Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años

Paolo Boero

1. Introducción

En mi conferencia consideraré varias maneras de utilizar la Historia de las Matemáticas en la didáctica de las Matemáticas para la escuela obligatoria; se trata de experiencias y reflexiones relacionadas con la elaboración y la experimentación de currículos para la enseñanza de las Matemáticas en las edades comprendidas entre los 6 y los 13 años, desarrollados a partir de 1975 en el grupo de universitarios y enseñantes que coordino personalmente en Génova. El trabajo se ha efectuado en colaboración con Elda Guala; algunos artículos relacionados con estas cuestiones ya han sido publicados o están en curso de publicación.

El problema del uso de la Historia de las Matemáticas en provecho de la didáctica de las Matemáticas ya ha sido tratado en muchas ocasiones y desde ángulos distintos: los trabajos clásicos de Piaget, para todo lo referente a los aspectos cognoscitivos; y desde el punto de vista didáctico, varias propuestas (incluso en libros de texto) sugieren diversas maneras de utilizar la Historia de las Matemáticas: desde las «notas históricas» que se incorporan cuando se introduce un tema nuevo, hasta itinerarios didácticos inspirados en la progresión histórica que se ha seguido en la construcción de ciertas teorías.

En esta conferencia me referiré exclusivamente a usos de la Historia de las Matemáticas que hayan sido realizados y experimentados efectivamente en clase por el grupo de Génova. Para cada tipo de utilización intentaré exponer algunos problemas teóricos y operativos que se plantean en la elaboración y experimentación de los itinerarios didácticos. Una parte de la terminología utilizada proviene de la investigación francesa en el campo de la didáctica de las Matemáticas (trabajos de Chevallard sobre la transposición didáctica y de Regine Douady sobre la dialéctica instrumento-objeto y sobre el «juego de cuadros»).

2. ¿Qué Historia de las Matemáticas?

Como se verá con detalle en los próximos párrafos, todos los tipos de Historia de las Matemáticas permiten una utilización didáctica: tanto la historia interna de la evolución de las ideas y de las teorías matemáticas, elaboradas por los matemáticos profesionales, como la Historia de las Matemáticas relacionada con la cultura y la sociedad del momento, o la historia de la construcción de los conceptos matemáticos anteriores o paralelos a las Matemáticas oficiales. Por lo tanto, son también diversas las fuentes que pueden ser consultadas: libros y artículos de Historia de las Matemáticas, libros y artículos de historia de la ciencia (por ejemplo, ha sido fundamental para nosotros el libro *Historia de las ciencias exactas en la Antigüedad,* de O. Neugebauer), libros que tratan de manera más general la historia de la cultura, incluyendo la historia de la cultura material (por ejemplo, libros como los de G. de Santillana, *Destino antiguo y destino moderno,* o *El molino de Hamlet;* y la *Historia de la tecnología,* de Almyard, Singer *et al.*).

Me parece especialmente relevante para la escuela obligatoria la Historia de la Protomatemática, que está tratada en unas pocas páginas en los manuales de Historia de las Matemáticas; en Italia existe una buena tradición en este campo (sobre todo gracias al «grupo de Historia de las Matemáticas», que nació en Turín alrededor de 1970, impulsado por Tullio Viola, particularmente interesado por la Historia de las Matemáticas de los babilonios). En esta misma dirección, se encuentran también sugerencias útiles en el libro de G. Ifrah, *Historia universal de las cifras,* extensamente consultado por nuestro grupo a fin de recoger de manera organizada y sistemática informaciones, representaciones icónicas y documentos relativos a los primeros desarrollos de la Aritmética.

3. Historia de las Matemáticas: fuente de ideas de cara a la «recontextualización» de los conceptos matemáticos como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad

En el año 1976, nuestro proyecto de enseñanza integrada de las Matemáticas y de las otras ciencias para la escuela de 11 a 14 años, nació basándose en la hipótesis de que era posible realizar una enseñanza de las Matemáticas más motivada, menos selectiva, más eficaz en la construcción (o reconstrucción) de los conceptos elementales de base por medio de actividades cognoscitivas de aspectos importantes de la realidad en la que las Matemáticas intervenían como instrumento de organización del conocimiento.

Propusimos entonces (para realizar en los años sucesivos) un doble currículo de temas y de argumentos matemáticos que construiría, consolidaría y aplicaría gradualmente conocimientos y habilidades tanto de tipo matemático como de tipo extramatemático. Dedujimos de la Historia de las Matemáticas (especialmente de la Historia de la Protomatemática) sugerencias que han sido determinantes en nuestra selección de temas extramatemáticos, para los que propusimos construir los conceptos matemáticos; seguimos la idea ingenua (que por otra parte estaba relacionada con elaboraciones teóricas como las de Piaget) de que aquello que había servido en la Antigüedad como «contexto» para la primera elaboración de los conceptos matemáticos podía ser utilizado (al menos en ciertos casos) también como «contexto» para construir en clase los mismos conceptos.

Pero repito que en los primeros años de trabajo de nuestro grupo no existía una reflexión profunda sobre esta selección, sólo intuiciones y primeras aproximaciones que guiaban la elección de ciertos temas, y no de otros. Sin embargo, teníamos algunos criterios que trataremos de explicar:

- la profundización en un tema requería instrumentos matemáticos ya adquiridos por los alumnos, al menos en parte (construidos en la escuela elemental o en actividades desarrolladas sobre temas precedentes), de manera que el esfuerzo que exige de los alumnos la contextualización matemática necesaria para dominar el nuevo tema no fuera excesivo;
- la profundización de un tema requería conocimientos (o experiencias) preliminares sobre el propio tema adquiridos en los temas precedentes ya trabajados o en la experiencia extraescolar del alumno;
- los temas tenían que ser escogidos de manera que en los alumnos se produjese una «tensión cognoscitiva» real. Precisamente por eso, no todos los conceptos matemáticos podían construirse mediante temas que históricamente habían proporcionado el contexto para el desarrollo de ciertas conceptualizaciones: en algunos casos parecía más productivo escoger temas en los que los conceptos matemáticos funcionasen como instrumentos de organización del conocimiento y que son, en cambio, diferentes de aquellos en los que por primera vez se utilizaron tales conceptos. En seguida (como veremos) nos vimos obligados a admitir que desde el punto de vista didáctico la opción de construir los conceptos y las habilidades por medio de actividades cognoscitivas sobre temas extramatemáticos no era útil con todos los contenidos matemáticos (aunque en este caso la Historia de las Matemáticas nos ayudó a encontrar una alternativa).

*

* *

Al albor de los años 80 disponíamos de una extensa experiencia de trabajo sobre secuencias de temas extramatemáticos como «contextos» para la construcción de conceptos y habilidades matemáticas; entre tanto, el proyecto curricular se ampliaba a la escuela elemental, y también en este sector muchos temas de trabajo extramatemáticos fueron seleccionados, al menos en parte, a partir de sugerencias que se derivaban de la historia de la protomatemática.

Entre las mejores secuencias querría destacar:

• el desarrollo de la Aritmética (números y operaciones) en el contexto temático del dominio del tiempo, entre los 6 y los 7 años: desde el ciclo mensual (objeto de trabajo a los 6 años) se pasa sucesivamente al ciclo anual y, posteriormente, al ciclo diurno y al horario. La referencia al contexto del dominio del tiempo nos fue sugerida por la importancia que tenían, en la mayoría de civilizaciones antiguas, la construcción de los calendarios y la medida del tiempo en los primeros desarrollos de la Aritmética;

• el desarrollo de la Aritmética (números y operaciones) en el contexto temático del cálculo económico entre los 6 y los 9 años: el dominio de los valores monetarios, de los mecanismos de compra-venta («valor monetario» frente a «valor de cambio» de las mercancías) y de los mecanismos más simples de formación de costes de producción, corresponden a la construcción histórica de muchos conceptos y técnicas de cálculo (por ejemplo, es notable el hecho de que la subdivisión sexagesimal de los valores monetarios de las monedas egipcias y griegas tuviera un papel importante en el progresivo predominio del sistema de escritura de posición de los números entre los babilonios). En este caso, la Historia de la Protomatemática nos sugiere un contexto temático de trabajo que, a diferencia del «tiempo» no es «natural», sino que es «producto de la evolución cultural del hombre» (y a ello volveremos dentro de poco);

• el desarrollo de los conceptos geométricos (Protogeometría: las conceptualizaciones realizadas antes de Tales y Pitágoras) por medio de actividades cognoscitivas sobre temas de Astronomía y de orientación relacionados con el problema de las sombras, entre 6 y 10 años, y posteriormente, incluso hasta los 11 años (para nuestros alumnos de segunda etapa, que no habían intervenido en el proyecto del grupo en primera etapa). En este caso, la gran potencialidad didáctica de este tema nos había sido sugerida (hacia el año 1975) por los experimentos que ciertos astrónomos italianos habían realizado en las escuelas y, especialmente, por el trabajo de maestros del «grupo romano» (Emma Castelnuovo, Nino Conte, etc.);

• el desarrollo de los conceptos y de la metodología estadística (tanto en la primera etapa como, en un nivel más profundo, a los 12 y 13 años) por medio de investigaciones sobre temas de interés social (estadística demográfica, etc.): cómo entre los siglos XVII y XVIII, instrumentos y metodologías de estadística se introducen y se utilizan para analizar fenómenos de gran interés social, para determinar «parámetros» que de alguna manera representaban situaciones complejas (valor medio, etc.), para analizar «tendencias» y formular «previsiones», etc.;

• el desarrollo de aspectos dinámicos de la Geometría (matemática de las rotaciones, de las traslaciones, etc.), relacionados con el análisis de mecanismos articulados y con problemas de la mecánica de las máquinas, a los 13 y 14 años.

*
* *

La experiencia adquirida en estos años de trabajo en clase y el perfeccionamiento de los instrumentos teóricos (como resultado, tanto de los problemas que se presentan en el trabajo en clase, y que poco a poco vamos definiendo mejor, como de la confrontación con teorías elaboradas en otros lugares —particularmente en Francia— y útiles sobre todo para clarificar estos problemas), ha puesto de relieve una serie de cuestiones sobre las que quisiera insistir.

3.1. *Eficacia y límites de la recontextualización de los conceptos matemáticos en temas extramatemáticos sugeridos por la historia*

Nos parece que puede ser útil considerar tres hipótesis diferentes con la finalidad de interpretar la eficacia de la recontextualización «histórica»:

• la correlación entre la evolución cultural del individuo particular y la evolución cultural de la especie humana. Según esta hipótesis, la evolución cultural del individuo obedece a leyes, relativas a los equilibrios y desequilibrios de la dialéctica adaptación-asimilación, que no difieren demasiado de los de la especie;

• presencia en la cultura extraescolar de los alumnos de ideas-guía y de embriones de racionalización que el trabajo escolar puede valorar y desarrollar. Según esta hipótesis, la eficacia de la recontextualización de los conceptos matemáticos en temas sugeridos por la Historia de las Matemáticas depende de que el chico «se interesa», «aprende», «racionaliza en términos matemáticos» determinados argumentos extramatemáticos porque en la experiencia extraescolar que forma parte de su patrimonio cultural ya están presentes (de manera más o menos confusa y distorsionada) elementos sustentadores de la construcción cultural que la escuela les propone;

• funcionamiento de los conceptos matemáticos en el tema extramatemático escogido. Según esta hipótesis, es la estructura matemática intrínseca al tema tratado la que construye (igual hoy que antaño), a lo largo del esfuerzo que requiere su conocimiento, los conceptos matemáticos implicados.

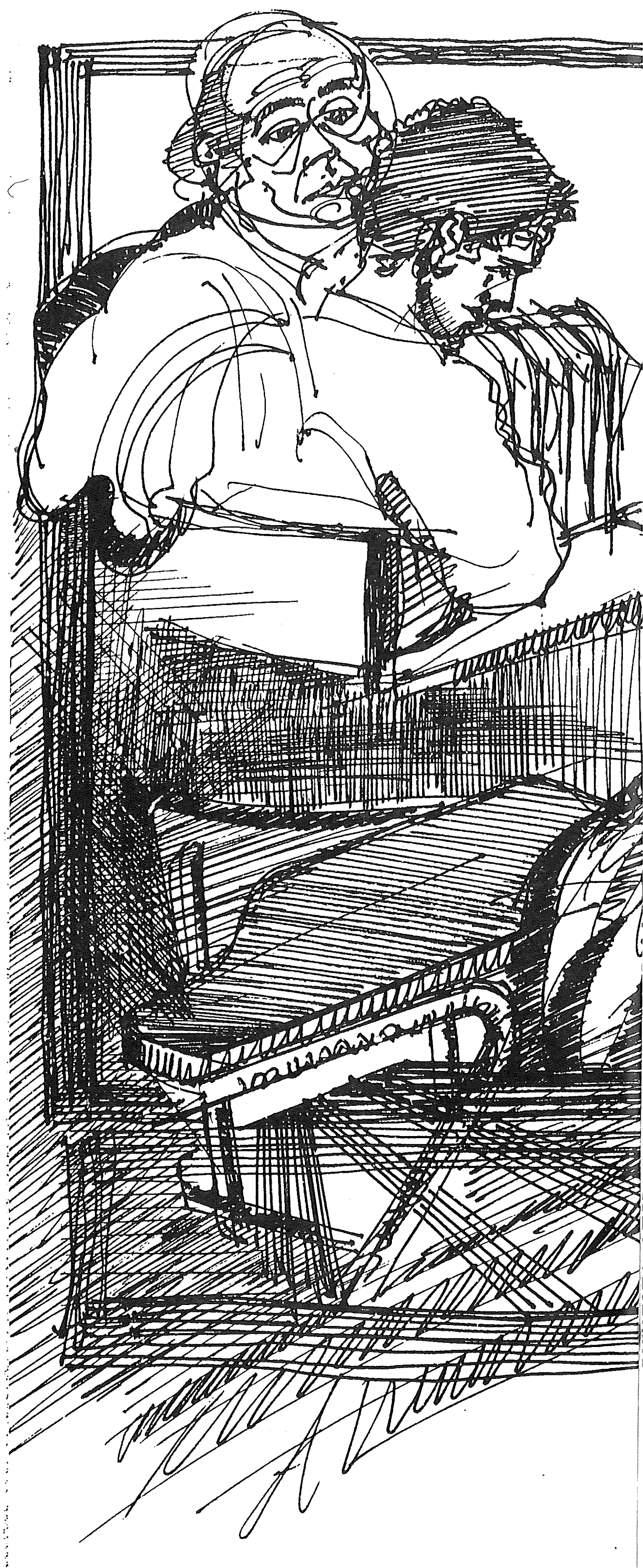
Se trata de hipótesis muy diferentes entre sí, elaboradas en el ámbito de escuelas distintas de psicología del aprendizaje y que hemos citado de forma sumaria como puntos de referencia. Los comportamientos de los alumnos y las dificultades que encuentran, nos parece que confirman sobre todo la segunda y la tercera hipótesis, pero sin excluir la primera (también es posible que cada una de las tres hipótesis «explique» aspectos complementarios de los procesos cognoscitivos de los alumnos).

En lo que respecta a la segunda hipótesis, hemos observado con cierta frecuencia que:

- la práctica extraescolar de ciertos temas favorece mucho el proceso cognoscitivo y de racionalización matemática de los mismos por parte de los alumnos (sobre todo en el caso de «monedas», «calendario», «relojes»); incluso sirven para valorar a los alumnos habitualmente marginados, que alcanzan resultados matemáticos notables (respecto a sus compañeros);
- y viceversa, una concepción extraescolar de tipo «mágico» de ciertos argumentos (lejana y opuesta a la racionalización en términos matemáticos) parece obstaculizar de manera notable el proceso de matematización y adquisición de los conceptos matemáticos implicados (son ejemplares al respecto los obstáculos culturales para el aprendizaje hallados en las relaciones genética-probabilidad a los 12 años y sombra-geometría a los 8 y 9 años);
- no todos los temas históricamente relevantes para la construcción de determinados conceptos han resultado eficaces para ser recontextualizados con una finalidad didáctica, incluso si tenían un cierto interés, al menos inicial, para los alumnos: en particular las cuestiones totalmente extrañas a la cultura de hoy han resultado ser las menos eficaces (como en el caso del trabajo con el ábaco en los primeros años de la escuela elemental).

3.2. *Real «natural» y real «artificial» en el proceso de recontextualización del saber matemático*

La segunda de las tres hipótesis consideradas en el punto precedente parece justificar también que, por parte de la mayoría de alumnos, los temas relativos al mundo de la naturaleza (orientación, sombras, etc.) y al mundo construido por el hombre (monedas, máquinas, etc.), así como los temas que están a medio camino de ambos (calendario, reloj, etc.), son igualmente eficaces; y parece también que puede explicar el resultado inferior que se obtiene, con los



alumnos culturalmente menos motivados, en temas que se refieren al mundo de la naturaleza.

En efecto, si un alumno vive una realidad ambiental rica en estímulos y aportaciones culturales para su proceso de racionalización de lo real (léxico, maneras de pensar, etc.), es natural (desde el punto de vista de la eficacia que para él tiene el trabajo escolar) que no haga distinciones entre real «natural» y real «artificial» en lo que se refiere al proceso de recontextualización. Si la eficacia de la recontextualización escolar de los conceptos matemáticos depende principalmente de su inserción en el patrimonio cultural del alumno en relación al tema que se aborda y no de la naturaleza del tema, la sombra, el tiempo o las monedas no se han de considerar como lo que son efectivamente, sino por su presencia en la cultura colectiva (léxico, objetos, manera de decir, etc.). Lo real «artificial» puede únicamente presentar, en muchos casos, la ventaja del mayor grado de racionalización (y por tanto de organización matemática) con que está presente en la cultura extraescolar, precisamente porque está hecho y utilizado sistemáticamente por el hombre; parece muy difícil hacer racionalizar, a los alumnos que provienen de medios sociales pobres en estímulos culturales, lo real «natural» de las sombras y, sobre todo, el de la transmisión de los caracteres hereditarios. Desde el punto de vista de la formación científica, por otra parte, la racionalización de lo real «natural» puede ser, en muchos casos, un objetivo prioritario que justifique ampliamente el esfuerzo que requiere.

3.3. *Explicitación y profundización de los conceptos matemáticos construidos por medio de la recontextualización «histórica» de los mismos*

En muchas ocasiones el trabajo con temas extramatemáticos no resulta suficiente para construir el saber matemático hasta el nivel necesario para transferirlo (como «instrumento» de conocimiento) a otros contextos, o para «estabilizarlo» en el tiempo como adquisición permanente, o para reconocerlo y utilizarlo en el marco del mismo itinerario cognoscitivo. Disponemos ya de muchos ejemplos al respecto (el cuadro general de cómo consideramos este problema está expuesto en la ponencia de M. P.. Rogantin, presentada a la CIEAEM de Lisboa del año 1983):

- El concepto de probabilidad ha de ser inmediatamente explicitado para ser utilizado de forma eficaz;
- el concepto de «muestra» en la estadística ha de ser clarificado muy pronto con el objeto de evitar malentendidos en el análisis de los datos (en particular en todo lo que se refiere al problema del número de elementos de la muestra al azar en relación con su credibilidad);

• el concepto de «función» ha de ser gradualmente explicitado para permitir que se use de forma suficientemente eficaz en la creación de modelos de situaciones económicas, tecnológicas, etc.

En otros casos, sin embargo, no creemos en absoluto que sea necesaria una explicitación (más allá de la designación con un «nombre») o un trabajo sobre el objeto matemático con la finalidad de garantizar que se domine su estabilidad y su transferibilidad; éste es el caso de:

• el concepto de ángulo (desarrollado en el marco del trabajo sobre las sombras y el tiempo);

• el número, de las operaciones aritméticas y de sus distintas significaciones (desarrollado a los 6, 7 y 8 años con el trabajo sobre las situaciones problemáticas inherentes al tiempo, a los cambios económicos y a las representaciones espaciales protogeométricas).

Se tiene la impresión de que el «juego de cuadros» que realizamos en muchos casos (... ya lo utilizábamos antes de entrar en contacto con su teorización: ¡ahora nos es muy útil disponer de un lenguaje y un apoyo teórico al cual referirnos!) es suficiente (para algunos conceptos, pero no para otros) para construir un saber que permita controlar su aplicación en otros contextos y también controlar sus reglas internas de funcionamiento. Un ejemplo importante en este sentido nos parece que es precisamente el del trabajo con las monedas, los números del calendario y las mediciones de temperatura a los 6 años: la mayoría de alumnos, cuando terminan el curso, son capaces de confrontar dos números, «en cuanto a tales», refiriéndose al valor monetario, o a los números del mes, o a los valores de la temperatura (según el valor numérico de que se trate), pero hemos observado que muchos alumnos también son capaces de trabajar en la confrontación entre las fechas de acuñación de las monedas (1978, 1980, 1983, 1979, etc.), apartándose de los modelos de referencia y hablando de «centenas», «decenas», etc. («las centenas son las mismas, entonces basta con observar las últimas cifras de los números, ...»).

Nos falta aún un cuadro teórico de referencia preciso para establecer qué características (de los conceptos y/o de las situaciones didácticas y de los cuadros de recontextualización histórica de los conceptos) pueden evitar la monotonía (y la selectividad) de los momentos de institucionalización del saber matemático que, además, presentan el grave problema de saber cuál es el momento en que se han de llevar a cabo (hemos visto que no todos los alumnos son maduros al mismo tiempo para poder realizar la institucionalización y la descontextualización!).

La impresión que tenemos después de una confrontación sistemática con prácticas didácticas tradicionales es que la Historia de las Matemáticas puede sugerir contextos en los cuales recontextualizar el saber matemático, y que conducen por muchos conceptos (con un oportuno «juego de cuadros») a una descontextualización, en gran medida autónoma, por parte de los propios alumnos.

Es posible que también esta «eficacia» esté relacionada con el contexto social general dónde se insieren los alumnos: por ejemplo, el trabajo insistente y profundo en el «cuadro» escolar del calendario o del cambio económico se relaciona con las experiencias extraescolares sobre los mismos temas, y también con las experiencias de los «números» en distintos campos, lo cual implica la transferencia gradual de los comportamientos y los modelos de una situación problemática a otra.

3.4. *Situaciones didácticas y secuencias didácticas*

En nuestro trabajo de elaboración curricular hemos extraído de la Historia de las Matemáticas sugerencias para la construcción de determinados conceptos en situaciones didácticas singulares, pero también sugerencias utilizables en secuencias de larga duración (por ejemplo, el itinerario sobre «cálculo económico y aritmética» desde los 6 a los 9 años). Una cuestión interesante al respecto es la que se refiere a la lógica con la que organizar en forma de secuencias las diversas situaciones didácticas: ¿Se trata, principalmente, de una lógica interna a los objetivos del aprendizaje matemático? ¿De una lógica que corresponde a la progresión histórica del conocimiento extramatemático del tema? ¿De una lógica de organización de un itinerario eficiente para los alumnos? Hemos realizado secuencias que responden a todos estos criterios y no nos parece que de las experiencias llevadas a cabo se deduzcan indicaciones para preferir, en general, un criterio a otro: por ejemplo, en el trabajo en la escuela con alumnos de 8 a 10 años sobre las sombras y sobre la astronomía de posición, hemos seguido *groso modo* la progresión histórica de los conocimientos sobre el fenómeno de las sombras y sobre los problemas de orientación (anticipando los problemas de la orientación respecto a la interpretación del movimiento de las sombras relacionado con la rotación de la Tierra alrededor de su eje), mientras que en el primer curso de segunda etapa, hemos experimentado con éxito un itinerario distinto (en primer lugar, la interpretación del fenómeno de las sombras y, a continuación, el desarrollo del tema/temática de la orientación). Nos parece que tienen que ser evaluadas caso por caso y según se vayan presentando, las numerosas variables que están en juego:

• el nivel de profundización que nos propongamos alcanzar (por ejemplo, en un primer curso de instituto, el tema de la orientación se debería desarrollar a un nivel que exigiese el dominio cómodo del concepto de ángulo, de las técnicas de medición, de la forma de la Tierra, etc.; y al contrario, en la escuela primaria sólo nos proponemos alcanzar el nivel de relación entre las direcciones del movimiento local (en el plano) y los puntos cardinales;ı

• prerrequisitos matemáticos y temáticos disponibles (los conocimientos matemáticos y extramatemáticos son desarrollados de manera distinta a los 8 y a los 11 años);

• presencia simultánea de otros temas en el currículo escolar (a los 11 años, en los primeros meses del curso, el enseñante de Ciencias Matemáticas y Experimentales de nuestro proyecto introduce consideraciones sobre las concepciones biológicas del siglo XVII para poder confrontarlas con las concepciones astronómicas de otras épocas).

4. Historia de las Matemáticas: ocasión, para los alumnos, de trabajar sobre los conceptos matemáticos como «objetos» de estudio

Como ya hemos indicado en el párrafo anterior, después de los primeros cuatro o cinco años de trabajo en el proyecto de enseñanza integrada de las Matemáticas y de las otras ciencias en la escuela de 12 a 14 años, nos vimos obligados a integrar la hipótesis inicial de nuestro proyecto (construcción de los conceptos matemáticos de base por medio de actividades cognoscitivas sobre temas extramatemáticos) porque se nos presentaban dos clases de dificultades:

• no todos los conceptos matemáticos de base podían ser construidos de manera «natural» como instrumentos de organización del conocimiento de temas extramatemáticos;

• algunos conceptos matemáticos construidos de esa manera requería un trabajo de reflexión y explicitación que lo hicieran recognoscibles, que permitieran adquirirlos definitivamente y transferirlos a otros contextos donde fueran aplicables.

Se plantea, por tanto, el problema de «qué didáctica de la matemática» es necesaria al margen del trabajo cognoscitivo sobre temas extramatemáticos. Las soluciones adoptadas hasta ahora en la escuela italiana no nos satisfacían:

• enseñanza de tipo tradicional: se renuncia al rigor, a la generalización, a la contextualización cultural de los conceptos, precisamente de las Matemáticas de hoy, y se enseñan unas Matemáticas «escolares», en parte presentadas de forma teórica (según criterios del siglo pasado o de siglos anteriores), en parte a nivel intuitivo;

• enseñanza «moderna»: se asume como referencia una de las sistematizaciones actuales de los conceptos matemáticos (precisamente, la de tipo «conjuntista») y se presentan a los alumnos versiones fáciles de ésta.

El primer enfoque no nos gustaba en la medida en que éramos matemáticos; el segundo resultaba imposible de proponer porque no ofrecía motivaciones a los alumnos ni los relacionaba con sus experiencias y sus conocimientos matemáticos extraescolares; por otra parte, los dos enfoques dan la idea de unas Matemáticas «absolutas» y «definitivas», a las cuales sólo es posible añadir nuevos «descubrimientos».

La Historia de las Matemáticas nos sugirió una hipótesis de trabajo sobre la cual, y en los últimos cinco años, hemos elaborado y experimentado numerosos itinerarios didácticos: siguiendo la evolución histórica de las técnicas, de los formalismos, de las maneras de pensar ciertos conceptos (y proponiendo a los alumnos actividades de «utilización» de los formalismos y de las técnicas, y de confrontación entre ellas) es posible satisfacer las siguientes exigencias:

• representar las Matemáticas como una parte de la cultura humana, que evoluciona con ella y, en consecuencia, preparar el terreno (para los que continúen estudiando) para poder sistematizar los conceptos matemáticos según las Matemáticas de hoy;

• reconocer la importancia de los formalismos y de las técnicas, y las ambigüedades e insuficiencias de cada formalismo;

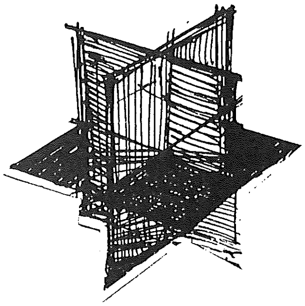
• construir o profundizar los conceptos matemáticos escogidos por medio de las diversas maneras en que se presentan en cada época.

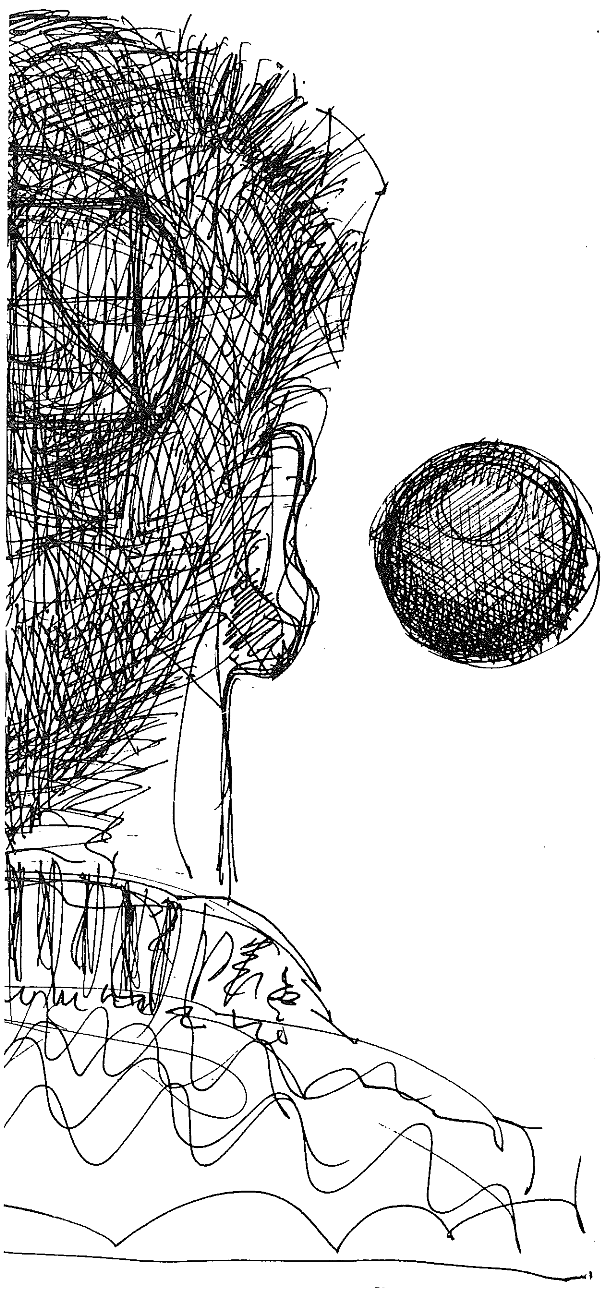
*

* *

Entre las realizaciones que actualmente consideramos más eficaces y más interesantes, teniendo en cuenta la orientación indicada, me gustaría citar:

• la reflexión sobre la escritura decimal-posicional de los números naturales (a los 11 años): la confrontación entre el tipo aditivo y el tipo posicional de escritura de los números se plantea sobre todo en lo que respecta a las técnicas de cálculo de las operaciones aritméticas; se observa así que, gradualmente, en el seno de los sistemas de escritura aditiva se desarrollan técnicas de cálculo con el ábaco en que ciertas cifras (en el sistema romano, por ejemplo, *I, X, C, M*) son «reagrupadas» e identificadas con fichas que adquieren su valor según la ranura en la que se introducen. Las exigencias de los cálculos aritméticos imponen, por tanto, técnicas de cálculo de tipo «posicional», incluso en presencia de escrituras «aditivas» de los números. El análisis de la discusión entre «algoritmistas» y «aba-





quistas» en la Aritmética renacentista ofrece una ocasión interesante para hacer ejercicios y reflexiones: una vez asegurada la utilización del sistema posicional de escritura de los números, el cálculo con cifras pudo reemplazar el tradicional cálculo con el ábaco, sustituyendo las operaciones físicas con las fichas del ábaco por operaciones mentales con las cifras...

• la reflexión sobre la escritura fraccionaria y sobre la escritura decimal de los números racionales (a los 11 años): los alumnos/as identifican en los usos corrientes hoy en día (distintos, por otra parte, de una región a otra de Italia, y aún más distintos entre Italia y otros países, como Inglaterra; y distintos también, en Italia, en el uso oral y el escrito) la presencia de la representación fraccionaria y de la representación decimal. Se presenta de manera muy espontánea el problema de establecer cuándo y dónde surgen las dos representaciones, lo cual permite trabajar sobre las técnicas babilónicas, egipcia, greco-romana y renacentista de representación de los números «no enteros»; la representación decimal de Stevin y las sucesivas representaciones están ligadas a las exigencias planteadas por el desarrollo del cálculo económico y técnico-científico en la época moderna; la confrontación entre las ventajas y los límites de las representaciones «fraccionaria» y «decimal» de los números racionales en relación con sus usos actuales (en particular por lo que respecta a la relación con las mediciones decimales, los cálculos aritméticos, la relación porcentual) concluye esta parte del trabajo;

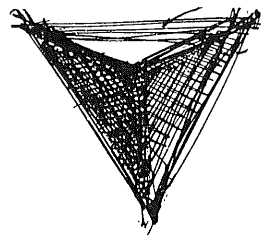
• la reflexión sobre los diferentes formalismos respecto a la jerarquía de los cálculos en las expresiones aritméticas, a los 13 años: se examinan (respecto a las épocas y a los problemas de cálculo que motivaron su introducción) el formalismo del *vinculum,* el formalismo de los corchetes [y], el formalismo de los paréntesis «jerarquizados», el formalismo de los gráficos, el formalismo de los diagramas, el formalismo de los paréntesis (y) de los teclados de las calculadoras. Los alumnos practican la traducción de un formalismo al otro y reflexionan sobre la posibilidad y los límites de cada tipo de formalismo (sobre todo en lo que respecta a la visión compleja y global de la articulación de los cálculos —útil para las manipulaciones algebraicas— propia del formalismo de los paréntesis; y lo que se refiere a la dirección de ejecución de los cálculos, propia, en cambio, del formalismo de los gráficos y de los diagramas). También se examinan algunos factores que han determinado la sustitución de ciertos formalismos por otros y que no se refieren a las funciones desarrolladas en cuanto a tales (dificultad en la reproducción tipográfica del *vinculum,* ...). El trabajo se desarrolla en parte respecto a las formas de calcular las expresiones con los ordenadores y las calculadoras de bolsillo.

*
* *

Los itinerarios didácticos que hemos ilustrado brevemente (se trata de itinerarios muy largos, con fichas de trabajo guiado y fichas de evaluación de aprendizaje, cada uno de los cuales requiere como mínimo una veintena de horas de trabajo en el aula) consiguen resultados satisfactorios y amplios sobre los objetos matemáticos considerados y, por otra parte, habitúan poco a poco a los alumnos al la idea de unas Matemáticas «en evolución», rompiendo progresivamente el estereotipo de la inmovilidad de las Matemáticas, muy peligroso por la actitud que crea ante ellas.

Las experiencias que hemos realizado (tanto las que se refieren a la elaboración de las propuestas didácticas por parte de los grupos mixtos de universitarios y de maestros como las que se refieren a las experimentaciones realizadas en clase —todos los itinerarios han sido experimentados en más de 120 clases, con materiales didácticos modificados de año en año— plantean algunos problemas que querría señalar porque los considero de interés general:

- una primera cuestión se refiere a la exactitud histórica de las situaciones didácticas propuestas; en la mayoría de casos los problemas, los formalismos y el lenguaje son análogos pero no idénticos a los que encontramos en los «protocolos» históricos, ya que es imposible reconstruir en clase el aparato simbólico propio de una cierta época y las motivaciones que condujeron al uso de un determinado formalismo o de una cierta técnica. En realidad, lo que presentamos como «representación sexagesimal de los números no enteros» o como «escritura de las expresiones aritméticas con el *vinculum*» es una interpretación «trasladada a los formalismos y al lenguaje de hoy» de las que parecen ser las características principales de los formalismos de entonces. Se trata de opiniones bastante arbitrarias, y habría que precisar más sus límites y los parámetros según los cuales podemos evaluar la legitimidad cultural y sobre todo didáctica de tales opciones;
- un segundo problema se refiere a la distinta eficacia «simbólica» de los diversos formalismos cuando evocan el mismo aspecto o aspectos diferentes del concepto representado. El grafo es útil para guiar la ejecución del cálculo, los paréntesis son útiles para transformar la expresión que hay que calcular sin calcularla efectivamente. Nos parece que por medio de la confrontación de los distintos formalismos es posible (como hemos indicado al comiento del párrafo) hacer notar aspectos distintos de un mismo concepto; pero aún nos falta una teoría unitaria capaz de orientar las elecciones que hay que llevar a cabo entre los varios formalismos que se encuentran en las documenta-



ciones históricas (la exposición presentada en el clásico texto de F. Cajori, *An History of Mathematical Notations,* es muy extensa, pero no basta para cumplir nuestro objetivo).

5. Historia de las Matemáticas: ocasión de abrir un «discurso matemático»

Los programas de Matemáticas de segunda etapa (11 a 14 años) en Italia exigen de los maestros pasar gradualmente de la introducción y el uso de los conceptos en situaciones «prácticas» al razonamiento explícito sobre estos conceptos; sin pretender, sin embargo, desarrollar o hacer construir a los alumnos demostraciones particulares. En los programas se incide sobre todo en la búsqueda de ejemplos y contraejemplos relativos a las afirmaciones matemáticas y, como objetivo final, en argumentaciones que se encadenan («... si eso es verdad, entonces ha de ser también verdad que...»). De hecho, considerando que la mayoría de alumnos continuarán estudiando, en alguna escuela se exponen a los alumnos de 13 y 14 años incluso algunos teoremas de Geometría (Pitágoras, Euclides, etc.); en general, en cambio, no se pide a los alumnos que construyan demostraciones de forma autónoma.

Desde hace tres años, en el grupo que coordino se lleva a cabo una reflexión bastante minuciosa sobre la significación, la importancia y la practicabilidad, en la escuela obligatoria de hoy (que dura hasta los 14 años), de la argumentación matemática que alcanza hasta el nivel de las demostraciones completas. Podríamos resumir los términos de la cuestión así:

- la difusión de los ordenadores exige que se confronten, elijan y comprendan sistemas de símbolos que responden a reglas muy complejas; el nivel de complejidad de las actividades mentales que hay que efectuar puede compararse al de las argumentaciones sobre los conceptos matemáticos y sobre su representación formal;
- la complejidad del mundo de hoy (y de los «discursos» sobre los problemas más diversos) exige capacidades de razonamiento verbal elevadas, si se quiere ser consciente de los problemas que se abordan y de las soluciones que se proponen;
- la escuela obligatoria debe presentar una imagen no deformada de las Matemáticas; y las Matemáticas no son solamente un «instrumento de conocimiento» ni un «formalismo sujeto a determinadas reglas»;
- además, no todos los alumnos poseen los niveles de dominio del lenguaje que la argumentación matemática exige; el trabajo sobre el «discurso matemático» corre el riesgo, pues, de ser muy selectivo y discriminatorio...
- ... además, el desarrollo de «demostraciones» auténticas no resulta fácil de motivar, y sus significado no es fácil de comprender por medio de las demostraciones corrientes de la Geometría elemental de la segunda etapa (las propiedades que hay que demostrar resultan «evidentes» o son fácilmente comprobables por medio del dibujo);
- ... y, por último, no es fácil, en relación con la experiencia matemática de los alumnos, que es limitada, hacerles comprender el valor cultural de las demostraciones y del método deductivo en Matemáticas...

La Historia de las Matemáticas nos ha ofrecido algunos elementos de reflexión y algunas ideas, sobre las cuales realizamos nuestras primeras experiencias de «demostraciones» (elaboradas en clase con alumnos) y comenzamos a construir itinerarios de trabajo más globales sobre el razonamiento matemático. A este respecto, he de mencionar aquí una investigación análoga (cuyas realizaciones se orientan, sin embargo, en una dirección distinta), que desarrolla, desde hace varios años, el grupo que coordina en Roma, Mario Barra, con el que a menudo discutimos sobre el tema.

En primer lugar, la Historia de las Matemáticas destaca el papel de los problemas aritméticos (y el de los problemas geométricos) en el desarrollo del razonamiento matemático en la Antigüedad y destaca la estrecha relación dialéctica que existía, al principio, entre las motivaciones «mágicas» de la investigación y de la demostración de las propiedades de los números, y los desarrollos «racionales» de las argumentaciones (hasta las primeras «demostraciones» verdaderas). Un libro muy interesante sobre el particular es el de Eric Temple Bell, *The Magic of Numbers.*

En segundo lugar, la Historia de las Matemáticas y la historia de la cultura ponen de relieve las relaciones entre el desarrollo de la argumentación matemática, el desarrollo de la filosofía, los objetivos de formación de las clases dirigentes y el desarrollo de la racionalidad autónoma de los ciudadanos en la organización del poder, en las ciudades-estado de la Grecia de los siglos VI y V a. de C.

Estas reflexiones y estas constataciones nos sugirieron algunos itinerarios didácticos que actualmente estamos experimentando en clase, y modificando según los resultados de la experimentación:

- a los 11 años, a partir de las prácticas «mágicas» actuales sobre los números (números que «traen mala suerte», números «perfectos», números del juego de la loto, etc.), los alumnos entran en contacto con algunos problemas típicos de la Astrología antigua, y pueden darse cuenta poco a poco de la importancia que podía tener antaño, para el sabio, el hecho de descubrir propiedades de los números que se «resistían» a una prueba realizada sobre «todos» los números imaginables. Se propone a los alumnos algunas «propiedades» (como «la suma de dos números impares consecutivos puede ser dividida por cuatro»; «la suma de tres números consecutivos puede ser dividida por tres»; «si un número termina en 1, o es primo o puede ser dividido por tres»; «todo número par es la suma de dos números primos», etc.), y se les pide que comprueben si dichas propiedades son válidas para «varios» números. Ciertas propiedades «resisten» con todos los números considerados; entonces se plantea el problema de comprobar si son válidas para todos los números... Confrontando los razonamientos a medida que los alumnos los desarrollan y resaltando sus aspectos generales, es posible (en algunos casos) conseguir en clase auténticas demostraciones en lenguaje algebraico... Los alumnos se sorprenden de que hoy en día aún no haya, para algunas «propiedades», más que comprobaciones sobre una cantidad muy elevada de números, ¡pero que no haya ninguna «demostración»! En este momento se puede introducir la búsqueda de conjeturas sobre las propiedades ulteriores que los alumnos deben formular para, a continuación, intentar comprobar y, eventualamente, demostrar... Este año hemos incorporado también una secuencia de trabajo sobre la «verdad»: por medio de la confrontación entre varios tipos de afirmaciones (no sólo en el campo de las Matemáticas), se anima a los niños a reflexionar sobre los diferentes medios de que se dispone (incluido el medio «razonamiento») para establecer si una afirmación es verdadera o no;

- a los 12 años, la presentación del teorema de Pitágoras y del teorema sobre la semejanza de los triángulos, que se atribuye habitualmente a Tales (realizada alternando «comprobaciones», «conjeturas» y «razonamientos demostrativos») permite introducir la comparación entre la geometría de los griegos y las geometrías de los babilonios y los egipcios, introduciéndola en el cuadro de las novedades que tienen lugar en la articulación de la sociedad griega, respecto a los modelos teocráticos preexistentes. Los elementos de historia «interna» de las Matemáticas (el paso de las propiedades comprobadas y utilizadas «en cada situación nueva» o deducidas «por analogía», a las propiedades expresadas en general y basadas en la deducción a partir de propiedades «evidentes») se añaden así a los elementos de historia general de la cultura, que otorgan un sentido más amplio a la evolución interna de las Matemáticas.

Las experiencias que hemos realizado en clase hasta ahora presentan aspectos positivos y aspectos negativos que deberemos evaluar minuciosamente; también plantean problemas de interés general:

- en principio, el problema de la exactitud histórica, que concierne en este caso no tanto al lenguaje matemático como al medio histórico en el que algunos «descubrimientos» se han producido y algunas exigencias de razonamiento riguroso se han desarrollado. Los documentos históricos, cuando existen, no son accesibles a los alumnos; éstos tienen conocimientos históricos muy superficiales de las épocas que consideramos (y parece imposible dedicar demasiado tiempo a llenar estas lagunas, durante los cursos de Matemáticas) y el relato del desarrollo de los acontecimientos contiene a menudo imprecisiones;
- otro problema afecta la comprensión, en un itinerario de unas decenas de horas, de un período histórico que comprende centenares de años; con lo cual se corre el riesgo de dar una imagen deformada del desarrollo histórico de las Matemáticas, de presentar como fáciles o banales procesos muy complejos;
- a los 11-12 años, efectivamente, los alumnos consiguen darse cuenta del significado de «demostrar», gracias al marco histórico (que pone de relieve el salto cualitativo con relación a las propiedades comprobadas caso por caso); pero, ¿cuántos alumnos alcanzan ese estadio de conciencia? Menos del 30 por 100, como media, y se trata en general de alumnos en los que los medios lingüísticos, la concentración mental y la base cultural son superiores. Este trabajo es igualmente útil para los otros alumnos (aunque a niveles más bajos), pues permite efectuar abundantes ejercicios de «comprobación de propiedades» y que muchos de ellos comprendan que una afirmación matemática puede ser verdadera o falsa, y que, en distintos casos, la «comprobación» en situaciones particulares puede permitir encontrar contraejemplos... ¿Es posible mejorar sensiblemente el porcentaje de los alumnos que alcanzan los objetivos más ambiciosos, por medio de una organización distinta del trabajo, más gradual, más atenta a conseguir que los alumnos participen de la problemática histórica y técnica que se les propone? ¿Y cuáles son los obstáculos que hay que superar? ¿Obstáculos técnicos, o culturales?
- ¿Es posible, es útil relacionar de manera más sistemática —puesto que en Italia la misma persona enseña Matemáticas o Ciencias experimentales— el problema de la «verdad matemática» con el problema de «la verdad en las ciencias de la naturaleza»? ¿O nos arriesgamos a crear elementos de confusión y a embrollar la conciencia del significado del razonamiento deductivo?

6. La Historia de las Matemáticas y los maestros

La Historia de las Matemáticas ofrece a los maestros —como hemos visto— distintas ideas para su actividad didáctica, ya sea como historia de cuestiones particulares que se presentan en clase de manera explícita, ya sea como fuente de temas en los que puede proponer de nuevo, de manera implícita, «contextos» para la construcción de determinados conceptos y habilidades matemáticas.

La Historia de las Matemáticas puede también utilizarse en la enseñanza como referencia para anticipar dificultades o posibles errores en el aprendizaje de los alumnos; en efecto, ocurre a menudo que los obstáculos con que se encuentran los alumnos son consecuencia de concepciones que se encuentran extendidas en las maneras de pensar de fuera de la escuela y en el lenguaje —y que existían también en las Matemáticas de antaño o en las terminologías «técnicas» del pasado. Podría citar a propósito dos ejemplos, entre muchos otros:

- la confusión entre el término «perpendicular» y el término «vertical», ligada por una parte a la expresión «una caída perpendicular» (*cadere a perpendicolo*) que está aún muy extendida en la lengua italiana para indicar la caída según la vertical, y, por otra, al término de *perpendiculum,* que designaba el hilo de la plomada en el lenguaje técnico del siglo XVII;
- los comportamientos de los alumnos en las primeras aproximaciones de la probabilidad, en las que se reconocen varios intentos de «racionalización» del concepto (por medio del cálculo de las diferencias o del cálculo de las razones entre los acontecimientos «favorables» y los acontecimientos «desfavorables»), que datan de hace casi cuatro siglos, para buscar una «medida» de la probabilidad de un acontecimiento.

Evidentemente, con conocimientos históricos apropiados se puede mejorar la atención del maestro hacia las concepciones de los alumnos, favorecer el diálogo con ellos y dirigir el proceso de organización de su cultura matemática.

Pero todos esos objetivos exigen que el maestro tenga profundos conocimientos históricos y que sepa servirse de ellos. En Italia bastantes licenciados en Matemáticas han seguido cursos de Historia de las Matemáticas durante sus estudios universitarios, pero raramente saben utilizar cuando enseñan los conocimientos que han adquirido en esos cursos. Además, ¡sólo una parte de los maestros de Matemáticas de la escuela obligatoria son licenciados en Matemáticas!

En realidad, los cursos universitarios de Historia de las Matemáticas inciden sobre todo en los aspectos interiores de la Historia de las Matemáticas y se refieren a menudo al estudio monográfico de períodos o a problemas muy particulares. Sin embargo, hemos visto que desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas en la escuela obligatoria, la Historia de las Matemáticas y la de las Protomatemáticas son muy importantes en la medida en que son parte de la historia de la cultura humana (y las Protomatemáticas, particularmente, con vistas a la recontextualización de conceptos y de habilidades matemáticas dados).

Otro aspecto insuficiente de la formación de los maestros es la separación entre Historia de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas: incluso en las universidades en que los alumnos siguen los dos tipos de curso, raramente se les propone la problemática del uso de los conocimientos históricos en didáctica. A lo largo de su «formación en activo», los maestros no tienen facilidades para encontrar ni el tiempo, ni los maestros necesarios para adquirir (o desarrollar en un sentido didáctico) competencias de naturaleza histórica: habitualmente, las necesidades más urgentes son de otro carácter (se refieren a los nuevos contenidos que hay que saber enseñar o a las metodologías didácticas de moda). Sólo en un contexto de investigación muy definido y estable —como el que se da en los grupos mixtos de maestros y universitarios en algunas universidades italianas— es posible abordar, con los detalles y los medios necesarios, problemas como los que hemos indicado en esta conferencia. Con el tiempo, la calidad y la eficacia de las innovaciones introducidas permitirán dirigir un poco más la atención sobre el problema del uso de la Historia de las Matemáticas en la práctica didáctica habitual (y por lo tanto, también sobre el problema de la formación integrada, en historia y en didáctica, de los enseñantes).

Estas páginas reproducen la conferencia dada por Paolo Boero enla 4.ª Escuela de Verano de Orleans, julio de 1986. (Traducción de Vicent Font.)