones didácticas: ¿Se trata, principalmente, de una lógica interna a los objetivos del aprendizaje matemático? ¿De una lógica que corresponde a la progresión histórica del conocimiento extramatemático del tema? ¿De una lógica de organización de un itinerario eficiente para los alumnos? Hemos realizado secuencias que responden a todos estos criterios y no nos parece que de las experiencias llevadas a cabo se deduzcan indicaciones para preferir, en general, un criterio a otro: por ejemplo, en el trabajo en la escuela con alumnos de 8 a 10 años sobre las sombras y sobre la astronomía de posición, hemos seguido *groso modo* la progresión histórica de los conocimientos sobre el fenómeno de las sombras y sobre los problemas de orientación (anticipando los problemas de la orientación respecto a la interpretación del movimiento de las sombras relacionado con la rotación de la Tierra alrededor de su eje), mientras que en el primer curso de segunda etapa, hemos experimentado con éxito un itinerario distinto (en primer lugar, la interpretación del fenómeno de las sombras y, a continuación, el desarrollo del tema/temática de la orientación). Nos parece que tienen que ser evaluadas caso por caso y según se vayan presentando, las numerosas variables que están en juego:

• el nivel de profundización que nos propongamos alcanzar (por ejemplo, en un primer curso de instituto, el tema de la orientación se debería desarrollar a un nivel que exigiese el dominio cómodo del concepto de ángulo, de las técnicas de medición, de la forma de la Tierra, etc.; y al contrario, en la escuela primaria sólo nos proponemos alcanzar el nivel de relación entre las direcciones del movimiento local (en el plano) y los puntos cardinales;ı

- prerrequisitos matemáticos y temáticos disponibles (los conocimientos matemáticos y extramatemáticos son desarrollados de manera distinta a los 8 y a los 11 años);
- presencia simultánea de otros temas en el currículo escolar (a los 11 años, en los primeros meses del curso, el enseñante de Ciencias Matemáticas y Experimentales de nuestro proyecto introduce consideraciones sobre las concepciones biológicas del siglo XVII para poder confrontarlas con las concepciones astronómicas de otras épocas).

## 4. Historia de las Matemáticas: ocasión, para los alumnos, de trabajar sobre los conceptos matemáticos como «objetos» de estudio

Como ya hemos indicado en el párrafo anterior, después de los primeros cuatro o cinco años de trabajo en el proyecto de enseñanza integrada de las Matemáticas y de las otras ciencias en la escuela de 12 a 14 años, nos vimos obligados a integrar la hipótesis inicial de nuestro proyecto (construcción de los conceptos matemáticos de base por medio de actividades cognoscitivas sobre temas extramatemáticos) porque se nos presentaban dos clases de dificultades:

- no todos los conceptos matemáticos de base podían ser construidos de manera «natural» como instrumentos de organización del conocimiento de temas extramatemáticos;
- algunos conceptos matemáticos construidos de esa manera requería un trabajo de reflexión y explicitación que lo hicieran recognoscibles, que permitieran adquirirlos definitivamente y transferirlos a otros contextos donde fueran aplicables.

Se plantea, por tanto, el problema de «qué didáctica de la matemática» es necesaria al margen del trabajo cognoscitivo sobre temas extramatemáticos. Las soluciones adoptadas hasta ahora en la escuela italiana no nos satisfacían:

- enseñanza de tipo tradicional: se renuncia al rigor, a la generalización, a la contextualización cultural de los conceptos, precisamente de las Matemáticas de hoy, y se enseñan unas Matemáticas «escolares», en parte presentadas de forma teórica (según criterios del siglo pasado o de siglos anteriores), en parte a nivel intuitivo;
- enseñanza «moderna»: se asume como referencia una de las sistematizaciones actuales de los conceptos matemáticos (precisamente, la de tipo «conjuntista») y se presentan a los alumnos versiones fáciles de ésta.

El primer enfoque no nos gustaba en la medida en que éramos matemáticos; el segundo resultaba imposible de proponer porque no ofrecía motivaciones a los alumnos ni los relacionaba con sus experiencias y sus conocimientos matemáticos extraescolares; por otra parte, los dos enfoques dan la idea de unas Matemáticas «absolutas» y «definitivas», a las cuales sólo es posible añadir nuevos «descubrimientos».

La Historia de las Matemáticas nos sugirió una hipótesis de trabajo sobre la cual, y en los últimos cinco años, hemos elaborado y experimentado numerosos itinerarios didácticos: siguiendo la evolución histórica de las técnicas, de los formalismos, de las maneras de pensar ciertos conceptos (y proponiendo a los alumnos actividades de «utilización» de los formalismos y de las técnicas, y de confrontación entre ellas) es posible satisfacer las siguientes exigencias:

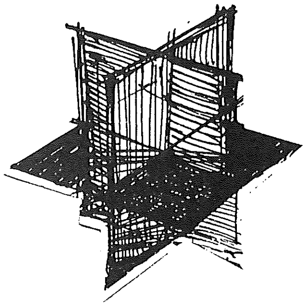
- representar las Matemáticas como una parte de la cultura humana, que evoluciona con ella y, en consecuencia, preparar el terreno (para los que continúen estudiando) para poder sistematizar los conceptos matemáticos según las Matemáticas de hoy;
- reconocer la importancia de los formalismos y de las técnicas, y las ambigüedades e insuficiencias de cada formalismo;
- construir o profundizar los conceptos matemáticos escogidos por medio de las diversas maneras en que se presentan en cada época.

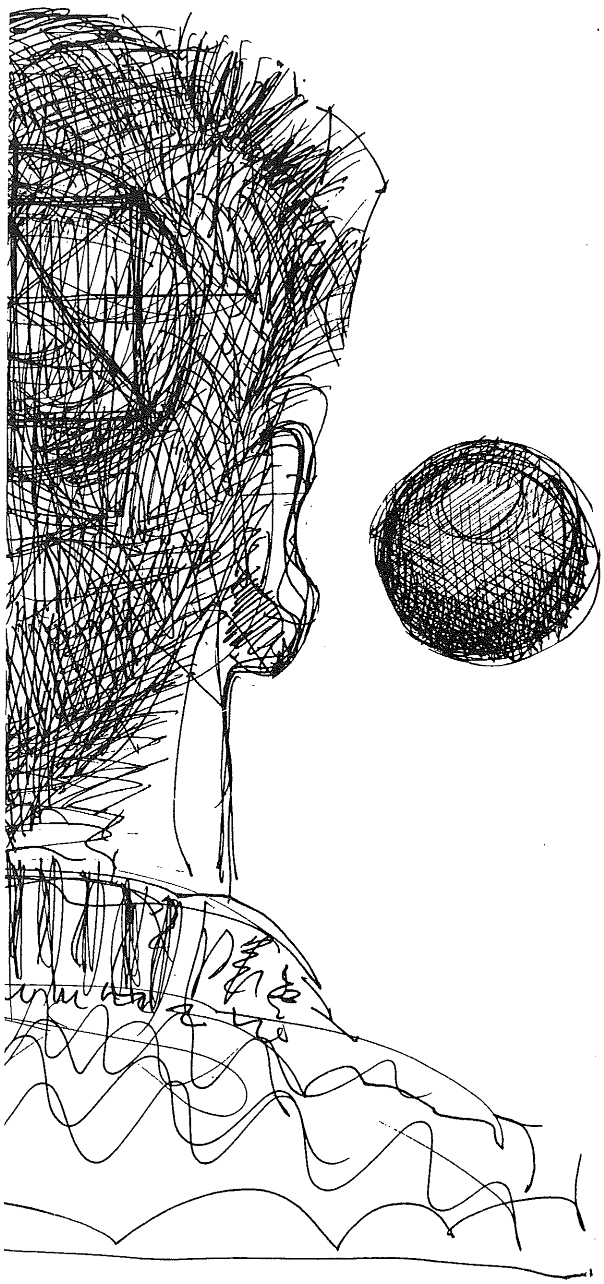
*

* *

Entre las realizaciones que actualmente consideramos más eficaces y más interesantes, teniendo en cuenta la orientación indicada, me gustaría citar:

- la reflexión sobre la escritura decimal-posicional de los números naturales (a los 11 años): la confrontación entre el tipo aditivo y el tipo posicional de escritura de los números se plantea sobre todo en lo que respecta a las técnicas de cálculo de las operaciones aritméticas; se observa así que, gradualmente, en el seno de los sistemas de escritura aditiva se desarrollan técnicas de cálculo con el ábaco en que ciertas cifras (en el sistema romano, por ejemplo, *I, X, C, M*) son «reagrupadas» e identificadas con fichas que adquieren su valor según la ranura en la que se introducen. Las exigencias de los cálculos aritméticos imponen, por tanto, técnicas de cálculo de tipo «posicional», incluso en presencia de escrituras «aditivas» de los números. El análisis de la discusión entre «algoritmistas» y «aba-





quistas» en la Aritmética renacentista ofrece una ocasión interesante para hacer ejercicios y reflexiones: una vez asegurada la utilización del sistema posicional de escritura de los números, el cálculo con cifras pudo reemplazar el tradicional cálculo con el ábaco, sustituyendo las operaciones físicas con las fichas del ábaco por operaciones mentales con las cifras...

• la reflexión sobre la escritura fraccionaria y sobre la escritura decimal de los números racionales (a los 11 años): los alumnos/as identifican en los usos corrientes hoy en día (distintos, por otra parte, de una región a otra de Italia, y aún más distintos entre Italia y otros países, como Inglaterra; y distintos también, en Italia, en el uso oral y el escrito) la presencia de la representación fraccionaria y de la representación decimal. Se presenta de manera muy espontánea el problema de establecer cuándo y dónde surgen las dos representaciones, lo cual permite trabajar sobre las técnicas babilónicas, egipcia, greco-romana y renacentista de representación de los números «no enteros»; la representación decimal de Stevin y las sucesivas representaciones están ligadas a las exigencias planteadas por el desarrollo del cálculo económico y técnico-científico en la época moderna; la confrontación entre las ventajas y los límites de las representaciones «fraccionaria» y «decimal» de los números racionales en relación con sus usos actuales (en particular por lo que respecta a la relación con las mediciones decimales, los cálculos aritméticos, la relación porcentual) concluye esta parte del trabajo;

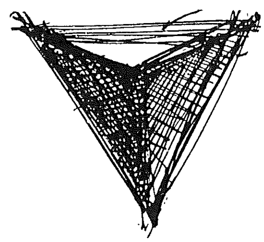
• la reflexión sobre los diferentes formalismos respecto a la jerarquía de los cálculos en las expresiones aritméticas, a los 13 años: se examinan (respecto a las épocas y a los problemas de cálculo que motivaron su introducción) el formalismo del *vinculum,* el formalismo de los corchetes [ y ], el formalismo de los paréntesis «jerarquizados», el formalismo de los gráficos, el formalismo de los diagramas, el formalismo de los paréntesis ( y ) de los teclados de las calculadoras. Los alumnos practican la traducción de un formalismo al otro y reflexionan sobre la posibilidad y los límites de cada tipo de formalismo (sobre todo en lo que respecta a la visión compleja y global de la articulación de los cálculos —útil para las manipulaciones algebraicas— propia del formalismo de los paréntesis; y lo que se refiere a la dirección de ejecución de los cálculos, propia, en cambio, del formalismo de los gráficos y de los diagramas). También se examinan algunos factores que han determinado la sustitución de ciertos formalismos por otros y que no se refieren a las funciones desarrolladas en cuanto a tales (dificultad en la reproducción tipográfica del *vinculum, ...*). El trabajo se desarrolla en parte respecto a las formas de calcular las expresiones con los ordenadores y las calculadoras de bolsillo.

*
* *

Los itinerarios didácticos que hemos ilustrado brevemente (se trata de itinerarios muy largos, con fichas de trabajo guiado y fichas de evaluación de aprendizaje, cada uno de los cuales requiere como mínimo una veintena de horas de trabajo en el aula) consiguen resultados satisfactorios y amplios sobre los objetos matemáticos considerados y, por otra parte, habitúan poco a poco a los alumnos al la idea de unas Matemáticas «en evolución», rompiendo progresivamente el estereotipo de la inmovilidad de las Matemáticas, muy peligroso por la actitud que crea ante ellas.

Las experiencias que hemos realizado (tanto las que se refieren a la elaboración de las propuestas didácticas por parte de los grupos mixtos de universitarios y de maestros como las que se refieren a las experimentaciones realizadas en clase —todos los itinerarios han sido experimentados en más de 120 clases, con materiales didácticos modificados de año en año— plantean algunos problemas que querría señalar porque los considero de interés general:

- una primera cuestión se refiere a la exactitud histórica de las situaciones didácticas propuestas; en la mayoría de casos los problemas, los formalismos y el lenguaje son análogos pero no idénticos a los que encontramos en los «protocolos» históricos, ya que es imposible reconstruir en clase el aparato simbólico propio de una cierta época y las motivaciones que condujeron al uso de un determinado formalismo o de una cierta técnica. En realidad, lo que presentamos como «representación sexagesimal de los números no enteros» o como «escritura de las expresiones aritméticas con el *vinculum*» es una interpretación «trasladada a los formalismos y al lenguaje de hoy» de las que parecen ser las características principales de los formalismos de entonces. Se trata de opiniones bastante arbitrarias, y habría que precisar más sus límites y los parámetros según los cuales podemos evaluar la legitimidad cultural y sobre todo didáctica de tales opciones;
- un segundo problema se refiere a la distinta eficacia «simbólica» de los diversos formalismos cuando evocan el mismo aspecto o aspectos diferentes del concepto representado. El grafo es útil para guiar la ejecución del cálculo, los paréntesis son útiles para transformar la expresión que hay que calcular sin calcularla efectivamente. Nos parece que por medio de la confrontación de los distintos formalismos es posible (como hemos indicado al comiento del párrafo) hacer notar aspectos distintos de un mismo concepto; pero aún nos falta una teoría unitaria capaz de orientar las elecciones que hay que llevar a cabo entre los varios formalismos que se encuentran en las documenta-



ciones históricas (la exposición presentada en el clásico texto de F. Cajori, *An History of Mathematical Notations,* es muy extensa, pero no basta para cumplir nuestro objetivo).

## 5. Historia de las Matemáticas: ocasión de abrir un «discurso matemático»

Los programas de Matemáticas de segunda etapa (11 a 14 años) en Italia exigen de los maestros pasar gradualmente de la introducción y el uso de los conceptos en situaciones «prácticas» al razonamiento explícito sobre estos conceptos; sin pretender, sin embargo, desarrollar o hacer construir a los alumnos demostraciones particulares. En los programas se incide sobre todo en la búsqueda de ejemplos y contraejemplos relativos a las afirmaciones matemáticas y, como objetivo final, en argumentaciones que se encadenan («... si eso es verdad, entonces ha de ser también verdad que...»). De hecho, considerando que la mayoría de alumnos continuarán estudiando, en alguna escuela se exponen a los alumnos de 13 y 14 años incluso algunos teoremas de Geometría (Pitágoras, Euclides, etc.); en general, en cambio, no se pide a los alumnos que construyan demostraciones de forma autónoma.

Desde hace tres años, en el grupo que coordino se lleva a cabo una reflexión bastante minuciosa sobre la significación, la importancia y la practicabilidad, en la escuela obligatoria de hoy (que dura hasta los 14 años), de la argumentación matemática que alcanza hasta el nivel de las demostraciones completas. Podríamos resumir los términos de la cuestión así:

- la difusión de los ordenadores exige que se confronten, elijan y comprendan sistemas de símbolos que responden a reglas muy complejas; el nivel de complejidad de las actividades mentales que hay que efectuar puede compararse al de las argumentaciones sobre los conceptos matemáticos y sobre su representación formal;
- la complejidad del mundo de hoy (y de los «discursos» sobre los problemas más diversos) exige capacidades de razonamiento verbal elevadas, si se quiere ser consciente de los problemas que se abordan y de las soluciones que se proponen;
- la escuela obligatoria debe presentar una imagen no deformada de las Matemáticas; y las Matemáticas no son solamente un «instrumento de conocimiento» ni un «formalismo sujeto a determinadas reglas»;
- además, no todos los alumnos poseen los niveles de dominio del lenguaje que la argumentación matemática exige; el trabajo sobre el «discurso matemático» corre el riesgo, pues, de ser muy selectivo y discriminatorio...
- ... además, el desarrollo de «demostraciones» auténticas no resulta fácil de motivar, y sus significado no es fácil de comprender por medio de las demostraciones corrientes de la Geometría elemental de la segunda etapa (las propiedades que hay que demostrar resultan «evidentes» o son fácilmente comprobables por medio del dibujo);
- ... y, por último, no es fácil, en relación con la experiencia matemática de los alumnos, que es limitada, hacerles comprender el valor cultural de las demostraciones y del método deductivo en Matemáticas...

La Historia de las Matemáticas nos ha ofrecido algunos elementos de reflexión y algunas ideas, sobre las cuales realizamos nuestras primeras experiencias de «demostraciones» (elaboradas en clase con alumnos) y comenzamos a construir itinerarios de trabajo más globales sobre el razonamiento matemático. A este respecto, he de mencionar aquí una investigación análoga (cuyas realizaciones se orientan, sin embargo, en una dirección distinta), que desarrolla, desde hace varios años, el grupo que coordina en Roma, Mario Barra, con el que a menudo discutimos sobre el tema.

En primer lugar, la Historia de las Matemáticas destaca el papel de los problemas aritméticos (y el de los problemas geométricos) en el desarrollo del razonamiento matemático en la Antigüedad y destaca la estrecha relación dialéctica que existía, al principio, entre las motivaciones «mágicas» de la investigación y de la demostración de las propiedades de los números, y los desarrollos «racionales» de las argumentaciones (hasta las primeras «demostraciones» verdaderas). Un libro muy interesante sobre el particular es el de Eric Temple Bell, *The Magic of Numbers.*

En segundo lugar, la Historia de las Matemáticas y la historia de la cultura ponen de relieve las relaciones entre el desarrollo de la argumentación matemática, el desarrollo de la filosofía, los objetivos de formación de las clases dirigentes y el desarrollo de la racionalidad autónoma de los ciudadanos en la organización del poder, en las ciudades-estado de la Grecia de los siglos VI y V a. de C.

Estas reflexiones y estas constataciones nos sugirieron algunos itinerarios didácticos que actualmente estamos experimentando en clase, y modificando según los resultados de la experimentación:

- a los 11 años, a partir de las prácticas «mágicas» actuales sobre los números (números que «traen mala suerte», números «perfectos», números del juego de la loto, etc.), los alumnos entran en contacto con algunos problemas típicos de la Astrología antigua, y pueden darse cuenta poco a poco de la importancia que podía tener antaño, para el sabio, el hecho de descubrir propiedades de los números que se «resistían» a una prueba realizada sobre «todos» los números imaginables. Se propone a los alumnos algunas «propiedades» (como «la suma de dos números impares consecutivos puede ser dividida por cuatro»; «la suma de tres números consecutivos puede ser dividida por tres»; «si un número termina en 1, o es primo o puede ser dividido por tres»; «todo número par es la suma de dos números primos», etc.), y se les pide que comprueben si dichas propiedades son válidas para «varios» números. Ciertas propiedades «resisten» con todos los números considerados; entonces se plantea el problema de comprobar si son válidas para todos los números... Confrontando los razonamientos a medida que los alumnos los desarrollan y resaltando sus aspectos generales, es posible (en algunos casos) conseguir en clase auténticas demostraciones en lenguaje algebraico... Los alumnos se sorprenden de que hoy en día aún no haya, para algunas «propiedades», más que comprobaciones sobre una cantidad muy elevada de números, ¡pero que no haya ninguna «demostración»! En este momento se puede introducir la búsqueda de conjeturas sobre las propiedades ulteriores que los alumnos deben formular para, a continuación, intentar comprobar y, eventualamente, demostrar... Este año hemos incorporado también una secuencia de trabajo sobre la «verdad»: por medio de la confrontación entre varios tipos de afirmaciones (no sólo en el campo de las Matemáticas), se anima a los niños a reflexionar sobre los diferentes medios de que se dispone (incluido el medio «razonamiento») para establecer si una afirmación es verdadera o no;

• a los 12 años, la presentación del teorema de Pitágoras y del teorema sobre la semejanza de los triángulos, que se atribuye habitualmente a Tales (realizada alternando «comprobaciones», «conjeturas» y «razonamientos demostrativos») permite introducir la comparación entre la geometría de los griegos y las geometrías de los babilonios y los egipcios, introduciéndola en el cuadro de las novedades que tienen lugar en la articulación de la sociedad griega, respecto a los modelos teocráticos preexistentes. Los elementos de historia «interna» de las Matemáticas (el paso de las propiedades comprobadas y utilizadas «en cada situación nueva» o deducidas «por analogía», a las propiedades expresadas en general y basadas en la deducción a partir de propiedades «evidentes») se añaden así a los elementos de historia general de la cultura, que otorgan un sentido más amplio a la evolución interna de las Matemáticas.

Las experiencias que hemos realizado en clase hasta ahora presentan aspectos positivos y aspectos negativos que deberemos evaluar minuciosamente; también plantean problemas de interés general:

• en principio, el problema de la exactitud histórica, que concierne en este caso no tanto al lenguaje matemático como al medio histórico en el que algunos «descubrimientos» se han producido y algunas exigencias de razonamiento riguroso se han desarrollado. Los documentos históricos, cuando existen, no son accesibles a los alumnos; éstos tienen conocimientos históricos muy superficiales de las épocas que consideramos (y parece imposible dedicar demasiado tiempo a llenar estas lagunas, durante los cursos de Matemáticas) y el relato del desarrollo de los acontecimientos contiene a menudo imprecisiones;

• otro problema afecta la comprensión, en un itinerario de unas decenas de horas, de un período histórico que comprende centenares de años; con lo cual se corre el riesgo de dar una imagen deformada del desarrollo histórico de las Matemáticas, de presentar como fáciles o banales procesos muy complejos;

• a los 11-12 años, efectivamente, los alumnos consiguen darse cuenta del significado de «demostrar», gracias al marco histórico (que pone de relieve el salto cualitativo con relación a las propiedades comprobadas caso por caso); pero, ¿cuántos alumnos alcanzan ese estadio de conciencia? Menos del 30 por 100, como media, y se trata en general de alumnos en los que los medios lingüísticos, la concentración mental y la base cultural son superiores. Este trabajo es igualmente útil para los otros alumnos (aunque a niveles más bajos), pues permite efectuar abundantes ejercicios de «comprobación de propiedades» y que muchos de ellos comprendan que una afirmación matemática puede ser verdadera o falsa, y que, en distintos casos, la «comprobación» en situaciones particulares puede permitir encontrar contraejemplos... ¿Es posible mejorar sensiblemente el porcentaje de los alumnos que alcanzan los objetivos más ambiciosos, por medio de una organización distinta del trabajo, más gradual, más atenta a conseguir que los alumnos participen de la problemática histórica y técnica que se les propone? ¿Y cuáles son los obstáculos que hay que superar? ¿Obstáculos técnicos, o culturales?

• ¿Es posible, es útil relacionar de manera más sistemática —puesto que en Italia la misma persona enseña Matemáticas o Ciencias experimentales— el problema de la «verdad matemática» con el problema de «la verdad en las ciencias de la naturaleza»? ¿O nos arriesgamos a crear elementos de confusión y a embrollar la conciencia del significado del razonamiento deductivo?

## 6. La Historia de las Matemáticas y los maestros

La Historia de las Matemáticas ofrece a los maestros —como hemos visto— distintas ideas para su actividad didáctica, ya sea como historia de cuestiones particulares que se presentan en clase de manera explícita, ya sea como fuente de temas en los que puede proponer de nuevo, de manera implícita, «contextos» para la construcción de determinados conceptos y habilidades matemáticas.

La Historia de las Matemáticas puede también utilizarse en la enseñanza como referencia para anticipar dificultades o posibles errores en el aprendizaje de los alumnos; en efecto, ocurre a menudo que los obstáculos con que se encuentran los alumnos son consecuencia de concepciones que se encuentran extendidas en las maneras de pensar de fuera de la escuela y en el lenguaje —y que existían también en las Matemáticas de antaño o en las terminologías «técnicas» del pasado. Podría citar a propósito dos ejemplos, entre muchos otros:

- la confusión entre el término «perpendicular» y el término «vertical», ligada por una parte a la expresión «una caída perpendicular» (*cadere a perpendicolo*) que está aún muy extendida en la lengua italiana para indicar la caída según la vertical, y, por otra, al término de *perpendiculum,* que designaba el hilo de la plomada en el lenguaje técnico del siglo XVII;
- los comportamientos de los alumnos en las primeras aproximaciones de la probabilidad, en las que se reconocen varios intentos de «racionalización» del concepto (por medio del cálculo de las diferencias o del cálculo de las razones entre los acontecimientos «favorables» y los acontecimientos «desfavorables»), que datan de hace casi cuatro siglos, para buscar una «medida» de la probabilidad de un acontecimiento.

Evidentemente, con conocimientos históricos apropiados se puede mejorar la atención del maestro hacia las concepciones de los alumnos, favorecer el diálogo con ellos y dirigir el proceso de organización de su cultura matemática.

Pero todos esos objetivos exigen que el maestro tenga profundos conocimientos históricos y que sepa servirse de ellos. En Italia bastantes licenciados en Matemáticas han seguido cursos de Historia de las Matemáticas durante sus estudios universitarios, pero raramente saben utilizar cuando enseñan los conocimientos que han adquirido en esos cursos. Además, ¡sólo una parte de los maestros de Matemáticas de la escuela obligatoria son licenciados en Matemáticas!

En realidad, los cursos universitarios de Historia de las Matemáticas inciden sobre todo en los aspectos interiores de la Historia de las Matemáticas y se refieren a menudo al estudio monográfico de períodos o a problemas muy particulares. Sin embargo, hemos visto que desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas en la escuela obligatoria, la Historia de las Matemáticas y la de las Protomatemáticas son muy importantes en la medida en que son parte de la historia de la cultura humana (y las Protomatemáticas, particularmente, con vistas a la recontextualización de conceptos y de habilidades matemáticas dados).

Otro aspecto insuficiente de la formación de los maestros es la separación entre Historia de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas: incluso en las universidades en que los alumnos siguen los dos tipos de curso, raramente se les propone la problemática del uso de los conocimientos históricos en didáctica. A lo largo de su «formación en activo», los maestros no tienen facilidades para encontrar ni el tiempo, ni los maestros necesarios para adquirir (o desarrollar en un sentido didáctico) competencias de naturaleza histórica: habitualmente, las necesidades más urgentes son de otro carácter (se refieren a los nuevos contenidos que hay que saber enseñar o a las metodologías didácticas de moda). Sólo en un contexto de investigación muy definido y estable —como el que se da en los grupos mixtos de maestros y universitarios en algunas universidades italianas— es posible abordar, con los detalles y los medios necesarios, problemas como los que hemos indicado en esta conferencia. Con el tiempo, la calidad y la eficacia de las innovaciones introducidas permitirán dirigir un poco más la atención sobre el problema del uso de la Historia de las Matemáticas en la práctica didáctica habitual (y por lo tanto, también sobre el problema de la formación integrada, en historia y en didáctica, de los enseñantes).

Estas páginas reproducen la conferencia dada por Paolo Boero enla 4.ª Escuela de Verano de Orleans, julio de 1986. (Traducción de Vicent Font.)

# Aproximación a los números enteros a partir de una escalera

GRUPO ALBUQUERIA DE MATEMÁTICAS
José González Alba, Manuel Jiménez Girón,
Francisco José Briales González

## Introducción

En el presente artículo exponemos una experiencia llevada a cabo con alumnos de séptimo nivel de EGB, en el Colegio Huertas Viejas de Coín (Málaga), en el tema «Números enteros». El punto de partida del tema es la utilización de una escalera «de verdad» para iniciar a los alumnos en este concepto.

Empezaremos por fundamentar la experiencia desde los puntos de vista metodológico y didáctico, continuaremos con el desarrollo de ésta, añadiendo, por último, algunas actividades para continuar.

Más que una investigación se trata, por tanto, de la presentación de una experiencia desarrollada con los alumnos, que queremos ofrecer por el interés que ha despertado.

## Fundamentación

Queremos empezar por justificar la necesidad y pertinencia de enseñar los números enteros en la EGB. Su mayor justificación es la presencia en la vida cotidiana de este concepto:

- Las temperaturas con el termómetro dividido en dos partes: bajo cero y sobre cero.
- Las clasificaciones de fútbol, con una puntuación de positivos y negativos.
- Las cuentas bancarias, que pueden tener saldo favorable o desfavorable.
- La altura sobre o bajo el nivel del mar.
- La medida en años de nuestra era: antes y después de Cristo, etc.

Los números enteros, que nos sirven para interpretar y comprender todas estas situaciones cotidianas, y además son necesarios para abordar con éxito otras parcelas de las Matemáticas, donde son una herramienta básica (ecuaciones, polinomios, operaciones...), deben estar, por tanto, incluidos dentro del currículo de la EGB, ya que:

*a)* En la EGB, como formación básica de un ciudadano, los enteros han de estar presentes, ya que así se garantiza el acceso de toda la población al empleo de este concepto, que si dejáramos para etapas posteriores, quedaría reducido a una parte de la población en lo que coincidimos con la propuesta del Informe Cockcroft [1].

[1] COCKCROFT, *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Edita: MEC, Madrid, 1985.

*b)* Dentro de ésta, la ubicación correcta ha de ser séptimo u octavo, ya que es en estos niveles en los que el niño se encuentra en el estadio del pensamiento concreto avanzado o inicios del formal [2].

### La opción metodológica

Son muchas las formas consagradas de presentar los números enteros en una clase.

*a)* Como una relación de equivalencia, realizada en un conjunto de pares ordenados, donde cada clase de equivalencia representa un número entero.

*b)* A partir de ejemplos sucesivos de su utilización.

Frente a estas maneras de presentar el tema, hemos buscado una forma alternativa, motivada, fundamentalmente, por la insatisfacción con las presentaciones hacituales de los libros de texto.

Los rasgos característicos de nuestra propuesta, que pensamos justifican teóricamente la experiencia son:

*a)* Se trata de una experiencia basada en situaciones y materiales reales y significativos, e incluso posible de trabajar de manera vivenciada, utilizando el propio cuerpo, con la significatividad que adquiere una actividad cuando está apoyada en un planteamiento de este tipo.

Es también un ejemplo de cómo se puede obviar un material sofisticado o estandar en enseñanza de las Matemáticas. La ausencia de material no puede ser considerado como inconveniente insalvable. Asimismo, la importancia de materiales o situaciones como la escalera, su potencia didáctica, supera la de cualquier material comercial.

No sólo las actividades en la escalera, sino las situaciones que se proponen para completar el tema señalan la conexión del concepto «enteros» con la vida real. Esto no es sólo importante por la significatividad del material, sino porque convencen al alumno de que las Matemáticas no están para fastidiar, sino que nos dan herramientas para comprender nuestra realidad.

La presentación de diversas situaciones cotidianas donde están presentes los números enteros tiene un valor más: Hace que la abstracción no peligre. Un concepto matemático que se trabaja en cinco situaciones distintas, necesariamente sugiere que las Matemáticas son una herramienta que no está ligada a ninguna situación, para poder servir a muchas situaciones.

> «... hemos de introducir los enteros como notación de acciones y resultados que los llevan implícitos, y abstraer el concepto de la estructura común a diversas situaciones» [3].

Por otro lado, hasta que los números enteros y sus operaciones no tengan los fuertes lazos con la realidad de los naturales, no sean tan cotidianamente familiares como éstos a los alumnos, no podremos valorar que los enteros «se han conquistado». Una cita recoge las consecuencias metodológicas de este planteamiento, que subrayan nuestros presupuestos anteriores:

> «Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto *status* familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran» [4].

La conclusión final es que renunciamos a una didáctica que parte de la definición de entero o de su construcción formal, buscando como alternativa un acercamiento lo más significativo posible para el alumno. Hacemos opción por un tratamiento afectivo-psicológico, frente a otro de tipo disciplinar.

*b)* La experiencia de trabajo en la escalera supone un «organizador previo» tal y como lo define Ausubel [5]. Es una aproximación cualitativa a los temas, que persigue fundamentalmente la comprensión de los conceptos más amplios e importantes del tema, dando escasa entrada a lo cuantitativo. Como dice Bell:

> «... lo que importa en la introducción de los números enteros es el armazón que ayude a desarrollar los procedimientos correctos días, semanas y años más tarde, de que se haya hecho la primera introducción, cuando el alumno afronte cálculos con números enteros y haya olvidado los detalles de aquel primer contacto. Lo importante, es, pues, que las conceptualizaciones correctas estén ligadas a una dilatada situación familiar en la que las operaciones tengan una una interpretación bien comprendida y en la que las reglas que hayan de memorizarse sean pocas y sólidas» [6].

Desde el punto de vista psicológico, la «escalera» ofrece un «esquema cognitivo»: presenta los conceptos más amplios y que incluyen a los demás. Tiene el valor de un mapa donde situar los conceptos más pequeños, viendo la relación entre ellos y su vinculación a los más amplios. Ausubel defiende que este tipo de planteamiento:

- Mejora el recuerdo. La memoria es más duradera.
- Mejora la comprensión frente al automatismo.
- Da anclaje para interconectar los distintos conceptos entre sí.

[2] SHAYER y ADEY, *La ciencia de enseñar ciencias,* Editorial Narcea, Madrid, 1984.

[3] COLECTIVO PERIÓDICA PURA, *Didtáctica de los números enteros,* Editorial Nuestra Cultura, Madrid, 1982, pág. 14.

[4] BELL, A., «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros», *Revista Enseñanza de las Ciencias,* volumen 4, número 3, octubre, 1986, pág. 199. Editada por el ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y el Servicio de Formación Permanente de la Universidad de Valencia.

[5] AUSUBEL, DAVID, P., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo,* Editorial Trillas, México, 1976.

[6] BELL, A., *op. cit.,* pág. 199.


LEMA.- "Rectángulos sobre rectángulos"
NOMBRE.- M. Ángel González Castillo
C.P. "Sierra Nevada"
8º Nivel
Curso: 1988-89

Nuestra experiencia subraya y confirma que trabajando con esta idea, la memoria se mantiene más tiempo, y la comprensión es mayor: La escalera ha supuesto una estrategia de recuerdo, que los alumnos han usado, cuando meses después (lincluyendo el paso de un verano) han tenido que utilizar los enteros, autorrecuperando lo que habían olvidado. Esta experiencia da información que hay que recordar, pero también una estrategia para mantener o recuperar ese recuerdo.

*c)* Un planteamiento metodológico basado en una secuencia que parte del movimiento, continúa con situaciones para terminar en la abstracción, respeta las diferencias de nivel en una clase en el doble sentido de distintos grados de madurez, o diferentes puntos de partida en el dominio de los contenidos o conocimientos previos.

Desde el alumno de educación especial integrado en un aula, hasta el alumno más brillante pueden trabajar con este modelo con actividades llenas de sentido. La única diferencia estará en que se desengacharán de la dinámica general de la clase en distintos momentos: Los de menor madurez posiblemente en cuanto terminemos el trabajo de la escalera; los más brillantes llegarán hasta el final.

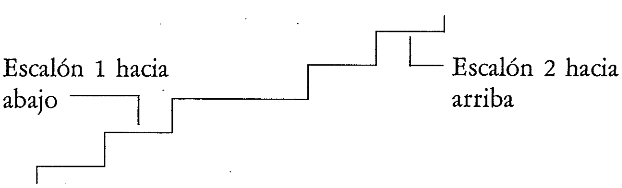
Con esta manera de trabajar, bajo la denominación «números enteros», ofrecemos actividades de distinto nivel, sin necesidad de separar en grupos. La integración se lleva hasta el punto de trabajar el mismo tema que los compañeros simultáneamente con ellos, en lugar de separarlos con actividades diferenciadas.

La integración, adquiere por tanto, un sentido más amplio, no limitado exclusivamente al respeto a las deficiencias en un aula, sino respeto a las diferencias de madurez en general.

## Descripción de la experiencia

La experiencia se basa en considerar el rellano de la escalera como punto 0. Planteamos seguidamente el problema de dar nombre a los escalones. La solución la encuentran los niños rápidamente: escalón 1, escalón 2, escalón 3 ..., añadiendo la coletilla «hacia arriba» o «hacia abajo».

Ejemplos:

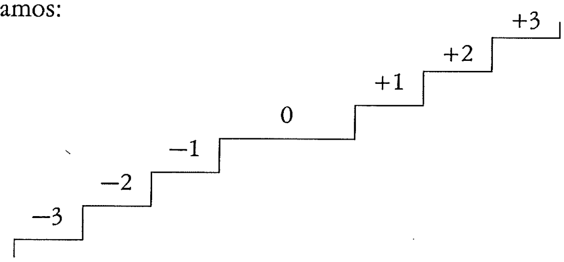



Hacemos prácticas de situarnos cada uno en el escalón que nos indiquen. Cuando esto está suficientemente trabajo cae por su propio peso la notación convencional:

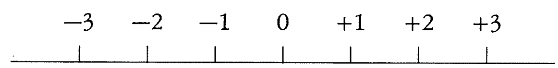
«Escalón 1 hacia abajo»: −1
«Escalón 2 hacia arriba»: +2

Continuamos la experiencia de colocarnos, esta vez con la notación abreviada.

A continuación pedimos que el niño dibuje una escalera en su libreta, y señale gráficamente los escalones que indicamos:




De esta gráfica, reflejo de una situación real, a la gráfica abstracta, sólo hay un paso:




Hacemos ejercicios de situar cosas sobre la gráfica convencional.

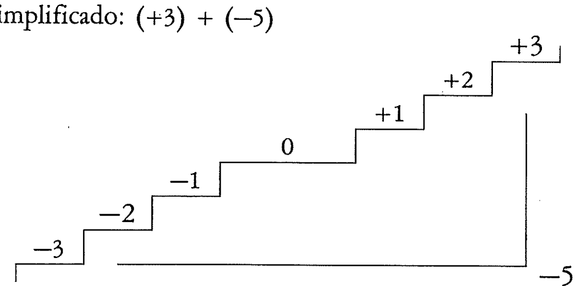
Sobre la marcha, salieron cantidad de cuestiones que se fueron haciendo notar o resolviendo: La convencionalidad de la notación, la simetría de la gráfica, etc.

El siguiente punto que trabajamos en la escalera fue la regla de la suma.

El primer paso fue con lenguaje cotidiano: «Estoy en el escalón 3 hacia arriba y añado un desplazamiento de 5 escalones hacia abajo.» Una vez dominados estos juegos, nos propusimos como tarea, simplificar el lenguaje matemático:

«Estoy en el $\underbrace{\text{escalón 3 hacia arriba}}_{(+3)}$ y $\underbrace{\text{añado}}_{+}$ un desplazamiento de $\underbrace{\text{5 escalones hacia abajo}}_{(-5)}$.»

Simplificado: (+3) + (−5)



El resultado es −2.

Ejercicios de pasar lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa, nos dieron mucha soltura.

Con una escalera dibujada por cada uno en la libreta o en una cartulina, no fue necesario ya, desplazarse a la escalera para hacer sumas.

El siguiente paso fue realizar las operaciones mentalmente (siempre con números pequeños). Durante algún tiempo, los niños cerraban los ojos para realizar estas sumas mentales: «Estaban bajando y subiendo escaleras con la imaginación». Pronto estas «muletas» no fueron necesarias y la operación quedó totalmente automatizada.

Tres frecuentes errores se solucionan con esta presentación:

*a)* El cruzar el cero. Tener como punto de partida una de las semirrectas, y mediante un desplazamiento (una suma) pasar a la otra semirrecta, supone cruzar el cero, solucionando los problemas que esto conlleva. Ejemplo: (+4) + (−7).

*b)* Queda clara la ordenación decreciente en valor absoluto de los enteros negativos, frente al carácter creciente de este valor en los positivos.

Los alumnos tiene muy claro que el −3 es más pequeño que el −1, ya que la vivencia desde el rellano de estas posiciones, deja claro que el −3 está más abajo.

*c)* La confusión habitual entre signo de la operación y signo correspondiente al número, desaparece:

Añadir supone una suma, pero el desplazamiento que se añade puede ser hacia arriba (positivo) o hacia abajo (negativo), siendo este signo correspondiente al número.

Estoy en el escalón 2 hacia arriba y añado un desplazamiento de 3 escalones hacia abajo.

$$(+2) \overset{\text{añado}}{+} (-3)$$

### Cómo continuamos el tema

La experiencia anterior supone una iniciación al tema, que continuamos de forma más tradicional, excepto en aquellos aspectos en los que hemos encontrado material para hacerlo de otra manera:

*a)* La regla de los signos. Para esto nos apoyamos en una experiencia mental, posible de proponer a los niños, que utiliza dos magnitudes simultáneas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dinero | que se gana ... + | Tiempo en días | futuro ... + |
| | que se pierde... − | | pasado ... − |

A continuación planteamos las siguientes preguntas:

1.—Gano 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tendré dentro de dos días respecto del que tengo ahora?

(+1.000) × (+2) = Dos mil pesetas más que ahora, +2.000

2.—Gano 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tenía hace dos días?

(+1.000) × (−2) = Dos mil pesetas menos que ahora, −2.000

3.—Pierdo 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tendré dentro de dos días?

(−1.000) × (+2) = Dos mil pesetas menos que ahora, −2.000

4.—Pierdo 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tenía hace tres días?

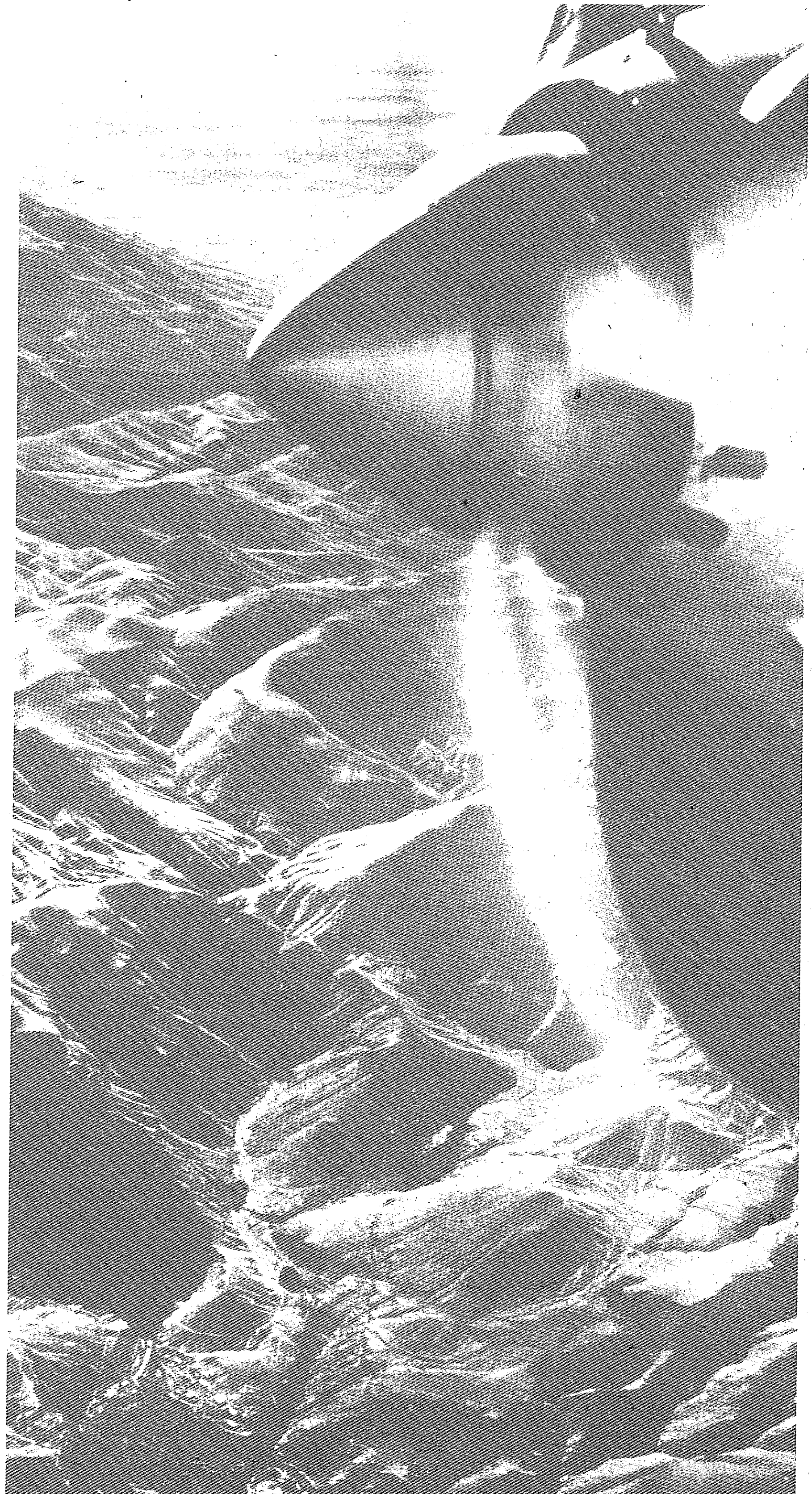
(−1.000) × (−2) = Dos mil pesetas más que ahora, +2.000 [7]

Los alumnos ofrecen respuestas intuitivas correctas, que no hay más que acercar a la conocida regla de los signos.

*b)* Numerosas fichas para profundizar y ampliar el tema, así como para facilitar el automatismo. Hay varias publicaciones que hacen una presentación exhaustiva y sistemática partiendo de situaciones cotidianas [8,9], de ahí que sólo hagamos una pequeña reseña:

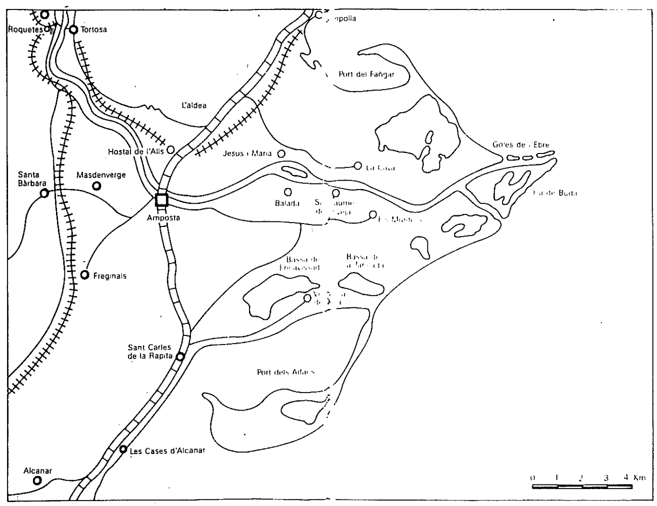
- Vuelos espaciales: cuenta atrás, lanzamiento y cuenta adelante.
- Planisférico: Meridiano este y oeste, y paralelo norte y sur.
- Balanza de pagos.
- Alturas sobre y bajo el nivel del mar.
- Escala de temperaturas.
- La bolsa.
- Ascensores en pisos con sótanos.
- Etcétera.

7 KLINE, MORRIS, *El fracaso de la matemática moderna,* Editorial Siglo XXI, Madrid, 1984, 9.ª edición.
8 COLECTIVO PERIÓDICA PURA, *op. cit.*
9 BRIALES, F. J. y JIMÉNEZ, M., *Matemática viva,* Editorial Alhambra, Colección Breda, núm. 30, Madrid, 1989.



# Trabajar con mapas

Grup Zero




## Introducción

Dentro de las técnicas que sería necesario que los chicos/as desarrollaran durante su período de escolarización obligatoria están todas aquellas que hacen referencia a la comunicación mediante símbolos y códigos de observaciones, hechos, procesos, relaciones, situaciones, etc. En la revista *Prespectiva Escolar* núm. 27, dedicada a «Les Ciències a l'Escola», hay un inventario de estas técnicas:

*a)* las que utilizan el dibujo: expresar el resultado de una observación con la ayuda de un dibujo acompañado de un texto, dibujando con precisión y exactitud un detalle significativo respetando siempre las proporciones;

*b)* las que utilizan esquemas: expresar un montaje, una construcción, una estructura, mediante un esquema que sólo exprese las relaciones funcionales con exclusión de cualquier otro detalle; saber hacer un esquema respetando ciertos convenios: proyección sobre el plano, corte a un cierto nivel, mantener las proporciones, utilizar una escala, utilizar signos convencionales;

*c)* las que requieren orientarse en el espacio y el tiempo, utilizar planos y mapas: saber definir una posición o un movimiento en relación con el sujeto, saber orientar una dirección o un desplazamiento en relación a unos signos universales (respecto a la horizontal, vertical, puntos cardinales); representar un camino, un trayecto, un perfil mediante un esquema topológico o mediante una representación a escala; hacer un plano a escala; interpretar un mapa reconociendo los elementos planimétricos y altimétricos.

En las líneas que siguen, nos centraremos en el tercer aspecto y en particular en *los mapas,* explicando una propuesta de trabajo con mapas en *primero de BUP.*

## Los mapas

Podemos definir los mapas como representaciones reducidas, simbólicas y aproximadas de toda la superficie terrestre o de una parte de ella. El hecho de que la representación se haga sobre una superficie plana cuando la superficie terrestre no lo es, comporta una serie de problemas que la cartografía ha tenido que ir, a lo largo de los siglos, resolviendo.

Los mapas deben considerarse como un instrumento de trabajo imprescindible en los niveles de escolarización obligatoria, un instrumento para utilizar en las diversas asignaturas: Geografía e Historia, Ciencias Naturales, Lengua, Matemáticas. Si bien para algunas materias, los mapas son una fuente importante de información también hay que considerarlos como una fuente de conocimiento ya que, seleccionando los elementos que sobre él representamos podemos descubrir relaciones que de entrada habían pasado desapercibidas. Así, por ejemplo, en el libro de M. Parés, G. Pou y J. Terrades, *Ecologia d'una ciutat: Barcelona,* proponen como herramienta fundamental de trabajo el Mapa Ecològic entendido «com una primera aproximació descriptiva sintètica d'elements estructurals que pot ser utilizada com a marc de referència de processos funcionals i que conté indicadors adequats per analitzar algunes relacions bàsiques entre estructura i funció en l'ecosistema urbà».

Además, en Matemáticas, los mapas no pueden ser tan sólo un lugar donde aplicar unos ciertos conocimientos sino también una manera de «materializarlos» para facilitar su comprensión, al mismo tiempo que son una fuente de nuevas situaciones desde las cuales afrontar nuevos problemas.

## El trabajo con mapas a lo largo del período de escolarización

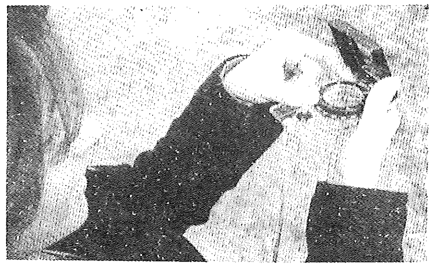
Muchas veces, desde las diversas materias, se ha venido utilizando los mapas pensando que era una técnica que los alumnos/as ya dominan, cosa que no es cierto si desde los primeros cursos de Básica no se ha hecho un trabajo consciente encaminado a que aquéllos/as tengan un conocimiento del espacio, la capacidad de poder expresar la organización en el espacio de aquello que observan, etc. (Puede verse el número 52 de *Prespectiva Escolar,* dedicado a «L'Éspai».)

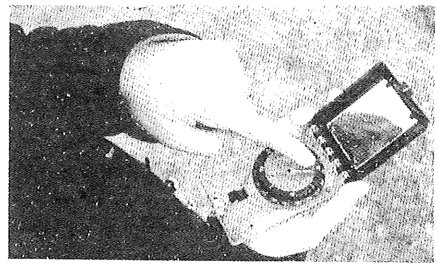
Si bien al finalizar 8.º de EGB los alumnos/as deberían poder interpretar y utilizar un mapa en sus aspectos planimétricos, hay dos aspectos que deberían trabajarse en 1.º de BUP o FP:

- la representación del relieve;
- la realización de medidas y de cálculos sobre el mapa que serían incómodas o imposibles de hacer en la realidad.

Estos dos aspectos pueden trabajarse en 1.º de BUP o de FP e incluso en 2.º curso, una vez vista la trigonometría. En 2.º curso, el trabajo con mapas podría continuarse tratando los problemas de proyección una vez estudiadas la forma y las dimensiones de la Tierra y el sistema de referencia formado por las coordenadas geográficas de latitud y longitud.

En Matemáticas, como ya hemos apuntado antes, el trabajo que puede hacerse con mapas en 1.º y 2.º de BUP-FP puede dar pie a iniciar el estudio de temas de un nivel superior como pueden ser la medida, la aproximación, errores, cálculo de áreas de figuras no regulares.





## El trabajo con mapas en 1.º de BUP

La propuesta de trabajo que presentamos queda recogida en el cuadro que sigue.

| *Situaciones* | *Temas a trabajar* | *Habilidades y otros temas* | *Observaciones* |
|---|---|---|---|
| Trabajo con mapas de escala 1:5.000 1:10.000 1:100.000 | Interpretación de mapas<br>Escala | | Posible trabajo conjunto con otras materias |
| | Cálculo de distancias | Cálculo de longitudes de trayectos no rectilíneos | |
| | Cálculo de áreas | Unidades de área<br>Cálculo de áreas de figuras no poligonales | |
| | | Densidad de población | |
| | Representación del relieve: curvas de nivel | Cálculo de altitud | |
| | | Pendiente de un trayecto | |
| | Cortes topográficos | | |
| Trabajo con cartas náuticas | Orientación | Introducción a las coordenadas polares | |
| | | Unidades: milla marina | |

*Tabla 1*

Esta programación puede llevarse a término con unas quince sesiones de clase que pueden organizarse de maneras diversas:

- como una parte de un tema interdisciplinar (estudio de un cierto hábitat: la fageda, el Delta de l'Ebre; estudio de una cierta entidad geográfica: el Riu Ripoll, la Costa Brava) objeto de estudio junto con otras materias;
- como un tema específico de Matemáticas y que puede trabajarse de manera intensiva durante unas dos o tres semanas;
- como un tema complementario del curso de Matemáticas y que puede trabajarse a razón de una hora semanal durante un trimestre del curso escolar.

El trabajo en clase se centra en un dossier que se entrega a los alumnos en el que se recogen unas lecturas sobre el tema y que sirven para introducir los conceptos teóricos, unos problemas a resolver.

El trabajo de los alumnos queda recogido en un dossier que entregan al finalizar el estudio del tema. Este dossier junto con una prueba sirven para evaluar al alumno.

En lo que sigue describiremos, con un cierto detalle, la primera parte del dossier que se entrega a los alumnos.

## Descripción del material de trabajo de los alumnos

A los alumnos se les entrega un dossier[1] que consta de unas 20 hojas ciclostiladas en el cual hay unas lecturas, mapas y ejercicios para trabajar sobre ellos. Debido a que, por razones técnicas y económicas, los mapas del dossier no tienen sus colores originales, el Seminario de Matemáticas conjuntamente con el de Ciencias Naturales dispone de una colección de mapas (topográficos, temáticos, cartas náuticas) con la cual se organiza una exposición que los alumnos visitan al iniciar el tema.

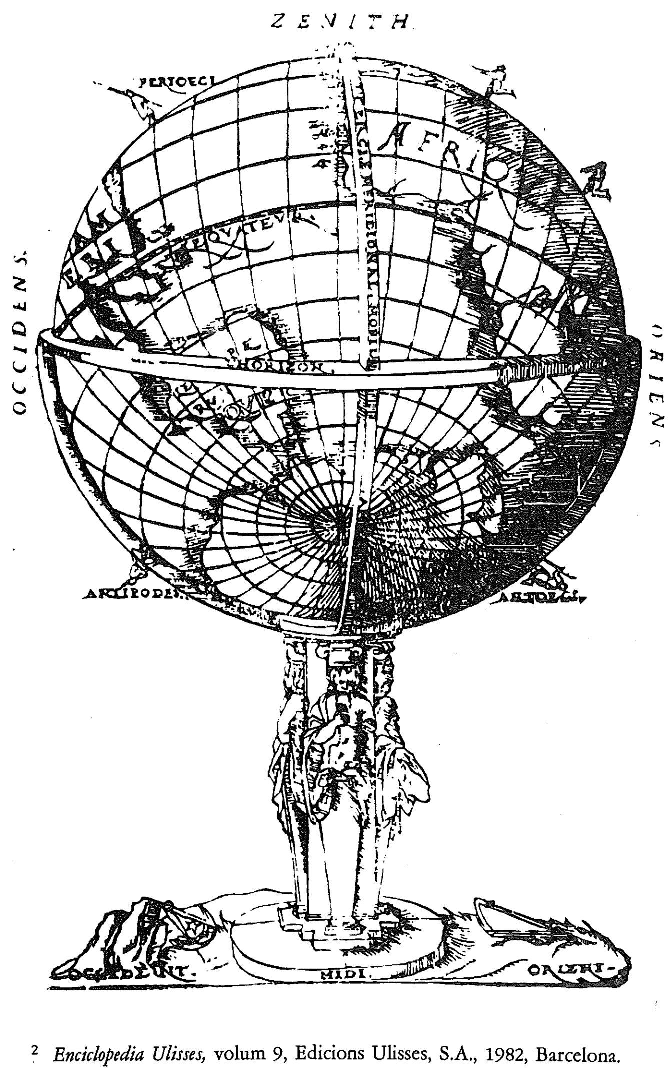
Describiremos el dossier citado paso a paso, dando algunas indicaciones y reseñando aquellos problemas que consideramos más interesantes.

Hay una razón para no dar el dossier directamente: es necesario que las zonas representadas en los mapas que se utilizan sean lo suficientemente conocidas por los alumnos. Debido a esto, hará falta en cualquier caso un trabajo previo de los profesores, desde luego nada fácil en ciertos lugares, para preparar, con los mapas adecuados a la zona donde esté «su» centro, el dossier que habrán de trabajar «sus» alumnos. Es casi inevitable tener que recorrer, al menos una vez, los Ayuntamientos, las Diputaciones, algunos organismos militares, etc., para disponer de los mapas sobre los que trabajar en clase.

### I. *Introducción y primeras lecturas*

La introducción, aparte de un pequeño comentario sobre la importancia de los mapas, centra su atención sobre el término MAPA que figura en diferentes diccionarios y enciclopedias. Esto permite comentar las características generales de un mapa, hacer algunas aclaraciones sobre vocabulario y plantear algunas cuestiones que serán objeto de estudio a lo largo del tema.

La lectura 1 que sigue define el concepto de ESCALA como la relación numérica entre la distancia medida sobre el mapa y la distancia correspondiente medida sobre la superficie de la Tierra. Para ello hemos utilizado un fragmento de la enciclopeda Ulisses[2], que reproducimos, y que nos pareció interesante porque plantea la relación escala del mapa-superficie representada-detalle.




[1] Dossier *Els Mapes,* I.B. «Joan Olives» de Sabadell, curs 1985/86.

[2] *Enciclopedia Ulisses,* volum 9, Edicions Ulisses, S.A., 1982, Barcelona.

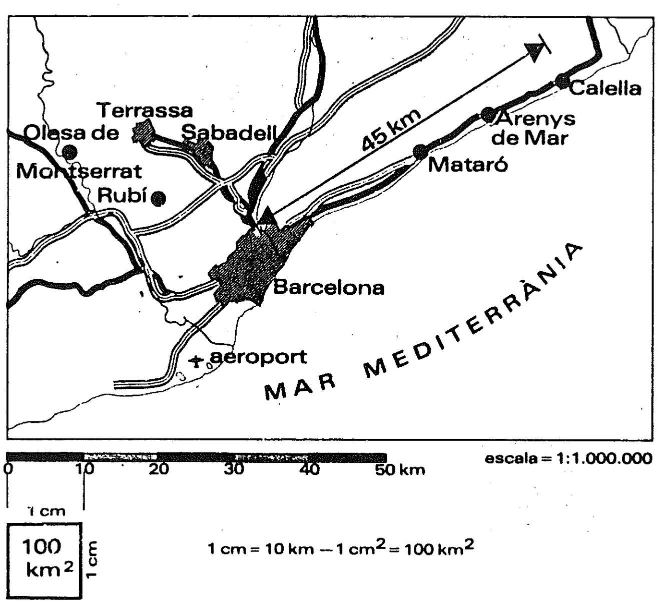
*Lectura 1*

Podem definir els mapes com a representacions reduïdes, simbòliques i aproximades de tota la superfície terrestre o d'una part. *Quantes vegades és més petit un mapa que la superfície que representa?* La següent lectura (Ulisses, vol. 9) t'explica què és *l'escala d'un mapa,* que es el concepte més important que cal coneixer per a utilitzar un mapa correctament.

Mentre que en un mapa els angles entre meridians i paral·lels, entre dos rius confluents, etc., poden ésser efectivament idèntics als de la superfície terrestre, longituds i superfícies seran, per la força de les coses, fortament reduïdes: la importància d'aquesta reducció s'expressa per mitjà d'una relació anomenada «escala» del mapa.

### Què és l'escalp d'un mapa?

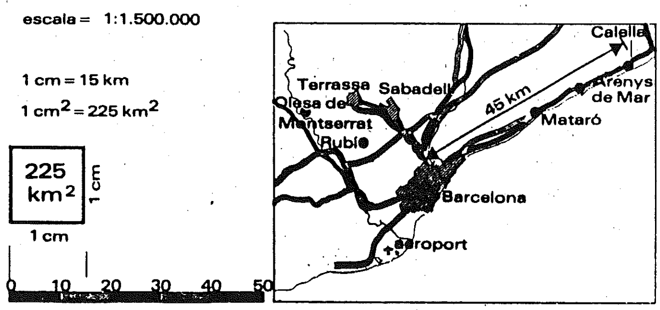
L'escala s'indica per la relació numèrica entre una distància mesurada sobre el mapa i la distància corresponent mesurada damunt la superfície de la Terra. Escala 1:100 000 (escrit també 1 a 100 000 o bé 1-100 000) vol dir que dos punts que en el mapa disten un centímetre, un dit, un pam, un peu, etc., són distants, en la realitat, 100 000 centímetres, dits, pams, peus, o qualsevol altra mesura que s'hagi amidat damunt la taula de treball amb un regle graduat. Si, mancats absolutament d'instruments, haguéssim comprovat que dos punts disten la llargària d'una cigarreta, això voldria dir que, en la realitat, disten cent mil cigarretes posades en filera.




Respecte a un mapa a escala 1:100 000, un altre a escala 1:10 000 podrà donar més detalls, puix que dins un centímetre només s'hauran de representar 10 000 centímetres de la realitat, i no 100 000 com en el primer cas. Anàlogament, en el cas contrari, un mapa a escala 1:1 000 000 no serà tan detallat com en el primer cas, per tal com les llargàries hi seran molt més comprimides. Per tant, de les tres escales indicades, la de 1:10 000 és certament la més gran, per tal com permet la major claredat d'observació.

### Quina és la reducció de les drees?

Allò que cal precisar amb molta d'atenció és que l'escala expressa la relació entre les mesures lineals, és a dir, que indica la importància de la reducció de les distàncies. La importància de la reducció de les àrees és, per tant, igual al quadrat d'allò que l'escala indica. Per aclarir-ho, prenguem, per exemple, un mapa a escala 1:100, ço que significa que un centímetre amidat sobre ella equival a cent centímetres en la realitat. Però un centímetre quadrat de superfície de mapa no equival pas a cent centímetres quadrats en la realitat, sinó a un quadrat que mesuri, en la realitat, cent centímetres de costat, això és, que tingui una superfície de deu mil centímetres quadrats. Per consegüent, en el cas del mapa a escala 1:100, la relació entre les àrees és de 1:10 000, o sigui, $1:100^2$.
Passant a la pràctica, això significa que per representar un cert redol de superfície amb detalls dues vegades majors, cal servir-se d'un full de paper quatre vegades més gran. Un mapa dels Països Catalans a escala 1:500 000 necessita un full de més d'un metre quadrat; a escala 1:250 000 ha de menester més de quatre metres quadrats, i ja seria ben difícil de trobar una taula damunt la qual treballar amb un paper d'aquesta grandària. A escala 1:5 000, el mapa dels Països Catalans s'estendria sobre una hectàrea i cabria només en un museu, però certament, no val la pena fer-ho. A la pràctica, s'usen fulls de dimensions còmodes en què es representa només una porció limitada de la superfície terrestre.



En la lectura 2 después de insistir en el concepto de Escala, se hace una clasificación de los mapas según la escala (desde los mapamundis hasta los mapas y planos que se utilizan en los trabajos de arquitectura y urbanismo) y se explicitan los elementos que componen un mapa topográfico: los elementos planimétricos, los elementos altimétricos y los elementos toponímicos. Si bien el dossier trabaja fundamentalmente sobre los dos primeros elementos, los elementos toponímicos son importantes para, en primer lugar, reconocer la zona representada en el mapa, y en segundo lugar por sus posibilidades de ser tratada conjuntamente desde otras materias: lengua, historia, ciencias naturales.

## II. *Ejercicio sobre cálculo de distancias*

Sobre mapas de escala 1:5.000 y 1:10.000 se trabajan en un primer momento aspectos de situación y reconocimientos, para, a continuación, sobre el mapa urbano a escala 1:5.000 de la zona que envuelve la Instituto, realizar el siguiente ejercicio:

- *Sobre el mapa 1:5.000 calcula:*

a) *la longitud de la calle Armand Obiols;*

b) *el perímetro del terreno donde se halla construido el Instituto.*

- *Un grupo de jóvenes del barrio de La Planada quiere organizar una carrera popular de 1 kilómetro. Elabora un itinerario por las calles de dicho barrio para hacer la carrera y señálalo sobre el mapa 1:5.000.*
- *Dibuja la zona limitada por la calle de los Apeninos, la calle de los Urales, la de los Alpes y la del Himalaya a escala 1:1.000.*

El perímetro del terreno donde se halla el Instituto no es poligonal, con lo cual para hallar su longitud hay que utilizar métodos de aproximación mediante una poligonal o bien mediante métodos «mecánicos»: mediante un cordel o bien con un odómetro.

El ejercicio sobre el itinerario para una carrera es interesante no sólo porque es un problema inverso (de la realidad al mapa) sino porque permite darse cuenta de que hay ciertos cálculos que es más práctico hacerlos sobre el mapa que sobre la propia realidad.

El dibujar un sector de un plano a escala distinta, si no se hace mediante un *pantógrafo,* es un buen ejercicio de dibujo pues, aparte de aplicar un factor de escala para las distancias hay que reproducir los ángulos sin variación (propiedad importante en los mapas) y para ello hay que utilizar la regla, escuadra y cartabón y transportador de ángulos.

## III. *Ejercicios sobre cálculos de áreas*

Sobre un mapa urbano a escala 1:5.000 se calculan las áreas de dos barrios próximos al Instituto para, a continuación, utilizando el censo de la ciudad de Sabadell de 1980, calcular la densidad de población de cada uno de los barrios. Este problema permite introducir las unidades de superficie área y hectárea, la segunda de uso muy frecuente (la superficie quemada en los incedios forestales se da en hectáreas).

En este primer ejercicio, las áreas son de figuras poligonales y, por lo tanto, descomponibles en triángulos. Calcular el área de un triángulo es un ejercicio que consta de dos partes:

- identificar el triángulo, operación que para algunos alumnos puede no ser fácil, ya que para ello hay que «dejar de ver», prescindir, de ciertos detalles que figuran en el mapa para fijar la atención en el perímetro del barrio; identificar el lado que consideraremos «la base» del triángulo y dibujar la altura relativa a dicha base. Por último, y sobre el mapa, medir la base y la altura del triángulo.

Este comentario puede parecer trivial, pero no lo es si pensamos que para dibujar la altura relativa a una determinada base en un triángulo se requiere el dominio de la escuadra y el cartabón.

- El segundo paso es el de hacer las operaciones para calcular el área del triángulo y aquí también pueden seguirse dos caminos:

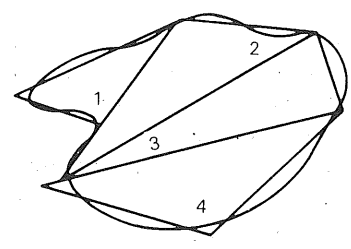
1.—Convertir las longitudes de la base y la altura medidas sobre el mapa a longitudes de la realidad mediante la utilización de la escala y después calcular el área; o bien

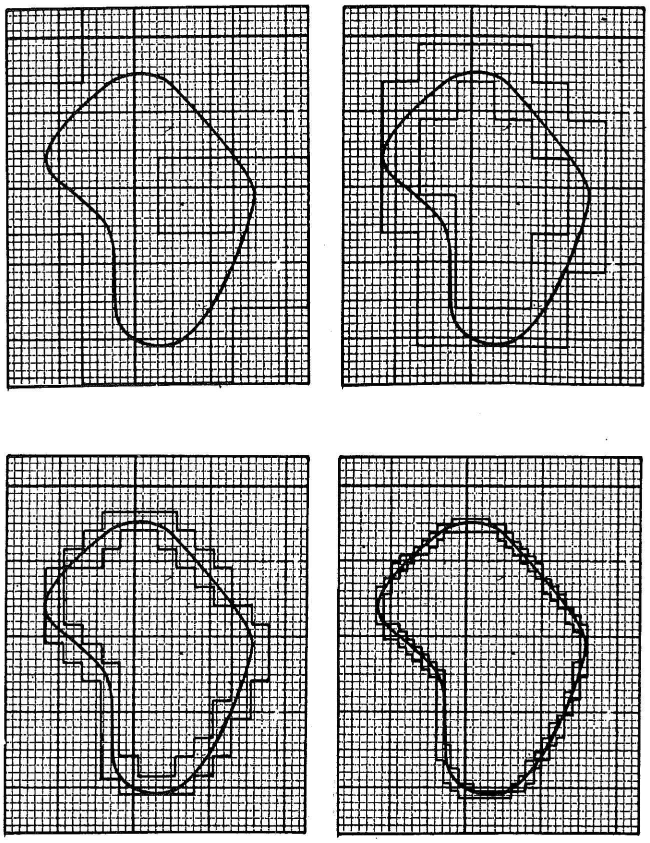
2.—Calcular el área del triángulo sobre el mapa y después hallar el área en la realidad mediante la utilización de la escala cuadrática.

La experiencia demuestra que el segundo camino es mucho más difícil para los alumnos que el primero. En una primera etapa pueden utilizarse los dos.

A continuación se plantea el siguiente ejercicio:

- *Para un Instituto de 24 unidades está establecido que esté edificado en un terreno de 1 hectárea. Sobre el mapa a escala*





*1:500 calcula el área del terreno donde está edificado nuestro Instituto.*

Puesto que el terreno donde se halla ubicado nuestro Instituto no es poligonal, el citado problema da pie a introducir dos nuevas técnicas para calcular áreas de figuras no poligonales: mediante una lectura se explica:

- la técnica de descomponer la figura no poligonal en triángulos de manera que la suma de las áreas de todos los triáangulos sea aproximadamente igual al área buscada. Esta técnica apuede, en 2.º curso de BUP, una vez vista la trigonometría, ser nuevamente tratada, sistematizándola de manera que pueda ser utilizada incluso sobre «el terreno» con la ayuda de un taquímetro.
- la utilización de papel vegetal milimetrado: se reproduce el perímetro de la figura de la cual hay que calcular el área sobre el papel milimetrado y se calcula el número de unidades cuadradas (cm², mm²), inscritas y el número de unidades cuadradas circunscritas a la figura y se hace la media aritmética de ambos; se puede calcular el error absoluto y el error relativo.

Este método es importante por varias razones:

1.—La idea de encajar el área buscada entre dos áreas conocidas, una por defecto y otra por exceso está en la base del cálculo integral.

2.—El propio método permite saber el error cometido, cosa que no ocurre con el método por triangulación; y por último.

3.—Si es cierto que de esta manera podemos saber sólo un valor aproximado del área que buscamos, podemos reducir tanto como queramos el error cometido, si no prácticamente, sí al menos en teoría, y ésta es una propiedad compartida con la medida de cualquier magnitud.

Damos a continuación dos ejemplos más de problemas donde hay que calcular áreas de figuras no regulares:

- *El mapa que sigue es el mapa de la cuenca hidrográfica del río Ripoll, es decir, del territorio donde las aguas superficiales (fundamentalmente debidas a la lluvia) desembocan en el río Ripoll.*

*Calcular el agua que recogería el río Ripoll si un determinado día lloviera de manera uniforme sobre toda la cuenca a razón de 10,63 litros por metro cuadrado (10,63 l/m²).*

- *Sobre un mapa topográfico comarcal a escala 1:10.000 se señala una base* AB. *Si sobre la base* AB *se construye una presa de una altura de 25 metros, calcular:*

a) *la longitud de su parte superior;*

b) *si se llena el embalse conseguido con la citada presa, calcular el área en planta de la superficie inundada.*

Algunos comentarios sobre estos dos problemas. El primer problema puede ser interesante si primero hay que determinar cuál es la cuenca hidrográfica del río. En este caso, hay que plantearlo después de introducir la representación de los elementos altimétricos en un mapa, en particular, mediante la utilización de las curvas de nivel.

Determinar la cuenca hidrográfica implica saber reconocer sobre el mapa el sentido de los desniveles representados por las curvas de nivel para saber en qué sentido las aguas superficiales discurrirían.

Por otro lado, puede ser interesante trabajar la equivalencia «litros por metro cuadrado-altura en milímetros»: si llueven 10,63 l/m², esto es equivalente a decir que sobre cualquier superficie el nivel del agua alcanzaría 10,63 mm.

El segundo problema es un problema que podríamos denominar de consolidación: hay que plantearlo después de haber trabajado el cálculo de distancias, de áreas y saber reconocer el relieve del terreno mediante las curvas de nivel. El problema puede completarse con:

- determinar el perfil de la presa;
- calcular el volumen aproximado de agua que quedará embalsada.

# Rectángulos y cajas

Claudi Alsina

La riqueza de polígonos regulares en el plano contrasta con la escasez de poliedros regulares en el espacio. Situaciones parecidas de contraste plano-espacio pueden plantearse al considerar, simplemente, rectángulos y cajas. Observemos la figura 1: trazando una línea perpendicular en el vértice superior a la diagonal del rectángulo grande (lados $a$, $b$) logramos dibujar un rectángulo vertical que teniendo un lado común con nuestro rectángulo inicial es homotético a éste (lados $b$, $a^2/b$).

Escojamos una caja (prisma rectangular recto en el caso de personas especialmente sensibles). ¿Es posible construir otra caja como en la figura 2 que teniendo una cara en común con la primera sea homotética a ésta? Intentemos analizar este caso. Sean $a$, $b$, $c$ los lados de la caja grande y $a$, $b$, $d$ los de la caja homotética con cara común. Suponiendo una homotecia de «verdad» (con razón no unitaria) resultará que necesariamente o bien $b/a = c/b = a/b$ o bien $c/a = a/b = b/d$. En el primer caso deberá ser $b = \sqrt{ac}$ y $d = a^2/b$ y en el segundo resultará $a = \sqrt{cb}$ y $d = b^2/a$. Es decir, la situación será posible sólo para las *cajas-media-geométrica* donde un lado es la raíz cuadrada del producto de los otros dos lados. Hagamos un modelo en cartulina. Para construir una caja de lados $x$, $\sqrt{xy}$, usaremos el truco del dibujo 1. Para hacer una caja homotética de lados $\sqrt{xy}$, $y$ y $y^2/\sqrt{xy}$ repetiremos la técnica del dibujo 1 (véase figura 3): cada cara de la cajita es recíproca de otra.

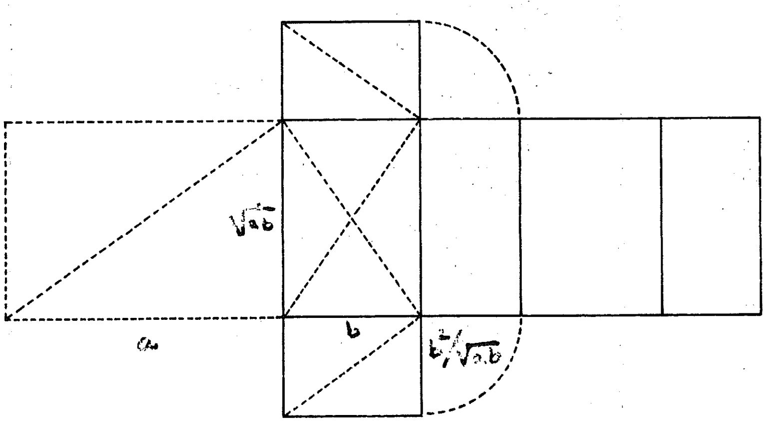
La experiencia puede formularse en términos de pasteles ortoédricos divisibles en dos trozos semejantes, pues la geometría euclídea comestible parece ofrecer siempre un mayor interés que la simplemente contemplativa. Otros análisis sobre los cuales meditar pueden ser los siguientes:

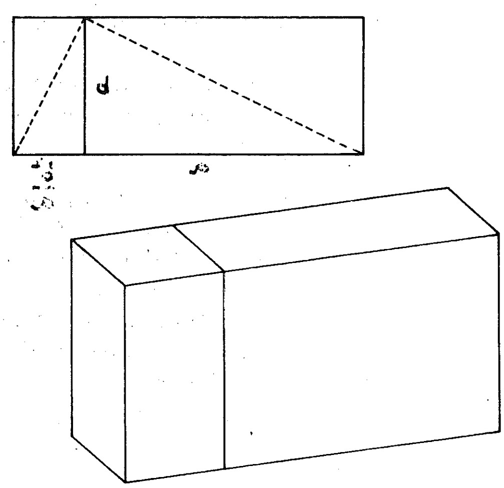
*a)* ¿Cuándo dos cajas con sólo una arista en común pueden ser homotéticas?

*b)* ¿Cuándo la caja de lados $1/a$, $1/b$, $1/c$ puede ser homotética a la caja de lados $a$, $b$ y $c$?

*c)* ¿Cómo comprobar experimentalmente que dos cajas (con caras-tapa) son proporcionales?

Feliz viaje al espacio.



# Con la calculadora

Vicente C. Juan Martí

Un problema deja de serlo cuando conozco un algoritmo que me permite encontrar la solución.

La calculadora facilita proponer problemas que de otra forma serían inabordables (entre otras razones por la gran cantidad de operaciones necesarias) y estimula a que los alumnos descubran sus propios métodos para resolverlos, utilizando algoritmos variados.

*Fracciones que crecen*

7/6 en forma decimal es 1.1666666.

Escribe otra fracción que sea un poquito mayor que la dada.

Escribe la diferencia en forma decimal.

Escribe otras fracciones que hagan esa diferencia cada vez más pequeña.

El problema *Fracciones que crecen,* planteado para utilizar una calculadora pone en acción a todos los alumnos y permite abordar distintos aspectos de las fracciones y los decimales:

— Escritura de fracciones en forma decimal.
— Escritura de decimales en forma de fracción.
— Fracciones equivalentes.
— Entre dos números decimales/fracciones puede siempre escribirse otro, por muy próximos que estén.

a) $\frac{8}{6} = 1,333333\ldots$

$$\begin{array}{r} 1,3333333 \\ -\,1,1666666 \\ \hline 0,1666666 \end{array}$$

= es la diferencia

Multiplico $\frac{7}{6} \times 100 = \frac{700}{600} = 1,1666666$

$\frac{701}{600}$ dif = 0,0016667

$\frac{7015}{6000}$ dif = 0,0025

$\frac{7001}{6000}$ dif = 0,0001667

$\frac{700001}{600000}$ dif = 0,0000017

$\frac{7000001}{6000000}$ dif = 0,0000002

$\frac{70000001}{60000000}$ dif = 0.

He multiplicado $\frac{7}{6}$ x100... poniendo un 1 al final y cada vez me he aproximado más hasta llegar a 0

$\frac{7}{6} \times \frac{20}{20} = \frac{140}{120} = 1,1666666$

$\frac{141}{120}$ dif = 0,0083334

$\frac{1401}{1200}$ dif = 0,0008334

$\frac{14001}{12000}$ dif = 0,0000834

$\frac{140001}{120000}$ dif = 0,0000084

$\frac{140005}{120000}$ dif = 0,0000417

$\frac{1400001}{1200000}$ dif = 0,0000009

$\frac{14000001}{12000000}$ dif = 0,0000001

Manuel Olmos Pascual
8° B

— Ordenación de números decimales.

— Cómo influyen los términos (numerador y denominador) de una fracción en su valor. Qué ocurre al aumentar/disminuir el numerador y/o el denominador.

— La calculadora no es perfecta o, mejor dicho, no es completamente «exacta».

La situación propuesta, con una calculadora en la mesa de cada uno y el tiempo suficiente para utilizarla, da pie a que algunos alumnos, trabajando únicamente con fracciones, se acerquen tanto como para escribir 70.000.001/60.000.000 y tengan que discutir cómo puede ser que no siendo equivalente a 7/6 la calculadora nos dé 1.1666666.

Otros le dan la vuelta al asunto y buscan, después de muchas pruebas con fracciones y de «oír» que hay compañeros que se acercan más que ellos, como puede escribirse una fracción equivalente a 1.6666667. Escriben entonces 16666667/10000000 y terminan.

Puede que no todos lleguen tan lejos y algunos ni siquiera vislumbrarán los descubrimientos que otros han señalado. Pero su conocimiento de las fracciones y decimales habrá aumentado y cuestiones como las que señalábamos al principio habrán sido contempladas.

En cualquier caso, estos alumnos de 8.º han estado una o dos clases haciendo matemáticas con su calculadora. Y les ha gustado. A todo eso, el profesor sólo ha de tener la tranquilidad suficiente para no decir más cosas de las que debe, mientras les estimula en su búsqueda.

Vale la pena probarlo.

6/5 = 1'2
1'2 - 1'1666666 = 0,0333334
4/3 = 1'333333
50/42 = 1'1904761    0'0238095
103/89 = 1'1573033
104/89 = 1'1685393    0'0018727
243/208 = 1'1682692    0'0016026
568/487 = 1'1663244
99417/85214    0'0000078
70000005/60000000    0'0000001
7 : 6 = 1,1666666
71 : 60 = 1,1833333
701 : 600 = 1,1683333
7001 : 6000 = 1,1668333
70001 : 60000 = 1,1666833
700001 : 600000 = 1,1666683
7000001 : 6000000 = 1'1666668
70000005 : 60000000 = 1'1666667
Cada vez que ponemos un cero al 71, nos acercamos al 7 sextos y al 60 un cero
70000001 : 60000000 = 1'1666666
Esta division no devería dar ese resultado, pero lo que la calculadora hace es redondear la pequeña diferencia, para que el resultado sea 1,1666667, el dividendo ha de de tener una pequeña diferencia del 70000000.
David Monchalí Culla. 8º B

A) 6/5 = 1'2 , 13/11
B) 1,2 - 1,1666666 = 0,0333334    1,1818181 - 1,1666666 = 0,0151515
C) 8/7 = 1,1428571 , 16/14 = 1,1428571 , 32/28 = 1,1428571
78/67 = 1,1641791 - 1,1666666 = 0,002
11666667/10000000 = 1,1666667 = 0,0000001
Jose Vicente Ferrer Perea 8º A

# Fotografía y Matemáticas

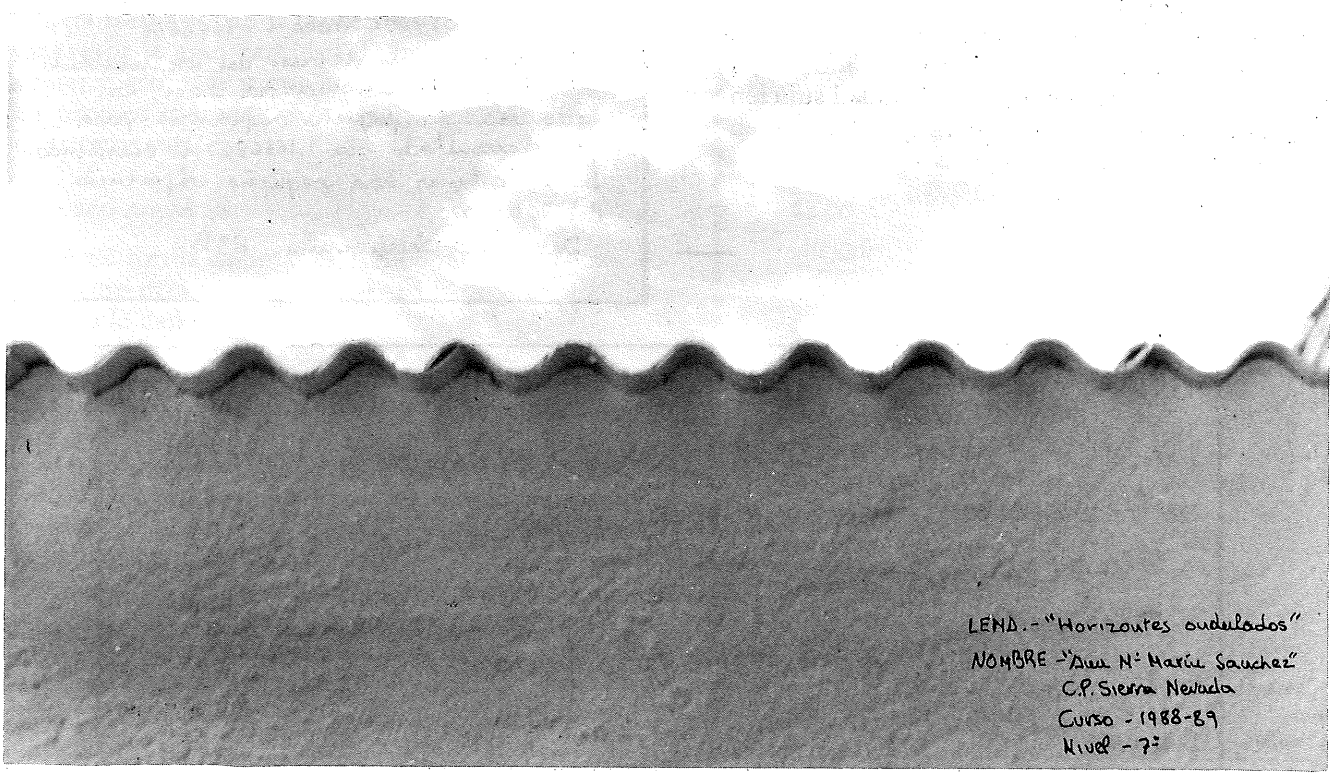
Evaristo González González

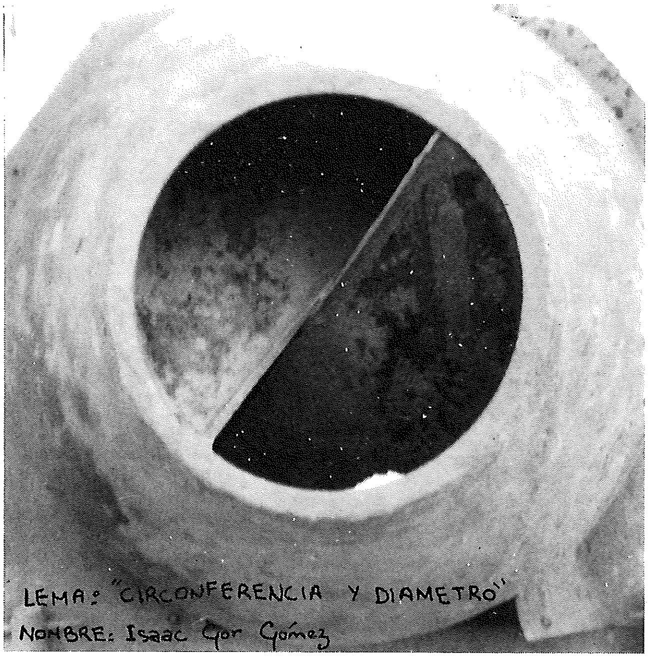
En el Colegio P. «Sierra Nevada» desde el año 1985 se viene celebrando una Semana Cultural con motivo del Día de Andalucía. Entre las actividades que se programan está incluido un Concurso de Fotografía para los alumnos de segunda etapa de EGB. Este concurso se celebra cada año en un pueblo diferente de la provincia de Granada y se lleva a cabo durante un día completo.

Durante los dos primeros años los objetivos a conseguir fueron los siguientes:

- Poner a los alumnos en contacto con las técnicas elementales de fotografía.
- Conocimiento de un laboratorio fotográfico a través de una visita.
- Cálculo del presupuesto de la actividad.
- Orientación en el pueblo por medio de un plano.
- Conocimiento de los pueblos más significativos de la provincia de Granada.
- Desarrollo de la capacidad creativa y crítica en la selección de fotografías para presentar a concurso.
- Fomentar hábitos de convivencia, etc.

En el año 1988 y a raíz de una charla en el Seminario de Matemáticas que se desarrolla en el Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, decidí crear un nuevo apartado en el concurso relacionado con la Matemática. La idea sería la siguiente: «¿Por qué no pedirle a los alumnos que a la vez que consiguen fotos bonitas y






C. P. "Sierra Nevada" NIVEL 6º
CURSO: 88-89

significativas del pueblo que visitan, intenten realizar otras de cierta significación en el campo de la Matemática?». Estas fotos se presentaron en un apartado especial del concurso y cada una de ellas tenía que llevar un lema haciendo referencia a un concepto matemático.

Los resultados obtenidos superaron con creces las previsiones iniciales, tanto en el campo fotográfico como matemático. Con relación a este último la propuesta fue tan motivadora que despertó de una manera inusitada la creatividad, la participación y la cantidad de conceptos matemáticos tratados.

De los 62 alumnos que tomaron parte en el concurso de fotografía, 42 participaron en el apartado de Matemáticas. Muchos de ellos presentaron más de una fotografía y tres presentaron cinco fotografías de las 24 que disponían para el concurso.

Los conceptos matemáticos fotografiados por los alumnos y que plasmaron en el lema de las fotografías fueron: punto, recta, segmento, curva, paralelas, arcos, ángulos, 90º, 180º, ángulos opuestos por el vértice, obtuso, consecutivos, circunferencias, corona circular, radios, figuras poligonales, formas, superficies, cuadrados, volúmenes, cubo, cilindro, semejanzas, altitud 0º, etc.

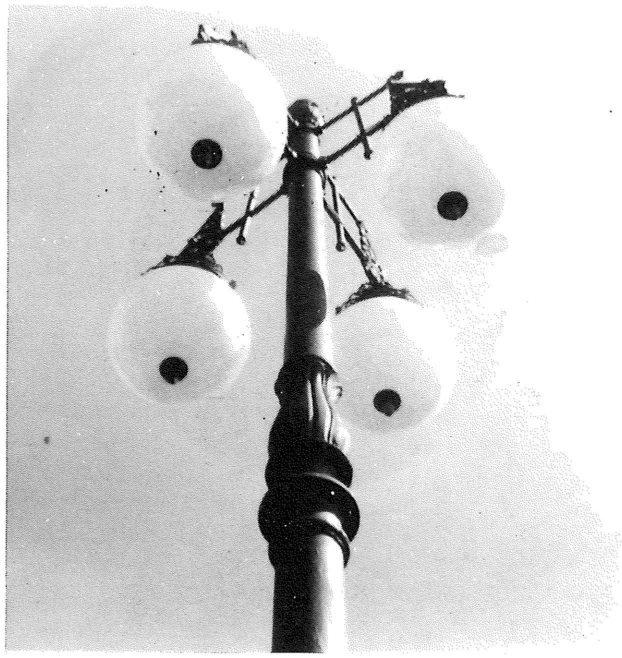
Muchos de los alumnos dejaron ver su creatividad y buen gusto literario a la hora de definir el lema; no lo hicieron de una forma concreta sino utilizando bellas expresiones lingüísticas. Como muestra citaré los siguientes: El ángulo mojado, ángulos sombríos, el castillo de los ángulos, la rosa entre líneas perpendiculares, corona circular habitada, prolonga los troncos y te salen ángulos consecutivos, los radios de una circunferencia imaginaria, cuatro en uno, el ángulo que marca las horas, etc.

Creo que los objetivos conseguidos con esta actividad han sido los siguientes:

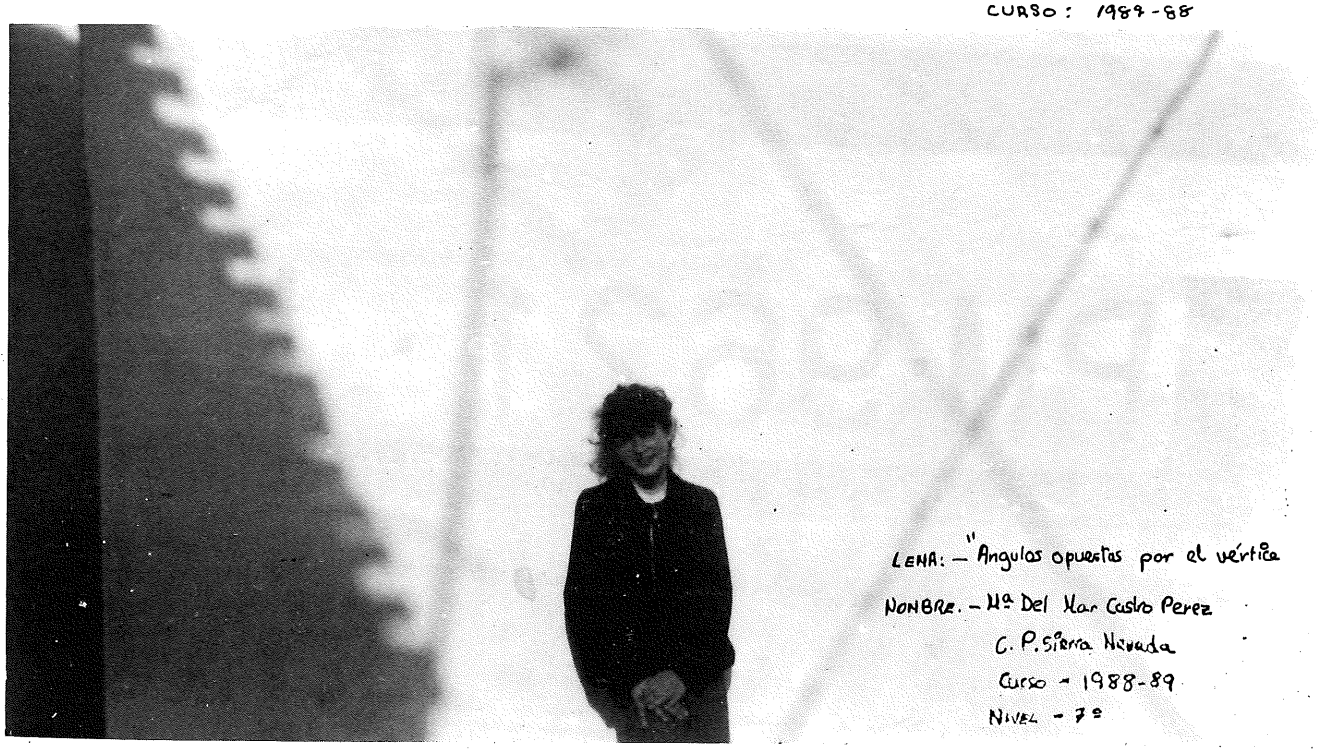
- Sacar la Matemática de la clase propiamente dicha.
- Identificar conceptos matemáticos en la realidad.
- Relacionar la Matemática con el Arte y la Literatura.
- Hacer ver al alumno que la Matemática existe en la realidad cotidiana.

Actividades de éste u otro tipo en lo que lo fundamental no es la Matemática, pero que nos sirve para poner al alumno en cotacto con ella sería interesante y conveniente realizarlas con más frecuencia.

Igual que la Geografía, la Historia, el Arte, etc., se pueden vivir en un paseo, excursión u otro medio, lo mismo le sucede a la Matemática, como se puede comprobar una vez vistos los resultados de esta actividad.



LENA: "CUATRO EN UNO"
NONBRE: Isaac Gor Gómez
C.P. "Sierra Nevada" NIVEL 6:
CURSO: 1987-88



LENA: — "Angulos opuestas por el vértice
NONBRE. — Mª Del Mar Castro Perez
C. P. Sierra Nevada
Curso – 1988-89
Nivel – 7º

# Acerca de la enseñanza de inecuaciones de una variable

P. Alson

**Resumen**

En el artículo se exponen dos métodos de resolución de inecuaciones. Se comparan desde varios puntos de vista y se comentan algunos aspectos del trabajo realizado a partir de 1983 en la enseñanza de dicho tópico en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

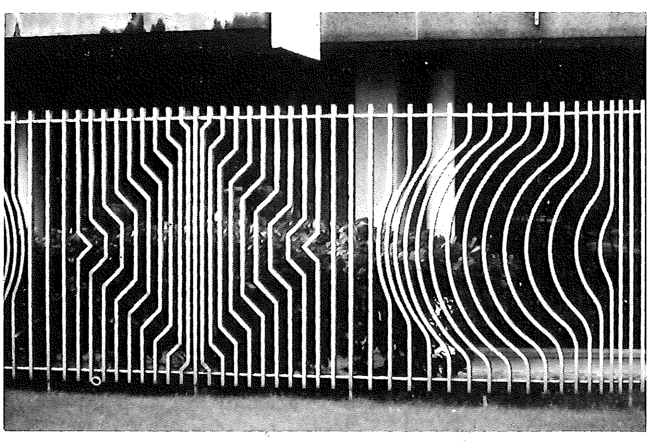


*Foto: Pilar Moreno*

**Introducción**

El programa de Matemáticas del primer semestre de las licenciaturas de Biología o de Química de la Universidad Central de Venezuela incluye el tópico de inecuaciones en una variable. Se trata esencialmente de aprender a resolver inecuaciones de la forma $f(x) < g(x)$ [o formas análogas como $f(x) - g(x) < 0, f(x) > g(x)$..., etc.] con $f$ y $g$ funciones racionales elementales, o polinomios de grado menor o igual que dos, o valores absolutos de ambas. Algunos ejemplos son: $x^2 - 1 > 0$, $|x + 2| + |x - 3| > 1$.

El porcentaje de alumnos que dominaban el tópico al final del semestre rara vez sobrepasaba el 15 por 100. Esto me llevó a considerar métodos alternativos para enseñarles. En este artículo se muestran los resultados de ese esfuerzo.

Mostraremos primeramente la manera usual de enseñar el tópico y las razones que a nuestro entender impedían el aprendizaje. Luego describimos *a grosso modo* los primeros intentos hechos para mejorar la enseñanza del tópico y explicamos la solución finalmente adoptada. La última parte compara los dos métodos desde diversos ángulos, e incluye comentarios acerca de la experiencia.

## Presentación de los dos métodos

Nuestra manera usual de trabajar el tópico era resolver con lujo de detalles varios ejercicios. Luego se le proporcionaba al estudiante una lista de inecuaciones como ejercicios. A continuación se presentaba un ejercicio típicamente resuelto.

Ejercicio: Resuelva la inecuación $x - 3 < 3/(2x + 1)$.

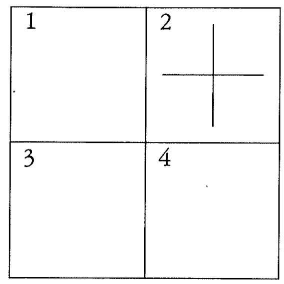
Modo de resolución: «El denominador $(2x + 1)$, de acuerdo al valor de la variable $x$, puede tomar tanto el signo positivo como el signo negativo. Si $2x + 1 > 0$, entonces $x - 3 < 3/(2x + 1)$ es equivalente a $(x - 3)(2x + 1) < 3$. Esta desigualdad es equivalente a $2x^2 - 5x - 6 < > 0$. Como $2x^2 - 5x - 6 = 2[x - (5 + \sqrt{73})/4]\,[x - (5 - \sqrt{73})/4]$, $x$ es un número del intervalo $[5 - \sqrt{73})/4, (5 + \sqrt{73})/4]$. Como se asume que $2x + 1 > 0$, es decir $x > -1/2$, $x$ debe estar en el intervalo $[-1/2, (5 + \sqrt{73})/4]$. Si se asume que $2x + 1 < 0$, haciendo un razonamiento similar se obtiene que $x$ debe pertenecer al intervalo $[-\infty, (5 - \sqrt{73})/4]$. Se obtiene ahora la solución de la inecuación uniendo los conjuntos obtenidos al hacer las suposiciones sobre los signos de $2x + 1$; es decir, la solución es: $(-\infty, (5 - \sqrt{73})/4] \cup [-1/2, (5 + \sqrt{73})/4]$. (Para ver un ejemplo similar al que se acaba de desarrollar, véase Protter y Morrey, pág. 5.)

A través de las dificultades que percibimos en los estudiantes y del tipo de errores que cometían, llegamos a la conclusión de que no eran capaces de dar un significado correcto a las expresiones algebraicas que se utilizaban. La equivalencia entendida como la relación entre dos partes que tienen diferente forma, pero igual significado, no tenía sentido para ellos. No entendían las reglas que permiten transformar expresiones algebraicas en sus equivalentes. Con este bajo nivel, eran incapaces de captar el sentido general de la explicación dada por el profesor. Eran incapaces de hacer analogías entre los diferentes ejemplos dados por el docente y a partir de esto inferir cuáles son los pasos «lógicos» a seguir para resolver una inecuación. Se veían obligados a gastar una gran cantidad de energía tratando de memorizar y clasificar «los diferentes tipos de inecuaciones y sus métodos de resolución».

La primera solución a este problema fue aumentar el número de ejemplos y los detalles de su resolución explicando y tratando de justificar cada equivalencia. Cada uno de los pasos de resolución se hicieron más explícitos y al mismo tiempo se trató de uniformarlos con el fin de que el estudiante estableciera analogías y que con ello comprendiera los mecanismos subyacentes a la resolución. Los resultados fueron escasos. Esto, y la escasez de tiempo, nos llevó a desarrollar, y finalmente, adoptar la estrategia que a continuación se explica.

La estrategia radica en dos puntos: primero, dar al estudiante un método general y único para resolver inecuaciones. Segundo, interpretar la desigualdad en un contexto familiar donde la solución de la inecuación tuviese un significado evidente. Esas premisas condujeron al siguiente método para resolver las inecuaciones:

Resolver una inecuación de la forma $f(x) < g(x)$ es llenar




de acuerdo a las siguientes reglas:

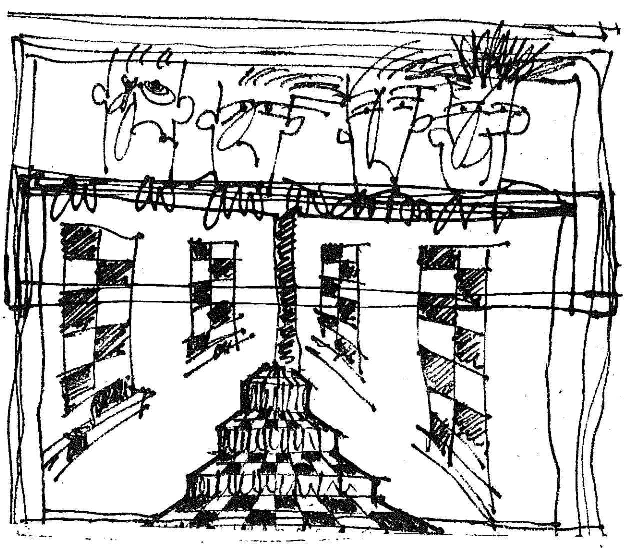
Cuadrado 1: escribir la desigualdad $f(x) < g(x)$.

Cuadrado 2: dibujar aproximadamente los gráficos de $f$ y $g$. Rayar la parte del eje $x$ donde la altura de $f$ es menor que la de $g$.

Cuadrado 3: resolver la ecuación $f(x) = g(x)$.

Cuadrado 4: escribir el conjunto definido por el rayado del eje $x$ (en 2) y las soluciones de la ecuación (de 3). El conjunto así obtenido recibe el nombre de conjunto solución de la inecuación.

En la sección que sigue hacemos algunos comentarios acerca de las reacciones que se observaron en los estudiantes.



## Reacciones de los estudiantes

Presentar el método con una forma cuadrada no es esencial, pero tiene indudablemente ciertas ventajas: definir un espacio físico para cada uno de los subprocesos de la resolución ayuda a los estudiantes de muy bajo nivel a fijar y entender el método. También recalca el hecho de que el método es único.

El hecho de que el método sea esencialmente la combinación de dos tipos de resultados, uno geométrico, visual o cualitativo y otro algebraico o cuantitativo, tiene al menos tres ventajas:

*i)* Ayuda a disminuir los errores.

*ii)* Permite el mejor uso de las posibilidades de los estudiantes.

*iii)* Ayuda a profundizar en ciertos conceptos.

A continuación se ilustran estos puntos con algunos ejemplos.

Cuando $x^2 < 2$ es resuelta por los estudiantes utilizando el método puramente algebraico, una respuesta frecuente es $x < \sqrt{2}$. Si se utilizan los gráficos esa respuesta es descartada automáticamente. Otro ejemplo es, cuando se simplifica la incógnita $x$ sin tener en cuenta que no se puede hacer cuando $x = 0$. Por ejemplo al resolver $2x = 3x$, el estudiante obtiene $2 = 3$, y no sabe cómo interpretar esta contradicción; si dicha ecuación es resuelta como parte de la resolución (con el método propuesto) de $2x < 3x$, los gráficos de $2x$ y $3x$ lo orientarán a corregir su error.

El método usual de resolución de inecuaciones es esencialmente un ejercicio de simplificación de predicados. La habilidad exigida al estudiante es principalmente el manejo fluido de los axiomas de los números reales y algunas reglas del cálculo de predicados. Al introducir el subproceso geométrico, las exigencias algebraicas disminuyen considerablemente: el manejo explícito del símbolo $<$ es soslayado. Esto es particularmente útil, porque es más fácil enseñar la representación gráfica de funciones elemantales que tratar de reparar vicios de formación arraigados a través de varios años.

Al comienzo, el estudiante percibe dos subprocesos: uno algebraico y el otro gráfico. Rápidamente comienza a descubrir relaciones entre ambos. La interpretación gráfica de las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ resulta particularmente útil. Algunos ejemplos de ello son: interpretar qué significa que una ecuación no tiene solución ($x - 1 = x^2$); resolver ecuaciones en las que la incógnita no se puede despejar y que, por lo tanto, las soluciones deben ser aproximadas [$x^2 = exp(x)$].

Existen también aspectos sicológicos que deberían ser señalados. Se notó que el hecho de tener que resolver una ecuación para hallar extremos del conjunto solución de la inecuación (es decir, con una finalidad clara) era un aliciente para hacer el trabajo. Algunos estudiantes se sienten más motivados a hacerlo que cuando se trate de un ejercicio aislado.

Otro aspecto sicológico es la relación que establecen con el tópico de inecuaciones. Ellos se sienten muy seguros, aunque a veces cometan errores o no puedan resolver una ecuación o dibujar la gráfica de una función. Se notó, cuando las manipulaciones algebraicas para resolver una ecuación son muy complicadas o desconocidas (polinomios de grado tres por ejemplo), que algunos estudiantes tratan de hacer las gráficas de manera más precisa para tener aunque sólo sea una idea aproximada de la solución. La idea de lo que es el conjunto solución y la totalidad de la estructura algebra-gráfico es profundamente interiorizada por la mayoría de ellos.

En cuanto a una cuantificación de los resultados no se han llevado estadísticas rigurosas, pero es opinión de los profesores que han trabajado con esta estrategia (unos diez en total a partir de 1983) que más del 90 por 100 de los estudiantes logra al final del curso resolver inecuaciones con soltura.

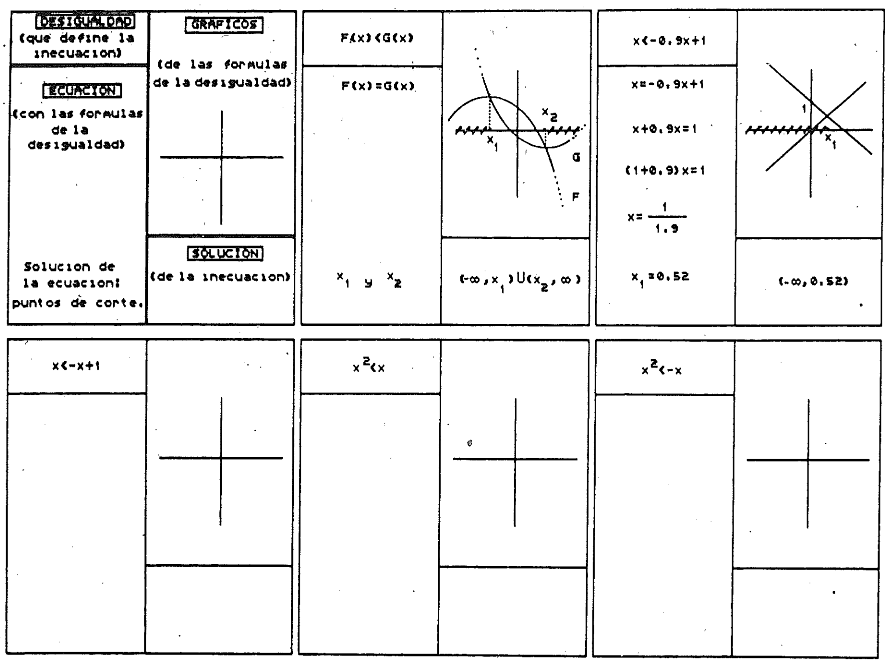
## Comparación de ambos métodos

En los anteriores párrafos ya se han hecho algunas comparaciones desde el punto de vista del estudiante. En esta sección los vamos a comparar desde otros ángulos.

La primera observación es que el método gráfico es más general. Con ello queremos decir que cuando el estudiante aprendía con el método puramente algebraico era incapaz de resolver inecuaciones que no fuesen del tipo tratado en el curso, como por ejemplo $x^2 \leq exp(x)$. Por otro lado los ejercicios tratado con los métodos puramente algebraicos son fácilmente resolubles con método gráfico.

El método gráfico mejora la capacidad de representar funciones del estudiante. Además puede ser enseñado en cuanto adquieren unos rudimentos de funciones (rectas, parábolas, hipérbolas...), mientras que el método puramente algebraico requiere un buen conocimiento de manipulaciones algebraicas.

Este último punto nos lleva a considerar la relación del tópico de inecuaciones con el resto del programa. En nuestros programas las inecuaciones aparecen justo después del tema de las propiedades de los números reales. Esto, aunque no explícitamente, es una indicación al profesor para trabajar la resolución de las inecuaciones en el contexto de una aplicación de las propiedades de los números reales y no como una aplicación de la teoría de funciones. ¿Por qué existe esta tendencia que favorece el uso de métodos no gráficos?




Una respuesta parcial es que el método puramente algebraico para resolver una inecuación es no sólo un método sino también la prueba de que la solución obtenida es efectivamente la solución (entendida como el conjunto de números que satisfacen la inecuación). En cambio el método gráfico es sólo un método y de hecho en algunos casos si los gráficos son demasiado imprecisos la solución obtenida puede ser errónea. Paradójicamente el método algebraico es percibido por los estudiantes como un método y no como una prueba, mientras que el método gráfico es percibido como un método y una prueba. Esto se debe principalmente al hecho de que para ellos lo que se ve no requiere prueba. Sería interesante profundizar en cómo sensibilizar al estudiante a la idea contraria, es decir: es necesario probar lo que se «ve». Apenas se comienza a tratar de probar lo que se «ve», comienzan a aparecer ideas como las de continuidad de funciones crecientes..., etc., dando pie para motivar nuevos conceptos.

Otro punto relacionado con los programas es el siguiente: la dificultad para enseñar las inecuaciones hacía que el tópico fuese considerado como un fin en sí. Al enseñar con el método gráfico, el tiempo de explicación disminuye considerablemente y permite al profesor tratar problemas que normalmente son tratados muy de prisa o dejados de lado. Estamos pensando en ejercicios del tipo: «halle $a$ de manera que la solución de $ax^2 + 2 < x$ sea $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$». En este sentido el tema de inecuaciones, al ser trabajado con el método presentado, tiende a convertirse en un medio para madurar en otras direcciones.

Recientemente he sabido de la existencia de libros y trabajos relacionados con lo expuesto. Encontré un libro de bachillerato inglés (Clarke, pág. 145). Por otro lado el profesor C. Gaulin me envió el artículo de Dreyfus y Eisenberg (1985). Dichos autores, en una comunicación personal, me hicieron saber que sus alumnos preferían los métodos puramente algebraicos. No es el caso de nuestros alumnos. Creo que el hecho de tener una muy mala formación en álgebra, determina en gran parte la preferencia de nuestros estudiantes.

En cuanto a los profesores, la mayoría de los que hemos trabajado con el método gráfico, lo preferimos. Sin embargo, hemos recibido críticas de colegas que dicen que además del método gráfico se deberían de enseñar los algebraicos y en los exámenes exigirlos. Consideran que el método gráfico es demasiado fácil y que la matemática debe ser difícil. Puede ser que esto sea otra razón por la cual el método gráfico, a pesar de todas las ventajas señaladas sea tan poco utilizado.

**Referencias**


CLARKE, L. H., *Pure Mathematics at Advanced Level* (tercera edición de F. G. J. Norton, Heinemann Educational Books London).

DREYFUS, T., EISENBERG, T. (1985), «A Graphical Approach to Solving Inequalities», *School Science and Mathematics*, Vol. 85 (2).

PROTTER, M. H., MORREY, B. Ch. (1980), *Cálculo con Geometría Analítica* (tercera edición, Fondo Educativo Interamericano).

# Palillos

E. Borrás, M. Contreras, F. Hernán

«No será la incorporación de tres o cuatro herramientas espectaculares lo que caracterizará la nueva organización de las clases, sino el uso habitual, cotidiano, de una amplísima gama de materiales que hagan del aula de Matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria, un verdadero laboratorio-taller» [1].

Una pacífica alteración de los hábitos y los métodos de los profesores se está dando poco a poco, pero de una manera que será, sin duda, irreversible. Y no es sólo que cada vez estemos más atentos a los procesos y no simplemente a los contenidos. Es, sobre todo, el reconocimiento de un hecho psicológico de importancia capital para la enseñanza: *la mente recuerda lo que la mente hace, no lo que el mundo hace; esto es, la experiencia es la mente trabajando —no el mundo imprimiéndose en un organismo pasivo— y la experiencia es lo que será recordado* [2].

Este trabajo mental se ve estimulado cuando se ejercita sobre un soporte físico, sobre materiales estructurados o por estructurar que permitan construir la secuencia (muchas veces recurrente) exploración — investigación de posibilidades — elección de caminos.

Y ello vale tanto para el profesor como para el alumno. La acción y el pensamiento se complementan produciendo conjeturas que se pueden poner en práctica y creando la necesidad de abstraer a partir de los objetos concretos y de las acciones efectuadas sobre ellos.

Esos materiales pueden ser sofisticados o simples, unidireccionales o susceptibles de múltiples exploraciones, apropiados para una edad determinada o para un amplio intervalo de edades, caros o baratos.

Los palillos son simples, fáciles de adquirir o producir, baratos, apropiados para investigar en la enseñanza primaria y en la secundaria, y dan lugar a una considerable variedad de propuestas.

Muchas de ellas están recogidas en conocidos trabajos (ver, por ejemplo las referencias 3 y 4), cuyo mérito principal tal vez sea el de sugerir que ese campo de propuestas no queda agotado por ellos, sino que cualquier profesor puede ampliarlo en función de sus criterios, sus objetivos y sus alumnos.

Incluso el tamaño de los palillos (uno, varios; pequeños, grandes) y el color (uno solo, dos o tres, ocho o diez) son variables que, de ser tenidas en cuenta, diversificarán los

[1] ALONSO, F. *et al.,* 1987, *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90. Simposio de Valencia,* Valencia, Ed. Mestral.

[2] JENKINS, J., 1973, «Language and Memory», en G. A. Miller ed., *Comunication Language and Meaning,* New York, Basic Books.

[3] FIELKER, D., «Five Sticks», en *Mathematics Teaching,* núm. 72, Revista de la Association of Teachers of Mathematics, Derby (Inglaterra).

[4] BAKER, L. *et al.,* 1972, *Sticks,* Association of Teachers of Mathematics.

tipos de situaciones que vayan a ser consideradas y la extensión con la que sean tratados los conceptos.

El tratamiento en clase puede hacerse de manera «ordenada»: estudiar clasificaciones, buscar simetrías, construir secuencias y encontrar regularidades funcionales, analizar propiedades de los ángulos, hallar el número de intersecciones o de regiones, plantear problemas combinatorios, etcétera, o de manera «espontánea», siguiendo las pautas y las ideas que vayan naciendo de la propia exploración de los alumnos.

Aquí hemos optado por limitarnos a construcciones en el plano y por una mezcla de lo sistemático y lo espontáneo, mezcla que no hace sino componer una de las muchas opciones disponibles.

## Con palillos pequeños

Los palillos pequeños, semejantes a las cerillas de madera corrientes, permiten hacer uso de un gran número de ellos en el pequeño territorio de una mesa escolar. Si son de varios colores, las construcciones tendrán un gran atractivo plástico.

¿Cuántos palillos se necesitan para hacer un triángulo equilátero?

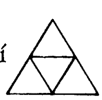
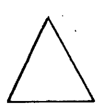
¿Y para hacer dos? Con 5 basta. 

¿Y para hacer tres? Con 7 basta. 

¿Y para hacer cuatro, cinco, seis...?

Si se forma una tabla, parece haber una sencilla regularidad:

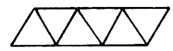
| Núm. de triángulos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Núm. de palillos | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | ... |

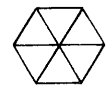
Pero, ¿y si alguien ve aquí  cinco triángulos equiláteros, cuatro pequeños  y uno grande 

Entonces el problema ha de ser redefinido: ¿triángulos equiláteros o triángulos equiláteros del mismo tamaño?

Supongamos que optamos por triángulos equiláteros del mismo tamaño. ¿Se mantiene la regularidad observada? ¿O se pueden emplear menos palillos de los previstos?

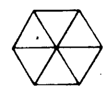
Con 13 palillos se hacen seis triángulos del mismo tamaño

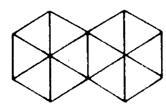


¡Pero si los triángulos se colocan así 

hay suficiente con 12 palillos!

¿Seguimos con la tabla de triángulos o pasamos a una tabla de «hexágonos»?

Un «hexágono»  12 palillos.

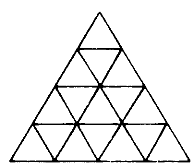
¿Y dos «hexágonos»?  23 palillos.

¿Y tres «hexágonos»? No son 34 palillos, sino 33.

¿Y cuatro, cinco, seis, siete...?

¿Cómo será la tabla que relaciona cuadrados con palillos?

Una vez construida una red (de triángulos, «hexágonos», cuadrados, etc.), sin haber contado previamente el número de palillos, por ejemplo, ésta



es interesante ver los distintos procedimientos que cabe usar para contar el número de palillos que contiene.

Un juego para dos personas:

Dada una red de triángulos (como la anterior, por ejemplo) cada jugador retira, por turno, un palillo. Con ello desaparece un triángulo —si se retira un palillo del contorno— o desaparecen dos triángulos —si se retira un palillo del interior— o no desaparece ninguno. Gana el jugador que haga desaparecer el último triángulo.

¿Hay una estrategia ganadora? ¿Es independiente de la red? ¿Ocurre lo mismo en el juego análogo con una red de cuadrados?

## Con palillos grandes

Como con ellos se llena en seguida la mesa, son más apropiados para plantear propuestas con menor número de palillos o de un carácter más complejo. En tal caso, puede prescindirse de que sean de varios colores.

*Intersecciones*

¿En cuántos puntos pueden cortarse dos, tres, cuatro, cinco..., palillos?

¿Y si suponemos que los palillos «son» rectas?

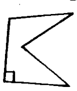
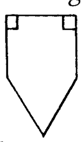
Las dos preguntas son claramente distintas, ya que en

hay cuatro intersecciones si son palillos, pero hay seis intersecciones si son rectas.

*Polígonos*

Con cuatro palillos pueden hacerse infinitos cuadriláteros, todos los cuales son rombos (y uno, cuadrado).

Con cinco palillos se pueden hacer infinitos pentágonos. Todos son equiláteros, y sólo uno es regular. Una primera clasificación (¡poco excitante!) es en regulares e irregulares. Pero se pueden hacer otras:

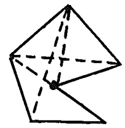
- Según el número de ángulos rectos interiores. Éste  tiene uno; éste  tiene dos. ¿Hay alguno con más de dos?
- Según el número de ejes de simetría.

El pentágono regular es inscriptible en un círculo. ¿Hay algún otro de los infinitos pentágonos equiláteros que sea inscriptible en un círculo?

¿Y circunscriptible?

Hexágonos. Después de lo que se haya hecho con pentágonos, ¿hay preguntas nuevas que puedan hacerse sobre los hexágonos? ¿Aumenta el número posible de ejes de simetría? Se puede generalizar a hexágonos el concepto de paralelogramo; ¿cuántos tipos de hexágonos paralelogramos hay?

¿Se puede generalizar el concepto de diagonal a un polígono cóncavo? Si se acuerda que una diagonal no puede cortar a ningún lado salvo en los vértices, y que necesariamente ha de estar contenida en el polígono, ¿cuál es el número mínimo de diagonales de un hexágono equilátero?

Éste  tendría cinco. ¿Puede haber menos?

Otros polígonos.

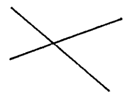
*Regiones*

Si suponemos que los palillos son rectas:

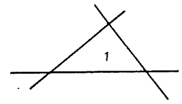
¿Cuántas regiones pueden determinarse con 1, 2, 3, 4..., palillos?

¿Cuál es el mayor número de regiones cerradas?

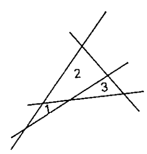
Una recta
0 regiones cerradas



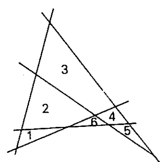
dos rectas
0 regiones cerradas



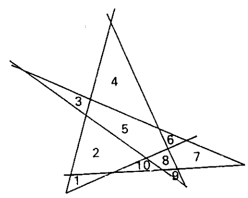
tres rectas
1 región cerrada



cuatro rectas
3 regiones cerradas



cinco rectas
6 regiones cerradas



seis rectas
10 reg. cerradas

1, 3, 6, 10, son números triangulares. ¿Es correcta la inducción de que seguiremos obteniendo los sucesivos números triangulares?

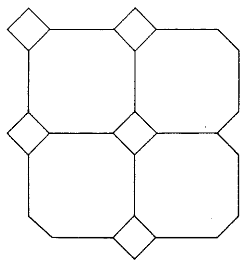
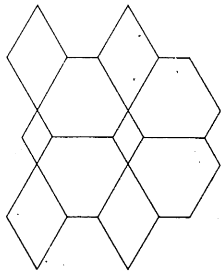
*Con palillos grandes y pequeños simultáneamente*

El campo de posibilidades es ahora diverso. Por ello, para limitar el contexto, utilizaremos palillos en los que los grandes tengan longitud doble de los pequeños. Evidentemente se podría optar por otra relación entre longitudes, pero ésta parece la más simple.

La utilización de los dos tipos de palillos permite recoger y extender algunas de las ideas ya expuestas: mosaicos, polígonos, ángulos, simetrías, clasificaciones...

*Mosaicos*

Éstos son dos

¿Qué otros pueden hacerse?

*Polígonos*

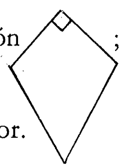
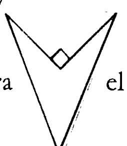
Tres palillos. Sólo hay dos posibilidades:

- 2 largos y 1 corto;
- 1 largo y 2 cortos.

¿Cuántos triáangulos diferentes pueden construirse?

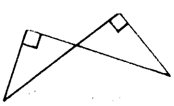
Cuatro palillos. Pueden explorarse dos clasificaciones:

- Por el número de ángulos rectos.
- Por el tipo de longitud utilizadas: 1-2; 2-2; 2-3.

Y cada una de ellas interfiere con la otra o la determina. En efecto, ¿es posible tener un cuadrilátero con un solo ángulo recto? Depende de cómo sean los palillos. Si son dos largos y dos cortos, ésta es una solución  ; pero en esta otra  el ángulo no es interior.

¿Se puede con tres cortos y uno largo?

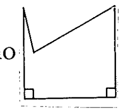
¿Es posible tener dos ángulos rectos? ¿Se admite la siguiente disposición?

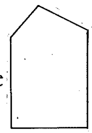


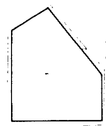
Partiendo de un cierto tipo de palillos (p.e., tres cortos y uno largo), ¿cuántos cuadriláteros simétricos se pueden construir y cuál es su grado de simetría (un eje, dos ejes...)?

A la inversa, partiendo de ejes de simetría (p.e., dos), ¿cuántos cuadriláteros pueden construirse?

Cinco palillos. ¿Hay tantos pentágonos compuestos con 4 palillos cortos y 1 largo como compuestos con 4 largos y 1 corto?

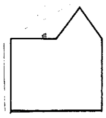
Este pentágono  tiene dos ángulos interiores rectos;

¿Puede éste  tener tres?

¿Puede tener tres este otro  ?

¿Puede haber más de tres ángulos rectos?

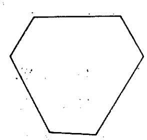
Con seis palillos

 tres ángulos de 90 grados y un ángulo de 60 grados.

¿Cuál es el máximo número de ángulos de 90 grados que puede haber en un polígono de seis palillos cortos y largos?

¿Cuán es el máximo número de ángulos de 60 grados?

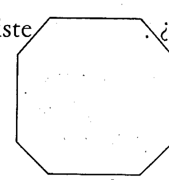
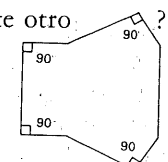
Es posible construir un hexágono alternando palillos cortos y largos:

 y que además es paralelogramo.

¿Puede construirse un hexágono poniendo tres palillos cortos y tres largos en cualquier orden?

¿Hay más de un caso de hexágonos paralelogramos?

Con más de seis palillos.

Este octógono existe  ¿Existe este otro 

?

¿Existe algún octógono de palillos cortos y largos que tenga más de cuatro ángulos rectos?

¿Pueden construirse octógonos cóncavos paralelogramos simultáneamente palillos cortos y largos?

... En algún momento hay que acabar. Y puede hacerse con una duda: ¿habría sido mejor hacer las preguntas con más precisión e ir dando respuestas o, por el contrario, deberíamos haber terminado mucho antes la exposición de esta especie de torbellino de ideas y dejar así que usted siguiese haciendo sus propias preguntas y encaminando sus propias investigaciones? Más aún, ¿por qué no haber hecho una sola pregunta, clara y abierta a la vez? Ésta: *¿Qué se puede hacer con palillos de longitudes 1 y 2?*

# Introduciendo los giros del plano en EGB

Adela Jaime [1], Ramón Muelas [2], Ángel Gutiérrez [3],
Miguel Sánchez [2] y Juan M. Alcocer [2]

## Introducción

Desde hace algunos años, los autores de este artículo estamos trabajando con el fin de realizar el diseño de una unidad de enseñanza de las isometrías del plano en EGB [4]; las experimentaciones llevadas a cabo en las aulas (tanto de EGB como de Magisterio) han puesto de manifiesto la existencia de ciertas dificultades, para cuya posible solución hemos encontrado a veces técnicas, medios o materiales útiles.

La exposición que presentamos no tiene más pretensión que describir algunos de tales materiales, que han resultado eficaces en relación con la adquisición intuitiva del concepto de giro, aunque su empleo también permite la obtención de características y propiedades de este movimiento. Dichos materiales se han utilizado durante varios años en primer curso de Magisterio (de todas las especialidades) y durante este año hemos comenzado su empleo en los Ciclos Medio y Superior de EGB.

### *Introducción de los giros en el aula*

Antes de comenzar la presentación en el aula de las isometrías del plano, hay que decidir cuál de las dos posturas siguientes se elige: introducir las traslaciones y los giros a partir de la composición de simetrías o estudiar cada movimiento *per se* y tratar con posterioridad la composición de simetrías.

Nuestra postura al respecto se inclina claramente por la última tendencia, pues, entre otras razones, somos partidarios de la conveniencia de un reconocimiento individual de cada movimiento, en el que se pongan de manifiesto sus principales características gráficas, visuales y manipulativas.

Con relación a los giros en el plano, pensamos que el alumno adquiere una primera comprensión general de este movimiento cuando es consciente de que, al girar una figura, la distancia al centro se mantiene, pero la inclinación varía.

1 Profesora Titular de Didáctica de la Matemática en la E.U. de Profesorado de EGB de Valencia.
2 Profesor de EGB en el C.N. «Amadeo Tortajada» de Mislata (Valencia).
3 Catedrático de Didáctica de la Matemática en la E.U. de Profesorado de EGB de Valencia.
4 Dicho trabajo se encuadra en el marco de un seminario del CEP de Torrente y forma parte de un proyecto de investigación, subvencionado por la Consellería de Cult., Educ. y Ciencia de la Generalitat Valenciana.

## El problema

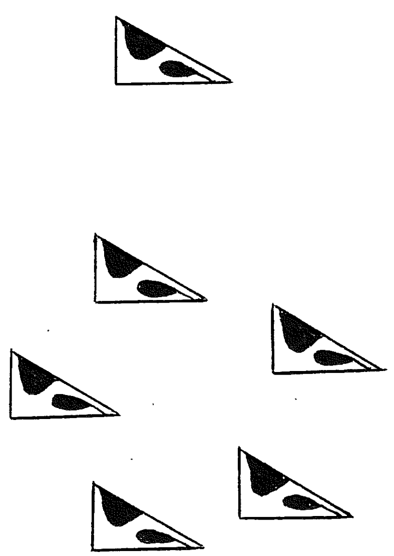
Los alumnos comprenden con relativa facilidad la necesidad de la equidistancia al centro de giro, pero no ocurre lo mismo en lo que respecta a la variación de la inclinación de la figura. Es frecuente el caso de alumnos de primer curso de Magisterio que recuerdan perfectamente la técnica de utilización del compás para aplicarle un giro a una figura, pero que, si prescinden del compás, no son capaces de desplazarla correctamente cuando se va moviendo según ese giro; lo que hacen es colocar la figura siempre paralela a sí misma, esto es, la desplazan mediante traslaciones, siguiendo una circunferencia con centro en el centro de giro.

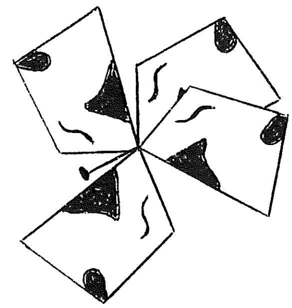
A continuación mostramos un ejemplo para ilustrar lo que sucede: A los alumnos se les pide que giren, con centro en $O$, la figura $A$, dejando varias copias de la figura a lo largo del recorrido (se utilizan piezas recortadas para evitar errores de dibujo y para obligar a realizar un seguimiento manual del movimiento) (ver figura 1a).

No se permite la utilización de ningún instrumento que ayude a realizar giros, pues lo que se intenta es que el profesor pueda ver si los alumnos han asimilado las características fundamentales de ese movimiento.

Una respuesta frecuente es la que se presenta en la figura 1b:

*Figura 1 (a y b)*





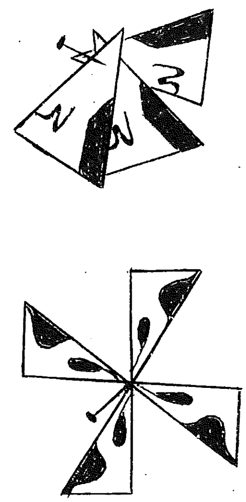


*Figura 2*

Nosotros creemos que es importante que los alumnos recuerden, a largo plazo, los efectos producidos por un giro y no que solamente memoricen una técnica de dibujo. Sin esa visión conceptual, todos los resultados posteriores que se obtienen en el aula se convierten en una memorización de reglas y técnicas que no se acaban de comprender.

## Una solución

En Magisterio desde hace varios años, y durante este curso en los Ciclos Medio y Superior de EGB, estamos utilizando materiales y técnicas sencillos que les facilitan a los alumnos la adquisición de esa idea general, que intentamos que consigan los alumnos, sobre el efecto que producen los giros. Es conocido el empleo de hojas de acetato (sobre todo en textos de Inglaterra y Estados Unidos), pero no la utilización de los otros métodos que proponemos (palillo y disco giratorio).

Cuando el centro de giro está sobre la figura, pinchando la figura con un alfiler por el centro de giro, es muy fácil obtener el recorrido de esa figura (ver figura 2).

Cuando el centro del giro es exterior a la figura, ésta no se puede pinchar para darle vueltas; por ello nos servimos de alguno de los siguientes medios.

### I. *Palillo*

En un palillo —suficientemente largo para cubrir la distancia entre el centro *O* de giro y la correspondiente figura *F* que se quiere girar— se pega una copia de *F*, en la misma posición que ésta. Para ello, colocar el palillo de forma que un extremo se sitúe sobre el centro de giro y que el palillo pase por encima de la figura *F;* a continuación pegar sobre el palillo una copia *G* de la figura, de forma que ésta se sitúe exactamente sobre *F* (ver figuras 3a y 3b).

Sujetar el palillo de manera que el extremo colocado sobre el centro del giro no se desplace, e ir moviendo el otro extremo del palillo. De esa manera, la copia G va desplazándose a lo largo de la circunferencia correspondiente a un giro con centro en *O* y se observa claramente la variación de inclinación.

Es aconsejable pegar sobre el papel varias de las posiciones en las que se coloca *G* cuando el palillo da vueltas. De esa manera, al quitar el palillo queda constancia de los efectos del giro sobre *F* (ver figura 3c).

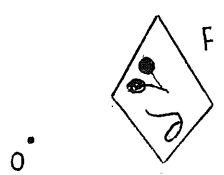



Fig. 3 a

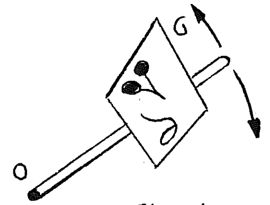



Fig. 3b

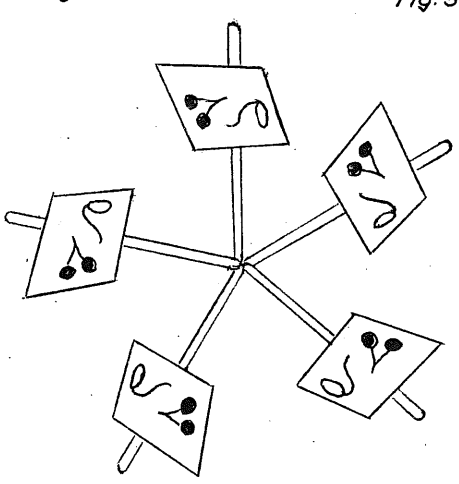


Fig. 3c

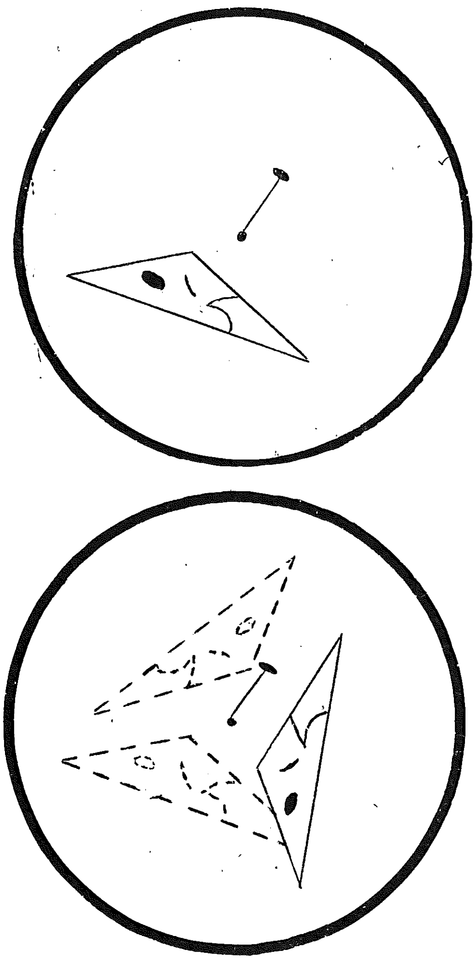


*Figura 4*

### II. *Disco giratorio*

Se recorta un disco de plástico transparente y se marca su centro (también podría servir papel transparente no demasiado flexible). El disco ha de ser lo suficientemente grande como para que el centro de giro y la figura *F* que hay que girar quepan en medio disco. Se procede de forma análoga a como hemos hecho con el palillo.

Se coloca el centro del disco sobre el de giro; se sitúa sobre el disco una figura *G*, igual a la que hay que girar (*F*), exactamente sobre ella (conviene pegar ligeramente *G* sobre el disco). Pinchando el disco por su centro (que coincide con el de giro) se le da vueltas.

Igual que sucedía con el palillo, *G* va tomando las distintas posiciones correspondientes a la imagen de *F* mediante un giro. Pegando varias de estas posiciones queda después constancia de los efectos del giro (ver figura 4).

III. *Hoja de acetato o papel transparente*

En realidad, II es un caso particular de III. La forma de proceder es exactamente la misma en ambos casos (en la figura 5 se muestran las manipulaciones a seguir).

Sin embargo, pensamos que la presentación de la hoja transparente en forma de disco (método II) facilita más la visión que pretendemos conseguir.

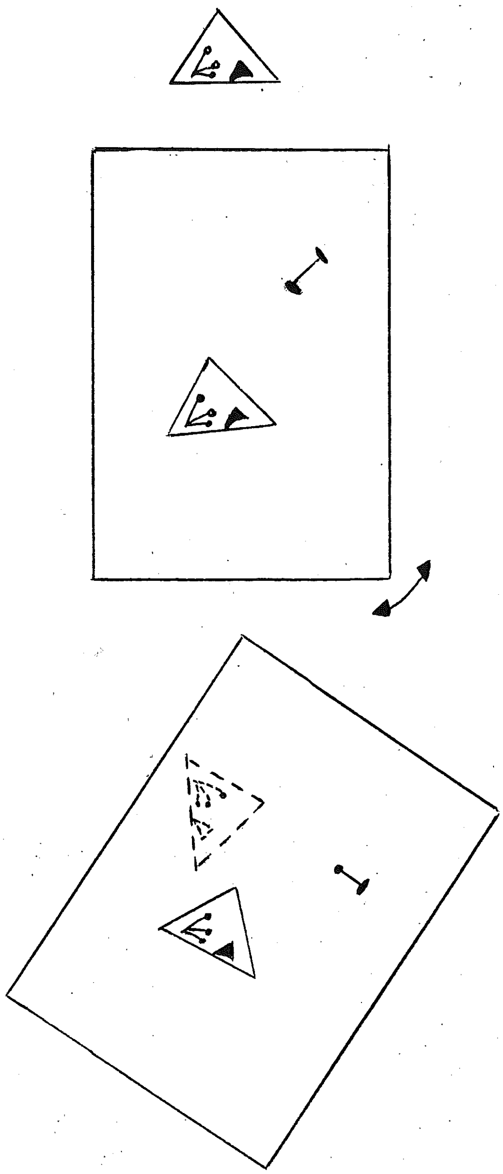


*Figura 5*

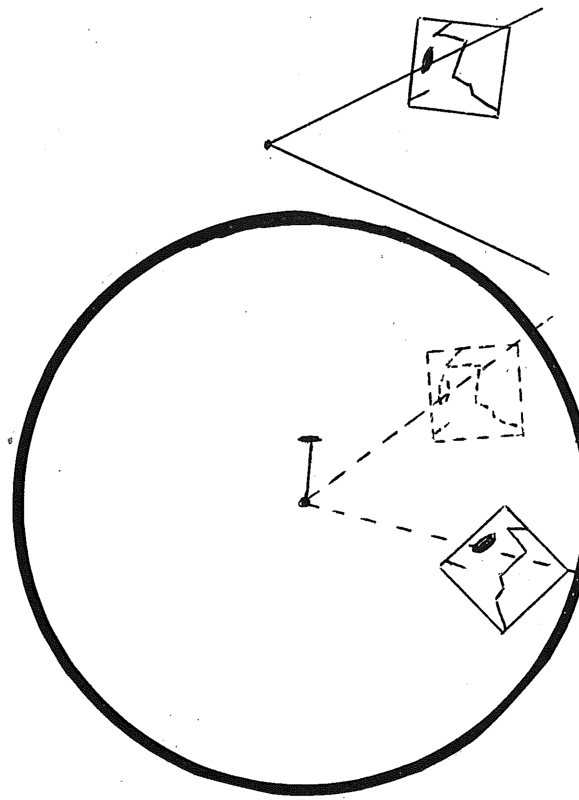


*Figura 6*

*Comentarios sobre el ángulo de giro*

Si queremos girar una figura cierto ángulo determinado, la manipulación directa de los materiales anteriores no resulta suficiente, puesto que ninguno de ellos, tal como los hemos utilizado hasta ahora, posibilita la medición de la «cantidad» de camino que recorre la figura.

Para resolver esta cuestión, se puede utilizar una o varias hojas auxiliares de papel transparente con ángulos previamente marcados, o sea, plantillas de ángulos. Además del material correspondiente entre los indicados anteriormente para realizar el giro, se coloca la plantilla sobre la figura, de forma que uno de los vértices (u otro punto fácil de localizar) se sitúe sobre uno de los lados del ángulo. Cuando se realiza el giro, la imagen de ese vértice (o punto) ha de situarse sobre el otro del ángulo.

Cuando se utilizan hojas de acetato o un disco transparante para realizar el giro, se puede dibujar la plantilla anterior sobre ese mismo material.

Si los alumnos no tienen dificultad en el uso de transportador, se puede suprimir la plantilla de ángulos y dibujar el ángulo correspondiente, haciendo pasar uno de sus lados sobre un vértice (u otro punto fácil de localizar) de la figura que hay que girar (ver figura 6).

### *Ventajas de los materiales propuestos*

- Facilitan la visión general de los giros.
- Son especialmente adecuados para el aula de EGB, donde la manipulación es totalmente necesaria y el compás resulta inadecuado (excepto en los cursos superiores).
- Además de proporcionar la idea de la imagen de un giro, se pueden tratar de forma inmediata algunas propiedades, en particular la composición de giros del mismo centro.
- La sencillez de manipulación los convierte en materiales autocorrectores, permitiendo que el alumno compruebe *por sí mismo* si ha realizado bien un giro (evidentemente, el método del que se ha servido el alumno para realizar el giro previamente a la corrección ha de ser distinto al que utiliza para la comprobación).

## Conclusiones

Los materiales que hemos presentado creemos que pueden resolver algunas dificultades que se les plantean a los alumnos de enseñanza elemental y de Magisterio.

No hemos pretendido en absoluto indicar que éstos sean los únicos medios posibles; simplemente hemos intentado presentar algunos métodos (posiblemente) alternativos a los que ya conoce el lector para que, si lo considera oportuno, los pueda emplear.

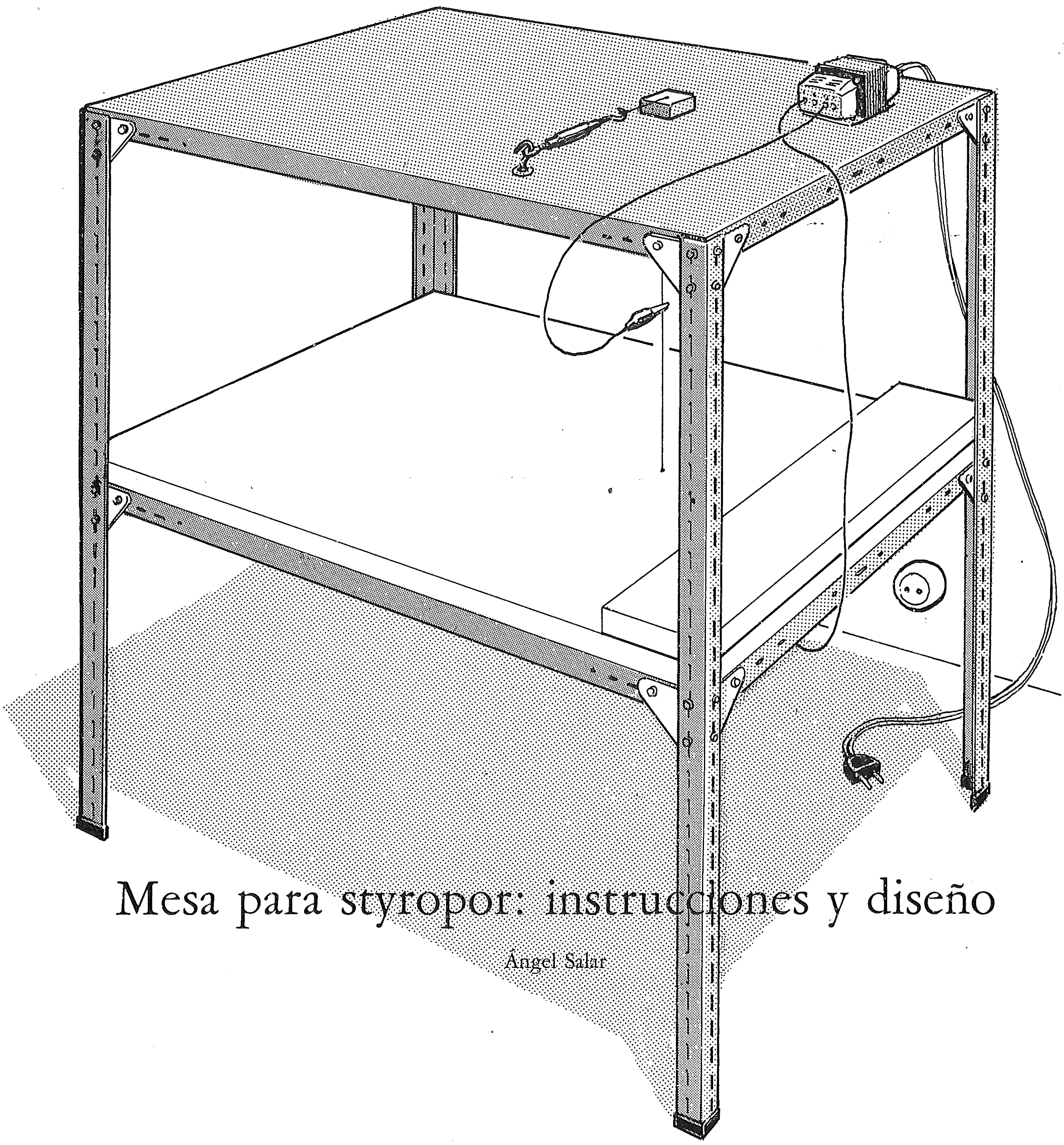
Tampoco queremos dejar una impresión —falsa— de oposición por nuestra parte a la utilización del compás; creemos que el compás es un instrumento necesario, en cuya utilización se debe insistir, pero sólo cuando el nivel de los alumnos lo permite.

### Referencias

JAIME, A,; GUTIÉRREZ, A. y otros (1988): *Memoria del Proyecto de Investigación «Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las simetrías del plano en la EGB»,* Consellería de Cultura, Educ. y Ciencia de la Generalidad Valenciana, Valencia.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1986): *Traslaciones, Giros y Simetrías en el Plano,* E.U. de Profesorado de EGB, Valencia.

*Foto: Pilar Moreno*



# Mesa para styropor: instrucciones y diseño

Ángel Salar

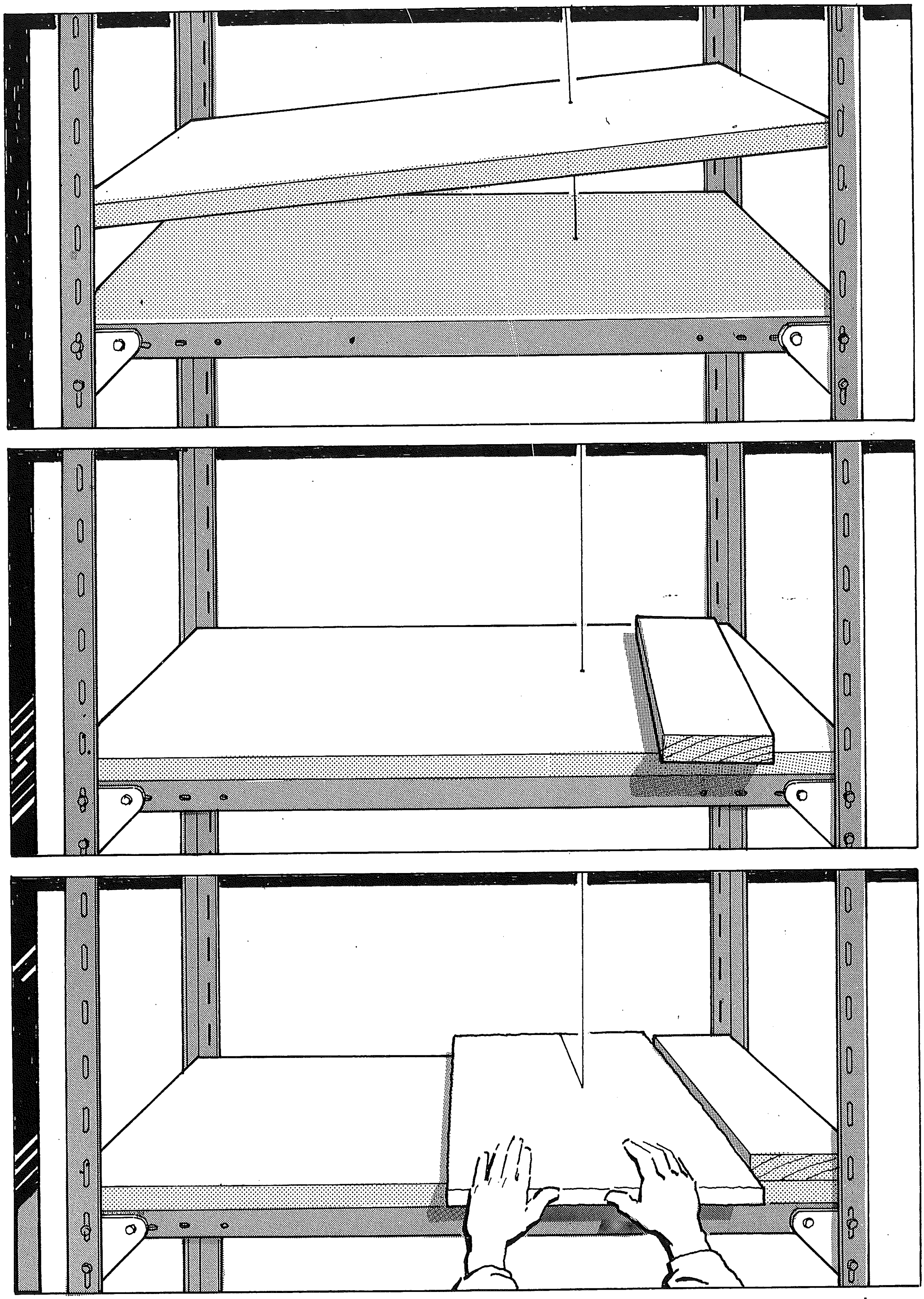
Existen en el mercado herramientas que permiten cortar, limpiamente, el llamado corcho blanco o styropor. Las piro-sierras son las más elementales y pueden conectarse tanto a la red eléctrica como a una pila. La casa Ayllón tiene comercializada una piro-sierra bastante elaborada.

Pero, si lo que deseas es cortar styropor en grandes cantidades y dimensiones, la mesa que describo a continuación puede serte de utilidad.

Si te animas y construyes una, podrás divertirte obteniendo diversas secciones, por ejemplo, de un cubo o, si lo prefieres, comprobar, su dualidad con el octaedro.

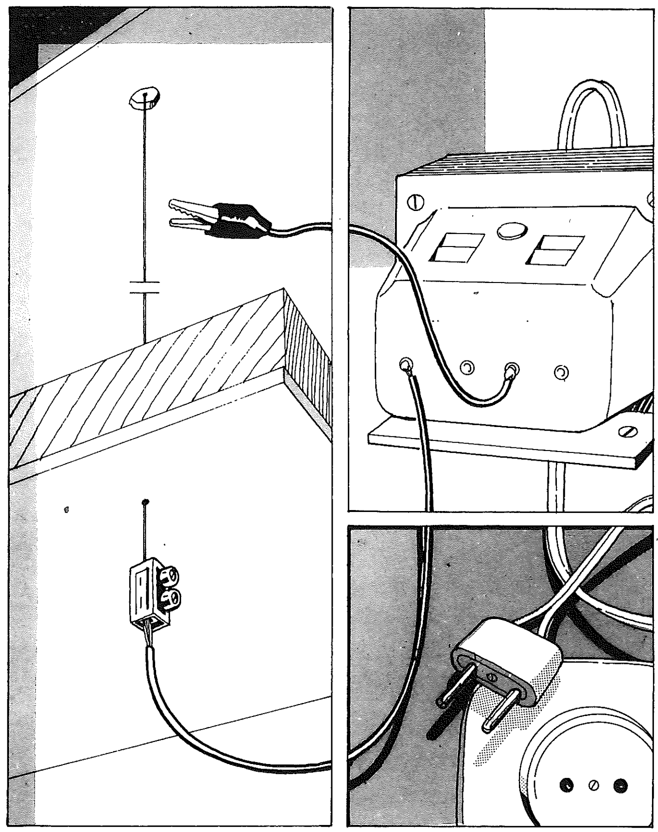
## Estructura

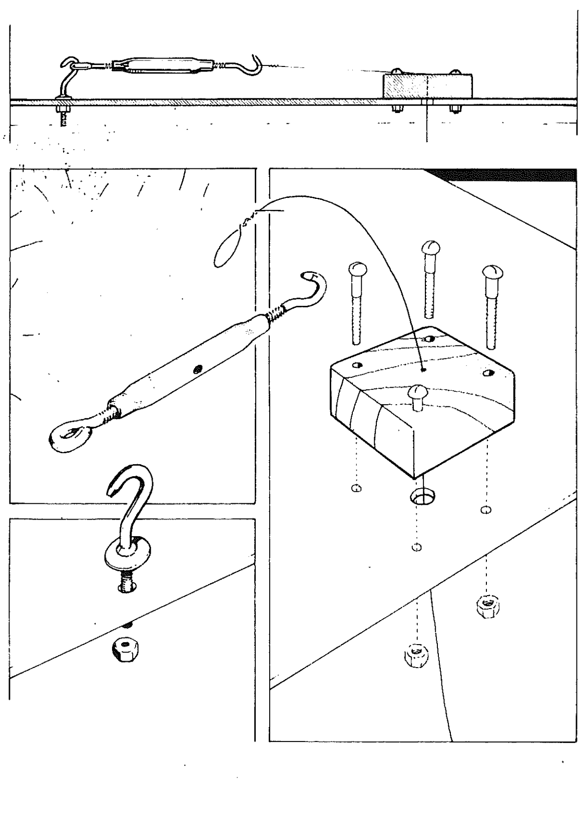
La estructura fundamental de la mesa está compuesta de una estantería de 1,5 m. de altura y con dos bandejas de dimensiones 600 × 1.000 mm. Pueden utilizarse otras dimensiones para la estantería y las bandejas, pero si se trabaja con planchas de styropor grandes se pueden presentar problemas de equilibrio con la plancha. Las dimensiones que damos aquí nos parecen que son las más apropiadas y cómodas para trabajar.



### Lista de materiales

1.—Dos bandejas de 600 × 1.000 mm.
2.—6 metros de perfil en L para las patas.
3.—16 escuadras de sujeción y 48 tornillos, tuercas y arandelas.
4.—Un tablero de madera con superifice de railite en el que se deslice el styropor con facilidad. Este tablero no es imprescindible utilizarlo, pero hace más ágil el trabajo.
5.—Una o varias guías de longitud fija 600 mm., la del tablero, y de anchura variable, según el tamaño de los cubos a cortar.
6.—Un tensor de los que se utilizan para, normalmente, estirar los cables o cuerdas para tender ropa.
7.—Un transformador de 220-12 voltios y de 3 a 4,5 amperios (está estudiado para las características del hilo que utilizamos. Si se cambia de hilo será necesario medir la intensidad que desarrolla la corriente.)
8.—Cable eléctrico normal, para la entrada al transformador y la salida del mismo.
9.—Una pinza de cocodrilo para establecer el contacto cerrando el circuito.
10.—Un trozo de regleta de conexión eléctrica.
11.—Hilo de constantan o de nicrón de 0,4 mm. de sección.





12.—Un gancho de acero en forma de media luna y roscado por su extremo. No olvidar poner unas arandelas de plástico para que no haga contacto con la estructura metálica de la mesa.
13.—Un taco de madera atornillado a la bandeja superior.
14.—Una arandela de nylon o plástico para evitar derivaciones producidas por contacto eléctrico del hilo de constantan con la bandeja.

### Observaciones y precauciones

• Una vez conectado todo el sistema, el hilo hay que tensarlo suavemente hasta conseguir que quede rígido. Es preciso tener cuidado con la tensión que se hace para no romperlo.

• Si la cantidad de styropor a cortar es grande se puede aumentar la eficacia de corte bajando la pinza de cocodrilo o cambiando la sección del hilo de constantan, en este caso hay que tener precaución y medir la intensidad de la corriente.

• Una vez que se ha acabado de cortar, ¡ANTES DE DESENCHUFAR! es preciso destensar el cable, en caso contrario al enfriarse se corre el riesgo de que se rompa.

# El ordenador en la clase de Matemáticas escolares

**Felipe López Fernández.**

Desde hace poco tiempo, unos tres o cuatro años, tanto el Gobierno del Estado como los Gobiernos de las Comunidades Autónomas que tienen transferidas las competencias en Educación, están llevando adelante —con mejor o peor acierto, pero en cualquier caso con una fuerte inversión de capital humano y material—, sendos «Planes experimentales» para la introducción de la Informática y otras tecnologías de la información en las tareas propias de los centros escolares (EGB, BUP, FP y Educación Especial).

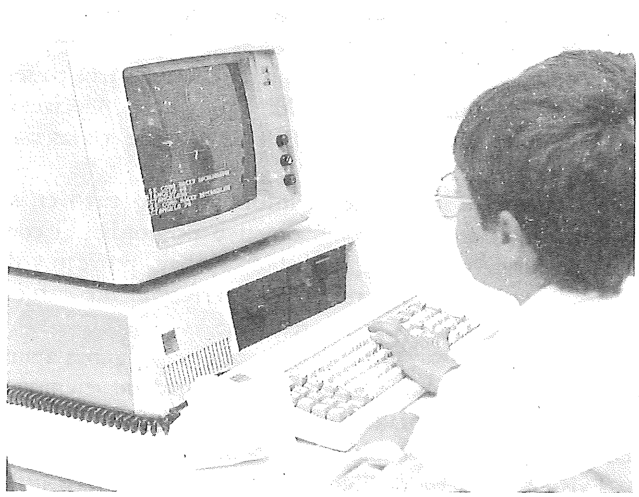
Existen algunos problemas con respecto al uso del ordenador en la tarea docente y que podrían agruparse de esta manera:

*Primero.*—La formación del profesorado, en dos vertientes:

*a)* La formación permanente:

1.—del profesorado que está a cargo de los Departamentos de Informática de los CEPs, y otros centros equivalentes; y

2.—del profesorado de los centros educativos (de EGB, BUP, FP y EE) donde se lleva adelante la experimentación.



*b)* La formación inicial del profesorado que ahora mismo está estudiando en las Escuelas Universitarias y Facultades de las distintas Universidades.

*Segundo.*—La dotación a los centros, tanto de formación como experimentales, del material informático —hardware— adecuado, lo que exige una gran inversión económica.

*Tercero.*—La compra, adaptación y producción del software educativo apropiado para distribuirlo a los centros de formación —inicial y permanente— y a los centros escolares «experimentales».

Por otra parte creo que ya existe conciencia de que:

*a)* La importancia y necesidad del ordenador en la vida social, y a veces en la privada, es ya incuestionable.

*b)* Lo anterior implica que todas las instituciones educativas, tanto obligatorias como no obligatorias, así como públicas y privadas, deben asumir esta consideración en beneficio de la completa formación de los ciudadanos.

*c)* Por sí mismo y por la flexibilidad para ayudarnos en nuestra tarea de enseñantes, el ordenador es objetivamente una buena herramienta para nuestra labor profesional.

*d)* Es meritorio —y no bien reconocido— el trabajo de reciclaje que supone para el profesorado actual el empeñarse en sacar el mejor provecho de esta tecnología para elevar la calidad de su trabajo en beneficio del alumno.

*e)* Existe una gran falta de conexión y fluidez de información entre los trabajos realizados, a veces de forma individual, por los profesores que usan esta tecnología en su clase y esto tanto a nivel de Comunidad Autónoma como a nivel de Estado.

*f)* Hay, en consecuencia, un inmenso trabajo «deslabazado» y una duplicación de esfuerzos junto con una desconocida existencia de «Grupos de trabajo estable».

*g)* Falta, asimismo, en España —a mi juicio— una potente y bien nutrida asociación (o federación de asociaciones) de profesores interesados por el uso de la informática en la enseñanza obligatoria tal como existe en otros países: la SSPCI de Suiza; ADELAIDE en Francia; Asociación EPI, también francesa; CLAVIER de Bélgica; varias asociaciones americanas...

Sabemos que la tecnología informática no tuvo en su origen, ni tiene ahora, como objetivo primordial el contexto educativo, aunque ha habido, y hay, proyectos de trabajo y aplicaciones ya terminadas perfectamente enfocadas hacia la enseñanza y el aprendizaje.

En cualquier caso y por varias razones —algunas apuntadas aquí— y sobre todo por la cantidad de «tiempo a emplear», el profesorado que se decida a trabajar o a usar en su trabajo esta tecnología no lo tiene nada fácil.

Existen una serie de aplicaciones y «herramientas» utilizables en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y que, en una primera aproximación, podríamos tipificar de esta manera:

*a)* Aplicaciones comercializadas por la industria del software, en algunos casos producto de laboriosos y largos estudios previos, y generalmente de origen anglosajón (con la dificultad, sobre todo para los chicos, del idioma), para usar en:

- Estadística (EPISTAT; MICROSTAT; paquetes estadísticos como el SPSS y otros muchos...). (Ver el libro: *Paquetes estadísticos para la familia IBM PC y compatibles,* Patricia B. Seybold; Linda O'Keeffe y Jay Klage, Editorial McGraw-Hill, 1988.)
- Geometría (SURFACE DRAWING UTILITY; ...).
- Creación de modelos matemáticos (CMMS —Computers Models for Management Science—).
- Aplicaciones más generales (EUREKA, Math Utility...).
- Astronomía (simulaciones astronómicas como CIELO...).
- Ejercitación de cálculo (TOAM...).
- Trabajo con matrices (KLPS: Kinetics Linear Programing System...).
- Planificación y cálculo de situaciones (MULTILAN; LOTUS 1-2-3; VISICAL...).
- Etcétera.

*b)* Lenguajes de programación, unos con gran potencia de cálculo (BASIC, FORTRAN...); otros, como el muMATH-80 —muSIMP-80— (Simbolic Math Sistem) específicos para implementación de sistemas algebraicos; otros que constituyen un ambiente de trabajo o «micromundo», como LOGO, aplicable, sobre todo por su aspecto gráfico, en Geometría y Física (aunque con unas características de trabajo, por los alumnos, especiales...); otros de propósito general (PASCAL...); otros específicos para trabajar en lógica (PROLOG...); etc.

Algunos de estos lenguajes, aprendidos a usar por los alumnos, se convierten en buenas herramientas de trabajo heurístico con las que aprenden a resolver problemas aritméticos, algebraicos, estadísticos, geométricos..., y en consecuencia logran comprender, o aprender mejor, determinados conceptos matemáticos en cuanto que «tienen que enseñar» a la máquina algoritmos concretos para la resolución de/los problema/s planteado/s.

*c)* Juegos que, no habiendo sido diseñados desde un enfoque matemático exclusivo, se convierten en «ambientes motivacionales» para un trabajo específicamente matemático (GATO SUBMARINO; TIENDA DEL MICRO; CHAMPAGNE...).

*d)* Sistemas y lenguajes de autor con los que se pueden elaborar «lecciones» de Matemáticas, entre otras, por parte de los profesores que los deseen usar, aunque en general, por ahora, son muy limitados.

*e)* Tutoriales, aprovechables por ejemplo, para el aprendizaje de la programación en un determinado lenguaje (SEFTU, BASICANIMÉ, PASCALANIMÉ...); y por último

*f)* Programas concretos para el trabajo en clase con temas o conceptos matemáticos puntuales.

Estos programas concretos son elaborados, normalmente, por los propios profesores de la materia con una gran dosis de interés y a costa de mucho trabajo-tiempo. En general estos trabajos puntuales son poco conocidos debido, pienso, a la falta de soportes de comunicación especializados.

Como último apartado he señalado la existencia de «herramientas» (programas y aplicaciones informáticas) elaboradas por los propios profesores/as, para su uso en clase de Matemáticas, dentro de un ejemplar desasosiego por elevar cualitativamente el nivel de su actividad diaria.

La siguiente relación es una muy pequeña muestra de esa inquietud que comentaba y que transcribo de las Actas de Congresos, Jornadas y Conferencias, a los que he asistido y donde dichas herramientas han sido presentadas:

Diego Álvarez y otros: «Resolución de problemas con PROLOG», I.B. de Elviña. 15192 Elviña, La Coruña.

Gupo LOGO-MADRID: «Geometría y LOGO», Apdo. 43074, 28080 Madrid.

M.ª Carmen Batanero y otros: «Paquete didáctico de programas para el Laboratorio de Estadística», Dpto. de Estadística, Facultad de Matemáticas, U. de Granada, 18002 Granada.

Luis Villacorta: «EAO de los números triangulares y algunas de sus propiedades», I.B. de Vicálvaro, 28028 Madrid.

J. Arturo Replinguer: «Estudio de los polígonos regulares en el dibujo técnico de la F.P.», I.F.P. de Cieza, 30530 Murcia.

Grupo BAX: «GRAF 123: Representaciones gráficas de la recta, plano y espacio», Tarragona, 104, 5, 2. 08015 Barcelona.

GIE (Grupo de Informática Educativa de la SAEM-THALES): «Mosaicos regulares. Utilización de la Geometría en Bachillerato», Aptdo. 673, 18080 Granada.

GIE (Grupo de Informática Educativa de la SAEM-THALES): «El aprendizaje de las TABLAS DE MULTIPLICAR en el C.I. y C.M. de la EGB», *Ídem.*

I.B. López Neira: «Resolución de sistemas de ecuaciones y determinantes», Córdoba.

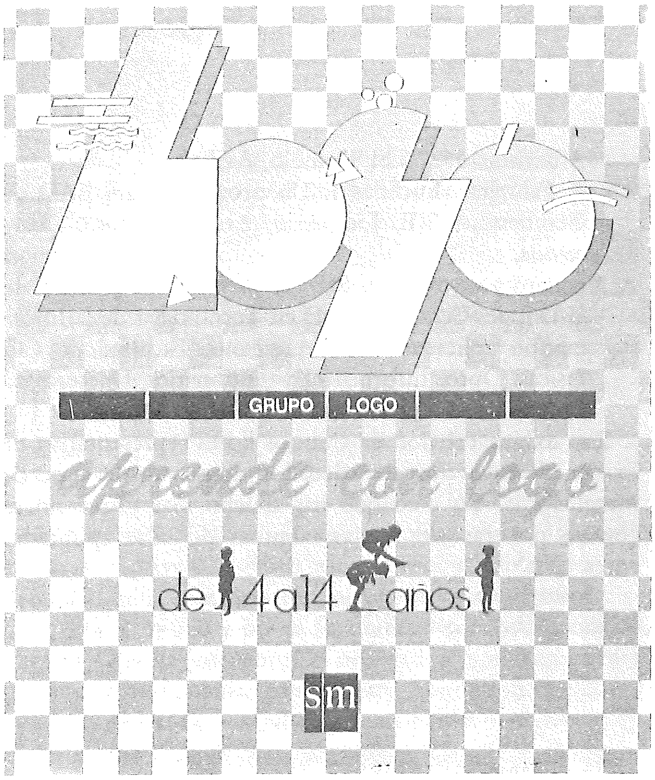
Colectivo de SCIENCES EXPERIMENTALS: «Programas aplicados a Matemáticas», C/. Asarau, 24, 12001 Castellón de la Plana.

Manuel Manor: «Iniciación en el análisis y composición de formas planas mediante ordenador», I.B. Claudio S. Albornoz, 05270 El Tiemblo, Ávila.

Albert Fábrega: «Euclides I: Un programa para EAO de Geometría», PIE, Jonqueras, 2, 3.º, 3.ª, 08003 Barcelona.

A. Vaquero y otros: «S.A. SIETE: Proyecto de creación de U.D.I. del Centro de I+D en Tecnologías de la Información aplicadas a la Educación», Facultad de CC. Físicas, Dpto. Informática y Automática, Universidad Complutense, C. Universitaria, 28040 Madrid.

Esta exigua relación de trabajos no es representativa de lo que se hace con el ordenador dentro de la clase de Matemáticas. Yo creo que hay mucho más y que no se conoce por razones varias, algunas de ellas apuntadas antes.




Se podría completar este apartado señalando que, también poco a poco, van apareciendo publicaciones que recogen el trabajo de profesores o colectivos de profesores inquietos e interesados por utilizar con provecho las herramientas informáticas en sus clases de Matemáticas, véanse, por ejemplo:

a) *Geometría de la tortuga: el ordenador como medio de exploración de las Matemáticas.*
Harold Abelson y Andrea di Sessa.
Editorial Anaya Multimedia, 1986.

b) *Matemáticas divertidas con Basic.*
Czes Kosniowski.
Editorial Anaya Multimedia, 1985.

c) *Aprende con Logo: de 4 a 14 años.*
Grupo LOGO-MADRID.
Editorial S.M., 1988.

d) *Manual de programación en Logo para la Enseñanza Básica.*
J. M. Arias y J. E. Belanger.
Editorial Anaya Multimedia, 1988.

e) *Guía didáctica del lenguaje Logo.*
Grupo LOGO-MADRID.
Edita Grupo LOGO-MADRID, Apdo. 43074, 28080 Madrid.

f) *Manual de Turbo-Pascal para las Enseñanzas Medias.*
V. Trigo y A. Camacho.
Editorial Anaya Multimedia, 1988.

g) *Maco: Matemáticas con ordenador.*
E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano.
Editorial Síntesis, 1988.

Con sólo pasarnos psor una librería especializada tendremos una colección —aunque todavía pequeña— de títulos y trabajos llenos de ideas, al menos, sobre este tema. No obstante sí quiero significar, para quien le interese, la existencia de algunas revistas especializadas en Informática y Educación, donde de vez en cuando se pueden encontrar artículos sobre trabajos y proyectos relativos al tema que nos ocupa:

1.—*Zeus: Educación y Nuevas Tecnologías,* Apdo. 43074, 28080 Madrid.

2.—*Logo y Educación.* Revista de la Asociación LOGO, Escola de Mestres de San Cugat, U. A. de Barcelona, Bellaterra (Barcelona).

3.—*Txalaparta.* Revista del Plan Vasco de Informática Educativa, Consejería de Educación del Gobierno Vasco.

4.—*Plan Alfa.* Revista del Proyecto para la introducción de las nuevas tecnologías en los centros de la FERE. C/. Conde de Peñalver, 45, 28006 Madrid.

5.—*Apuntes de Educación: Suplemento de Nuevas Tecnologías,* Ediciones Anaya, Apdo. 4, F. D. Salamanca.

Por otra parte la Secretaría General de Educación del MEC, dentro de la documentación sobre el PNTIC, así como el ITE de Alcalá de Henares, han publicado, varios volúmenes sobre el uso del ordenador en la enseñanza de determinadas materias del currículum, entre ellas las Matemáticas, y que están llenos de interesantes sugerencias y recomendaciones en este sentido.

Toda esta información está referida a lo que conozco sobre el tema en nuestro país.

Con respecto a otros países merece destacarse:

Como revista especializada en ordenadores y Matemáticas: *Computers and Mathematics with applications,* de periodicidad mensual y nacionalidad británica. (Más información en: *Guía práctica de Revistas,* Mundo-Prensa Libros, Castellón, 37, 28001 Madrid, Tfno. 91-431.32.22.)

Como proyectos de trabajo con ordenadores en Educación, destacamos los siguientes:

a) *The Birminghan Primary Proyect*

Se trata de un proyecto de trabajo en entorno LOGO: Problems solving and interactive Maths; Creative graphics and writing.

La dirección de contacto es:
The Birminghan Educational Computing Centre
The Bordesley Centre. Cam Hill.
Stratford Road. Birminghan B11-1AR. Ph.: 021-7726534.

b) *Information Technology in Education Research Programme* del ESRC (Economic and Social Research Council). U.K.


El ESRC (Consejo de Investigación Económico y Social) es uno de los varios consejos de investigación existentes en el Reino Unido y tiene responsabilidades de Investigación Básica en Educación, entre otras.

El profesor Robert Lewis, de la Universidad de Lancaster, dirige este Programa de Investigación de la Tecnología de la Información en la Educación.

Para más información consultar la publicación resultado del «Seminario sobre EAC», organizado por el Departamento de Informática y Automática de la Facultad de Ciencias Físicas de la U. Complutense de Madrid (Ciudad Universitaria, 28040 Madrid) y celebrado en esta ciudad durante los días 19 al 23 de diciembre último.

c) Los trabajos que actualmente se desarrollan en el «Ecuational Technology Center», en el Departamento de «Information and Computer Science» de la Universidad de California. Este centro está dirigido por el profesor Alfred Bork y sus actividades se centran en desarrollo del currículum con proyectos actuales sobre el uso de los computadores personales.

Dirección de contacto:
Dep. of Information and Computer Science.
Educational Technology Center.
University of California.
Irvine. California 92717. USA.

d) «Proyecto DAE (Didactica Assistita da Elaboratore)» del Dipartimento di Scienze Fisiche de la Universidad de Nápoles, cofundado por la profesora Elena Sassi.

Éste es un proyecto multidisciplinar en el que intervienen investigadores y profesores de Secundaria de Física, Matemáticas y Química.

Direcciónd e contacto:
Dip. di Scienza Fisiche.
Universitá di Napoli.
Mostra d'Oltremare. pad 20. 180125
Napoli, Italia.

e) El «CRDP (Centre Regional de Documentation Pedagogique)» de Nancy, dentro de la red de centros regionales del CNDP del Ministerio de Educación Nacional de Francia, tiene interesantes trabajos publicados —incluida una colección de software.

Dirección de contacto:
CRDP de Nancy.
C.O. 3320.
54014 Nancy. Cedex
France.

# ICMI Study núm. 4 (*)
# La popularización de las Matemáticas

A. G. Howson, J. P. Kahane y H. Pollak

A diferencia de las demás ciencias, las Matemáticas, o al menos ciertos aspectos de ellas, son enseñadas a todos los alumnos en edad escolar; es esto lo que hace que la enseñanza de las Matemáticas sea tan importante. Por otro lado hay pocas ciencias, si es que hay alguna, que susciten reacciones tan negativas, o que sean tan malentendidas, como las Matemáticas. La mayoría de las personas, por ejemplo, ni siquiera considera que las Matemáticas sean una ciencia viva.

Este estudio tratará de la imagen pública que tienen las Matemáticas, y los matemáticos. En él se pretenderá identificar las necesidades específicas, a fin de proponer caminos con los que las Matemáticas se podrían popularizar con mayor eficacia. Algunos de estos caminos no son exclusivos de las Matemáticas; también valen para la popularización de cualquier ciencia individual, o de las ciencias en general. No obstante, la popularización de las Matemáticas tiene características especiales: obstáculos, coacciones y dificultades por un lado e importantes posibilidades y oportunidades por otro. La situación actual y los logros que se han conseguido varían en cada país, y existe la necesidad de intercambiar opiniones a nivel internacional a fin de comparar experiencias, clarificar ciertas cuestiones, y promover más reflexiones y actuaciones en el futuro.

En septiembre se celebrará un importante congreso en Inglaterra (Leeds, del 17 al 22 de septiembre de 1989) que tendrá una vertiente nacional en la que se espera participen todos los interesados en el tema y una segunda vertiente internacional, organizada no obstante a nivel nacional, que consistirá en una importante exposición de películas, vídeos y conferencias. Cada una de las dos vertientes se beneficiará de la otra, y la planificación de las dos será cuidadosamente coordinada.

El presente documento constituye la primera aportación a la vertiente internacional del citado Congreso. Esperamos que, tal como ya ha ocurrido con anteriores documentos del ICMI, sirva para fomentar la aparición de contribuciones escritas en todo el mundo. Tales contribuciones, junto con el presente documento, formarán la base de los informes y coloquios en Leeds. Las Actas de la reunión serán publicadas posteriormente como el Estudio 5 [1] del ICMI.

(*) Este documento apareció publicado en el *Boletín* núm. 24 del ICMI (Comité Internacional para la Educación Matemática) y fue entregado a todos los participantes en el ICME-6 de Budapest (agosto, 1988). Con la presente traducción, realizada por Claudi Alsina representante español en el ICMI, se desea difundir al máximo su contenido e incitar discusiones y trabajos.

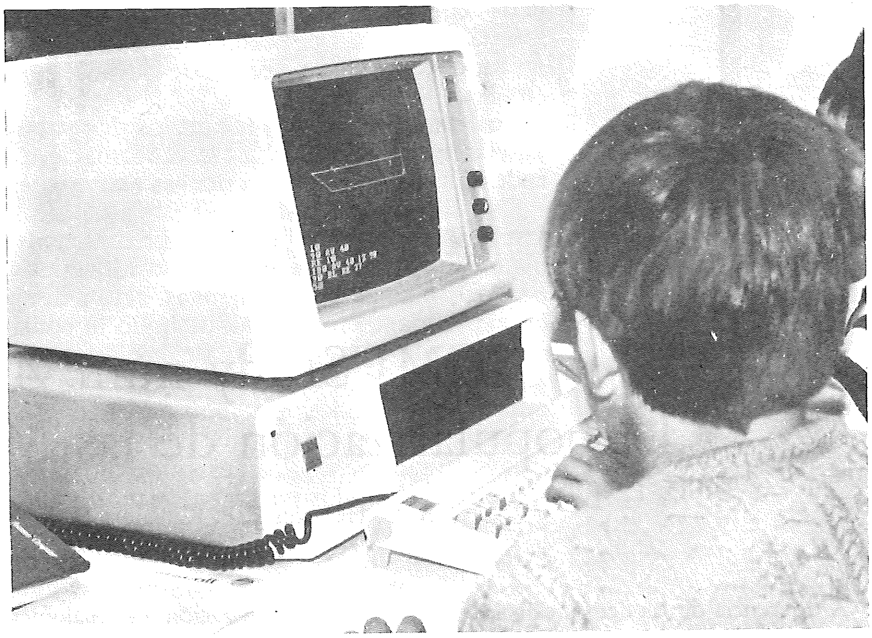
[1] Nota de la Redacción: El ICMI viene elaborando este tipo de estudios anualmente. El correspondiente a 1986 fue «Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los noventa» del que hay una versión en castellano publicada por la Editorial Mestral, C/. Barcelonina, 2, 9.º, Valencia. En esa misma editorial está publicada la aportación española a ese debate con el título *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas de los noventa; Simposio de Valencia.* Esperamos que este nuevo estudio también sea traducido.

## 1. Un marco general: necesidades y métodos de la popularización de la ciencia

Comencemos por unas cuantas observaciones generales.

Los avances científicos y la vida cotidiana de las personas están, aunque indirectamente, íntimamente relacionados. Las decisiones estratégicas de los estados en cuestiones económicas, militares y ambientales, están condicionadas por cambios tecnológicos, y, a su vez, dan lugar a nuevos retos tecnológicos. Así se establecen cadenas de relaciones que afectan a todos los empleos, al medio ambiente, a la salud pública, a las comunicaciones, a la vida casera y familiar... Un ciudadano bien informado, sea cual sea su ocupación, debe comprender al menos algunos de los criterios según los cuales dichas decisiones se toman, y tener ciertos conocimientos de los avances que dichas tecnologías suponen. Semejante conocimiento científico general es una necesidad democrática y económica en todas las sociedades modernas, y su consecución bien podría representar uno de los retos sociales decisivos del futuro.

Sin embargo, actualmente hay una gran divergencia entre los avances de la ciencia y el nivel de comprensión de la inmensa mayoría de los seres humanos. Aunque la ciencia es universal y debería ser un motivo de unificación entre las personas, vemos cómo la investigación y la enseñanza científicas pueden ser organizadas de tal manera que contribuyan a aumentar las desigualdades y las frustraciones. Aunque se emplean conceptos científicos en prácticamente todos los aparatos que son de uso diario, demasiadas personas son incapaces de captar las ideas científicas, no saben lo que es una manera científica de pensar, y, como resultado, tienden con demasiada frecuencia hacia modos de pensamiento irracionales. Aún los que cuentan con un nivel cultural



alto y están muy bien dotados, carecen demasiado a menudo del tiempo o de alicientes suficientes como para mantenerse al día en cuanto a los progresos actuales.

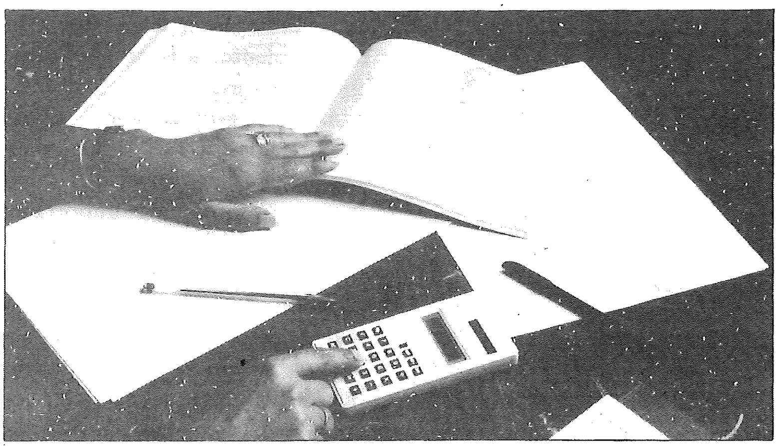
Ésta es la situación a la que tienen que responder los que están involucrados en la popularización de la ciencia. Por un lado, hay un aumento exponencial de conocimientos científicos circulando entre los pequeños grupos de especialistas que los producen. Por otro lado, hay una necesidad general y social de una mayor comprensión a nivel popular de los descubrimientos, ideas y logros alcanzados, así como un mayor conocimiento del pensamiento científico. Cualquier intento de cubrir estas necesidades forma parte de la popularización en su sentido más amplio. En un sentido más restringido, y de esto se trata en el presente estudio, la popularización de la ciencia abarca todos los esfuerzos que se hagan, o que se pudieran hacer, para cerrar la brecha entre los avances científicos y el conocimiento e información públicos, aparte de aquellos que se realicen dentro de los sistemas escolares y de enseñanza superior.

El proceso de popularización implica tres factores: los temas que han de considerarse, los sectores de público a los que se quiere interesar y los medios que se utilizarán en los procesos de comunicación. A fin de que las decisiones sean consecuentes será necesario especificar los objetivos y criterios sobre los que se basan.

Ningún tema debería ser excluido de entrada. Cuando la ciencia conoce un auténtico avance, ello debe darse a conocer fuera del pequeño círculo de especialistas que hayan participado en dicho avance. Cualquier esfuerzo que se haga para darlo a conocer, para explicar el significado que tiene a un público más amplio, forma parte del proceso de la popularización, la cual puede ocurrir en varios niveles. En un nivel más alto, la diseminación de temas avanzados (a través de ensayos expositivos, por ejemplo) es una etapa extrema, pero esencial, del proceso general. No obstante, existen muchos otros temas de interés, aparte de la investigación contemporánea: por ejemplo, la historia de un tema, sus aplicaciones (especialmente

# SOBRE MATEMATICAS, PRENSA Y EDUCACION

LUIS RICO ROMERO, ANTONIO FERNANDEZ CANO



Las matemáticas tienen una amplia gama de aplicaciones.

si éstas tienen un carácter innovador) un conocimiento de la clase de gente involucrada en aquella ciencia, y una comprensión de sus motivaciones.

De la misma manera, no se debería excluir a ningún sector del público. Los niños de todas las edades, los trabajadores, los ciudadanos, toda clase de gente profesional, hasta científicos de otras disciplinas. Todas las motivaciones se deberían tener en cuenta: el interés profesional, la curiosidad, la cultura general..., pero también los prejuicios y los temores.

Todos los medios de comunicación también se deben explotar: los libros, los periódicos, las revistas, las películas, las exposiciones, los programas de televisión y de radio, el software... Los programas educativos, es decir, de educación continuada, desempeñarán un rol decisivo que será complementario al de la popularización. Los juegos y los concursos también jugarán un papel especialmente en las Matemáticas. Sea cual sea el medio, la popularización caminará paralelamente a las traducciones, y su calidad dependerá de la habilidad y la experiencia del traductor. Algunos de éstos son profesionales: escritores científicos y periodistas. Bien podría ser que tengan que jugar el papel de catalizadores, involucrando a los científicos, a los profesores y a otros profesionales en el proceso general de la popularización.

## 2. Características particulares de la popularización de las Matemáticas

La popularización de las Matemáticas da lugar a ciertos problemas especiales. Primero, la relación que mucha gente tiene con las Matemáticas está condicionada por lo que les haya ocurrido en la escuela. Las consecuencias afectivas a menudo eran considerables: el entusiasmo, el interés, la desgana, el aborrecimiento, y con demasiada frecuencia, el miedo. Ello tiene que ver con el éxito que uno haya tenido en la escuela en lo que se refiere a las Matemáticas, y con la opinión generalizada de que las Matemáticas requieren una clase de mente muy especial, y que sólo atraen a los que tengan una disposición muy determinada.

Los matemáticos pueden contribuir a reforzar esta opinión, bien negarse a participar en la popularización de la asignatura, o bien por la forma como se comporten y expliquen las cosas a los que no estén introducidos en la materia.

«Fíjense en los cerebros matemáticos que única y exclusivamente se dediquen a estas ciencias. Cuán solitarios son; cuán poco preparados para convivir con los demás; cuán poco equipados para servir al mundo!»

Éste es el concepto que de los matemáticos tenía un tal Roger Ascham, pedagogo del siglo XVI y tutor de la reina Elisabeth I de Inglaterra, y queda reflejado en muchos escritos posteriores. Blaise Pascal, que estaba él mismo íntimamente relacionado con las Matemáticas solía contrastar el «esprit de géométrie» (una mente matemática) con el «esprit de finesse» (una mente exacta). La segunda era un atributo de los «honnêtes gens» (la nobleza y la alta burguesía), mientras la primera se tenía en poca consideración. Este contraste siempre ha constituido un tema predilecto en las disertaciones de las escuelas secundarias francesas, y ha contribuido a la opinión de que los matemáticos son una gente extraña, divorciada del mundo real.

Los matemáticos refuerzan esta opinión cuando hablan o escriben de sí mismos y del mundo matemático. Como lo dice H. E. Robbins, un célebre popularizador, en su artículo sobre *Las aventuras de un Matemático,* de Ulam: «si los matemáticos se nos presentan como unas máquinas de pensamiento en el proceso de fabricación, sin ninguna relación evidente con padres, cónyuges, o niños, e insensibles a las preocupaciones de nuestros tiempos, [...] si la inteligencia matemática parece estar estrechamente asociada con la privación emocional y con la alienación social, entonces... nos esperan muchos problemas».

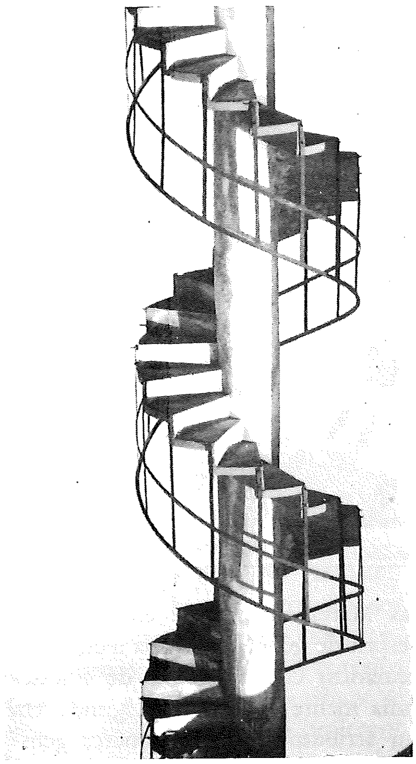


Foto: Pilar Moreno

Planteemos unas cuantas preguntas para estimular el coloquio. ¿Cuál es el concepto que la gente normalmente tiene de los matemáticos? ¿Hasta qué punto influye este concepto en el deseo de estudiar Matemáticas, o, en el caso de que surja la posibilidad, de apoyar a los matemáticos en su trabajo? ¿Hasta qué punto contribuyen a reforzar las opiniones inapropiadas las películas o los libros que tratan de las Matemáticas o de los matemáticos?

Dada la importancia que tiene la relación afectiva entre los individuos y las matemáticas, ¿podemos reconocer unánimemente que uno de los propósitos de la popularización debe ser el de crear una mentalidad favorable a las Matemáticas donde quiera y cuando quiera que sea?

Otra de las características de las Matemáticas que impide la popularización es la clase de temas sobre los cuales trabajan los matemáticos.

Hasta las partes más abstractas de la Física o de la Biología tienen algún vínculo directo con alguna materia práctica importante: el espacio, el medio-ambiente, o la salud. La topología en los espacios de 3 ó 4 dimensiones, los grupos finitos, o las propiedades de $\zeta(s)$ en la banda crítica no pueden ser vinculados tan fácilmente con problemas importantes de la vida real. (Y cualquier intento de establecer un vínculo podría resultar contraproducente.) Como ha señalado L. A. Steen (en *Las Matemáticas; nuestra cultura invisible*), podría ser que la frontera de investigación de las Matemáticas sea de otro orden de magnitudes todavía más difícil de comunicar que las fronteras de otras ciencias, y que en muchos casos, ni siquiera un científico profesional intentará comprender una nueva dirección en las Matemáticas.

Esto aparentemente contradice nuestra norma anterior según la cual ningún tema debería excluirse de la popularización. De aquí sale la pregunta: «En el estado actual de las Matemáticas, ¿hay temas que sólo se puedan explicar a otros matemáticos?».

Aún a nivel de un artículo expositivo para matemáticos, existe otra dificultad. La ciencia no es nunca la mera acumulación de unos resultados, pero esto vale aún más para las Matemáticas que para cualquier otra ciencia. Cuando un teorema es producido, el resultado más significativo pueden ser los lemas. Cuando un problema es resuelto, en seguida pierde interés —el nuevo foco de interés son los métodos aplicados para encontrar la solución—. Los teoremas y los problemas, en la mayoría de los casos, son el centro de la atención durante un período limitado de tiempo. Son los lemas y los métodos lo que facilita la materia necesaria para que se descubran nuevas teorías, nuevos conceptos y nuevas definiciones.

¿Cómo es posible presentar de una manera convincente la verdadera dinámica de las Matemáticas como una ciencia viva?

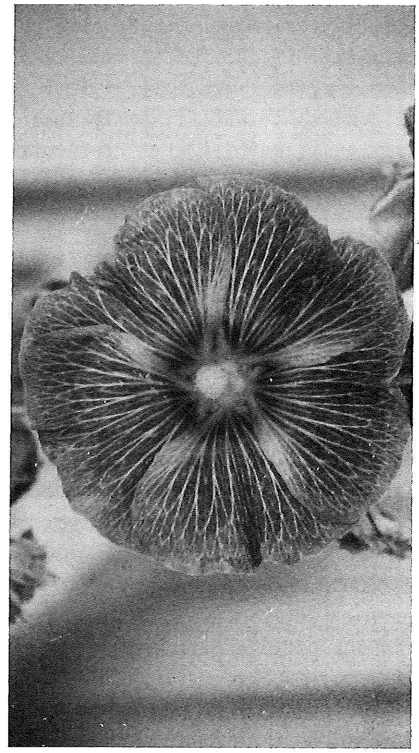


Foto: Pilar Moreno

La imagen pública de las Matemáticas y de los matemáticos y el carácter esotérico de los temas más avanzados hace que su popularización sea verdaderamente difícil. No obstante, hay otras características de las Matemáticas que quizá sirvan para hacer que sea más fácil nuestra tarea.

a) *El rol de los problemas*

Encontrar soluciones forma parte de las Matemáticas de las escuelas, así como forma parte también de la actividad de los matemáticos profesionales. No hay ninguna actividad de escuela en la cual se refleje la actividad del investigador con mayor exactitud. «Cómo resolverlo» es una introducción natural y poderosa a los resultados y a los métodos. La popularización, entonces, no tiene únicamente que ver con la transmisión de la información, sino que también abarca la involucración del público en las actividades matemáticas.

b) *Conexiones históricas y culturales*

No existe ciencia alguna que pueda enorgullecerse de tener tal historia ni de manifestar tantas conexiones culturales. Por ejemplo, el ICMI Study 1 (*The influences of computers and informatics on mathematics and its teaching*), demostró de qué forma estas conexiones culturales pueden fortalecerse mediante el uso de computadores, ya que bajo su influencia, muchas áreas de las Matemáticas han cobrado nueva vida después de un largo período de permanecer dormidas. El trazar la historia de una materia puede constituir un modo fácil y útil de acercarse a la popularización en todos los niveles. Por otra parte, la visión de cómo las mismas exigencias en distintas sociedades han conducido a parecidas, aunque superficialmente distintas, ideas matemáticas puede mostrar hasta qué punto las Matemáticas tienen base cultural.

c) *Nuevas aplicaciones*

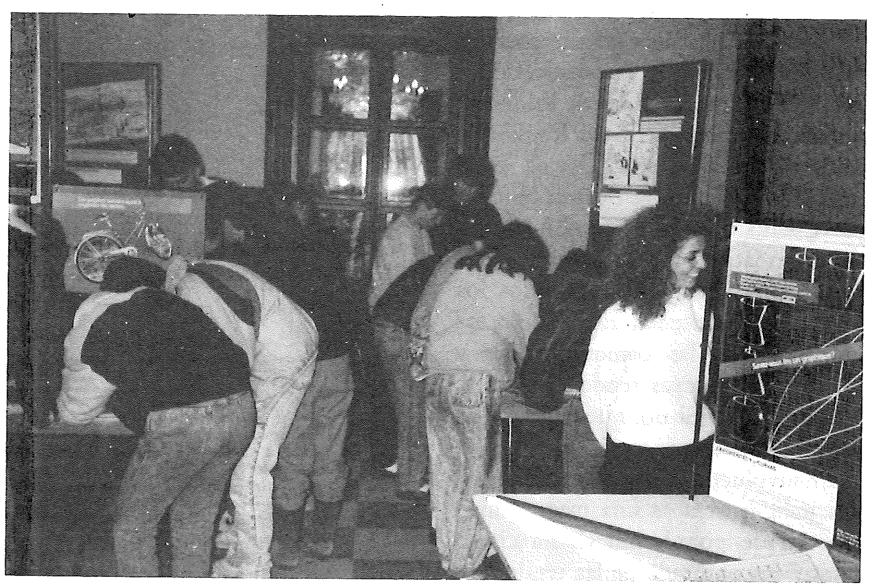
En los últimos veinte años las Matemáticas han sido reconocidas como herramienta útil, cuando no esencial, en muchas disciplinas y tecnologías.

El ICMI Study 3 (*Mathematics as a service subject*), considera las implicaciones que este reconocimiento tiene en la enseñanza superior. Sin embargo, las implicaciones son igualmente importantes para otros niveles de enseñanza, así como para su popularización. El interés del público en las aplicaciones de las Matemáticas —en su contribución al bienestar de la sociedad— bien podría aumentar el interés por las propias Matemáticas.

¿Qué más factores «positivos» hay para considerar?

## 3. Los métodos de popularización

Los métodos empleados dependerán del público al que vayan dirigidos los esfuerzos concretos. Deseamos preparar el terreno para que el público participe de las Matemáticas y de su uso con ilusión, en una gran variedad de circunstancias. Si se es joven, esto significa que uno anticipe las Matemáticas en la propia educación; si se es mayor, usándolas en la vida ordinaria, en el trabajo y en responsabilidades cívicas y en el papel que jugarán en la educación de los hijos o los nietos.



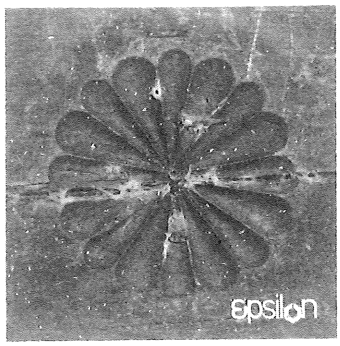
Las conferencias populares, la televisión, los museos, las exposiciones itinerantes, las películas y obras de teatro..., todo puede aprovecharse a fin de crear esta asociación mental favorable hacia las matemáticas. Confiamos en que un resultado concreto de este estudio será el reunir un conjunto de buenos ejemplos procedentes de distintas partes del mundo. Sugerimos que debería efectuarse un estudio cuidadoso de los montajes, películas o libros concretos acerca de las Matemáticas o de los matemáticos desde distintos puntos de vista; sus metas y objetivos, su calidad, el impacto positivo que han tenido («favourable mental association»), su impacto negativo («mark all Mathematical heads...») y, en general, las reacciones de la audiencia «marco».

A muchas personas se les presenta mediante sus profesionres, una importante motivación para renovar el contacto con algún área de las Matemáticas. La popularización puede ofrecer una «segunda oportunidad» para aquellos cuya anterior experiencia con las Matemáticas no fue un éxito. Muchos «libros populares» sobre Matemáticas pueden contribuir a este fin. La popularización puede satisfacer una necesidad concreta en relación con las nuevas tecnologías (robótica, gráficas mediante ordenador, diseño por ordenador...), métodos estadísticos en las ciencias sociales, agricultura, biología... Parte de esta popularización puede incluirse en la formación continua, en software para la autoenseñanza, o en informaciones científicas y técnicas generales contenidas en revistas profesionales. ¿Cómo organizar mejor este tipo de popularización? ¿Cuáles son las posibles trampas que han de evitarse? ¿Cómo averiguar las necesidades de los lectores y sus reacciones ante los libros, revistas, etc., que leen?

Los científicos constituyen un caso particular, lo mismo que el conjunto de matemáticos y profesores de Matemáticas profesionales en todos los niveles de la enseñanza. ¿Estamos satisfechos con las comunicaciones y libros sobre nuevas tendencias en las Matemáticas? ¿Si no, qué sugerencias podemos ofrecer?

El involucrar a otros en actividades matemáticas es una manera muy especial de popularizar, hasta cierto punto desconectada de las tendencias en las Matemáticas modernas, ya que todavía se puede sacar mucho provecho de los conceptos y problemas clásicos. El problema del lobo, la cabra y la col ha entretenido a numerosas personas durante más de mil años y sin duda continuará haciéndolo. Las columnas matemáticas en la prensa, puzzles matemáticos como el cubo de Rubik, y muchos juegos, por ejemplo *awele* o *kala* en África han provocado el interés y la curiosidad de millones de personas. ¿Cómo podemos aprovechar mejor estas oportunidades para la popularización? ¿Podemos analizar la relación entre «saber hacer» en los puzzles y juegos, y modos de pensamiento matemáticos? Si empleamos tales métodos de popularización, ¿cómo impedir que las Matemáticas sean asociadas con la solución de problemas insignificantes?

Últimamente se han desarrollado las competiciones matemáticas, las cuales han atraído la atención de mucho países. ¿Cuál es el impacto en la sociedad de competiciones tales como las muy selectivas Olimpiadas Matemáticas Internacionales y de concursos que están abiertos a un número mucho más amplio de niños, por ejemplo el Australian National Competition?




# Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra (*)

José María MONTESINOS AMILIBIA

Este artículo es una introducción al concepto de caleidoscopio a través de los grupos cristalográficos planos, con ejemplos tomados de la Alhambra. El estudio de los grupos cristalográficos dado aquí no es ciertamente el más sencillo, sino el más adaptado a la descripción de cubiertas ramificadas y otros conceptos familiares en el estudio de caleidoscopios. Por ello, para entenderlo, hay que tener más conocimientos de los que serían necesarios para comprender el enfoque clásico de los grupos cristalográficos. No es pues una divulgación de estos grupos, sino del concepto de caleidoscopio para matemáticos con un cierto manejo (al nivel de licenciado) de grupos y topología de variedades.

El diálogo, que forma la primera parte, resalta el hilo conductor seguido para el estudio de los caleidoscopios, pero de ningún modo quiere dar a entender que las afirmaciones que se hacen sean de fácil demostración.

La segunda parte del artículo —más técnica— contiene definiciones previas y esquemas de demostraciones que ayudarán a una mejor comprensión de la primera parte. También contiene la descripción de las fotografías presentadas; una nota bibliográfica; una nota histórica sobre la detección de los 17 grupos cristalográficos en la Alhambra; y una tabla que proporciona el paso entre la notación usada en este artículo y la notación clásica para dichos grupos.

Agradezco al Profesor Manuel Barros su invitación a dar esta conferencia; al Profesor Rafael Pérez Gómez su amabilidad al mostrarme *in situ* dos de los grupos más difíciles de encontrar en la Alhambra, K y D$\overline{333}$; a don Pablo del Val, que hizo una primera redacción de mis notas de clase; y al Profesor Angel Montesinos por sugerencias y correcciones que mejoraron la presentación de este artículo, así como por dar lugar al diálogo que forma la primera parte. El Profesor Antonio Fernández Puertas, director del Museo de Arte Hispano-Musulmán de Granada, me dió toda clase de facilidades, me asesoró sobre la datación de los ejemplos presentados en este artículo y me señaló varios ejemplos del grupo D333 en el Museo. A él y a la subdirectora del Museo, la Profesora Pura Marinetto, mis gracias más cordiales por compartir conmigo su extraordinario conocimiento del arte islámico. Agradezco también al Patronato de la Alhambra su permiso para tomar las fotos que aquí presentamos y que junto con las del Museo de Arte Hispano-Musulmán fueron admirablemente tomadas por D. Manuel Valdivieso.

Sirva este artículo de homenaje al ilustre geómetra Profesor Luis Esteban Carrasco, con quien me unen lazos de amistad y afecto.

## PRIMERA PARTE (**)

La siguiente conversación tiene lugar en el tren.

Angel.- Estoy de acuerdo con tu definición de grupo cristalográfico plano; sus elementos son isometrías del plano euclídeo, o sea, composición de traslaciones, rotaciones y simetrías (1); la órbita de cada punto es discreta, y el cociente del plano por el grupo es compacto (2).

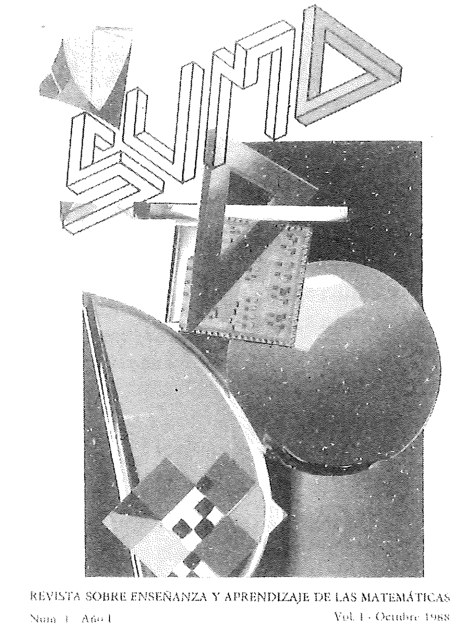
José.- Exacto. Ahora toma uno de esos grupos cristalográficos, y observa que el subgrupo de traslaciones está generado por dos traslaciones de vectores independientes. Es decir, es abeliano libre de rango dos (3).

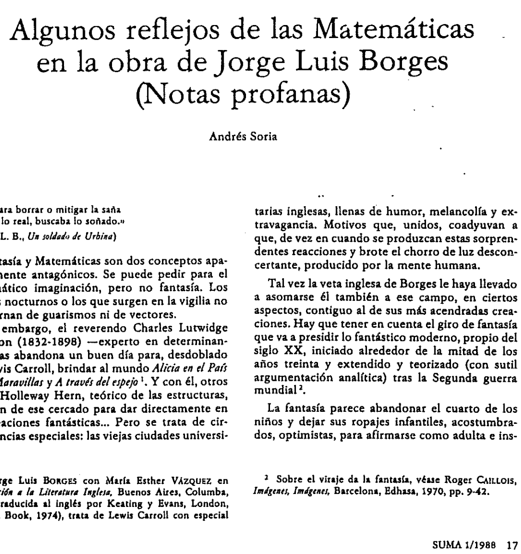
A.- A ver... ¿Qué haces? ¡Ya! Coges una traslación que no sea múltiplo de otra y el cociente del plano por ella es la superficie de un cilindro. Lo que queda actúa en el cilindro y debe dar cociente compacto. Luego...

J.- Eso es. Así que si primero haces el cociente del plano euclídeo...

(*) Este artículo reproduce la conferencia del mismo título que pronuncié en Granada en Octubre de 1986, con ocasión de la jubilación del Catedrático D. Luis Esteban Carrasco.

(**) Los números entre paréntesis remiten a los correspondientes apartados de la segunda parte.



Algunos reflejos de las Matemáticas en la obra de Jorge Luis Borges (Notas profanas)

Andrés Soria

«Para borrar o mitigar la saña
de lo real, buscaba lo soñado.»
(J. L. B., *Un soldado de Urbina*)

Fantasía y Matemáticas son dos conceptos aparentemente antagónicos. Se puede pedir para el matemático imaginación, pero no fantasía. Los sueños nocturnos o los que surgen en la vigilia no se adornan de guarismos ni de vectores.

Sin embargo, el reverendo Charles Lutwidge Dadgson (1832-1898) —experto en determinantes— las abandona un buen día para, desdoblado en Lewis Carroll, brindar al mundo *Alicia en el País de las Maravillas* y *A través del espejo* [1]. Y con él, otros como Holleway Hern, teórico de las estructuras, escapan de ese cercado para dar directamente en las creaciones fantásticas... Pero se trata de circunstancias especiales: las viejas ciudades universitarias inglesas, llenas de humor, melancolía y extravagancia. Motivos que, unidos, coadyuvan a que, de vez en cuando se produzcan estas sorprendentes reacciones y brote el chorro de luz desconcertante, producido por la mente humana.

Tal vez la veta inglesa de Borges le haya llevado a asomarse él también a ese campo, en ciertos aspectos, contiguo al de sus más acendradas creaciones. Hay que tener en cuenta el giro de fantasía que va a presidir lo fantástico moderno, propio del siglo XX, iniciado alrededor de la mitad de los años treinta y extendido y teorizado (con sutil argumentación analítica) tras la Segunda guerra mundial [2].

La fantasía parece abandonar el cuarto de los niños y dejar sus ropajes infantiles, acostumbrados, optimistas, para afirmarse como adulta e ins-

[1] Jorge Luis BORGES con María Esther VÁZQUEZ en *Introducción a la Literatura Inglesa*, Buenos Aires, Columba, 1965 (traducida al inglés por Keating y Evans, London, Robson Book, 1974), trata de Lewis Carroll con especial cariño.

[2] Sobre el viraje da la fantasía, véase Roger CAILLOIS, *Imágenes, Imágenes*, Barcelona, Edhasa, 1970, pp. 9-42.

SUMA 1/1988 17

Las conexiones con la historia y la cultura no siempre son aprovechadas como convendría. Quedan por explotar enormes filones. La historia de las Matemáticas comienza a ser tratada como parte de la historia humana general y referencias salen ahora en libros y colecciones. Se pone cada vez mayor énfasis en el estudio de las Matemáticas en distintas sociedades y culturas. ¿Cómo aprovechar este conocimiento? ¿Existen buenos ejemplos de popularización que pueden ser descritos y comentados? ¿De qué modo los aspectos multiculturales de las Matemáticas pueden usarse como estímulo para su estudio? Tal y como hemos escrito arriba, las nuevas tecnologías ofrecieron nuevos estímulos y nuevas herramientas. Las gráficas por ordenador han permitido la introducción de nuevas y avanzadas Matemáticas a gran número de personas: pensar en el interés levantado a causa de la gran belleza de las gráficas asociadas con los conjuntos Mandelbrot y Julia. Una nueva gama de actividades matemáticas también puede introducirse a través del ordenador. ¿Cómo aprovechar mejor el micro para la popularización de las Matemáticas? ¿Qué software existe para este propósito? ¿Con qué efectividad involucra al usuario en las Matemáticas antes que en el arte, pongamos por ejemplo?

No todas estas preguntas serán relevantes para aquellos que proceden de países en vías de desarrollo. Sin embargo, existe una rica cantidad de experiencia matemática en cada grupo étnico, a menudo calificada de *etnomatemáticas.* ¿Hasta qué punto se relaciona esta experiencia con la imagen pública de las Matemáticas y cómo puede aprovecharse para popularizar el tema?

Los métodos no significan nada sin los practicantes. Este estudio proporciona una oportunidad para reunir puntos de vista y experiencias personales, valorar el papel específico de unas cuantas personalidades «dotadas» (popularizantes adeptos o figuras populares del mundo de las Matemáticas), y estimular la participación de todos los matemáticos y profesores de Matemáticas en el proceso de la popularización. En particular, hay que matizar con más precisión la responsabilidad de los matemáticos profesionales en la popularización. ¿Qué papel personal debería jugar cada uno de ellos? ¿Cómo mejor incolucrar en el proceso a los profesores de Matemáticas?

¿Cómo estimular mejor a escritores y dramaturgos a que desarrollen temas matemáticos? ¿Cómo estimular la lectura y la labor editorial? ¿Cómo construir sobre los mejores ejemplos de popularización que podemos ver, leer, oír y en qué podemos participar hoy día?

## 4. Solicitud de envío de comunicaciones

Confiamos en que los lectores de este documento para discusión escriban comunicaciones sobre cuestiones o temas concretos. Serán bien recibidas tanto las de aquellos que no pueden participar en el seminario internacional cerrado como las de aquellos que desearían una invitación para participar (el número será limitado). Las comunicaciones han de entregarse *antes* del 30 de abril de 1989.

Enviar copias a

Profesor A. G. Howson
Faculty of Mathematical Studies,
University of Southampton,
Southampton S09 5NH
y
Professor J. P. Kahane
Mathématique,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay Cédex,
FRANCE

Recuerden que, en sí mismas, las descripciones de los intentos de popularización tendrán poco valor. Existe una necesidad de colocar el intento dentro de un contexto particular: describir la audiencia «marco», las elecciones efectuadas (en lo que concierne tanto a material como a medio), y ofrecer algún tipo de evaluación —por muy subjetiva que sea— qué es lo que funciona y cuáles son las trampas que hay que evitar.

Los que deseen presentar películas, vídeos..., para su posible inclusión o escoger libros que podrían incluirse en la exposición, deben escribir a G. T. Wain, School of Education, The University, Leeds LS2 9JT. Manden, por favor, un resumen completo, incluyendo los detalles técnicos (duración, temática, clase de público...).

Habrá ayuda económica para facilitar la asistencia de algunos participantes de países en vías de desarrollo. Otros participantes, sin embargo, tendrán, por regla general, que pagar sus propios gastos de desplazamiento y estancia. No habrá una tarifa de conferencia para el seminario internacional.

## ANTERIORES ESTUDIOS ICMI

*The influence of computers and informatics on mathematics and its teahcin,* Cambridge University Press, 1986.

*School Mathematics in the 1990s,* Cambridge University Press, 1986.

*Mathematics as a service subject,* Cambridge University Press, 1988.

*Mathematics education and cognition,* (en prensa).

Ver también:

*Selected papers on the teaching of mathematics as a service subject,* Springer-Verlag, 1988.

# Próximos encuentros de profesores

## $13^{\text{ésima}}$ Conferencia Anual del Grupo Internacional sobre Psicología de la Educación Matemática: P.M.E. 13

París, 9 al 13 de julio de 1989.

Sesiones plenarias a cargo de: J. Dhombres, T. Carpenter, C. Laborde y P. Boero.

Comunicaciones con duración de 40 minutos (20 de exposición y 20 de coloquio).

Grupos de trabajo en:

- Razón y proporción. Responsable: K. Hart *et al.*
- Geometría. Responsable: R. Herschkowits *et al.*
- El papel de las representaciones en la adquisición del conocimiento matemático. Responsable: F. Lowenthal *et al.*
- Pensamiento matemático avanzado. Responsable: D. Tall *et al.*
- Psicología social de la Educación Matemática. Responsable: A. Bishop *et al.*
- Metodología de investigación en micromatemáticas. Responsable: N. Zehavi *et al.*

Poster de 1,30 horas de tiempo: proyectos de investigación, desarrollo de software, innovaciones curriculares, etc., relativos a la psicología de la educación matemáatica.

Los interesados pueden dirigirse a:
Gérard VERGNAUD
G.R. didactique
Laboratoire de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant
46, rue Saint-Jacques
75005 París

Cuota de inscripción: 350 $ USA (incluye: matrícula, actas, comidas, alojamiento, actos sociales y cuota de socio de P.M.E. de 1989).

## IV JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. «THALES»

*MÁLAGA, 11 al 15 de septiembre de 1989*

Tema:
*LA MATEMÁTICA EN EL UMBRAL DEL SIGLO XXI*

Conferencias generales • Talleres

Comunicaciones • Exposición de material

**CUOTA DE INSCRIPCIÓN** (pesetas)

| | *antes del 1 agosto* | *posteriormente* |
|---|---|---|
| Socios SAEM «THALES» ......... | 3.500 | 5.000 |
| No socios .................................. | 7.000 | 10.000 |

Los interesados pueden solicitar más información enviando el siguiente cupón a:
SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA «THALES»
Apartado de Correos, 702
29080 MÁLAGA

IV JORNADAS ANDALUZAS
DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA «THALES»

APELLIDOS ____________ NOMBRE ____________

DIRECCIÓN ____________ TFNO. ____________

PROFESOR DE (indicar nivel) ____________

CENTRO DE TRABAJO ____________

DIRECCIÓN ____________

Desea ☐ recibir el 2.° anuncio.
☐ inscribirse en las Jornadas para lo que envía talón nominativo.

## $41^{\text{ésimo}}$ Encuentro Internacional de la CIEAEM (International Commission For The Study and Improvement of Mathematics Teaching)

Bruselas, 23 al 29 de julio de 1989.

*Tema:* Papel y concepción de los programas de matemáticas.

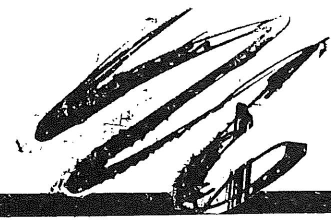
- Análisis de diversas situaciones: ¿cómo surge un programa?, ¿cómo lo desarrollan los profesores?, ¿es aceptado por los alumnos?
- La naturaleza del programa: ¿cómo está concebido?, ¿cuáles son sus implicaciones e influencia en los procesos de aprendizaje?...
- Enseñar sin programa impuesto; ¿puede tener el profesor su propio programa?, ¿qué libertad se le deja al profesor?...

Cuota de inscripción: 250 $ USA (incluye: matrícula, alojamiento, desayuno, almuerzo, actas, excursiones).

Los interesados pueden solicitar más información a
Jacqueline VANHAMME
rue Firmin Martin 2
B-1160-Bruxelles
Belgique

Lenguas oficiales: francés e inglés.

*Título:* V Seminario Logo.
*Fechas:* 4, 5 y 6 de mayo de 1989.
*Lugar:* Andorra.
*Organiza:* Projecte «Informàtica a l'Escola», Conselleria d'Educació i Cultura, Andorra-Govern.
*Temática:* El lenguaje Logo en los 90: Diseño con criterios psicológicos y educativos que respondan al nivel de reflexión y de investigación actual en relación con este lenguaje.
*Más información:* Josep Lluis Ortega. Telf. (9738 29.3.45).



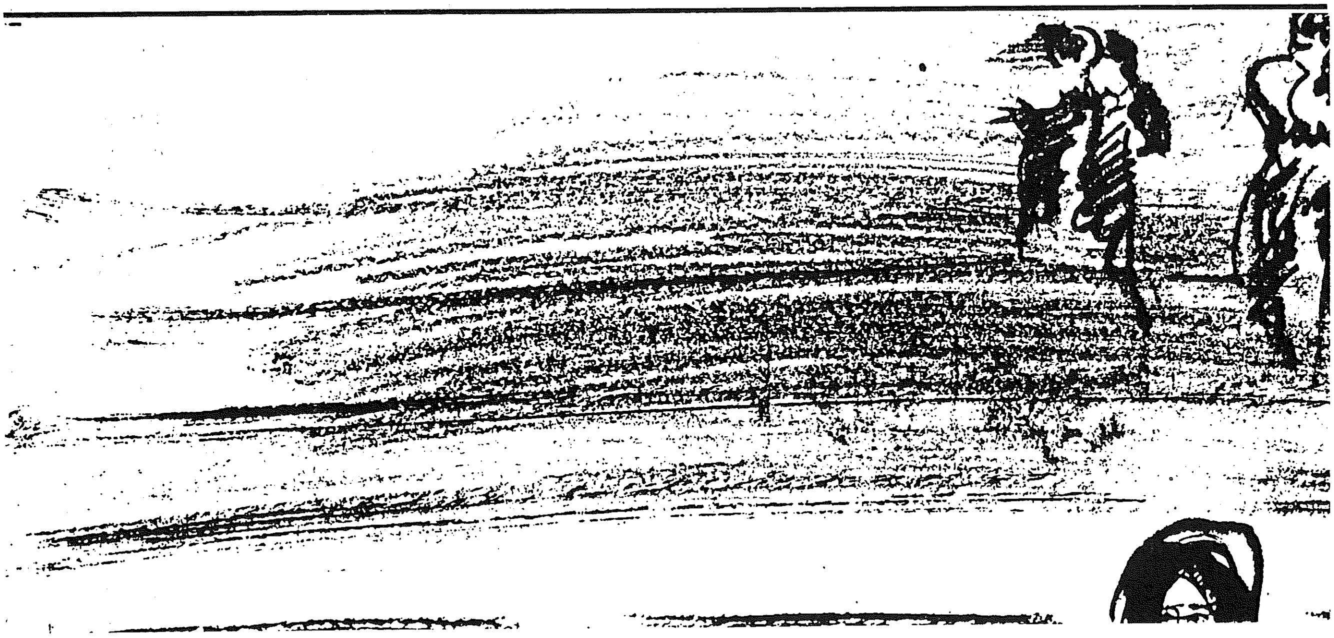
*Título:* Children in the Information Age.
*Fechas: 20-23 de mayo de 1989.*
*Lugar:* Sofía (Bulgaria).
*Temática:* Human developement and emergin technologies.
*Más información:* Mr. Branimir Handjiv. 29 Aksakow Street. Sofía 1040 Bulgaria. (Ph. 88.61.78 and 80.26.45).

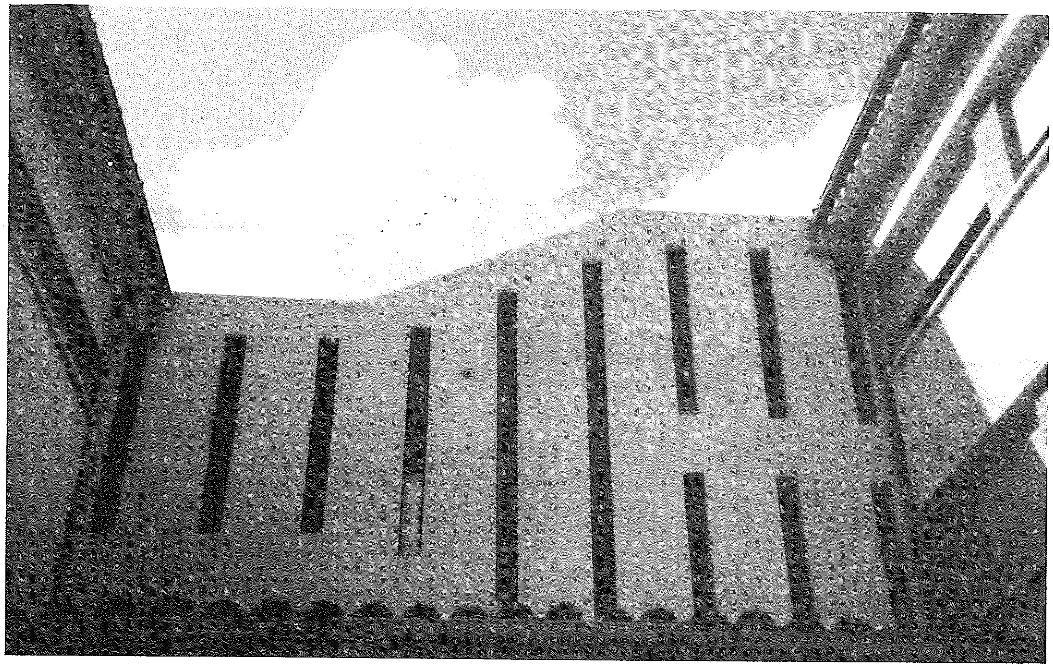
*Título:* Premier Congres Francophone sur la Robotique Pedagogique.
*Fechas:* 30 agosto-1 septiembre de 1989.
*Lugar:* Le Mans. Francia.
*Temática:* Situations d'aprentissage; types d'enviroments; resultats d'experimentations.
*Más información:* M. Martial Vivet. Université du Main 535. F72017 Le Mans. France.

*Título:* ICCAL (International Conference Computer Assited Learning).
*Fecha:* 9-11 de mayo de 1989.
*Lugar:* Dallas-Texas, USA.
*Temática:* Presentation on educational software; Panels in key areas of computer assisten learning; ...
*Más información:* Dr. Janet Harris. Center for Continuing Education. The University of Texas al Dallas. P.O. Box 830688 MS CN 1.1. Richardson. Texas 75083-0688. USA.

*Título:* Euro-Logo '89.
*Fechas:* 30 agosto-1 septiembre.
*Lugar:* Dto. Pedagógico, Universidad de Gante (Bélgica).
*Organiza:* Universidad de Gante.
*Temática:* Experiencias con Logo en clase. Logo y currículum. Proyectos de investigación. Formación del profesorado en el uso de Logo. Innovaciones técnicas.
*Más información:* Grupo Logo-Madrid. Apdo. 43074, 28080 Madrid.

*Título:* WCCE (World Conference on Computer in Education).
*Fechas:* Julio de 1990.
*Lugar: Sidney. Australia.*
*Temática:* All aspects of educational computing ranging across Primary, Secondary, Tertiary, industry as well as community education.
*Más información:* WCCE/90. Australian Computer Society. P.O. Box 319. Darlinghurst NSW 2010. Australia. (Ph. (16) 211 5855).





# I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (I-CIBEM)

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», en representación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, organiza este Congreso, que se celebrará en Sevilla, entre los días 24 y 30 de septiembre de 1990. La realización de este CIBEM fue acordada unánimemente por los representantes de los países que participaron en 1987 en la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática de Santo Domingo, donde se decidió también que se repitieran alternativamente cada cuatro años.

Además de nuestra Federación, colaboran para su puesta en marcha la Asociación de Profesores de Matemáticas de Portugal, que preside el profesor Paulo Abrantes, de la Universidad de Lisboa, y el Comité Internacional de Educación Matemática, encabezado por el profesor Eduardo Luna, de la Universidad de Santo Domingo.

El año pasado, en agosto, fue anunciado este I-CIBEM en Budapest, durante el ICME-VI (Congreso Internacional), en que tuvo lugar una reunión extraordinaria a la que asistieron unos 200 delegados de más de 20 países, en una atmósfera entusiasta y solidaria.

Las tareas de organización están en marcha, pudiendo asegurarse ya que los trabajos ordinarios del Congreso se desarrollarán en los locales centrales de la Universidad de Sevilla. Se espera que asistan entre mil y mil quinientos congresistas de Iberoamérica, Portugal y nuestro país. Los idiomas oficiales serán el portugués y el español, garantizando así un intercambio efectivo de experiencias entre los participantes.

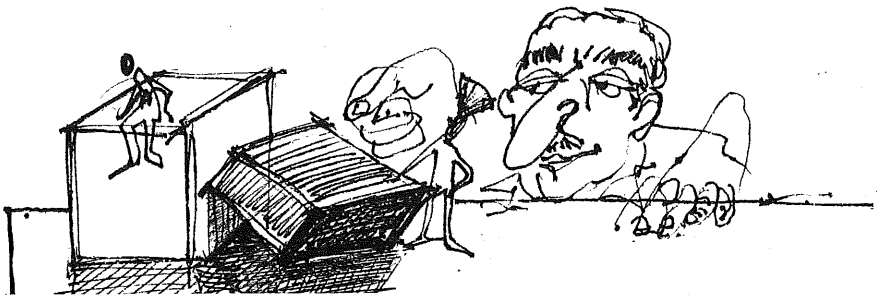
Además del Comité Local de Organización, están nombrados ya los integrantes del Comité Iberoamericano de Programas y del Comité Nacional, a los que pertenecen figuras prestigiosas del área de la educación matemática.

Independientemente de las comunicaciones sobre los temas más variados (didáctica, fundamentación, historia del movimiento matemático en el mundo iberoamericano, etc.), se han programado cinco conferencias plenarias, a cargo de los profesores Luis A. Santaló de la Universidad de Buenos Aires, que pronunciará la inaugural; Ubiratan d'Ambrosio, de la Universidad de São Paulo; Eduardo Luna, de la Universidad de Santo Domingo y João Mendes da Ponte, de la Universidad de Lisboa.

Los temas de los paneles (cuyos coordinadores han sido ya propuestos), que ocuparán unas treinta y dos horas del tiempo del Congreso, son los siguientes:

1.—Renovación y reforma.
2.—Informática y enseñanza.
3.—Formación del profesorado.
4.—Educación matemática en grupos culturalmente diferenciados.
5.—Investigación en educación matemática.
6.—Estadística y enseñanza.
7.—Geometría en las enseñanzas primaria y secundaria.
8.—Resolución de problemas.

Se cuenta con el apoyo explícito de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, de la Universidad de Sevilla y del Ayuntamiento de la ciudad en cuanto a la infraestructura de este I-CIBEM, y se espera la colaboración de otras instituciones como el Ministerio de Educación y Ciencia, la Unesco, el Instituto de Cooperación Iberoamericana y la Sociedad Estatal para la Expo-92.



Durante el Seminario sobre «Enseñanza asistida por computadora: líneas de investigación y desarrollo en un futuro inmediato», celebrado en Madrid, del 19 al 23 de diciembre último, se planteó, como una de las conclusiones, la necesidad de crear una ASOCIACIÓN que permitiese reunir a todas las personas e instituciones españolas interesadas por la informática educativa.

Con esta idea se constituyó una comisión para la puesta en marcha de la *Asociación para el Desarrollo de Software Educativo* (ADIE).

Los objetivos de esta asociación y las líneas de funcionamiento, podrían articularse, según esta comisión gestora y a espera de la celebración de la asamblea constituyente, del siguiente modo:

### A) Objetivos

1.—Fomentar el desarrollo de la informática educativa en España promoviendo acciones como: celebración de cursos, conferencias, seminarios, talleres sobre temas específicos, creación de grupos de trabajo estable...

2.—Crear una biblioteca de software educativo (biblioteca S.E.) para:

- Catalogar y evaluar el S.E. existente.
- Crear un fondo de S.E. mediante adquisición, cesión, producción, intercambio nacional e internacional...
- Asesorar sobre el uso pedagógico del S.E. existente.
- Otros...

3.—Estudiar, en profundidad, las posibles aportaciones de la informática a la enseñanza.

4.—Establecer líneas prioritarias de investigación y desarrollo de S.E.

5.—Promover la formación de personas especializadas en las nuevas tecnologías.

6.—Continuar la colaboración internacional y fomentar contactos con entidades y asociaciones extranjeras interesadas en este tema.

7.—Llevar adelante los objetivos que, en su día, se fije la asamblea general de socios.

8.—Otros...

### B) Funcionamiento

1.—Esta gestora está redactando un proyecto de estatutos lo suficientemente flexibles como para dar cabida a las ideas y sugerencias de todos los socios. Está previsto celebrar la primera asamblea, constituyente, en el plazo de tres meses, para, entre otras cosas, modificar y aprobar estos estatutos y elegir a la primera junta directiva.

2.—Esta asociación, salvo que en asamblea se decida otra cosa, se financiará fundamentalmente por las cuotas de los asociados —individuales o institucionales—, por las aportaciones periódicas o esporádicas —y subvenciones— de entidades públicas y privadas.

3.—La asociación editará una *Publicación* periódica que hará llegar a los socios, con un contenido que en su día debe diseñarse.

4.—Otros...

Por el momento han solicitado su inscripción, como socios, numerosas personas e instituciones relacionadas con el mundo educativo: profesorado, centros de enseñanza obligatoria, departamentos universitarios, empresas de formación, empresas de software, editoriales...

Para más información sobre este tema dirigirse a:

ADIE
(Carmen Fernández Chamizo)
Dpto. de Informática y Automática
Facultad de CC. Físicas
Universidad Complutense
28040 Madrid. Tfno. (91) 244.07.63

# Reseñas

CASTRO, E., RICO, L., CASTRO, E.: *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar,* Editorial Síntesis, Madrid, 1987.

La comunidad de educadores matemáticos de lengua castellana puede felicitarse de un acontecimiento editorial de tanta importancia como es la publicación en nuestro país de la colección «Matemáticas: Cultura y Aprendizaje», de Editorial Síntesis. A través de los 33 títulos proyectados se presentará una visión amplia del estado actual de la Didáctica de la Matemática, en un lenguaje asequible al profesor, por lo que creemos que esta colección figurará pronto, no sólo en las bibliotecas de los centros de enseñanza, sino en la de muchos profesores de Matemáticas.

El número 2 de la colección, *Números y operaciones,* es obra de tres profesores universitarios que sin duda dominan los aspectos conceptuales y didácticos del número natural y sus operaciones y sobre el que, además, aportan una extensa experiencia de enseñanza a nivel de formación de profesores.

El libro está organizado en seis secciones en cuyo desarrollo se cubren de un modo completo las distintas facetas que vienen a configurar la didáctica de un contenido matemático particular:

1.—La fenomenología, esto es, el análisis de los contextos en los que el número está presente, insistiendo también en su papel en la formación integral del individuo, en la competencia númerica para el trabajo y la influencia de esta formación para la enseñanza superior.

2.—Aspectos psicológicos relacionados con el aprendizaje. La formación y adquisición de los conceptos numéricos ha sido un punto de investigación, reflexión y estudio en las distintas escuelas y teorías del aprendizaje. Como proceso de pensamiento, con unas peculiaridades debidas a unos principios propios, la Aritmética ha dado origen a un interés especial dentro de la Psicología. La enseñanza debe tener en cuenta los resultados de estas investigaciones para una adecuada planificación de la misma y, en consecuencia, éstos deben ser conocidos por todo educador de los ciclos iniciales.

3.—Aspectos curriculares, esto es, los objetivos de aprendizaje, los cuestionarios y orientaciones pedagógicas. La perspectiva cronológica del currículo de Aritmética presentada en este libro y el estudio comparado con otras investigaciones le permite hacer una propuesta curricular racional que tiene en cuenta tanto el contenido como los procesos, el contexto y las actitudes.

4.—Las acciones en el aula y su planificación. En esta sección los autores describen las distintas actuaciones que deben realizarse en el medio escolar para integrar la gran riqueza de experiencias numéricas que posee el alumno, procedentes del entorno y vida social, con el fin de que se adquieran con el rigor adecuado los aspectos cardinales y ordinales del número y el sentido de las operaciones.

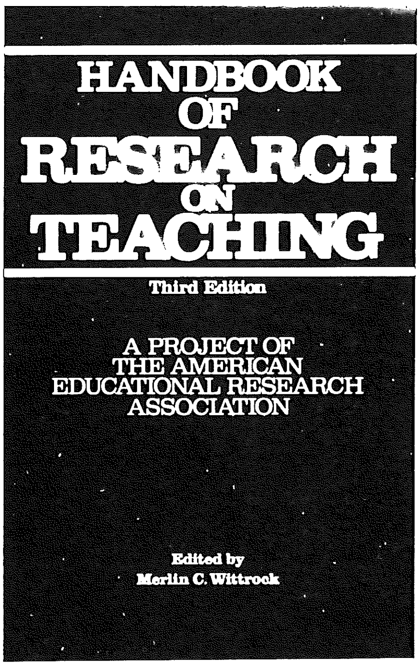
5.—Actividades, recursos y laboratorio. El proceso de construcción de las Matemáticas por el propio niño, esto es, la exploración, invención y descubrimiento de las relaciones y hechos numéricos, a través de las estrategias de ensayo y error es un objetivo básico de la educación matemática que debe iniciarse desde los primeros niveles. Pero este proceso requiere disponer de unos recursos específicos, de un archivo de actividades y materiales como los descritos por los autores y que deben formar parte del laboratorio de Matemáticas de cualquier centro de EGB.

6.—Aspectos conceptuales relativos al número natural. La enseñanza de unos contenidos matemáticos requiere que el profesor posea una comprensión profunda de los mismos, tanto desde el punto de vista de la formalización matemática como del histórico y epistemológico. Precisamente la finalidad de esta última sección del libro que comentamos es proporcionar al lector una información asequible sobre estas cuestiones.

Cada una de las secciones viene acompañada, además, de una cuidada selección de ejercicios, dirigidos al profesor, cuya realización le ayudará a profundizar en los aspectos conceptuales y didácticos de la Aritmética. El libro finaliza con una bibliografía actualizada sobre los aspectos tratados.

Juan DÍAZ GODINO

ROMBERG, T. A. y CARPENTER, T. P. (1986): *Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry,* Handbook of Research on Teachin, 3.ª edición. Editor: M. C. Wittrock, Macmillan Publishing Company, Nueva York, pp. 850-873.




Uno de los proyectos de la AERA (American Educational Research Association) es acometer la publicación, en cada década, de un manual de investigación sobre enseñanza. Así, en 1963, se publicó la primera edición o primer manual siendo N. L. Gage su editor, y, en 1973, la segunda edición dirigida/editada por R. M. Travers. Ambas ediciones fueron publicadas por Rand McNally, de Chicago.

Aquí presentamos la tercera edición, editada por Merlin C. Wittrock y publicada, en 1986, por Macmillan Publishing Company, de Nueva York, y Collier Macmillan Publishers, de Londres.

Esta edición tiene una singular importancia para investigadores y docentes centrados en la Educación Matemática ya que su capítulo 29 (págs. 850-873) está dedicado a esta tarea. Con el título *Research on Teaching and Learning: Two Disciplines of Scientific Inquiry* (Investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: dos disciplinas de indagación científica), sus autores, Thomas A. Romberg y Thomas P. Carpenter, ambos profesores de la Universidad de Wisconsin-Madison, nos ofrecen una panorámica completa de las realizaciones y el estado actual de la Investigación en Educación Matemática.

Partiendo de la dicotomía enseñanza-aprendizaje (las teorías del aprendizaje son descriptivas en tanto que las teorías de la instrucción son necesariamente prescriptivas), los autores van repasando las tendencias investigacionales de cada una y sus mutuas implicaciones. Así pues, la investigación sobre aprendizaje expone teorías cognitivas y evolutivistas, técnicas de análisis de errores, modos de organización del conocimiento, papel de la metacognición en la resolución de problemas y relación de éstos con la instrucción, manifestando en cada apartado las aportaciones más significativas.

La investigación sobre enseñanza se expone en dos niveles: estudios científicos (los realizados con metodología cuantitativa) y estudios basados en el campo (ejecutados con metodologías cualitativas). Los primeros están centrados en el estudio de variables críticas para la enseñanza de las Matemáticas: conteo de frecuencias de conductas, rendimiento y actitud, tiempo-en-la-tarea, desarrollo de lecciones, instrucción en pequeño grupo, planificación y toma de decisiones por los maestros y estrategias docentes. Los estudios basados en el campo, auténtica novedad en Investigación sobre Educación Matemática, tradicionalmente muy centrada en metodologías orientadas a la investigación del impacto/producto, aportan dimensiones novedosas sobre el descubrimiento de regularidades, básicamente mediante observación participante, relativas a control de aulas, propiedad y significatividad del conocimiento y cuestiones sociales anexas a la enseñanza.

El capítulo termina sugiriendo siete áreas donde se deberían concentrar los esfuerzos investigadores: análisis de procesos cognitivos docentes y discentes, tratamiento de los contenidos, modelos vinculadores de enseñanza con aprendizaje, papel de los recursos tecnológicos (calculadoras y ordenadores), nuevos instrumentos de evaluación/valoración y elaboración de programas de investigación temporalmente amplios, multidisciplinares e imaginativos.

Por último, los autores nos ofrecen una extensa y rica bibliografía, muy a considerar en investigaciones en profundidad.

Es estimulante comprobar el reconocimiento de la educación matemática como ámbito específico de la Investigación Educativa: un campo fértil y plural, pero difícil de laborar, que habrá de dar, en el futuro, sus mejores frutos con el trabajo disciplinado de todos los dispuestos a coadyuvar.

Antonio FERNÁNDEZ CANO,
*Universidad de Granada*
*Dpto. Pedagogía*
*Área: Metodología de la Investigación*

## Omnipotentes impares consecutivos

Estimado lector:

A caballo entre la mística de los números y la aritmética escribo esta nota que bien podría titularse: «De cómo expresar cualquier potencia, con base y exponente naturales, mediante la suma de impares consecutivos».

Es casi seguro que conoces la siguiente expresión

$$n^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} 2\alpha - 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

En el año 100 d. de C., Nicomaco de Gerasa, neopitagórico y místico de los números, en su *Introductio arithmetica,* cap. 20, propone lo siguiente

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

— — — — — — — — — — — — — —

De la mano de Nicomaco, no me fue difícil encontrar una expresión general para $n^m$ siendo $m, n \in \mathbb{N}$.

Tenemos que distinguir dos casos según la paridad de $m$.

A) $m$ es par, entonces

$$n^m = \sum_{\alpha=1}^{n^{m/2}} 2\alpha - 1$$

B) $m$ es impar, entonces

$$n^m = \sum_{\alpha = \frac{n^{\frac{m-1}{2}}(n-1)}{2} + 1}^{\frac{n^{\frac{m-1}{2}}(n+1)}{2}} 2\alpha - 1$$

Como puedes ver, ambas expresiones representan sumas de impares consecutivos. Demos pues, merecida gloria a los números impares por tan grande y aritmética epopeya.

José Olmo Romero

---

Estimado colega:

Tengo conocimiento de que en el número 1 de la revista SUMA de la que eres Director (en funciones), editada por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, se incluye a la Sociedad Castellana «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas entre las que componen la citada Federación (página 2). Puesto que la Sociedad «Puig Adam» no se ha pronunciado ni en un sentido ni en otro sobre el particular, te ruego una rectificación en el próximo número de dicha revista, y al mismo tiempo te agradeceré una aclaración escrita del mencionado error.

Un saludo,
*Francisco Lorenzo Miranda,*
Presidente.

### Nota de la Redacción

Durante las reuniones mantenidas para la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, siempre estuvo presente, con voz y voto, el entonces tesorero de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas «Puig Adam». Por su proximidad a determinados organismos oficiales, sitos en Madrid, se encargó de los trámites para su legalización y por su prestigio y edad se le eligió presidente en funciones. A la vista de estos hechos quienes hacemos esta revista no dudamos, ni un solo instante, que la Sociedad «Puig Adam» era miembro fundador de la Federación, y en el núm. 1 de SUMA así lo hicimos constar, en la página de créditos.

Hoy nos vemos en la obligación de rectificar, como nos pide en su carta, su presidente, D. Francisco Lorenzo Miranda.

Como consecuencia, y en tanto en cuanto no se produzca un pronunciamiento favorable a su inclusión en la Federación, los socios de la SCPM «Puig Adam» que deseen recibir la Revista SUMA deberán suscribirse a ella. Quede, por nuestra parte, aclarado el asunto.

REVISTA SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

SUMA

Nombre y Apellidos:

Calle:

Población: C.P.:

Provincia/País: Tfno.: ( )

Profesión: D.N.I./C.I.F.

Centro de trabajo: Nivel:

Firmado: Fecha:

Firma:

Deseo suscribirme por: ☐ un año (3 números) ☐ números a partir del número ______

Cuyo importe haré efectivo mediante:
☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal N.º________ Fecha______
☐ Contra reembolso
☐ Transferencia a c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada

Estado español: Particulares: 2.500 Pts.
Centros: 3.000 Pts.
Europa: 40 $ ídem.
Resto del mundo: 55 $ ídem.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista **«SUMA»** correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja:

Agencia:

Calle:

Población: C. Postal:

Provincia:

N.º Cuenta/Libreta:

Titular:

Firmado: Fecha:

Firma:

Agradeceríamos el envío de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada para enviarle información sobre la presente publicación

Nombre y Apellidos/Centro:

Dirección: C.P.:

Provincia: País:

# Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ningua Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).

La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

# Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

# Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de altéración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

## 1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

*a)* redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

*b)* plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

*c)* atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

*d)* estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

## 2. Indicaciones específicas

### 2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

### 2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa,* etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

### 2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

*Autor/a/es:* Nombre (inicial/es) y apellido(s).

*Título:* (el que corresponda).

*Revista:* Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

*Número:* (el que corresponda, subrayado).

*Páginas:* (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

*Año:* (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

### 2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

### 2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

### 2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

### 2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA