Un problema cualquiera (*)

Domingo de la Rubia

Antes de comenzar

Con frecuencia, al leer el encabezamiento de un artículo, el lector intenta hacerse una idea aproximada de lo que puede estar escrito bajo él, aunque no siempre coincida con lo que realmente hay. Para evitar que esto ocurra entre nosotros, y dado que el título resulta bastante genérico, trataré de introducirle con unos breves comentarios, de manera que si no se siente interesado pueda pasar al próximo artículo.

Pero si es un aficionado a los problemas de pasatiempos, o le gusta entretenerse en averiguar cómo otra gente resuelve problemas, o quiere reflexionar sobre el propio pensamiento cuando es usted el resolutor, o está preocupado en líneas generales por la enseñanza, deténgase un momento y concédame un margen de confianza. Esto quizá le pueda interesar.

Entrando en materia

Este problema no se considera como un fin en sí mismo, sino como un medio o una excusa (como usted prefiera) para comunicar una determinada concepción de lo que significa resolver problemas, con la pretensión de servir de ayuda a aquellas personas que están en contacto con resolutores de problemas, y, por extensión, a los propios resolutores.

Según este enfoque, no importa tanto la solución de cada problema concreto, como la concepción de la naturaleza de la tarea *resolver problemas* con que se aborde cualquier problema concreto, y la percepción que tiene quien lo aborda de los mecanismos que pone en juego mientras lo resuelve. El objetivo ulterior es que con ello el maestro pueda contribuir a hacer posible que sus alumnos dispongan de unos medios precisos para aprender por sí mismos,

(*) Agradezco a Fernando Cerdán y Luis Puig que me hayan empujado a escribir este artículo, cuyo núcleo es uno de los muchos problemas que se desmenuzaron durante un curso de resolución de problemas para futuros docentes, que ellos imparten y al que yo asistí; se trata, concretamente, de uno de los propuestos para el ejercicio de evaluación en junio de 1987.

y que mejoren su capacidad para resolver cualquier tipo de problemas. «Cualquier tipo de problemas», es decir, no sólo los problemas escolares de Matemáticas, sino cualquier situación ante la que de entrada no se tiene una respuesta inmediata, y que puede estar ligada a cualquier faceta de la vida.

Conviene señalar también el diferente grado de complejidad que puede tener un problema según la persona que intenta resolverlo. Dependiendo de los conocimientos previos y de las destrezas particulares de cada individuo, un mismo problema puede pasar de ser un simple ejercicio de reconocimiento (algo que ya se sabe y se recuerda), a un problema de difícil solución. Para mayor claridad, pondré un ejemplo: Si a usted le preguntaran cuántos puntos suman las fichas de dominó, suponiendo que conociera el juego, seguramente se pasaría un rato pensando, y, posteriormente, se vería obligado a hacer alguna que otra suma o multiplicación, o ambas cosas, hasta encontrar la solución: para usted el problema tendría una cierta dificultad; pero si le hicieran la misma pregunta a un experto jugador de dominó, o si usted lo fuera, es posible que diera inmediatamente el valor exacto: 168; en este caso el problema resulta ser un mero ejercicio de reconocimiento, pues le ha bastado recordar lo que ya sabía.

El proceso de resolución de problemas se suele describir dividiéndolo en fases. Una forma clásica de hacerlo es la de Polya (1957) para quien al resolver un problema el resolutor atraviesa las fases de comprensión, planificación, ejecución y revisión o verificación. Ahora bien, esta secuencia de fases sólo se produce cuando quien aborda el problema es un resolutor ideal. El resolutor real se comporta de una manera más anárquica, ya que, dependiendo de las necesidades del momento, se traslada de una fase a otra, pudiendo retroceder, cuando se encuentra atascado, a fases que en la secuencia son anteriores. En definitiva, su actuación para nada es lineal.

Para concluir estas notas introductorias, y con la intención de que usted tenga una idea del arsenal teórico de que disponía el resolutor del problema que aquí se presenta, conviene que cite las cuatro categorías de conocimientos que, según Schoenfeld (1985), ayudan a describir la conducta del resolutor durante el proceso:

— *Recursos.*—Lo que se da en llamar «conocimientos previos» (conocimientos, representaciones, destreza...).

— *Heurística.*—Técnicas, procedimientos, estrategias generales. Las herramientas que ayudan a moverse en el espacio del problema.

— *Gestión o control.*—Toma de decisiones sobre los recursos y reglas que conviene elegir.

— *Creencias.*—Donde interviene desde la idea que se tiene sobre vivir bien, hasta lo que se entiende por «resolver problemas».

Y ahora pasamos a la acción. Comprobemos sobre el terreno lo que he estado comentando. Y la mejor forma parece ser, sin duda alguna, la resolución de un problema.

El problema

Los machos de una especie animal provienen de huevos que no han sido fertilizados, esto es, tienen madre, pero no tienen padre. Las hembras, por el contrario, provienen de huevos fertilizados; tienen, por tanto, madre y padre. Yo soy un individuo de esa especie de la 12.ª generación. ¿Cuántos antepasados macho tengo?

Este problema ha sido tomado de *Thinking Mathematically* (Mason, Burton & Stacey, 1982, págs. 101-102), modificando el enunciado: en ese libro se especifica la especie animal (abejas) y la pregunta es distinta («¿Cuántos antepasados tiene una abeja macho *en* la 12.ª generación hacia atrás? ¿Cuántos de ellos son machos?»). Las modificaciones permiten que el resolutor se identifique con los personajes que aparecen (gracias a que la pregunta se personaliza: «Yo soy [...] tengo?»), hacen que haya que añadir información a la que da explícitamente el enunciado («Yo» puede ser macho o hembra), y aumentan algo la dificultad (al preguntar por el total de antepasados en las doce generaciones anteriores y no el número de antepasados en la 12.ª generación). Seguramente Mason, Burton & Stacey transformaron también una versión anterior del problema, quizá con conejos. Los problemas, como las canciones populares, pasan de mano en mano sin que haya que pagar derechos de autor. Si a usted acaba gustándole este problema, puede buscar la versión con ratas que trae Lange (1987) en la página 46.

¿Por qué no lo resuelve?

Pero no puede acabar gustándole si no intenta resolverlo. ¿Lo ha hecho ya? Si no es así, ¡ánimo!, abandone la lectura de este artículo por un momento, coja papel y lápiz, o bolígrafo, o pluma, y manos a la obra...

El relato de cómo lo resolví yo

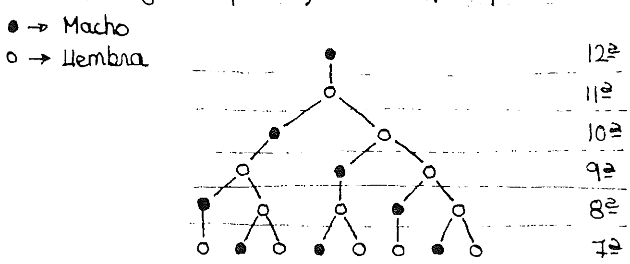
A continuación le presento a usted la forma particular como yo resolví hace algo más de un año el problema en cuestión, y cómo describí lo que había hecho para ello. No pretendo que esta manera de resolverlo sea la mejor, ni que sea original o elegante, seguro que no lo es. De hecho, no he querido rectificar nada de lo que escribí originalmente para que pueda verse sobre mi propio ejemplo que no siempre la resolución de un problema sigue una línea recta, sino que se hacen intentos que no fructifican; y cómo, sin embargo, hay planes frustrados que también ayudan a alcanzar la meta. El texto que presento hay que leerlo, pues, como un protocolo.

Podrá observar que la narración de la resolución del problema está dispuesta en dos franjas verticales. La de la izquierda se refiere a la resolución del problema propiamente dicha; la franja de la derecha la utilicé para hacer comentarios sobre los procesos que se produjeron durante la resolución. Puede usted leer las dos franjas en paralelo, o, quizá mejor, leer primero la de la izquierda hasta el final, para luego leer la de la derecha, relacionando cada párrafo con lo que le corresponda a su izquierda.

Primero, leo detenidamente el problema, para saber lo que me dicen, y qué tenemos que conseguir a partir de los datos que nos dan.

Observo que no ~~me~~ nos dicen si somos machos o hembras, y me parece que esto variará la solución del problema... Voy a suponer que somos macho.

Bien, voy a explorar, a ver que pasa...



Se me complica mucho. Es claro que del árbol puedo sacar algunas conclusiones que me aclaren el problema, pero no es un método práctico para obtener la solución.

— ✱ —

Bueno, una primera idea sería hacer una tabla con los datos que ya sabemos, y así intentar conseguir una pauta que nos dé la pista para solucionarlo:

GEN.	M	H	TM	TH
12	1	0	1	0
11	0	1	1	1
10	1	1	2	2
9	1	2	3	4
8	2	3	5	7
7	3	5	8	12
6	5	8	13	20

COMPRENSIÓN - EXPLORACIÓN.
Primera fase en la resolución de problemas.
Se estudia el enunciado para conocer el campo en el que nos vamos a desenvolver.
Esta parte no debe terminar a lo largo de todo el problema. Con ello evitaremos interpretaciones erróneas de lectura.

La exploración sistemática es imprescindible.
Debe ser clara y secuencial. No debe suprimirse ningún paso.

Figura o diagrama.
Los procedimientos de representación deben ser adecuados y claros.

__Nota__: Debo aclarar que los consejos e imperativos que aparecen en estos comentarios, no pretenden sentar cátedra de lo que se debe o no se debe hacer al resolver ~~el~~ un problema, sino que se circunscriben a mi forma particular de resolverlo en este caso concreto. Es evidente que algunas apreciaciones pueden también generalizarse. Pero repito que en mi ánimo no está aleccionar a nadie.

Debe explorarse hasta obtener conjeturas, que no deben desecharse hasta que no se ha demostrado que es falsa.

El símbolo — ✱ —, significa que nos paramos unos instantes a pensar. Interrupción de la acción para recapitular sobre la misma.

Patrón, pauta, regularidad.
Se sigue explorando en busca de una pauta a partir de la cual se pueda establecer un plan a seguir.

Me paro a pensar qué pistas nos da la Tabla:

– Los machos de una generación son iguales a las hembras de la anterior. (Lógico, porque ya el enunciado del problema nos decía que los machos no tienen padre).

– Las hembras de una generación son iguales a la suma de machos y hembras de la anterior. (También se deducía del enunciado, porque todos los individuos, sean machos o hembras, tienen madre).

– Tanto los machos como las hembras de una generación son iguales a la suma de los individuos de su mismo sexo de las dos inmediatas generaciones anteriores (a partir de la anterior a la nuestra).

Hay que darse cuenta que continuamos en la primera fase del la resolución del problema. Seguimos explorando, moviéndonos por el espacio del problema para llegar a comprenderlo.

Se infiere lo que se puede, pero siempre es importante tomar nota de ello.

Con estos datos, se nos hace fácil resolver el problema, sólo tendremos que continuar la tabla cinco generaciones más, hasta llegar a la primera.

Una buena representación sistemática de los datos nos ha permitido obtener las bases precisas para la obtención de la solución.

GEN	M	H	TM	TH
5	8	13	21	33
4	13	21	34	54
3	21	34	55	88
2	34	55	89	143
1	55	89	144	232

La solución es, por tanto, 144 machos.

La comprobación del resultado se ha hecho innecesaria, porque la propia sistematicidad de la representación es una prueba más que suficiente.

Ahora nos quedaría resolverlo suponiendo que nosotros fuéramos una hembra, pero no tiene mayor interés pues equivaldría a empezar por la ~~[illegible]~~ décimo-primera generación de la tabla, y añadir una generación cero. Con recortar nuevamente, ya estaría.

Volvemos al enunciado. Al tomar, en un principio, la decisión de ser macho, se había cerrado el problema en un aspecto que estaba abierto.
Ahora retomamos el abánico de posibilidades, y damos a cada caso la solución adecuada.

El problema, por tanto, no ha sido difícil de resolver, pero no nos podemos quedar aquí, pues inmediatamente se nos plantea otro, más general:

"¿Qué pasaría ~~sea~~ si en lugar de ser la 12ª generación, fuera la 58ª, ... o la enésima?

Bien, ya cambia la cuestión.

MÁS ALLÁ
Se intenta sacar el máximo jugo al problema, variando alguna de las condiciones del enunciado.

Con esta modificación podremos observar más claramente las cuatro fases que pueden tener lugar en la resolución de problemas.

Volvemos a empezar. Exploremos la nueva situación. Y para ello podemos recordar lo que ya sabemos:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$$

Esta era nuestra tercera conclusión después de observar la tabla.

Pero, ¿qué podríamos hacer para conseguir esa ecuación que nos dé el resultado general?

COMPRENSIÓN - EXPLORACIÓN.

ELABORACION DEL PLAN.
Control: Toma de decisiones.
Se decide el procedimiento a seguir.

— * —

Un primer intento podría ser observar las diferencias sucesivas entre los distintos componentes de las generaciones, para ver si consigo alguna pauta que me explique mejor lo que pasa, si hay alguna relación:

EJECUCION DEL PLAN.
Tras concebir el plan se pone manos a la obra.
Patrón, pauta, regularidad.

GEN	TM	
12	1	
		0
11	1	
		1
10	2	
		1
9	3	
		2
8	5	
		3
7	8	
		5
6	13	
		8
5	21	

Tampoco conseguimos nada, porque la pauta de la diferencia es idéntica a la original.

Por aquí no vamos a ninguna parte.

¿Cómo puedo seguir?

Abandono del plan.
Es infructuoso, y vuelve a realizarse un control para decidir como se continuará.
El plan inicial no tiene porqué ser siempre válido.

— * —

ELABORACIÓN DEL PLAN.
Se concibe otro plan.

Tengo una idea. Vamos a aprovechar el concepto de recurrencia que hemos obtenido antes. Veamos si jugando con ello podemos conseguir algo. $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$

EJECUCIÓN DEL PLAN.

$M_1 = 1$

$M_2 = M_1 + M_0 = 1$

$M_3 = M_2 + M_1 = 2M_1 + M_0 = 2$

$M_4 = M_3 + M_2 = 2M_2 + M_1 = 3M_1 + 2M_0 = 3$

$M_5 = M_4 + M_3 = 2M_3 + M_2 = 3M_2 + 2M_1 = 5M_1 + 3M_0 = 5.$

Así no vamos tampoco a ninguna parte. Es un callejón sin salida.

Nuevo abandono.
Vuelve a demostrarse que no siempre todos los planes son buenos. No siempre se produce el resolutor ideal.

— * —

Aprovechando la idea de antes voy a intentarlo de otra forma:

$$= M_9 + M_7 + M_5 + M_3 + M_2 = M_9 + M_7 + M_5 + M_3 + M_1 + M_0$$

Tampoco sé qué hacer con esto.
Abandono la idea.

Control: Se decide continuar por el mismo camino.
Nuevo intento.

Abandono definitivo.

Me paro. Me alejo del problema por si me he bloqueado, y después vuelvo a él... Reviso desde el principio...

¿Qué quiero hacer? —Buscar una fórmula que me dé el total de machos en cualquier generación.

Ante el bloqueo es adecuado un replanteo total del problema. Volver a retomarlo desde su enunciado, y hacerse una triple cuestión:

- ¿Qué hago?
- ¿Para qué lo hago?
- ¿En qué me va a servir?

— * —

Sigo sin tener una idea que me abra el camino, y me pregunto si verdaderamente tendrá solución, si habrá o no una fórmula...

Bueno, aquí cambia la cuestión, consultaré a algún compañero para ver si la ha encontrado o no. Si la ha encontrado quiere decir que tendré que trabajar más, si no la ha encontrado me apoya la idea de que puede no existir solución.

Consulta a un experto.
Este puede ser un método muy eficaz para resolver situaciones problemáticas. La dificultad puede residir en encontrar la persona o la fuente adecuada.

¿A quién preguntar? ¿A algún experto... Consultaré a Visi...

¡Vaya! Ella también ha consultado a otro experto, y éste la ha conducido a un libro de análisis. Según Visi existe la fórmula, pero no hay por donde cogerla de lo complicada que resulta.

Me lío, no intento cogerla. Pero voy a trabajar un poco más. ¡A funcionar los circuitos...!

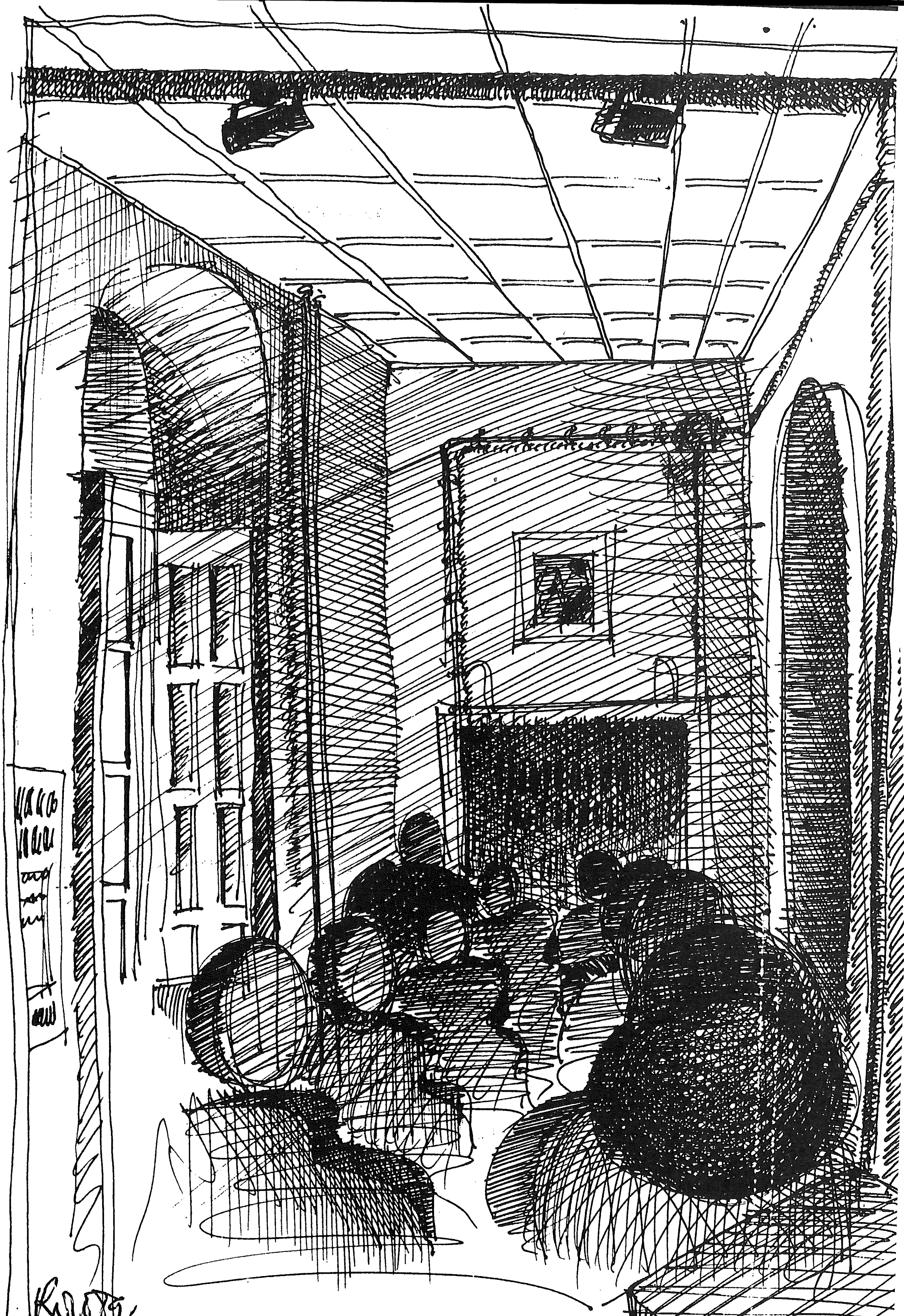
— * —

Control.

Hasta ahora siempre he intentado encontrar una pauta a partir de la diferencia de animales entre generaciones sucesivas. Y estoy pensando que puede que no exista esa pauta "aritmética", pero sí puede existir una pauta "geométrica".

ELABORACIÓN DE UN NUEVO PLAN.
Nuevamente comienza el proceso.

Lo averiguaré dividiendo el nº de machos de cada generación por los que había en la anterior.



EJECUCIÓN DEL PLAN

GEN	M	
1	1	
2	0	
3	1	
4	1	1
5	2	2
6	3	1'5
7	5	1'66
8	8	1'6
9	13	1'625
10	21	1'61538
11	34	1'61904
12	55	1'61764
...		
16	377	
17	610	1'618037135
...		
39	24.157.817	
40	39.088.169	1'618033989

¡Esto funciona!

Se encuentra la pauta.

A mayor generación el intervalo de variación es menor.

Este nº ya se repite.

En general: $\frac{Mn}{Mn-1} = 1'618033989$

Por tanto, el resultado puede ser:

$$\frac{Mn}{Mm} = (1'618033989)^{n-m}$$

Se obtiene la solución al plan parcial, y a continuación se pasa a la revisión.

Por ejemplo:

$$\frac{M_{17}}{M_{12}} = (1'618033989)^{17-12}$$

Revisión.

$$\frac{610}{55} = 1'618033989^{5}$$

$$11'09 = 11'09016994$$

Nos da un error de $6'6644 \cdot 10^{-3}$ %. Aceptable.

Es evidente que el error nos quitará exactitud para generaciones muy dispersas, en las que nos podremos ir en varios números.

Vamos a intentar perfeccionarlo.

Una vez conseguida la comprobación de la solución del primer plan parcial, se elabora un segundo plan para perfeccionar el anterior.

Observo otra vez la tabla, y me pregunto cuál será la relación opuesta a la obtenida anteriormente. Si $M_n/M_{n-1} = 1'618033989$, ¿cuánto valdrá M_{n-1}/M_n?

Introducción de un dato nuevo.

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = 0'618033988$$

Reconsideración.

¡Caracoles! ¡Nos ha dado lo mismo quitándole una unidad! ¿Porqué?

Control.
Se trata de dar una explicación razonable a este nuevo dato.
Se intuye que puede ser la pista definitiva para la resolución del problema.
Hay que tener en cuenta que muchos problemas se resuelven intuitivamente, otros gracias a la casualidad, y otros por lo que se da en llamar la idea feliz.

— * —

Tengo una idea:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{M_n}{M_{n-1}} = \dfrac{M_{n-1}+M_{n-2}}{M_{n-1}} = 1+\dfrac{M_{n-2}}{M_{n-1}} \\ \qquad\qquad \dfrac{M_{n-2}}{M_{n-1}} = \dfrac{M_{n-1}}{M_n} \end{array}\right\} \dfrac{M_n}{M_{n-1}} = 1+\dfrac{M_{n-1}}{M_n}$$

ELABORACIÓN DEL PLAN
Se tiene confianza en esta organización bastante algebraica, pues a priori parece que todas las piezas van encajando.

Ya se ve lógico.

Y ya que parece que por esta vía estamos inspirados, vamos a continuar, con la intención de poner una generación en función de la sucesiva, ya que la fórmula que buscamos desde el principio es la que nos relaciona diferentes generaciones.

Parece más fácil comenzar por dos continuas, cuando ya conocemos más cosas de ellas.

A partir de ahora en lugar de llamar a las generaciones sucesivas M_n y M_{n-1}, las llamaré "a" y "b", para simplificar.

Se busca una nomenclatura más clara y eficaz, aun a costa de perder información.

Lo dicho, vamos a relacionarlas, despejando una:

EJECUCIÓN DEL PLAN.

$$\frac{a}{b} = 1+\frac{b}{a} \rightarrow \frac{a}{b}-\frac{b}{a} = 1 \rightarrow \frac{a^2-b^2}{ab} = 1 \rightarrow a^2-b^2-ab=0$$
$$b^2+ab-a^2=0$$

Resuelvo la ecuación de segundo grado:

$$b=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4.1.a^2}}{2} = \frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} b_1 = \dfrac{-a(1+\sqrt{5})}{2} \\ b_2 = \dfrac{-a(1-\sqrt{5})}{2} \end{cases}$$

Recuerdo que ~~para~~ lo que para algunas personas puede ser un problema algorítmico (solución de una ecuación de segundo grado), para otras puede ser irresoluble, o al menos mucho más dificultoso en su caso.

¿Por qué salen dos relaciones?

Veamos si con un ejemplo podemos aclararnos:

$$a = M_{16} = 377 \rightarrow b_1 = \frac{-377\,(1+\sqrt{5})}{2} = -610$$

Este es el posterior.

$$b_2 = \frac{-377\,(1-\sqrt{5})}{2} = 233.$$

El anterior.

¿Se cumplirá también para números pequeños?

$$a = M_6 = 3 \rightarrow b_1 = \frac{-3\,(1+\sqrt{5})}{2} = -4'85 \simeq -5$$

$$b_2 = \frac{-3(1-\sqrt{5})}{2} = 1'85 \simeq 2$$

Con mayor error, pero también se cumple.

Consideración de un caso.
Ante una situación problemática en la que no se logra una sólida comprensión, puede considerarse un caso particular que pueda resolvernos la pregunta.

Bien, ya tenemos una fórmula que nos da el nº de machos de la generación anterior y el de la posterior, pero lo que buscamos es poder alcanzar cualquier generación.

¿Qué podemos hacer?

Voy a volver a revisar por encima lo que hemos hecho...

Nuevamente la comprobación de casos particulares nos reafirma nuestra conjetura inicial. Por tanto continuamos avanzando en el problema.
Se volverá a formular otra conjetura, o en su defecto se elaborará un plan que nos permita continuar.
Revisión. Vuelvo a referirme a la conveniencia de revisar lo trabajado. Esto ayuda a no desviarse de la línea establecida, y en ocasiones a caer en la cuenta de cuestiones que pasan inadvertidas, aún cuando son cruciales.

Tengo una idea. Vamos a seguir con el criterio de antes. Si para relacionar generaciones dispersas elevábamos el número 1'618033989 a una potencia que venía dada por la diferencia de generaciones, elevemos nuestro paréntesis a una potencia, y veamos que pasa.

ELABORACIÓN DE UN PLAN

$$a = 377 \rightarrow b_{1_2} = \frac{-377\,(1+\sqrt{5})^2}{2} = -1974$$

EJECUCION DEL PLAN
Consideración de un caso.

Si miramos la tabla, 1974 es el doble de 987, que es el nº de machos de dos generaciones posteriores a la escogida. Por tanto, también deberemos potenciar el 2 del denominador.

$$a = 377 \rightarrow b_{1,2} = \frac{-377\,(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = -987.$$

¡Ahora, sí!

Sólo nos queda introducir algunos cambios a la fórmula para hacerla más funcional:

- Quitaremos el signo, para que nos den valores positivos siempre.

Puede observarse que durante todo el desarrollo del problema, aún teniendo claro aquello que buscamos (la fórmula), nos hemos ido conduciendo a partir de la consecución de submetas.
Cuando no es viable un ataque frontal al enemigo, es buena táctica ir minándole poco a poco por varios frentes, en pequeñas batallas.

• Daremos un valor fijo a lo que hasta ahora llamábamos "a". Un valor que sea suficientemente grande como para que los errores no sean excesivos, y no tanto como para que sea una cantidad enorme. Por ejemplo a = 2584 de la 20ª generación. También deberemos acordarnos de poner la potencia en función del 20.

• La variable en la fórmula será n, el valor a introducir. Valor de la generación que estamos buscando.

Quedaría así:

$$M_n = \frac{2584 \cdot (1+\sqrt{5})^{n-20}}{2^{n-20}}$$

O mejor:

$$M_n = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n-20}$$

Vamos a comprobarlo:

$$M_7 = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{7-20} = 4'96 \simeq 5 \qquad \varepsilon = 8'06 \cdot 10^{-3}$$

$$M_{40} = 2584 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{40-20} = 39088168'8 \simeq 39088169$$

$$\varepsilon = 4'88 \cdot 10^{-9}$$

Error, éste último, achacable a la calculadora.

Y de esta manera hemos llegado al final del problema.

Posteriormente podríamos revisar los datos del problema, las condiciones que propone el enunciado, con el fin de conseguir otros planteamientos, otra batería de problemas.

Por ejemplo:

- En lugar de tener las hembras un padre, que tengan dos, o tres, o n padres.
- Que los machos tengan dos madres, ...

Etcétera.

Pero no se alarme, no voy a seguir martirizándole más, únicamente se trata de que comprenda que el problema puede continuar tanto como nosotros estemos dispuestos, y siempre que pensemos que aún nos queda campo por explorar.

SOLUCIÓN
Ya se ha obtenido la fórmula deseada.
Habremos terminado cuando comprobemos que la relación que expresa se verifica realmente.

Una vez revisado y comprobado, se da por finalizado el problema. Sólo queda reconsiderar lo hecho, y tratar de sacar el máximo jugo posible.
Lo que se denomina MARCHA ATRÁS (revisión), y MAS ALLÁ (¿Podemos sacarle más jugo a la situación? ¿Puede servirnos para aprender más cosas?).

Para acabar

Una vez llegados hasta aquí puede que usted se pregunte para qué nos puede servir todo esto y por qué nos empeñamos en calentarnos tanto la cabeza. Una explicación es la siguiente. Para poder ayudar a otra persona a resolver problemas, conviene conocer las fases que tienen lugar en la resolución, el grado de complejidad que puede tener ese problema para la persona concreta que intenta resolverlo, los recursos de que puede disponer, y la heurística más adecuada para ese tipo de problemas; provistos de este conocimiento podemos intentar entender lo que el otro está haciendo. Pero, además, hay que estar atentos a los instantes en que el resolutor toma o ha de tomar decisiones que afectan significativamente al curso de la resolución: interviniendo en esos momentos (mediante sugerencias heurísticas o ayudando a controlar) podemos hacer que nuestra influencia en el proceso sea máxima, y que la perturbación que producimos localmente al intervenir sea mínima.

Es difícil que uno sea capaz de observar todos estos aspectos de la resolución de problemas cuando otra persona está trabajando, si uno mismo no ha sido capaz de describir su propia actividad al resolver un problema. Por eso calentarse la cabeza en alguna ocasión hasta este punto vale la pena si uno ha de enfrentarse con la tarea de enseñar a resolver problemas.

No quiero decir con esto que para prepararse para enseñar a resolver problemas lo único que haya que practicar sea la introspección. Ni siquiera la introspección *dirigida por una teoría* que he presentado aquí. La resolución de problemas en grupo, el análisis del proceso de resolución desarrollado por otras personas..., son igualmente convenientes. Este artículo no pretende ser un documento teórico. Simplemente intenta mostrar un ejemplo de alguna de las cosas que se realizan actualmente en algunas aulas de la Escuela de Magisterio de Valencia. A mí me ha resultado una experiencia digna de tenerse en cuenta. Espero que usted comparta mi opinión.

Referencias bibliográficas

LANGE, J. de, 1987, Mathematics, Insight and Meaning (OW & OC: Utrecht.

MASON, J., BURTON, L. & STACEY, K., 1982, *Thinking Mathematically* (Addison Wesley: London).

POLYA, G., 1957, *How to Solve It,* 2nd edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Trad. castellana, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965).]

SCHOENFELD A. H., 1985, *Mathematical Problem Soslving,* Academic Press: Orlando, F.L).