Aproximación a los números enteros a partir de una escalera

GRUPO ALBUQUERIA DE MATEMÁTICAS
José González Alba, Manuel Jiménez Girón,
Francisco José Briales González

Introducción

En el presente artículo exponemos una experiencia llevada a cabo con alumnos de séptimo nivel de EGB, en el Colegio Huertas Viejas de Coín (Málaga), en el tema «Números enteros». El punto de partida del tema es la utilización de una escalera «de verdad» para iniciar a los alumnos en este concepto.

Empezaremos por fundamentar la experiencia desde los puntos de vista metodológico y didáctico, continuaremos con el desarrollo de ésta, añadiendo, por último, algunas actividades para continuar.

Más que una investigación se trata, por tanto, de la presentación de una experiencia desarrollada con los alumnos, que queremos ofrecer por el interés que ha despertado.

Fundamentación

Queremos empezar por justificar la necesidad y pertinencia de enseñar los números enteros en la EGB. Su mayor justificación es la presencia en la vida cotidiana de este concepto:

- Las temperaturas con el termómetro dividido en dos partes: bajo cero y sobre cero.
- Las clasificaciones de fútbol, con una puntuación de positivos y negativos.
- Las cuentas bancarias, que pueden tener saldo favorable o desfavorable.
- La altura sobre o bajo el nivel del mar.
- La medida en años de nuestra era: antes y después de Cristo, etc.

Los números enteros, que nos sirven para interpretar y comprender todas estas situaciones cotidianas, y además son necesarios para abordar con éxito otras parcelas de las Matemáticas, donde son una herramienta básica (ecuaciones, polinomios, operaciones...), deben estar, por tanto, incluidos dentro del currículo de la EGB, ya que:

a) En la EGB, como formación básica de un ciudadano, los enteros han de estar presentes, ya que así se garantiza el acceso de toda la población al empleo de este concepto, que si dejáramos para etapas posteriores, quedaría reducido a una parte de la población en lo que coincidimos con la propuesta del Informe Cockcroft [1].

[1] COCKCROFT, *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Edita: MEC, Madrid, 1985.

b) Dentro de ésta, la ubicación correcta ha de ser séptimo u octavo, ya que es en estos niveles en los que el niño se encuentra en el estadio del pensamiento concreto avanzado o inicios del formal [2].

La opción metodológica

Son muchas las formas consagradas de presentar los números enteros en una clase.

a) Como una relación de equivalencia, realizada en un conjunto de pares ordenados, donde cada clase de equivalencia representa un número entero.

b) A partir de ejemplos sucesivos de su utilización.

Frente a estas maneras de presentar el tema, hemos buscado una forma alternativa, motivada, fundamentalmente, por la insatisfacción con las presentaciones hacituales de los libros de texto.

Los rasgos característicos de nuestra propuesta, que pensamos justifican teóricamente la experiencia son:

a) Se trata de una experiencia basada en situaciones y materiales reales y significativos, e incluso posible de trabajar de manera vivenciada, utilizando el propio cuerpo, con la significatividad que adquiere una actividad cuando está apoyada en un planteamiento de este tipo.

Es también un ejemplo de cómo se puede obviar un material sofisticado o estandar en enseñanza de las Matemáticas. La ausencia de material no puede ser considerado como inconveniente insalvable. Asimismo, la importancia de materiales o situaciones como la escalera, su potencia didáctica, supera la de cualquier material comercial.

No sólo las actividades en la escalera, sino las situaciones que se proponen para completar el tema señalan la conexión del concepto «enteros» con la vida real. Esto no es sólo importante por la significatividad del material, sino porque convencen al alumno de que las Matemáticas no están para fastidiar, sino que nos dan herramientas para comprender nuestra realidad.

La presentación de diversas situaciones cotidianas donde están presentes los números enteros tiene un valor más: Hace que la abstracción no peligre. Un concepto matemático que se trabaja en cinco situaciones distintas, necesariamente sugiere que las Matemáticas son una herramienta que no está ligada a ninguna situación, para poder servir a muchas situaciones.

> «... hemos de introducir los enteros como notación de acciones y resultados que los llevan implícitos, y abstraer el concepto de la estructura común a diversas situaciones» [3].

Por otro lado, hasta que los números enteros y sus operaciones no tengan los fuertes lazos con la realidad de los naturales, no sean tan cotidianamente familiares como éstos a los alumnos, no podremos valorar que los enteros «se han conquistado». Una cita recoge las consecuencias metodológicas de este planteamiento, que subrayan nuestros presupuestos anteriores:

> «Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto *status* familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran» [4].

La conclusión final es que renunciamos a una didáctica que parte de la definición de entero o de su construcción formal, buscando como alternativa un acercamiento lo más significativo posible para el alumno. Hacemos opción por un tratamiento afectivo-psicológico, frente a otro de tipo disciplinar.

b) La experiencia de trabajo en la escalera supone un «organizador previo» tal y como lo define Ausubel [5]. Es una aproximación cualitativa a los temas, que persigue fundamentalmente la comprensión de los conceptos más amplios e importantes del tema, dando escasa entrada a lo cuantitativo. Como dice Bell:

> «... lo que importa en la introducción de los números enteros es el armazón que ayude a desarrollar los procedimientos correctos días, semanas y años más tarde, de que se haya hecho la primera introducción, cuando el alumno afronte cálculos con números enteros y haya olvidado los detalles de aquel primer contacto. Lo importante, es, pues, que las conceptualizaciones correctas estén ligadas a una dilatada situación familiar en la que las operaciones tengan una una interpretación bien comprendida y en la que las reglas que hayan de memorizarse sean pocas y sólidas» [6].

Desde el punto de vista psicológico, la «escalera» ofrece un «esquema cognitivo»: presenta los conceptos más amplios y que incluyen a los demás. Tiene el valor de un mapa donde situar los conceptos más pequeños, viendo la relación entre ellos y su vinculación a los más amplios. Ausubel defiende que este tipo de planteamiento:

- Mejora el recuerdo. La memoria es más duradera.
- Mejora la comprensión frente al automatismo.
- Da anclaje para interconectar los distintos conceptos entre sí.

[2] SHAYER y ADEY, *La ciencia de enseñar ciencias,* Editorial Narcea, Madrid, 1984.

[3] COLECTIVO PERIÓDICA PURA, *Didtáctica de los números enteros,* Editorial Nuestra Cultura, Madrid, 1982, pág. 14.

[4] BELL, A., «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros», *Revista Enseñanza de las Ciencias,* volumen 4, número 3, octubre, 1986, pág. 199. Editada por el ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y el Servicio de Formación Permanente de la Universidad de Valencia.

[5] AUSUBEL, DAVID, P., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo,* Editorial Trillas, México, 1976.

[6] BELL, A., *op. cit.,* pág. 199.

LEMA.- "Rectángulos sobre rectángulos"

NOMBRE.- M. Angel González Castillo

C.P. "Sierra Nevada"

8º Nivel

Curso: 1988-89

Nuestra experiencia subraya y confirma que trabajando con esta idea, la memoria se mantiene más tiempo, y la comprensión es mayor: La escalera ha supuesto una estrategia de recuerdo, que los alumnos han usado, cuando meses después (lincluyendo el paso de un verano) han tenido que utilizar los enteros, autorrecuperando lo que habían olvidado. Esta experiencia da información que hay que recordar, pero también una estrategia para mantener o recuperar ese recuerdo.

c) Un planteamiento metodológico basado en una secuencia que parte del movimiento, continúa con situaciones para terminar en la abstracción, respeta las diferencias de nivel en una clase en el doble sentido de distintos grados de madurez, o diferentes puntos de partida en el dominio de los contenidos o conocimientos previos.

Desde el alumno de educación especial integrado en un aula, hasta el alumno más brillante pueden trabajar con este modelo con actividades llenas de sentido. La única diferencia estará en que se desengacharán de la dinámica general de la clase en distintos momentos: Los de menor madurez posiblemente en cuanto terminemos el trabajo de la escalera; los más brillantes llegarán hasta el final.

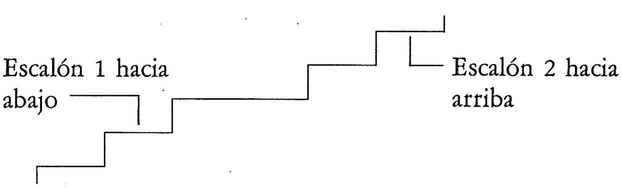
Con esta manera de trabajar, bajo la denominación «números enteros», ofrecemos actividades de distinto nivel, sin necesidad de separar en grupos. La integración se lleva hasta el punto de trabajar el mismo tema que los compañeros simultáneamente con ellos, en lugar de separarlos con actividades diferenciadas.

La integración, adquiere por tanto, un sentido más amplio, no limitado exclusivamente al respeto a las deficiencias en un aula, sino respeto a las diferencias de madurez en general.

Descripción de la experiencia

La experiencia se basa en considerar el rellano de la escalera como punto 0. Planteamos seguidamente el problema de dar nombre a los escalones. La solución la encuentran los niños rápidamente: escalón 1, escalón 2, escalón 3 ..., añadiendo la coletilla «hacia arriba» o «hacia abajo».

Ejemplos:

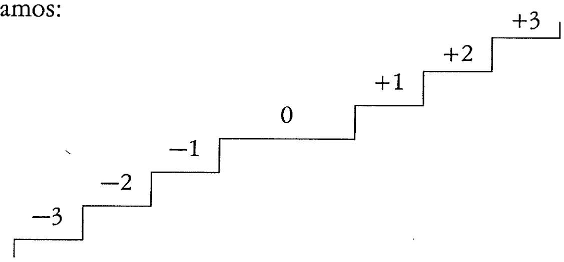


Hacemos prácticas de situarnos cada uno en el escalón que nos indiquen. Cuando esto está suficientemente trabajo cae por su propio peso la notación convencional:

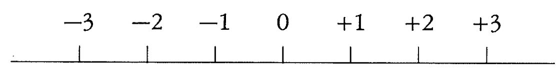
«Escalón 1 hacia abajo»: -1
«Escalón 2 hacia arriba»: $+2$

Continuamos la experiencia de colocarnos, esta vez con la notación abreviada.

A continuación pedimos que el niño dibuje una escalera en su libreta, y señale gráficamente los escalones que indicamos:



De esta gráfica, reflejo de una situación real, a la gráfica abstracta, sólo hay un paso:



Hacemos ejercicios de situar cosas sobre la gráfica convencional.

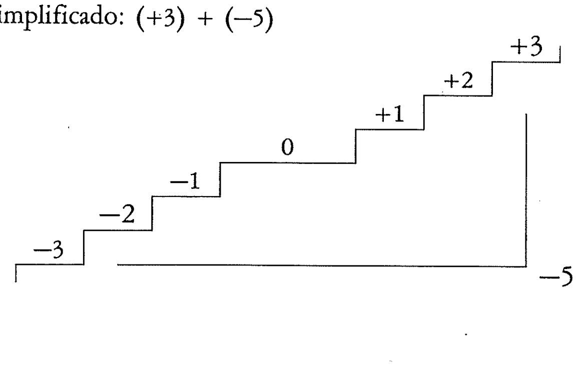
Sobre la marcha, salieron cantidad de cuestiones que se fueron haciendo notar o resolviendo: La convencionalidad de la notación, la simetría de la gráfica, etc.

El siguiente punto que trabajamos en la escalera fue la regla de la suma.

El primer paso fue con lenguaje cotidiano: «Estoy en el escalón 3 hacia arriba y añado un desplazamiento de 5 escalones hacia abajo.» Una vez dominados estos juegos, nos propusimos como tarea, simplificar el lenguaje matemático:

«Estoy en el $\underbrace{\text{escalón 3 hacia arriba}}_{(+3)}$ y $\underbrace{\text{añado}}_{+}$ un desplazamiento de $\underbrace{\text{5 escalones hacia abajo}}_{(-5)}$.»

Simplificado: $(+3) + (-5)$



El resultado es −2.

Ejercicios de pasar lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa, nos dieron mucha soltura.

Con una escalera dibujada por cada uno en la libreta o en una cartulina, no fue necesario ya, desplazarse a la escalera para hacer sumas.

El siguiente paso fue realizar las operaciones mentalmente (siempre con números pequeños). Durante algún tiempo, los niños cerraban los ojos para realizar estas sumas mentales: «Estaban bajando y subiendo escaleras con la imaginación». Pronto estas «muletas» no fueron necesarias y la operación quedó totalmente automatizada.

Tres frecuentes errores se solucionan con esta presentación:

a) El cruzar el cero. Tener como punto de partida una de las semirrectas, y mediante un desplazamiento (una suma) pasar a la otra semirrecta, supone cruzar el cero, solucionando los problemas que esto conlleva. Ejemplo: (+4) + (−7).

b) Queda clara la ordenación decreciente en valor absoluto de los enteros negativos, frente al carácter creciente de este valor en los positivos.

Los alumnos tiene muy claro que el −3 es más pequeño que el −1, ya que la vivencia desde el rellano de estas posiciones, deja claro que el −3 está más abajo.

c) La confusión habitual entre signo de la operación y signo correspondiente al número, desaparece:

Añadir supone una suma, pero el desplazamiento que se añade puede ser hacia arriba (positivo) o hacia abajo (negativo), siendo este signo correspondiente al número.

Estoy en el escalón 2 hacia arriba y añado un desplazamiento de 3 escalones hacia abajo.

$$(+2) \overset{\text{añado}}{+} (-3)$$

Cómo continuamos el tema

La experiencia anterior supone una iniciación al tema, que continuamos de forma más tradicional, excepto en aquellos aspectos en los que hemos encontrado material para hacerlo de otra manera:

a) La regla de los signos. Para esto nos apoyamos en una experiencia mental, posible de proponer a los niños, que utiliza dos magnitudes simultáneas:

Dinero	que se gana ... +	Tiempo en días	futuro ... +
	que se pierde... −		pasado ... −

A continuación planteamos las siguientes preguntas:

1.—Gano 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tendré dentro de dos días respecto del que tengo ahora?

$$(+1.000) \times (+2) = \text{Dos mil pesetas más que ahora, } +2.000$$

2.—Gano 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tenía hace dos días?

$$(+1.000) \times (-2) = \text{Dos mil pesetas menos que ahora, } -2.000$$

3.—Pierdo 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tendré dentro de dos días?

$$(-1.000) \times (+2) = \text{Dos mil pesetas menos que ahora, } -2.000$$

4.—Pierdo 1.000 pesetas diarias, ¿cuánto dinero tenía hace tres días?

$$(-1.000) \times (-2) = \text{Dos mil pesetas más que ahora, } +2.000$$ [7]

Los alumnos ofrecen respuestas intuitivas correctas, que no hay más que acercar a la conocida regla de los signos.

b) Numerosas fichas para profundizar y ampliar el tema, así como para facilitar el automatismo. Hay varias publicaciones que hacen una presentación exhaustiva y sistemática partiendo de situaciones cotidianas[8, 9], de ahí que sólo hagamos una pequeña reseña:

- Vuelos espaciales: cuenta atrás, lanzamiento y cuenta adelante.
- Planisférico: Meridiano este y oeste, y paralelo norte y sur.
- Balanza de pagos.
- Alturas sobre y bajo el nivel del mar.
- Escala de temperaturas.
- La bolsa.
- Ascensores en pisos con sótanos.
- Etcétera.

[7] KLINE, MORRIS, *El fracaso de la matemática moderna,* Editorial Siglo XXI, Madrid, 1984, 9.ª edición.

[8] COLECTIVO PERIÓDICA PURA, *op. cit.*

[9] BRIALES, F. J. y JIMÉNEZ, M., *Matemática viva,* Editorial Alhambra, Colección Breda, núm. 30, Madrid, 1989.