

# Rectángulos y cajas

Claudi Alsina

La riqueza de polígonos regulares en el plano contrasta con la escasez de poliedros regulares en el espacio. Situaciones parecidas de contraste plano-espacio pueden plantearse al considerar, simplemente, rectángulos y cajas. Observemos la figura 1: trazando una línea perpendicular en el vértice superior a la diagonal del rectángulo grande (lados  $a, b$ ) logramos dibujar un rectángulo vertical que teniendo un lado común con nuestro rectángulo inicial es homotético a éste (lados  $b, a^2/b$ ).

Escojamos una caja (prisma rectangular recto en el caso de personas especialmente sensibles). ¿Es posible construir otra caja como en la figura 2 que teniendo una cara en común con la primera sea homotética a ésta? Intentemos analizar este caso. Sean  $a, b, c$  los lados de la caja grande y  $a, b, d$  los de la caja homotética con cara común. Suponiendo una homotecia de «verdad» (con razón no unitaria) resultará que necesariamente o bien  $b/a = c/b = a/b$  o bien  $c/a = a/b = b/d$ . En el primer caso deberá ser  $b = \sqrt{ac}$  y  $d = a^2/b$  y en el segundo resultará  $a = \sqrt{cb}$  y  $d = b^2/a$ . Es decir, la situación será posible sólo para las

*cajas-media-geométrica* donde un lado es la raíz cuadrada del producto de los otros dos lados. Hagamos un modelo en cartulina. Para construir una caja de lados  $x, \sqrt{xy}$ , usaremos el truco del dibujo 1. Para hacer una caja homotética de lados  $\sqrt{xy}, y$  y  $y^2/\sqrt{xy}$  repetiremos la técnica del dibujo 1 (véase figura 3): cada cara de la cajita es recíproca de otra.

La experiencia puede formularse en términos de pasteles ortoédricos divisibles en dos trozos semejantes, pues la geometría euclídea comestible parece ofrecer siempre un mayor interés que la simplemente contemplativa. Otros análisis sobre los cuales meditar pueden ser los siguientes:

- ¿Cuándo dos cajas con sólo una arista en común pueden ser homotéticas?
  - ¿Cuándo la caja de lados  $1/a, 1/b, 1/c$  puede ser homotética a la caja de lados  $a, b$  y  $c$ ?
  - ¿Cómo comprobar experimentalmente que dos cajas (con caras-tapa) son proporcionales?
- Feliz viaje al espacio.

