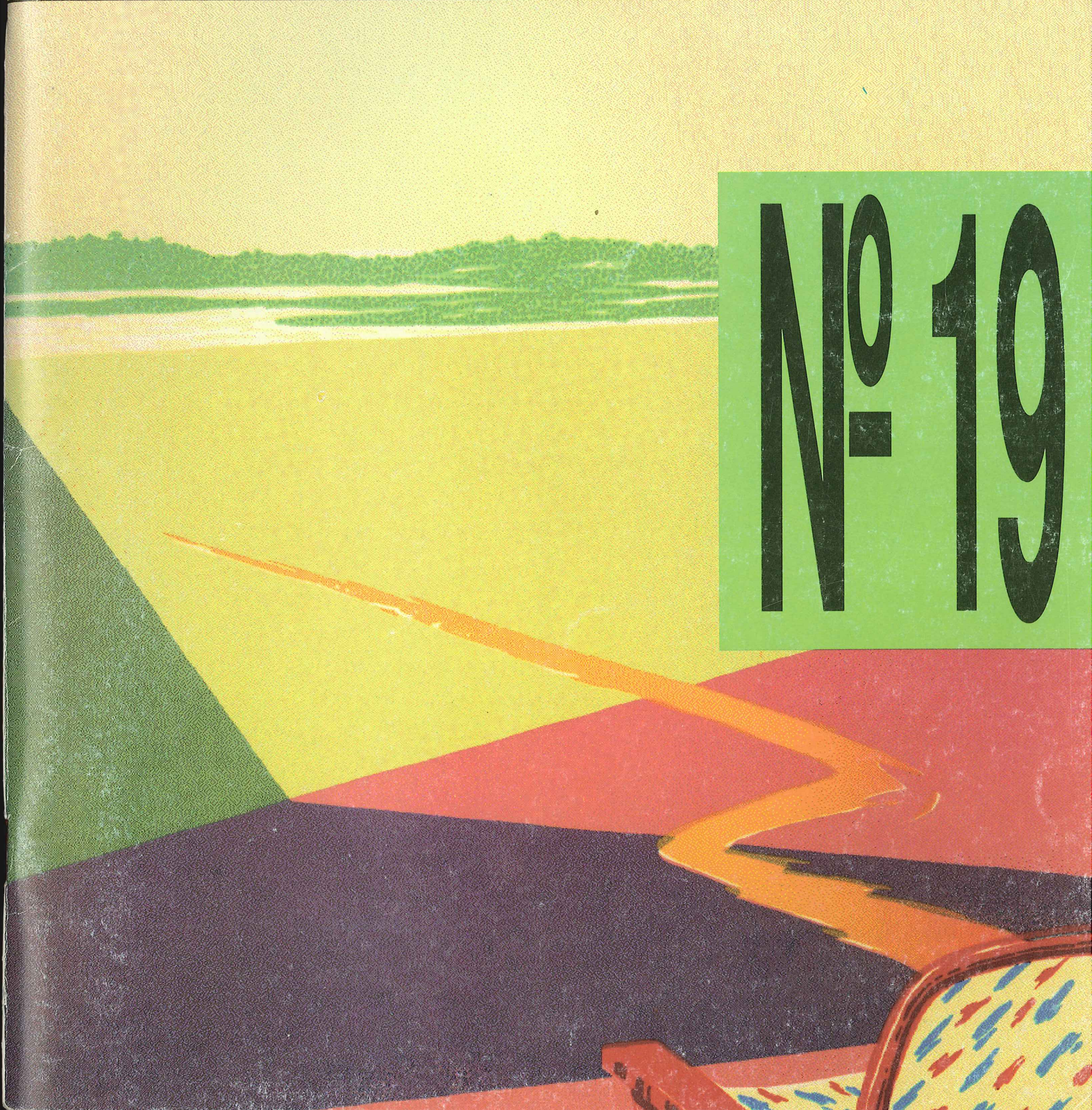
SUMA

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas



Nº 19

DIRECTOR:
Sixto Romero Sánchez

SUBDIRECTOR :
José Antonio Prado Tendero

ADMINISTRADOR:
Antonio J. Redondo García

CONSEJO DE REDACCIÓN:
Juan José Domínguez Alarcón
José Antonio Acevedo Díaz
Pedro Bravo Sánchez
Teresa Fernández Rodríguez
José Romero Sánchez

PORTADA:
Faustino Rodríguez

CONSEJO EDITORIAL:
Juan Antonio García Cruz, S.C.P.M. "I. Newton"
Claudi Alsina Català, Representante en el "ICMI"
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM "Puig Adam"
Francisco Javier Muriel Durán, Soc. Extremeña de Prof. Mat.
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM "Thales"
Angel Marín Martínez, SNPM "Tornamira" MINE
Florencio Villarroya Bullido, SAPM "P.S. Ciruelo"
Antonio Pérez Sanz, Soc. Madrileña Prof. Matemáticas
José A. Mora, S.E.M. Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"

EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines ADEMGI
Presidenta: María Antonia Canals
Apartat de Correus 835. 17080-Girona

Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals
Presidente: Angel Xifré i Arroyo
Apartat 1306-43200-Reus

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Prof. de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400-Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Prof. de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna (Tenerife)

SUMA

Sociedad Castellano-Leonesa de Prof. de Matemáticas.
I.B. Comuneros de Castilla.
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
C/ Batalla Villalar, s/n. 09006-Burgos

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática
Apartado 22045. 46071-Valencia

Sociedad Extremeña de Educ. Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia I.B. de Ribadavia. Coordinador: Andrés Marcos García
C/ Rodríguez Valcárcel. Ribadavia. 32400-Orense

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado 9479. 28080-Madrid

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

PAPEL 100% ECOLÓGICO

***Depósito legal:* Gr. 752 - 1988**
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Tlf. (958) 550381
ARMILLA (Granada)

RIO

INFORMACIÓN

RESEÑAS

MISCELÁNEA

ARTÍCULOS

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

Suplemento "Para Coleccionar"

Calendarios Matemáticos del Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"

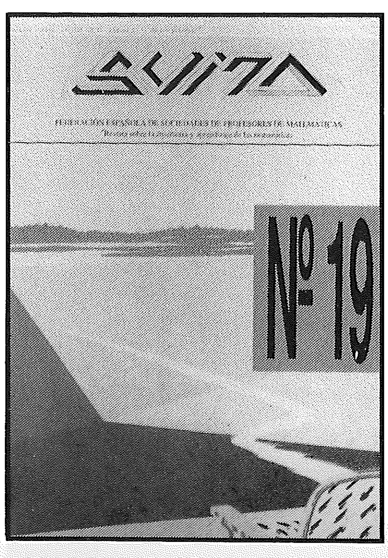
EDITORIAL

"Sólo podremos comprender un Universo hecho, tallado, formado por nosotros mismos".

Nietzsche

Desde el número inicial hasta la actualidad han pasado siete años. Se decía entonces "...lo que en ocasiones pudo ser una utopía puede tomarse en realidad". ¡Es cierto! con mucha ilusión y trabajo hemos conseguido llegar al número 19.

Todos sabemos que la revista SUMA, nuestra revista es, y así debe ser, el órgano de difusión de los enseñantes de matemáticas, pero su administración es dura e intensa; no obstante merece la pena dedicar todo el esfuerzo necesario para que desde las diferentes secciones mostremos nuestro quehacer diario en el aula. Quizás machaconamente, y les pido disculpa por ello, he insistido en los últimos números que SUMA os necesita. Permítanme una última llamada a la colaboración: no se puede hacer una revista sin artículos.



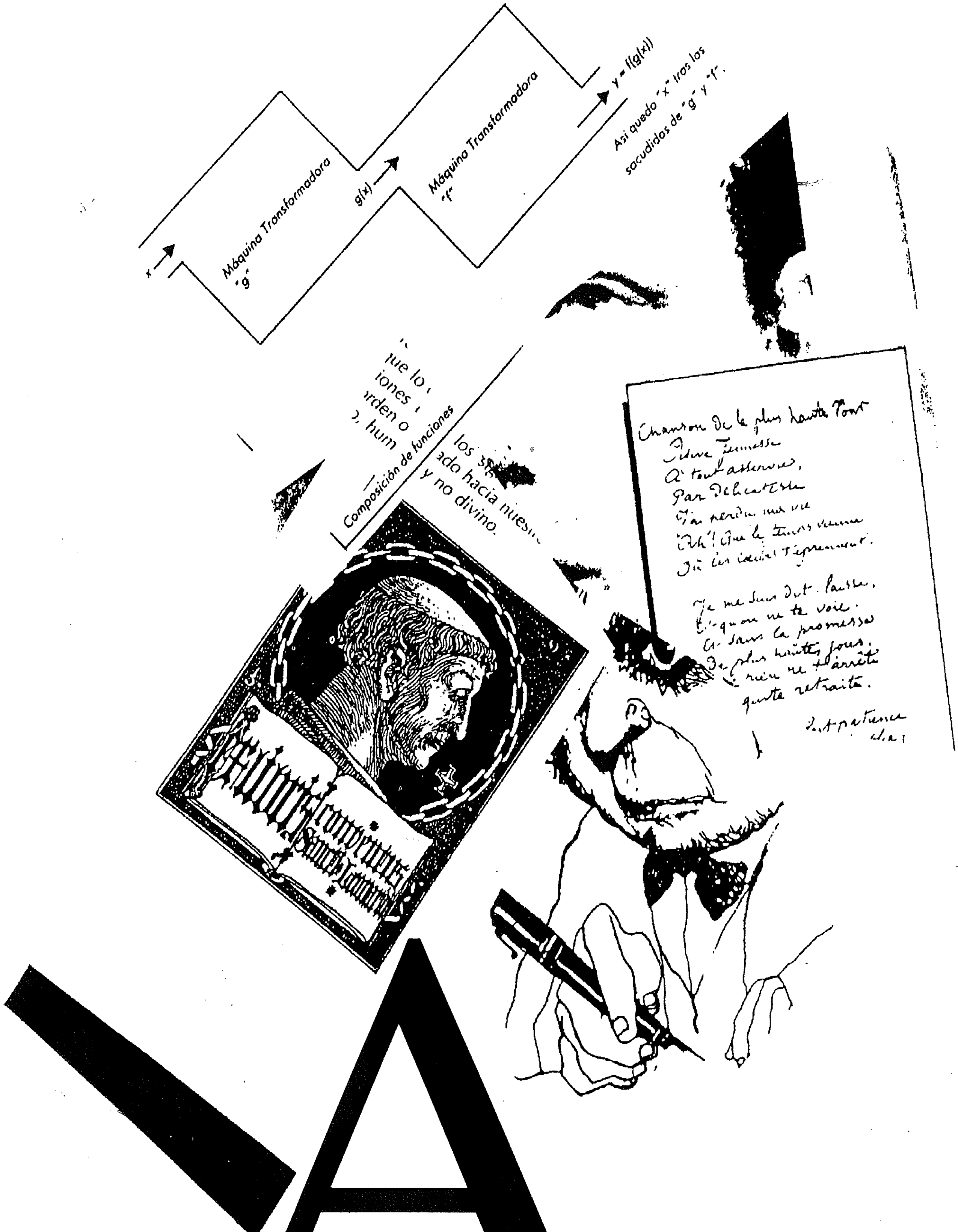
A partir del número veinte la responsabilidad va a recaer en los compañeros Emilio Palacian y Julio Sancho de la Sociedad Aragonesa, y me gustaría repetir las palabras de mi antecesor Rafael Pérez: será un honor trabajar con ellos, estando siempre a su disposición.

Por otro lado el reto de ICME'8 sigue adelante y ahora más que nunca nos tenemos que volcar con los compañeros que llevan tras sus espaldas la organización de tan importante evento para nuestra Federación.

Quisiera terminar este editorial agradeciendo la colaboración y la participación de todos aquellos que han hecho posible SUMA.

¡Hasta siempre!

S. Romero


x
Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedó "x" tras los sacudidos de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.
Chanson de la plus haute Tour

ARTICULOS

Apología de la utilidad y el realismo(*)

Claudi Alsina

Hace muchos años D. Pedro Puig Adam impartió en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid una curiosa conferencia a la que tituló "Apología de la inutilidad" donde realizaba, con especial convicción, una defensa de las matemáticas en los estudios técnicos. Con el título que aquí se ha elegido quiere defenderse no la utilidad de las matemáticas en general para la Ciencia y Técnica sino la utilidad de las mismas en relación a la formación educativa. Consideramos que la justifiación última de la presencia de las matemáticas en las escuelas técnicas es, precisamente, su *valor educativo* y no el valor intrínseco de las fórmulas o los teoremas o el de dar soporte formal a otras disciplinas. Con ello intentamos dar otra dimensión a la palabra utilidad. Un concepto o un resultado será útil si instruye al que lo aprende y será completamente inútil si en nada influye en el sujeto que lo recibe.

Pero a la vez hemos incluido en el título otra palabra: realismo. Nuestras matemáticas se desarrollan en unas escuelas concretas, con unas características propias, en un entorno, con unos límites horarios, con unas formaciones previas de nuestros estudiantes, con unos usos en otras materias, bajo una legislación peculiar... y con unos/as alumnos/as que tienen su propia personalidad, talento y receptividad y afición. Así pues intentaremos no seguir por el camino habitual de "necesitamos explicar integrales de línea porque las necesitan en física", sino que intentaremos hablar de aquellos problemas educativos que en nuestra docencia matemática se plantean. Sin dejar de lado la utopía de que es posible una mejora, día a día, de nuestro labor.

Nuestro contexto es el que es

En nada sirve comparar nuestra situación actual y nuestros objetivos con lo que ha sido la evolución de las matemáticas en escuelas técnicas a lo largo de este siglo en España. Ni las cátedras son únicas, ni existen los exámenes de ingreso, ni las clases son minoritarias, ni las profesiones hacen el trabajo que hacían, ni los alumnos acceden a los catorce años, etc. Nuestra realidad es otra, nuestra clientela es otra y nuestra actuación debe ser otra. Desde que entró en vigor la Ley de Reforma Universitaria son muchos los cambios introducidos en nuestras universidades y escuelas. Algunos aspectos han resultado ser especialmente brillantes (autonomía universitaria, creación de nuevas universidades, valoración de la investigación, reestructuración de los cuerpos docentes,...). En otros aspectos, el resultado de los cambios previstos por la LRU y sus decretos aunque idealmente fueran correctas han tenido una implantación concreta de dudosa eficacia. Así la departamentalización, positiva para los profesores, ha difuminado y/o dinamitado la estructura de centro en perjuicio de los estudiantes y sin embargo la departamentalización como tal no ha producido, paradójicamente, una distribución más ágil y dinámica de los enseñantes (casi todo el mundo sigue donde estaba, dando lo que ya daba).

(*) Este artículo ha sido la Conferencia Inaugural de las II Jornadas sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Técnicas en Junio de 1994 en la Universidad de Huelva.

En los últimos años hemos asistido a la fase de la reforma de los planes de estudio yendo hacia un modelo educativo de corte anglosajón (en la vertiente de optatividad, estructura crediticia, duración de los estudios, etc.), pero no exento de corte hispano (troncalidad-obligatoriedad en base a homologaciones). Hay dos aspectos de las directrices para los planes de estudio que preocupan:

a) Las reformas universitarias de planes de estudio se realizan en total desconexión educativa con las reformas de los niveles educativos pre-universitarios;
b) Las reformas universitarias de planes de estudio no se sostienen sobre un planteamiento pedagógico sino que se deslizan hacia temáticas "docentes" (nombres de asignaturas-áreas de conocimiento-créditos) que nada tienen que ver con la educación efectiva a reformar.

Muchas de nuestras escuelas han dependido de organismos muy diversos y han formado muchas generaciones de técnicos con planes de estudio muy diferentes, con ingresos muy diversos y con planteamientos docentes absolutamente dispares.

Afortunadamente la vida hace el milagro de que en cada generación surjan buenos profesionales sea cual sea el plan de estudios seguido. **Los planes de estudio dependen de los profesores y los estudiantes y no del organigrama descriptivo del propio plan**. Por todo ello cabe esperar que sólo cuando se dé un consenso y una complicidad positiva entre profesores y estudiantes de una escuela habrá un progreso real y un cambio significativo que sea pedagógicamente enriquecedor.

Sobre algunos mitos referenciales

Quisiéramos aludir en este apartado a algunos "mitos" vigentes hoy en ciertos sectores del profesorado de matemáticas de carreras técnicas. Nos atrevemos a usar la denominación "mito" en el sentido de que dichas concepciones no siempre se ajustan a la realidad que hoy vive nuestra enseñanza y nuestra sociedad.

(a) ***El mito del profesional autosuficiente***

La imagen del ingeniero-arquitecto autosuficiente para diseñar, calcular y realizar **cualquier proyecto** sigue en cierta manera presente. Esta imagen es abonado por la legislación española sobre responsabilidades civiles y derechos profesionales. Sin embargo la realidad de nuestra década no se corresponde con la concepción renacentista del técnico-integral. Proliferan los estudios, las empresas, la colaboración con profesionales diversos... parece más importante la capacidad de diálogo y crítica que la autosuficiencia solitaria. ¿No debe reflejarse esta situación en los programas de matemáticas?

(b) ***El mito de la formación duradera***

La falsa creencia de que lo que se enseña ya se recuerda y se domina para el resto de la vida hace tambalear a veces los programas. ¿Tienen caducidad los recuerdos o el manejo de los temas? ¿Se montará un sistema de recordatorio para post-graduado? Seguramente debe asumirse el carácter inicial de los estudios y la necesidad de futuras formaciones o de reciclaje o de ampliación.

(c) ***El mito de la carrera para siempre***

Se creyó durante mucho tiempo en que el estudio de una carrera ya "completaba" la formación profesional del individuo de lo cual se inducía la importancia de ofrecer "todo" el conocimiento posible. Hoy por hoy puede afirmarse que necesariamente ningún técnico podrá vivir de renta de sus estudios iniciales. Hay que educar en el saber adaptarse.

(d) ***El mito de la inutilidad útil***

A través de algunos ejemplos singulares donde la matemática abstracta fue por delante de la aplicabilidad de la teoría se pretenden justificar ciertos temas. Parece como si debiera esperarse al milagro de su futura aplicación. Y a menudo estos temas... ¡eviten la inclusión de otros que sí han demostrado ser útiles!

(e) ***El mito del más allá y de los otros***

Se invocan a menudo como ideales de programación matemática los programas o libros de universidades lejanas, autores desconocidos o países poco afines al nuestro. Es peligroso invocar ejemplos de los que no se poseen detalles o de los que se desconoce el contexto o el objetivo educativo.

Aquellas famosas expresiones "en todos los sitios se dan ecuaciones diferenciales", "en Massachusetts el álgebra lineal es muy fuerte", etc., son simples anécdotas a las que no debe darse mayor trascendencia.

La presencia de matemáticos en las escuelas acostumbra a ser a menudo una casualidad inicial y en muchos casos se defiende la autonomía disciplinar frente al carácter servicial, con propuestas curriculares indierenciables de las que se propondrían en cualquier otra carrera de tipo científico, tendiendo a proclamar el carácter imprescindible de todo lo que se explica y reproduciendo, de hecho, el modelo de profesorado que han conocido durante su formación matemática. El mito es justificar unas propuestas en relación a propuestas de otros colegas que a su vez, etc...

(f) *El mito de las otras disciplinas*

Un viejo mito profundamente arraigado en las escuelas técnicas es el del carácter "imprescindible" de ciertos conocimientos matemáticos en función del uso que de los mismos harán otras disciplinas. El que otras disciplinas puedan "en principio" usar ciertos resultados de matemáticas no asegura que los colegas concretos que las imparten lo hagan, ni cómo lo hacen, ¡si lo hacen!

(g) *El mito del nivel*

A menudo se hacen críticas apasionadas a un supuesto "nivel" secundario, decreciente y defensas a ultranza de un supuesto "nivel universitario" al que se intenta salvar. Es algo muy difícil de entender. ¿Se trata de ver un nivel medio de los estudiantes en el sentido del nivel de burbuja de la construcción? ¿se trata de un nivel resultado de un índice relativo respecto generaciones anteriores? ¿se trata del **nivel de subsistencia** como la cantidad mínima de matemáticas necesarias para sostener la vida universitaria? ¿se trata del **nivel de vida matemática** como la cantidad de matemáticas que puede impartirse con la capacidad media de una clase determinada? ¿acaso se trata de un nivel en el sentido de intensidad? ¿quizás el nivel matemático en el sentido mental como el grado de capacidad que muestra el desarrollo cuantitativo y cualitativo de la inteligencia?

No está claro en absoluto el término "nivel" al cual, tantas veces se apela. No vale hoy reivindicar aquella famosa expresión de D. Julio Rey Pastor:
"*... aquí abajo, con estos inteligentes pero pasivos estudiantes, que comienzan a serlo cuando el curso agoniza, debemos resignarnos a descender más y más el nivel de la enseñanza científica para técnicos, allanando toda dificultad, elaborando en suma, una especial Matemática de estuario*".

Se impone la serenidad:

(h) *El mito de las generaciones anteriores*

A través de unos nombres ilustres del profesorado de matemáticas de escuelas técnicas y de unos grandes profesionales que estudiaron con ellos, se intenta dar la imagen de que la enseñanza matemática de hace años en las escuelas técnicas era de alguna forma modélica o referencial. Cabe preguntarse: ¿cuántos nombres míticos y cuántas obras escritas han superado el paso de las últimas décadas? ¿cuántos alumnos fracasaron en las escuelas? ¿cuánta gente acudía a realizar estudios técnicos? Creo que cada momento tiene "su" realidad y de poco sirve extrapolar al presente lo que en el pasado se hizo, si ésto se realizó en otros contextos, en otros ambientes, en otras circunstancias y con otros objetivos.

Curiosamente "los recuerdos" de los profesionales hoy docentes en las escuelas influyen también en las discusiones sobre los programas de matemáticas.

Los "usos" matemáticos profesionales afloran a menudo en clave absolutamente personal "yo no las he usado nunca", "son imprescindibles en la sociedad informática actual", "ocupan demasiadas horas en perjuicio de otras asignaturas", etc. Cuando la Matemática se concibe al servicio estricto de las otras disciplinas aparece este amplio espectro de necesidades, entre el amor y el odio, entre lo imprescindible y lo sobrante. También las opiniones de los estudiantes de últimos cursos está en función del profesorado que han tenido y los programas seguidos, aumentando su visión crítica con los años al ir comprobando a veces que muchos conocimientos aceptados como utilizables al principio no son nunca reutilizados en otras disciplinas.

(i) *El mito de la formación de inteligencias*

Es la creencia ancestral de identificar la inteligencia como algo "medible" (¡evaluable!) y además expresable mediante habilidades matemáticas. Es el creer que al entender temas difíciles se desarrolla la inteligencia para cualquier otra disciplina. Es el mito de la contratación de matemáticos por las empresas cuando se esgrime el argumento "si han sido capaces de entender ésto también lo serán de entender lo otro".

(j) *El mito de que lo general asegura lo particular*

Es la creencia de que explicando "en general", el sujeto sabrá particularizar lo explicado o traducir el método a casos concretos. Es una creencia falaz y que anula el carácter "universal" de la matemática desde el punto de vista de su enseñanza: sólo desde la especificidad de aplicaciones es posible la comprensión del porqué de un programa o unos temas.

Está claro que sí pero ¿qué? ¿cómo? ¿cuándo?

En los más recientes estudios educativos sobre el porqué de las matemáticas en carreras técnicas hay un consenso internacional sobre la presencia de las Matemáticas en estos estudios en base a los siguientes argumentos:

a) El papel relevante, y de creciente interés de las Matemáticas en el desarrollo técnico actual;

b) Las Matemáticas forman parte de la cultura integral de la sociedad;

c) Las Matemáticas pueden ofrecer contenidos interesantes y específicos a estas carreras conjugando tanto el carácter formativo como el informativo;

d) Las Matemáticas pueden contribuir a engrandecer la imaginación, la creatividad, las facultades críticas, el diálogo inteligente y una formación que esté en consonancia con los tiempos finales de este segundo milenio.

Pero meditemos brevemente sobre el qué debería enseñarse. Para ello recordemos una lúcida reflexión de H. Pollack:

> *"Tradicionalmente, **las Matemáticas de la vida normal de cada día** han sido las Matemáticas de la escuela primaria. Las **Matemáticas para ejercer una ciudadanía inteligente** deberían ser básicamente las Matemáticas de secundaria. Las **Matemáticas de la profesión** deben ser las enseñadas en la etapa universitaria (si la profesión requiere estudios a este nivel). Las **Matemáticas como parte de la cultura integral** humana no han sido asignadas a ningún nivel educativo".*

Entendido así, nuestra misión sería **aterrizar en aquellos aspectos que puedan incidir en la formación hacia una profesión determinada**. Nótese que subyace en el planteamiento de H. Pollack un principio revolucionario: la formación matemática pre-universitaria debe tener sentido en sí misma logrando unos objetivos claros y que no son sólo los de la estricta preparación universitaria. No se trata de lograr un nivel arbitrariamente fijado desde la Universidad sino que es la universidad la que debe partir del nivel secundario alcanzado para plantear su enseñanza profesional concreta. Así la matemática para la profesión encuentra precisamente en este el referencial más importante de ejemplificación y límites.

Deben fijarse tanto los conocimientos a adquirir como los modos de pensamiento asociados con estos conocimientos

Este es un principio importante. Junto a cada conocimiento matemático debemos enfatizar aquella forma de pensar o razonar que permitirá tanto entender este conocimiento concreto como todos aquellos conocimientos de la misma índole que puedan aparecer en el futuro. Pensar en la precisión, la exactitud y la aproximación calculística, pensar estadísticamente, razonar geométricamente, analizar lógicamente,... Como dijo en su día D. Pedro Pi Calleja:

> *"en la enseñanza lo primordial es siempre educar, luego instruir; primero se debe formar hombres, luego hombres aptos, y esto basta, ya que en la aptitud está también la educación de la voluntad para perseverar en la especialidad a que nuestra vocación o destino nos llame".*

La tradicional localización de las Matemáticas al principio de las carreras es pedagógicamente justificable al enlazar con estudios inmediatamente anteriores a la etapa universitaria y al dar la base general de servicio a otras materias. No obstante aparecen hoy fenómenos nuevos. Por una parte los ajustados límites horarios de duración de los estudios y por otra la aparición de la organización semestral y de las ofertas optativas.

Parece oportuno aceptar que no pueden mantenerse contenidos que no tengan desde el primer momento un sentido para los estudios técnicos no pudiendo ser que los estudios del principio (¡el principio y el final cada vez están más próximos!) queden secuestrados por una artillería de usos futuribles. Desde el primer día, los alumnos deben ser estudiantes de temas propios de su futura profesión.

La estructura semestral obliga a precisar mucho más la temporalización educativa y la evaluación, con lo que ello implica de unificación de ritmos e intensidades.

Las asignaturas optativas pueden permitir ofertar cursos breves y monográficos sobre temáticos interesantes desde la especificidad, desde la vertiente computacional gráfico-numérica o desde la vertiente interdisciplinaria.

Es evidente que tenderemos a dar una programación de conocimientos matemáticos mínimos. Y ello no es dar "lo de siempre" en menos tiempo.

Quizás una solución posible ante la paradoja de que "hay menos tiempo cuando más hay que explicar" sería olvidarse del proceso deductivo formal y estructuras nuestras enseñanzas desde las habilidades que se pretenden desarrollar: inducir, aproximar, acotar, modelizar, resolver,... y ejemplificar en cada caso alternativas y posibles modelos matemáticos.

Un decálogo para las matemáticas en carreras técnicas

Si hace años D. Pedro Puig Adam hizo un maravilloso "decálogo para la secundaria" hoy me ha parecido interesante hacer un pequeño "decálogo" para las matemáticas de escuelas técnicas. Son unos principios sugerentes para contemplar positivamente nuestra actuación como profesores/as. Algunos principios son de hecho válidos en cualquier nivel educativo pero no por ello deben ser olvidados en nuestras clases. Otros son específicos y reafirman el compromiso con los estudios concretos:

1. *El aprendizaje debe ser un viaje, y no un destino, en el cual el profesorado debe actuar de guía.*

   Lo que tiene el máximo interés es compartir y guiar los procesos de matematización, inducir al descubrimiento, facilitar la discusión... siendo esto mucho más importante que la "exhibición" del profesorado en la pizarra o el terminar aceleradamente programas acabados "sobre el papel" pero no comprendidos por nadie. Tras esta filosofía está también la creencia de que los procedimientos, actitudes y motivaciones son tan importantes como los contenidos en su sentido tradicional.

2. *En la etapa universitaria la matemàtica que debe enseñarse debe tener como objetivo último formar futuros profesionales posibilitando una capacidad inteligente para ejercer una actividad tècnica.*

   Preparar para usar la matemática de la vida profesional es, en definitiva, lo que justifica que se estudien matemáticas.

3. *La matemática que podría enseñarse debería completar forma-*

ciones y preparar para una comprensión "dúctil" de los principios matemáticos útiles en las profesiones y los estudios.

Las personas deberán ser capaces de renovar sus conocimientos y habilidades, incluyendo las matemáticas, a lo largo de toda su vida. Formar para la "adaptabilidad" es un objetivo ineludible.

4. *Las matemáticas debe asumir las posibilidades tecnológicas e incorporar la labor empírica (de campo o de laboratorio).*

   Se aprenden matemáticas también empíricamente y como paso previo a la abstracción. Los usos tecnológicos deben ser compatibles con otras habilidades y suficientemente abiertos como para no depender de unas máquinas concretas. Y la tecnología debe entenderse en su amplio espectro actual, desde la tecnología visual a la tecnología computacional.

5. *Nuestras formas de evaluar deben permitir superar la puntuación clásica de los ejercicios individuales y rutinarios.*

   La evaluación debe ser más global y abierta, integrando proyectos, observaciones sobre actuaciones, labores de equipo, usos tecnológicos, etc.: lo que podríamos llamar una evaluación vectorial sensible a los muchos componentes que admiten evaluación constante y no simplemente singular y aislada.

6. *La enseñanza de las matemáticas en carreras técnicas debe estar comprometida con estas.*

   La universalidad del conocimiento no debe estar reñida con la concreción de su enseñanza. Y la dimensión humana también debe estar presente: las matemáticas son el resultado de una labor apasionante que hombres y mujeres han ido desarrollando en función de unos problemas e inquietudes históricas.

7. *La enseñanza de la matemática debe ser sensible a la diversidad de formaciones previas y talentos.*

   Es importante programar rutas o itinerarios educativos alternativos donde todos, con dificultades o con talento, puedan encontrar la oportunidad de llegar a aprender lo máximo posible, en relación a ellos mismos.

8. *La enseñanza de la matemática debe actualizarse constantemente y conectar con los recursos matemáticos de su época.*

   El futuro del libro enciclopédico es ciertamente dudoso. Necesitamos materiales más flexibles. La actualización constante también pasa por conectar con recursos de la matemática del siglo XX, lo que implica incluir nuevos temas en sustitución de otros. Por ejemplo, los recursos de matemática discreta y teoría de grafos ofrecen técnicas y problemas de gran poder y actualidad. Pero no debe confundirse ésto con dar paso a lo nuevo por el mero hecho de serlo (por ejemplo: la teoría de catástrofes o los fractales).

9. *Todo aquello que "funciona bien" no es preciso cambiarlo.*

   Las reformas en marcha lo son más sobre "una forma de hacer" que sobre "lo que hay que hacer". La reflexión debe centrarse en aquello que presenta carencias o es claramente mejorable.

10. *Nuestra labor es una de las más bellas del mundo y nos exige inteligencia pero también humanidad y amor.*

   Aquí es donde nuestra particular asignatura pasa a un segundo término y nuestra labor adquiere un carácter emotivo y sensible. Más allá de lo verdadero y de lo falso, del teorema curioso o del algoritmo convincente, está la preocupación por hacer progresar unas generaciones universitarias que confían en nosotros y comparten parte de juventud a nuestro lado.

Permitan que acabe citando de nuevo a D. Pedro Puig Adam. Él dijo en una ocasión:

> *"Educar es, en el fondo, cultivar al mismo tiempo, el conocimiento de lo que es verdadero, la voluntad de lo que es bueno y la sensibilidad de lo que es bello".*

Quizás esta frase es un resumen de lo que las matemáticas en las carreras técnicas también deberían ser. Muchas gracias.

Claudi Alsina
Sec. Matemáticas e Informática
E.T.S. Arquitectura de Barcelona
U.P.C. Barcelona

Geometría de coordenadas[1]

Francisco Jesús García García

En estos días el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada dominio de las matemáticas.
Hermann Weyl

El método de las coordenadas, además de tener un conjunto de aplicaciones de amplio espectro –cronología, geografía, topografía, física, geometría,... –y de permitir la trascripción algebraica de determinados problemas geométricos, se fundamenta en ideas que son clave a la hora de comprender la eficacia de las matemáticas como herramienta de las ciencias. La tesis que aquí se sostiene es que esas ideas claves no se transparentan restringiendo la utilización del método de las coordenadas al estudio del caso supuestamente más simple, el sistema de referencia cartesiano en el plano.

Introducción

La Geometría Analítica se encuentra postergada a los últimos niveles de la enseñanza secundaria. Cabe atribuir la causa de este fenómeno a la gran cantidad de prerrequisitos –sobre todo algebraicos, pero también geométricos– que se supone deben exigirse para iniciar su estudio.

Paradójicamente, cuanto más tarde se introduce, más velocidad debe imprimirse a un recorrido que, clásicamente, tiene como meta una complicada geometría euclídea del espacio. Ésta, habitualmente, queda reducida a un pequeño listado de problemas, clasificados *ad hoc* para ser resueltos por un puñado de fórmulas parcamente relacionadas con la intuición inmediata y, en consecuencia, de difícil justificación para el estudiante medio. En compensación, dichas fórmulas son de aplicación mecánica y provocan la ilusión de dominio de la geometría analítica cuando, en realidad y en el mejor de los casos, lo único que proporcionan es un contexto para practicar algunas destrezas algebraicas.

La geometría analítica surge históricamente como un método que simplifica el tremendo esfuerzo de imaginación y razonamiento requerido por los métodos simplécticos[2]. El éxito histórico del método analítico no expide, sin embargo, un certificado de garantía sobre su eficacia en el aprendizaje de la geometría. Más bien, al contrario, la experiencia docente parece aportar fuertes indicios de que, pretendiendo romper las cadenas de Euclides, es demasiado fácil caer en las redes de Descartes[3].

Lejos de este punto de vista, aquí se plantea que la geometría analítica

[1] Reelaboración de las notas de la sesión de trabajo con el mismo título se desarrollo en noviembre de 1993 dentro del curso *La Geometría en la Enseñanza Secundaria* organizado por el CEP de Alicante.

[2] El método analítico es conceptualmente más potente que los métodos simplécticos en tanto que proporcina una ruta automática para atacar todos, supuestamente, los problemas geométricos.

[3] Un niño de corta edad es capaz de *comprender* que una recta y una circunferencia situadas en el mismo plano solo presentan tres posibilidades de incidencia. Esta misma propiedad se torna tremendamente oscura para el joven preuniversitario que se obceca en aplicar métodos analíticos.

puede ser concebida más bien como una parte de un concepto más amplio, la *geometría de coordenadas,* o método cartesiano, poderoso organizador conceptual que trasciende a la propia geometría, que no necesariamente está vinculado a grandes dosis de competencia algebraica, que admite aproximaciones con variados grados de formalidad y que, de modo natural, puede constituir, complementariamente al proceso de generalización de la aritmética y habida cuenta del potencia visual que contiene, uno de los más valiosos apoyos en los primeros pasos por los arduos terrenos de la descripción abstracta, la codificación y la simbolización algebraica.

Forma y esencia

Algunos mensajes son identificados por el receptor como tales aunque no sea capaz de atribuirles significado. Tal es lo que le ocurre a quien escucha una lengua extranjera que no entiende. La reacción característica del receptor en ese tipo de situaciones es desazón y retraimiento en sorprendente mezcla con curiosidad.

He aquí un ejemplo de esa clase de mensajes:

* = ❑

Ciertamente esta terna de caracteres no sugiere nada inmediato. De los tres, sólo el carácter central tiene una significación universalmente aceptada. Él es el responsable de que se perciba alguna relación o unidad entre los miembros de la terna. La relación es, sin embargo, paradójica. El signo = parece contradecir la evidente *desigualdad* de los otros dos caracteres, sea cual sea su significado. A semejanza del que, jugando con el dial, capta una emisora en un idioma incomprendido, no entendemos nada, pero tenemos la convicción de que no estamos en presencia de un ruido blanco de fondo.

Esa impresión se confirma si nos dedicamos a practicar un poco el divertimento preferido de los científicos, a saber, la modificación de las condiciones iniciales de los fenómenos para observar las variaciones que se producen:

m = n

Ahora es difícil resistirse a atribuir una interpretación *numérica* a la igualdad. Si m y n son cantidades relativas a distintas magnitudes o a la misma magnitud en distinta situación, puede tener sentido y coherencia afirmar su igualdad. Empezamos a identificar la voz que suena en el transistor.

¿Qué sugiere, sin embargo, esta otra modificación?

y = x

La respuesta inmediata es distinta. Si bien nadie se opondría a admitir la interpretación *numérica* anterior, intuitivamente resulta más agradable atribuir un significado *algebraico* al mensaje. Los conceptos de ecuación y de función se agolpan inevitablemente en la mente del observador matemático.

Si uno se fuerza a sí mismo a representar gráficamente la imagen que le sugiere y = x, resulta innecesario mencionar que automáticamente se produce una identificación con *la recta bisectriz del primer y cuarto cuadrantes de un sistema cartesiano rectangular*[4].

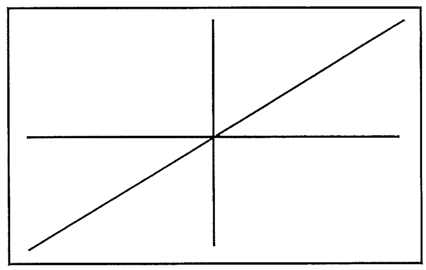


Figura 1
Visualización automática de $y = x$

Esta identificación automática, por muy *natural* que pueda parecer, es totalmente artificial, o si se prefiere *cultural,* y está relacionada exclusivamente con costumbres y hábitos irrelacionados con propiedades intrínsecas. La prueba estriba en la existencia de *visualizaciones* diferentes asociadas a interpretaciones distintas de la misma terna de símbolos. He aquí dos de ellas:

a) En el espacio tridimensional dotado de un sistema cartesiano de

[4] Obsérvese el alto contenido informativo de un mensaje que es una pequeña modificación de otro al que no se le había atribuido *ningún* significado.

referencia, y = x representa un plano. ¡Aquí para visualizar se requiere imaginar!

b) En el plano dotado de un sistema de referencia polar, *identificado* con ángulo e y con distancia al origen, se obtiene como representación una espiral de Arquímedes.

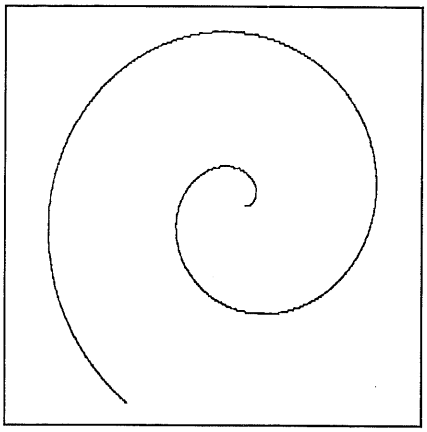


Figura 2
Una visualización alternativa de $y = x$

Desde un punto de vista formal, o algebraico si se prefiere, las cadenas

$$* = \square$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{n}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

son *esencialmente* equivalentes. La causa de que a la vista de la primera de ellas sea muy poco probable, por no decir imposible, generar una representación como la de la figura 3, se encuentra no tanto en la *forma* de los símbolos elegidos, como en la prevalencia en la mente del lector de la forma sobre la esencia, con la consiguiente inhibición reflexiva sobre el código o entorno que dota de sentido a las expresiones simbólicas

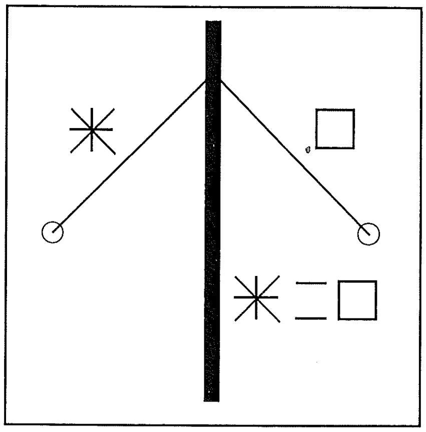


Figura 3
Visualización censurada de $* = \square$

Las ideas clave de la geometría analítica

El sorprendente *poder de las convicciones* puesto de manifiesto en la discusión de los inocentes ejemplos anteriores es una muestra del bien conocido, y no menos olvidadizo, principio de la relatividad del significado de los símbolos a un contexto o a un sistema de codificación prefijado.

Cuando el contexto es fijo o persistente su omisión no sólo resulta admisible sino también conveniente: relegar los presupuestos admitidos al terreno de lo implícito constituye un abuso intelectual elegante y eficaz. Tal sería el caso del arquitecto practicón, que no necesita recordarse cada día que sus proyectos se erigirán en un espacio euclideo.

Muy distinta se plantea la cuestión desde el punto de vista del aprendizaje: tan relevante, si no más, resulta la comprensión de los tópicos del sistema de codificación como de los mensajes construidos con él.

En el caso de la Geometría Analítica o geometría de coordenadas, esos tópicos se pueden enumerar fácilmente:

a) La fijación de un *entorno* o espacio: el plano, el espacio tridimensional, la recta, la superficie esférica...

b) La elección en tal entorno de un *sistema de referencia:* dos rectas ortogonales, una recta y un punto, dos círculos máximos...

c) La *localización* de puntos en el sistema de referencia mediante números que representan medidas: distancias, ángulos,... Es aquí cuando se produce una *aritmetización* de la posición, estableciéndose el célebre vínculo entre geometría y aritmética.

d) La *descripción* de las configuraciones geométricas por las relacio-

[5] Intuitivamente hablando, el término *visualización*, en el sentido que se le otorga aquí, requiere esencialmente la encarnación de ideas en imágenes que bien se constituyen con ayuda de un soporte físico externo al individuo, constituyendo *representaciones gráficas*, o bien se forman en la mente, precisando de un canal intermediario, habitualmente la palabra, para ser descritas.

[6] Aunque, ciertamente, la elección de los caracteres * y □ constituye con eficacia a conjurar la evocación de interpretaciones culturalmente vinculadas con fuerza a determinadas convenciones.

nes o pautas existentes entre los números que permiten localizar sus puntos. La descripción de estas relaciones[7] genera ecuaciones y sistemas de ecuaciones, dando lugar a la algebraización de las formas.

La esencia de la geometría analítica es el establecimiento de una correspondencia, no necesariamente biunívoca, entre configuraciones geométricas y ecuaciones algebraicas. Los entresijos o ideas claves de esa correspondencia son los tópicos antes enumerados.

La tesis que aquí se sostiene es que esas ideas claves no se trasparentan restringiendo el estudio de la geometría analítica al caso supuestamente más simple, el sistema de referencia cartesiano en el plano.

Más todavía, si se produce tal restricción no se puede hablar con propiedad de *geometría analítica*, al menos en el sentido de potente y versátil método geométrico: si falta la elección o delimitación del *entorno* se pierde el concepto de dimensión y se cercena toda posibilidad de transferir el método cartesiano a otras situaciones; si no hay elección de *sistema de referencia* se absolutiza ramplonamente el significado geométrico de coordenadas y ecuaciones. En definitiva, la localización de puntos y la descripción de configuraciones geométricas se establecen, en el mejor de los casos, como conexiones en un sólo sentido (de la aritmética y el álgebra la geometría) sin llegar a revelar toda su riqueza.

Escolio histórico

Un método es tanto más rico desde el punto de vista formativo cuanto más generalidad tiene y más amplio es su campo de aplicaciones.

Aunque, como ocurre con todas las ideas importantes, el origen del método geométrico analítico se puede rastrear muy atrás en el tiempo, su consolidación tiene lugar en los siglos XVI y XVII, influida seguramente por los esfuerzos invertidos en la invención de procedimientos para localizar la posición de las naves en alta mar y por la concepción relativista de la cinemática de Galileo.

Descartes, el padre oficial del método, confesaba[8], además, una expresa intencionalidad de aritmetizar la geometría que, *de facto*, es una algebraización de la misma. Por una de esas ironías tan frecuentes en la historia de las ideas, Descartes, pretendiendo algebraizar la geometría, también geometrizó el álgebra, permitiendo a la postre la *visualización* de las relaciones abstractas entre variables.

De hecho este reverso de la moneda, la aplicación de ideas geométricas a conceptos *no* geométricos, ha resultado ser asombrosamente eficaz y se halla en la base de algunos de los desarrollo de la matemática del siglo XX[9] (v. gr. el análisis funcional, considerando a las funciones como *puntos* de un espacio abstracto que admite la definición de una *distancia)* y sus crecientes aplicaciones a las ciencias naturales y sociales.

El tocino y la velocidad

Geometría analítica y método cartesiano no son conceptos equivalentes. Aunque, por abuso del lenguaje, suelen utilizarse como términos intercambiables, existe una diferencia sutil entre ambos. El siguiente ejemplo trata de poner de manifiesto esa diferencia.

Cierto juego, que periódicamente se pone de moda entre los escolares, consiste en enlazar entre sí dos palabras, arbitrarias y prefijadas, mediante una cadena en la que cada palabra mantiene *alguna* relación con la precedente:

BARCO - FLOTA - ESCUADRA - CUADRA - BURRO - BRUTO - **CÉSAR.**

[7] Fenomenológicamente estas relaciones son descripciones estáticas y las variables no presentan los roles asimétricos característicos de las relaciones funcionales.

[8] Su intención era encontrar un método universal para la resolución de cualquier *problema*, acepción sinónima, en la época de referencia, de *problema geométrico.*

[9] Pero no exclusivamente del siglo XX. El problema de la aguja de Buffon, por ejemplo, no es originariamente un problema geométrico pero su solución pasa esencialmente por definir un espacio en el que sea representable geométricamente el conjunto de las posibles posiciones de la aguja (fijación del entorno), y por establecer un procedimiento de medida en ese espacio.

La ambigüedad del término *alguna* permite la heterogeneidad de relaciones entre las palabras del ejemplo, que se enlazan, sin pauta previsible, gracias a cacofonías, dilogías, asociaciones, sinónimos, epítetos o parentescos.

Esa ambigüedad, no obstante, es accidental y puede eliminarse sistemáticamente a través de:

a) La fijación de un *entorno* o espacio: El diccionario de sinónimos-antónimos *Proximity/Espasa-Calpe Tesoro* (v. gr.).

b) La elección en tal entorno de un *sistema de referencia:* Una palabra que forma parte del Tesoro. Pongamos por caso, *tocino.*

c) La *localización* de palabras en el sistema de referencia mediante la definición de un procedimiento de medida: la distancia de cualquier palabra al *origen* del sistema es el mínimo número de pasos necesarios para enlazarlas con sinónimos o antónimos del Tesoro.

TOCINO - COCHINO - DESALIÑADO - CUIDADO - DILIGENCIA - **VELOCIDAD**

La distancia entre tocino y velocidad es, como mucho, 5.

d) La *descripción* abstracta de configuraciones o colecciones de palabras por las relaciones o pautas existentes entre los números que permiten localizarlas en el sistema de referencia.

X = 1 ⟷ { CERDO, MARRANO, PUERCO, COCHINO }

¡En este ejemplo no hay formas geométricas pero sí método cartesiano!

El método cartesiano

Podemos usar números para identificar localizaciones. Podemos usar fórmulas para describir objetos *o situaciones*[10]. Podemos visualizar ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Estas ideas, simples pero poderosísimas, pueden y deben ser entendidas por todo el mundo, deben formar parte del bagaje cultural matemático. *Ser entendidas* quiere decir comprender que el uso de números para identificar localizaciones, el uso de fórmulas para describir objetos y situaciones y la representación gráfica de ecuaciones y sistemas requieren, explícita o implícitamente, la fijación de un entorno, la elección de un sistema de referencia, la descripción de qué medidas intervienen y cómo se asocian números y puntos.

Algunos ejemplos

a) *Escenarios alternativos para* la guerra de barquitos.

Este popular juego se desarrolla en un tablero plano convenientemente coordenado a la manera más ortodoxamente cartesiana:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

¿Cómo se podría modificar el juego para que la guerra se librase en la superficie de un cono?

¿Y si el campo de batalla fuesen las caras de un cubo?

b) *Circunferencias con centros alineados*

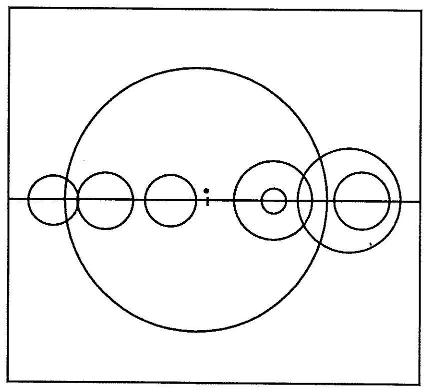


Figura 4

Sistema de referencia:

Punto O. Coordenadas de una circunferencia, (d, r)

d: distancia del centro al punto O.

r: radio de la circunferencia.

¿Qué representa la ecuación $d + r = 10$?

[10] Véase pág 1 de [C].

c) *Entorno Logo*

El procedimiento

```
SEA POLIGONO: N:L
REPITE: N [AV:L DE 360/:N]
FIN
```

genera polígonos regulares. La longitud de lado L y el número de lados N son variables enteras y positivas[11].

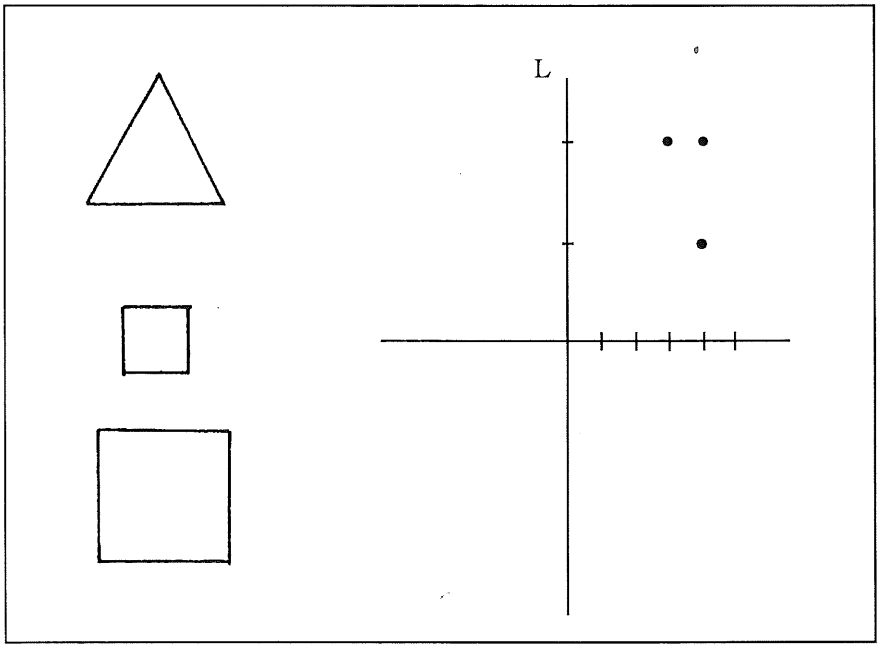


Figura 5
Salida gráfica del procedimiento y representación analítica gráfica[12].

La elección de sistema de referencia: un problema de decisión

En principio parece razonable exigir que un sistema de referencia goce de algunas virtudes tales como

i) claridad de los elementos que lo definen.

ii) sencillez del procedimiento de localización de *puntos*.

iii) eficacia para la descripción simple de *objetos*.

iv) utilidad para representar ecuaciones y sistemas.

v) aplicabilidad a situaciones prácticas.

Lamentablemente es imposible otorgar la categoría de absolutas y totalmente compatibles a tan razonables aspiraciones:

El sistema cartesiano rectangular es claro[13] pero su descripción algebraica de la espiral de Arquímedes no es nada simple, o al menos es mucho más compleja[14] que la correspondiente en un sistema polar de coordenadas.

El sistema de coordenadas trifocal (los puntos del plano son identificados por sus distancias a tres puntos fijos) es poco claro: cada punto del plano necesita una terna de números para su localización, pero no todas las ternas de números representan puntos del plano. Curiosamente, analizando los sismogramas registrados en una estación sismológica puede calcularse la distancia del epicentro del seísmo a la estación. Son necesarias entonces tres estaciones sismológicas para localizar el epicentro de un terremoto. ¡El sistema trifocal, con toda su opacidad, tiene una bonita aplicación!

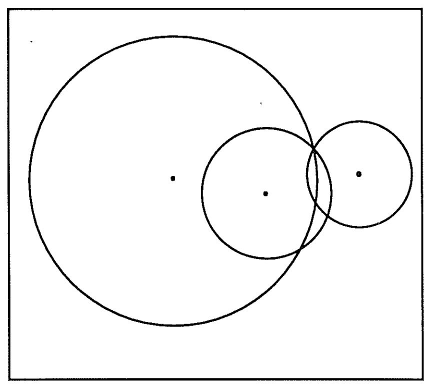


Figura 6
El sistema trifocal y la localización de epicentros

---

[11] Puede ser interesante remover esta limitación y estudiar qué salidas produce el procedimiento con valores negativos o no enteros de sus parámetros. Sin embargo, no estamos aquí interesados en explorar ese terreno.

[12] *Gráfica* y *representación gráfica* no son términos sinónimos. Aquí se pone de manifiesto bien claramente que un gráfico puede representar a otro gráfico, sin parecido visual alguno entre ambos.

[13] ¿O habría que decir, con más precisión, *familiar*?

[14] En el sentido de que precisa muchos más requerimientos (conceptos, destrezas, propiedades...), para su comprensión.

Los dos ejemplos anteriores muestran que la calificación de *bueno* para un sistema de referencia no es absoluta sino que depende de la situación que se esté analizando, del fin que se persiga con su utilización o del problema que se intente resolver. La elección del sistema de referencia *adecuado* a cada caso es pues un problema de decisión que no debe soslayarse.

Rompiendo las cadenas de Descartes

El sistema de referencia habitual para el plano es el cartesiano rectangular. Los elementos que lo definen son dos rectas perpendiculares o ejes, cuya intersección se denomina origen. Un punto del plano se localiza por dos números que representan sus distancias –orientadas mediante un signo– a los ejes.

Dos rectas que determinan un punto, dos distancias. ¿Qué hay de esencial y qué de accidental en estos elementos?

Si con dos rectas y dos distancias se define un sistema de coordenadas, ¿por qué no con puntos y ángulos? Un rápido juego combinatorio –justificado en los principios de simetría y dualidad, genera algunos nuevos candidatos a sistema de referencia:

Elementos que definen el sistema

Sistema	rectas	puntos	distancias	ángulos
A	2	0	2	0
B	1	1	1	1
C	1	1	2	0
D	1	1	0	2
E	0	2	0	2
F	0	2	2	0
G	0	2	1	1
H	0	3	3	0

Figura 7

Examinando las figuras 8 y 9 es notorio que los mismos códigos numéricos –esto es las mismas coordenadas– y los *mismos* códigos algebraicos –esto es las mismas ecuaciones– tienen significación e interpretación dependientes del sistema de referencia. *(Ver pág. siguiente).*

Toda esta rica diversidad de interpretaciones[15], formas, combinaciones de elementos y medidas, es fruto de especulaciones sobre la esencia del concepto de sistema de referencia. En su obtención, nada han tenido que ver manipulaciones algebraicas aparatosas, resoluciones de sistemas de ecuaciones imponentes o números irracionales barrocos.

¿Hasta dónde de lejos hemos llegado con nuestra actitud iconoclasta? ¿Hemos roto todas las convenciones?

Felizmente –escribió J. L. Borges en cierta ocasión[16] –*no nos debemos a una sóla tradición. Podemos aspirar a todas.*

Todos los sistemas de referencia anteriores están construidos con el convenio[17] de que los puntos del plano se *deben* representar con números, mientras que los conjuntos

[15] Otros ejemplos para estos sistemas de coordenadas, otros sistemas de coordenadas y una discusión sobre el aprendizaje de la relación entre sistema de referencia y lugar geométrico, pueden encontrarse en [F].

[16] Véase la autopresentación de sus Obras Completas, [B].

[17] Implícito, por supuesto.

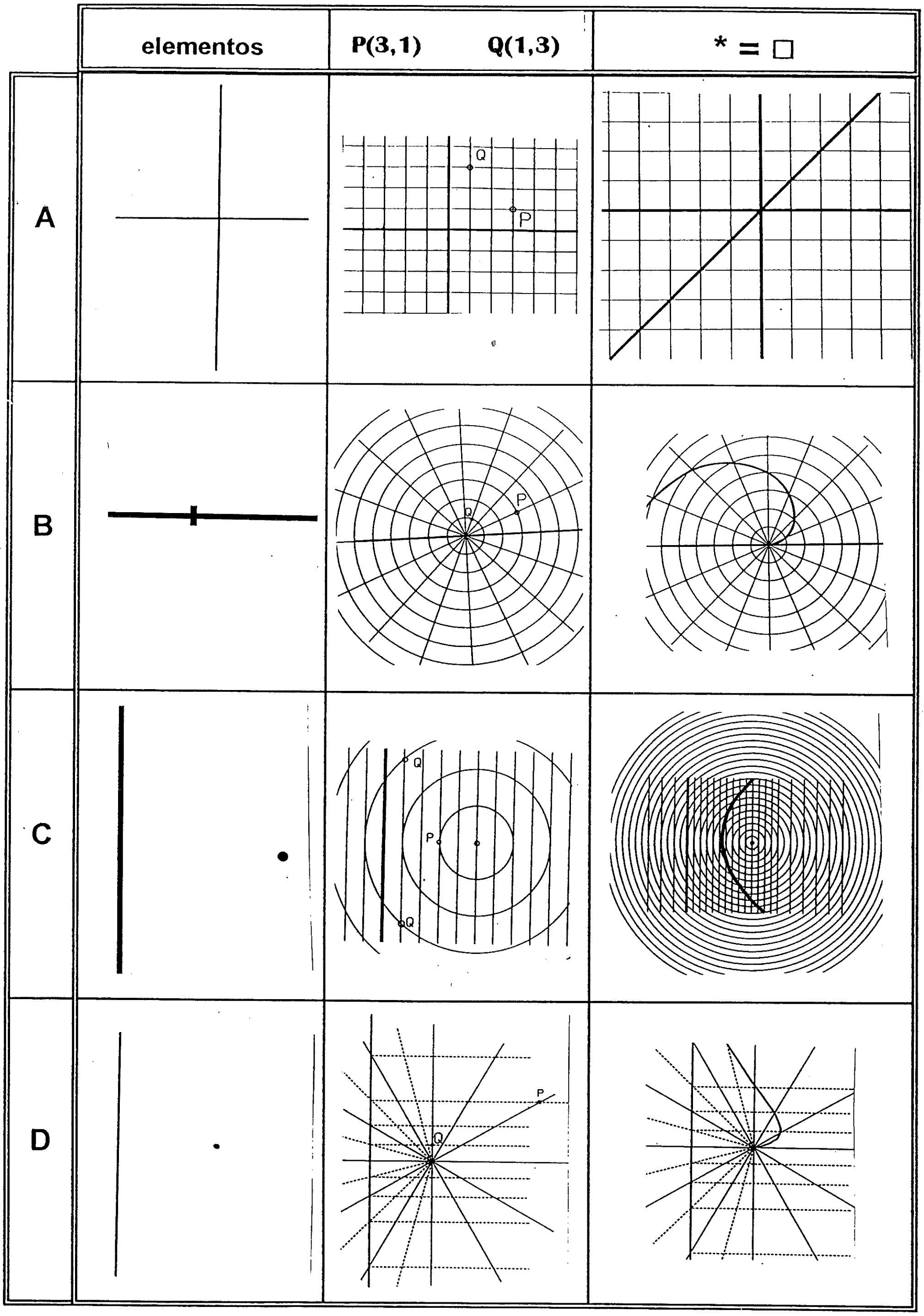


Figura 8

Pluralidad de significados de los mismos símbolos

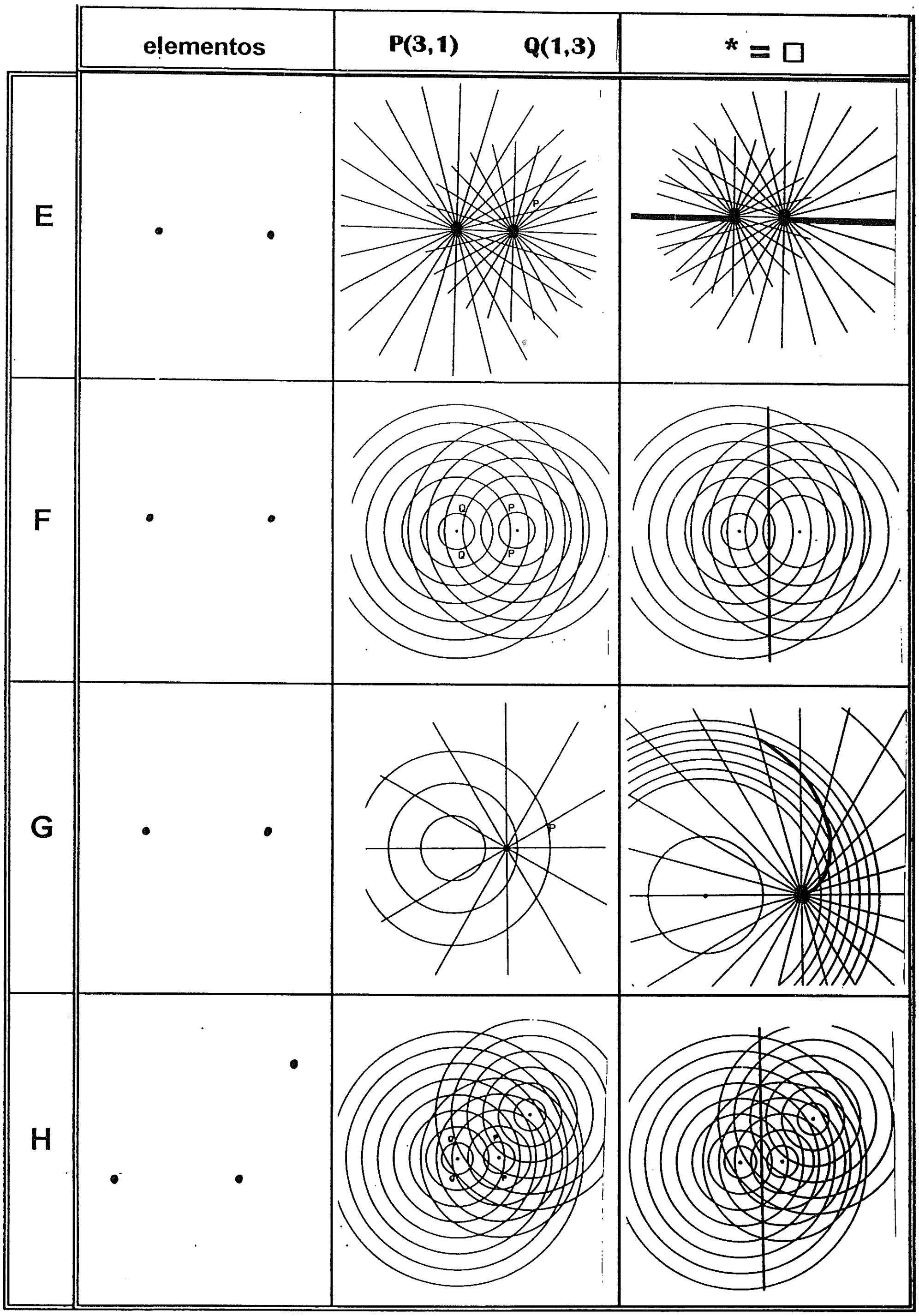


Figura 9

Pluralidad de significados de los mismos símbolos de puntos acabarán codificados con ecuaciones.

Los puntos no son, sin embargo, los únicos habitantes, ni siquiera los más privilegiados, de *Planilandia*. Esta observación abre las puertas a modificaciones más perversas de los sistemas de referencia: ¿por qué no sustituir, como elemento protagonista de partida, el punto por la recta? ¿Es posible asignar con precisión coordenadas numéricas a las rectas del plano?

Desde luego que sí, y de varias maneras:

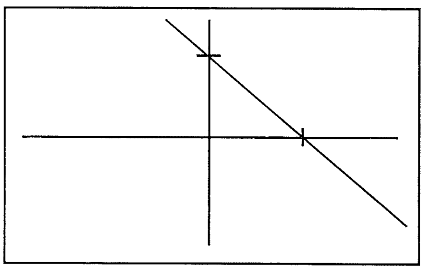


Fig. 10

r ⟷ (0, 1, 1, 0)

Pero también,

r ⟷ recta de pendiente −1 y ordenada en el origen 1 ⟷ (−1, 1)

O, alternativamente,

r ⟷ x + y = 1 ⟷ (1, 1, 1)

(0, 1, 1, 0); (−1, 1) y (1, 1, 1)[18] son coordenadas, es decir convenios numéricos, que representan a la misma recta r.

Si coordenadas representan rectas, ¿qué representarán las ecuaciones, esto es las relaciones entre las distintas componentes de *estas* coordenadas?

Escojamos, por ejemplo, uno de los tres convenios de coordenadas anteriores:

r ≡ (* , ❒)

* = pendiente de **r**

❒ = ordenada en el origen de **r**

Entonces

* = ❒ ⟷ { (1, 1), (2, 2), (−1/2, −1/2), ...}

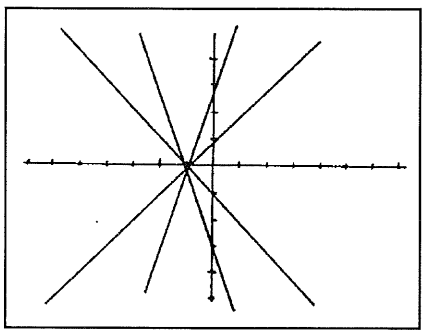


Fig. 11

* = ❒ representa el haz de rectas que pasa por el punto P (figura 11), es decir, al propio punto P.

¡ * = ❒ es ahora un punto del plano[19]!

Conclusiones

Generalizando su significado geométrico, el método cartesiano puede definirse como la especificación de los elementos necesarios para describir coherentemente la posición de *objetos*[20] o elementos en un entorno o espacio.

Esta descripción puede ser numérica o algebraica. Las ecuaciones son descriptores de *objetos* complejos[21] del entorno, con significación que, al depender de la parametrización construida, no tiene valor universal.

Una estrategia de enseñanza que desee prestar atención a la esencia del método cartesiano, debe propiciar en consecuencia la superación de la tendencia inercial a la asociación *irreflexiva* de imágenes canónicas a las ecuaciones.

Bibliografía

* BORGES, J. L. **Obras completas.** (2 Vols.), Emecé Editores, Barcelona, 1989.

* COXFORD, A. **Geometry from multiple prespectives.** N.C.T.M. 1991.

* FRIEDLANDER, A. & DREYFUS, T. *Is the graph of = y kx straight?* **Matematics Teacher,** pp. 526-531. October, 1991.

* GARCÍA, F. J. *Una interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas.* **Eines,** *nr.* 7 y 8, pp. 159-164. Alcoy, 1987.

Francisco Jesús García García
Servicio de Programas Curriculares
Consellería de Educación
Comunidad Valenciana

[18] Estas son las llamadas *coordenadas homogéneas*. Para una amplia discusión sobre su interpretación geométrica y sobre aplicaciones no habituales de las mismas, véase [G].

[19] Como tenía que ocurrir a causa de la dualidad existente en el plano entre recta y punto.

[20] Si se hace abstracción de su significado geométrico, las palabras *posición, objeto* y *espacio* tienen carácter metafórico.

[21] Esto es, compuestos de elementos *simples* predefinidos como tales.

Leer, escribir y comprender matemáticas. Los problemas

Elvira Figueras

El término problemas se define como aquella tarea que: 1) La persona se enfrenta a ella y desea o necesita encontrar solución; 2) La persona no posee un procedimiento accesible y fácil para encontrar la solución, y 3) Hace intentos para encontrarla. (NORTES CHECA, Andrés. Bordón 44 (2), (1992).

Los problemas pueden solucionarse a partir de un algoritmo, entendiendo por algoritmo la prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un objetivo o siguiendo un procedimiento heurístico que nos permita descubrir la solución del problema para después hacer la construcción formal rigurosa. Generalmente se emplean los métodos heurísticos cuando no se conoce solución algorítmica. A nuestro entender se deben potenciar estos métodos en niños de primaria para conseguir un dominio cognitivo del número y de las operaciones. No nos parece conveniente imponer estrategias de resolución de determinados tipos de problemas pero si creemos en la necesidad de potenciar estrategias personales a las que el niño llega a partir del trabajo heurístico.

Creo que la resolución de problemas puede ser el eje central de gran parte de la clase de matemáticas en primaria.

En los currículums actuales de matemáticas, la resolución de problemas es un contenido prioritario que se plantea como medio de hacer las matemáticas más funcionales, es decir aplicables a la realidad, entendiendo como realidad el entorno próximo al niño.

Deberíamos analizar a qué tipo de problemas nos referimos los maestros cuando hablamos de problemas sacados de la realidad. Para ello debemos conocer muy bien los intereses del niño y saber aprovechar la vida de la clase.

No basta que el maestro plantee problemas con datos reales. Se tiene que conseguir implicar al niño de manera afectiva.

Pueden ser situaciones fácilmente aprovechables la organización de una fiesta de aniversario, el cuidado de un pequeño animal, etc. Sorprende la rapidez y el entusiasmo con que los niños se adaptan a este tipo de actividades.

Proponemos un trabajo bastante libre pero quiero remarcar la necesidad de rigor sistemático por parte del maestro que debe tener muy claros los objetivos específicos que se propone y la secuenciación de contenidos y procedimientos para poder manipular las situaciones matemáticas y utilizarlas convenientemente. Dentro del horario debe haberse establecido un tiempo dedicado a la aportación personal por parte de los alumnos de problemas de cálculo vivo que hayan elaborado, de la misma manera que se realiza una lectura de textos libres. Cada niño leerá su problema, previamente revisado con el profesor, y se comentará colectivamente.

Se puede trabajar desde diversos puntos de vista:

- La compresión del texto.
- Su representación gráfica.
- El cálculo de la solución.
- La estimación de la respuesta.
- El comentario de la solución.
- Otras estrategias de solución...

El introductor del cálculo vivo fue Celestin Freinet, maestro francés que hace más de cincuenta años ya trabajaba las matemáticas desde un punto de vista funcional.

Dificultades en la realización de problemas

Los niños de primaria presentan dos tipos de dificultades: La comprensión de las operaciones y la comprensión de los enunciados.

Cuando proponemos a un niño un problema para resolver damos por supuesto que el niño domina la operación o operaciones que implican la resolución de aquel problema y esto muchas veces no es así. El niño domina la mecánica de las operaciones pero no comprende realmente su significado, se limita a aplicar reglas operativas. Muchas veces esto es debido a que no se han trabajado suficientemente las operaciones desde un punto de vista cognitivo, es decir semántico y se ha pasado rápidamente a su expresión escrita, es decir elaboración sintáctica.

Por esta razón es importante volver a insistir en el proceso manipulación, transformación, expresión semántica, representación sintáctica.

Para superar este tipo de dificultades propongo las siguientes actividades:

- De una acción a una operación. Se trata de escenificar una situación matemática y que los niños expresen la operación representada.

- Las operaciones como transformaciones. Dada una situación inicial y una final descubrir qué transformación se ha realizado y expresarlo aritméticamente. (Figura 1).

- Lectura de operaciones. Escribir el significado de una operación sin utilizar el nombre ni el signo de ésta. Lectura semántica. (Figura 2).

- Dictado de operaciones. Es la actividad contraria a la anterior. Expresión sintáctica. (Figura 4).

- Operaciones equivalentes. Escribir operaciones equivalentes a las dadas.

- Completar operaciones. Averiguar los términos que faltan en una operación, también pueden omitirse los signos.

- Estimación de resultados. Dadas unas operaciones y un conjunto de resultados relacionarlos utilizando la estimación.

Las dificultades en la comprensión de los enunciados pueden ser debidas a que las matemáticas utilizan construcciones sintácticas poco usadas en el lenguaje diario con el objetivo de ser precisas, objetivas y concisas. El niño debe aprender a leer matemáticas y a escribirlas paralelamente de la misma manera que aprende a leer y a escribir.

Tienen dificultad en relacionar las expresiones formales a las situaciones referidas en los enunciados. Por lo que se debe ejercitar al niño a aplicar su conocimiento informal a las situaciones formales para hallar equivalencias de significado.

El niño empieza a leer el problema y antes de haber terminado su lectura ya se ha hecho una interpretación del mismo. Si ésta es coherente con la información el niño podrá ser capaz de resolver el problema, en caso contrario el maestro deberá intervenir para que el niño descodifique correctamente el enunciado.

La forma en que un niño entiende un texto depende del conocimiento que tenga del contexto, por esta razón es muy importante que los enunciados de los problemas se refieran a contextos próximos al niño.

Tienen menos dificultades en la interpretación de situaciones contadas que en la de enunciados formales, especialmente de forma escrita pero también oralmente.

La redacción del enunciado de un problema incide directamente sobre el grado de dificultad de su solución:

- Cómo son expresadas las relaciones entre los datos y las cantidades desconocidas y en qué grado se hacen explícitas.

- El orden de los ítems de información.

- La prioridad de los números sobre las palabras.

- El uso de palabras clave.
- La complejidad de las sintaxis y del vocabulario.

Firbas, lingüista, habla del "dinamismo comunicativo de los enunciados" y distingue tres tipos de elementos, según el grado de información que aportan.

Considera que un enunciado debe tener un equilibrio entre estos tres tipos de componentes. Analizando algunos enunciados hemos podido constatar que un mismo problema enunciado con distintos textos presenta mayor o menor dificultad de resolución de acuerdo con el mayor o menor equilibrio de dichos componentes.

Las actividades que propongo para trabajar la comprensión de los enunciados son las siguientes:

- Dada una operación redactar el enunciado de un problema que se pueda resolver con ella. (Figura 2)
- Leer esquemas. (Figuras, 1, 4 y 6).
- Dado un esquema redactar el enunciado de un problema. (Figura 5).
- Sobre un mismo esquema ir cambiando las incógnitas y redactar los problemas correspondientes. (Figura 6).
- Dados enunciados de problemas similares a los esquemas ya trabajados, construir sus esquemas. (Figura 5).
- Dado un problema y varias soluciones escoger la buena sin hacer operaciones.
- Plantear situaciones abiertas y que los niños inventen problemas. (Figura 5).
- Aprovechar la vida de la clase para hacer cálculos de tipo funcional y hacer que redacten los enunciados de dichas situaciones.

El hecho de que los niños redacten sus problemas es una práctica muy enriquecedora que facilita la comprensión lectora de otros enunciados. Un ejercicio muy interesante consiste en dar al niño una situación matemática por medio de un esquema, donde no hay ninguna incógnita. Se trata de ir considerando incógnita de manera sucesiva todos los datos y redactar un enunciado para cada situación.

Bergeron y Herscovic proponen como técnica para facilitar la construcción de esquemas semánticos a partir de enunciados escritos el hacer que los alumnos vuelvan a redactar los enunciados verbales de manera que las relaciones semánticas se hagan más explícitas. Las actividades de lenguaje sirven de ayuda en la resolución de problemas, son valiosas por dos razones: crear la necesidad de analizar las relaciones entre significado y significante, conciencia de lo que es obvio y conocido para el hablante no es claro ni conocido por el que escucha. (LABORDE, Colette. Mathematics and cognition).

Diferentes maneras de proponer problemas

No es el enunciado escrito la única manera de proponer problemas a los niños. Generalmente cuando hablamos de problemas pensamos en los planteados por medio de un enunciado y olvidamos que podemos hacer que los niños resuelvan problemas partiendo de situaciones distintas eliminando de esta manera dificultades complementarias.

Considerando que un problema tiene cuatro partes esenciales, combinando estos elementos, y teniendo en cuenta cuáles son los que nosotros damos a los niños y cuáles los que han de elaborar, el Grupo Almosta de Barcelona propuso quince maneras distintas de plantear problemas. (Figura 7).

Generalmente en la escuela se plantean los problemas partiendo de un enunciado, tanto cuando es el maestro el que lo hace, como cuando se parte del libro de texto. La situación es más grave cuando más pequeños son los niños.

En ciclo inicial se debería iniciar creando problemas a partir de situaciones reales que permitan la manipulación para pasar después a plantearlos a partir de un esquema acompañado o no de un enunciado siempre de acuerdo con el nivel de comprensión lectora que tengan los niños. En el ciclo medio, si se ha seguido esta graduación de dificultades en cursos anteriores podrán plantearse problemas con enunciados pero no deberán dejar de realizarse a partir de las otras propuestas en ninguno de los niveles de primaria.

Un método de resolución de problemas

Nos parece importante introducir a los niños ya desde pequeños en la utilización de un determinado sistema en la resolución de problemas. Para ello y partiendo de los elementos que creemos esenciales hemos diseñado una hoja de trabajo adaptable a las distintas edades.

En esta hoja impresa hay un espacio para cada una de las partes que consideramos constituye un trabajo de resolución de problemas:

- Enunciado.
- Estimación del resultado.
- Dibujo o esquema.
- Operaciones.
- Respuesta.
- Comentario de la respuesta.

Cuando la hoja es para trabajar los niños de P.5 y ciclo inicial el espacio destinado al dibujo ocupa la mayor parte de la hoja y está partido en tres partes, una para la situación inicial, otra para la transformación y la última para la situación final.

Nos proponemos hacer ver el problema como un procedimiento, una transformación en que su resolución es un elemento más de este. Por esto no siempre que hacemos problemas nos proponemos encontrar la solución, podemos trabajar aisladamente cada parte del procedimiento.

Es importante que se de posibilidad a los niños de hablar de matemáticas. Escribir sobre matemáticas ayuda a clarificar los conceptos. Cuando el niño describe cómo ha resuelto un problema, y explica las dificultades con las que se ha encontrado, clarifica su pensamiento y desarrolla sus estructuras conceptuales.

La representación es una forma fundamental de comunicación y es básica para el aprendizaje de las matemáticas. Se debe crear la necesidad de utilizar símbolos y darles significado.

Los niños pueden saber y no ser capaces de expresarlo verbalmente, el lenguaje de las matemáticas no es enseñado en las escuelas, no se enseña al niño a leer matemáticas y en esto estriba parte de la dificultad en resolver problemas.

Newman clasifica los errores en problemas de una sóla operación:

- Pregunta ambigua.
- Capacidad de lectura: Reconocimiento de palabras y reconocimiento de signos.
- Comprensión: Comprensión general y comprensión de símbolos y términos específicos.
- Transformación: Selección de los procesos matemáticos.
- Destrezas procedimentales: Dominio de las operaciones.
- Codificación: Expresión correcta de la respuesta.
- Motivación: Falta de interés.
- Descuido: Falta de atención.

Cuando partimos de un enunciado escrito proponemos los siguientes pasos a seguir:

- Leerlo hasta que se sepa la historia de memoria.
- Representarlo con un dibujo o iconos si es posible.
- Intentar hacer un esquema.
- Ver qué datos conocemos y qué queremos saber.
- Pensar qué necesitamos para encontrar lo que nos piden.
- Pensar la manera de encontrar la solución.
- Expresarlo en forma de operación.
- Pensar si la solución puede ser correcta.
- Comprobar si es posible.
- Redactar una frase donde se de respuesta a la pregunta que planteaba el problema.

Graduación de dificultades

El maestro, cuando tiene que programar cualquier tipo de materia, tiene que tener presente las capacidades propias de cada edad madurativa que posibilitan unas operaciones mentales determinadas y a partir de éstas debe seleccionar los contenidos más adecuados.

Cuando se trata de secuenciar el trabajo de resolución de problemas debemos hacerlo atendiendo a la dificultad de las operaciones que se han de usar para resolverlos y a las operaciones trabajadas en el curso a que van dirigidos.

Erróneamente suele considerarse que los problemas de una sóla operación tienen menos dificultad que los de dos, y no siempre es así.

Los problemas de una sóla operación deben iniciarse paralelamente al trabajo de cada operación. De esta manera se hace evidente que los primeros problemas serán los de suma, seguidos de los de resta, para pasar a los de los dos sumas y dos restas. Cuando se inicien las operaciones multiplicación y división será el momento de realizar problemas con una de esta operaciones.

Los enunciados que comportan combinaciones de operaciones suponen grados de dificultad de comprensión distintos según el orden de estas operaciones.

Una posible graduación para los problemas de una o dos operaciones podría ser la siguiente la que se plantea en la figura 8.

El objetivo primordial de la resolución de problemas es la correcta aplicación de estrategias y no el cálculo del resultado de las operaciones por lo cual no es necesario que las cantidades sean muy altas. Cuando mayor sea el conocimiento de las cantidades que intervengan en el problema más facilidades tendrá el niño para relacionarlas.

Evolución de los esquemas realizados por los niños de primaria

Una parte muy importante del proceso de resolución de problemas es su representación gráfica, sirve el alumno de soporte, clarifica su pensamiento y desarrolla sus estructuras conceptuales.

Es necesario que el niño participe en actividades que eduquen su capacidad de representación ya que ella es una destreza comunicativa que les ayudará a crear vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Los problemas de lenguaje se centran en la relación entre el significado, representación mental y el significante, representación externa.

Cuando proponemos al niño un problema a partir de una representación estamos haciendo un ejercicio de interpretación que dará recursos al niño para poder hacer sus propias representaciones de enunciados textuales.

La construcción de esquemas sigue una evolución, utiliza el dibujo figurativo y el no figurativo, primero sin ningún tipo de soporte (Figura 9), más tarde con soporte escrito y numérico. Para pasar, en los ciclos medio y superior, a una esquematización con indicación de la cantidad por medio de las cifras y de la proporción (Figuras 10 y 11); a la vez que introduce signos aritméticos. (Figura 12 - 14).

En ciclo inicial, siempre que sea posible, se debe utilizar material para representar la situación que plantea el problema y pasar posteriormente a la representación gráfica sobre papel. Es importante que los niños realicen acciones sobe el material, es decir lo manipulen y que poco a poco transformen estas acciones en operaciones.

La observación de los esquemas que los niños hacen de los problemas es muy útil al maestro para detectar las dificultades que plantea el niño para resolver el problema.

La evolución de los sistemas de resolución de problemas en los últimos cursos de primaria

Desde los primeros cursos se inicia al niño a seguir unos pasos concretos para resolver problemas a partir de un enunciado:

- Lectura comprensiva.
- Esquema o dibujo.
- Estimación del resultado.
- Estrategia.
- Operaciones.
- Expresión de la respuesta.
- Comprobación.
- Valoración de la estimación.

Se da mucha importancia a la elaboración semántica y sintáctica del problema.

Hasta sexto, entendemos por expresión sintáctica la utilización de los algoritmos de las operaciones. A partir de séptimo se introduce al niño en el lenguaje algebraico y empieza a resolver las primeras ecuaciones. Es en estos últimos cursos cuando el niño deja de utilizar técnicas y procedimientos adquiridos en los cursos anteriores para pasarse a la utilización de ecuaciones para la resolución de todos los tipos de problemas.

Para constatar lo anterior me propuse realizar un pequeño estudio de como realizaban unos determinados problemas los niños de sexto séptimo y octavo de una misma escuela. (76, 81 y 87 alumnos).

Escogí cuatro problemas que pudieran resolver los niños de sexto por métodos aritméticos (Figura 15). Los dos primeros se resolvían fácilmente con una ecuación de primer grado de una sóla incógnita. El tercero implicaba una ecuación más difícil de plantear y por el contrario tenía una fácil resolución por métodos aritméticos si se partía de la elaboración de un esquema. El enunciado del último obligaba a una lectura atenta y no planteaba dificultad si se trasladaba a una situación casi manipulativa.

Les repartimos los enunciados a los niños durante la clase de matemáticas y les pedimos que los intentarán resolver explicando cómo lo habían hecho. Les comentamos que no era necesario que pusieran el nombre. En el momento de recogerlos, en caso necesario, hablábamos con los niños para ver si habían realizado una buena comprensión de los enunciados. Nos interesaba que la actividad no fuera una continuación del trabajo de clase.

Los aspectos que contemplamos fueron los siguientes:

1. Comprensión lectora.
2. Representación: dibujo, esquema, diagrama...
3. Expresión semántica.
4. Expresión sintáctica: algorítmica de las operaciones aritméticas y algebraica.
5. Utilización del tanteo.
6. Destreza procedimental.
7. Comprobación.
8. Codificación de la respuesta.
9. Expresión del resultado.

Una vez vistos todos los problemas y revisados atendiendo a estos aspectos nos centramos en: 2, 4, 5 y 7.

- En general utilizaron muy pocas representaciones gráficas.

- En el problema que más esquemas hicieron fue en el tercero.

- Los niños que más esquemas hicieron fueron los de sexto.

- El tanto por ciento de respuestas acertadas es mayor en octavo y séptimo en el primer problema, lo resolvieron por medio de ecuaciones.

- Los alumnos de octavo intentaron todos resolver el tercer problema por medio de una ecuación y no lo consiguió nadie. Todos pretendieron resolverlo plantearlo una ecuación y nadie lo hizo correctamente.

- Un 44% de los alumnos de sexto consiguieron resolver el tercer problema seguidos por los de séptimo que fueron un 13%.

- Un 18% de los alumnos de sexto resolvieron el cuarto problema, seguidos por un 16% de octavo y un 6% de séptimo. Todos utilizaron procedimientos aritméticos.

Bibliografía

* ARRIETA GALLESTEGUI, J.J. **La resolución de problemas en el ciclo inicial de EGB**. Enseñanza de las Ciencias, núm. extra, 92.

* BERMEJO, V. **El niño y la aritmética.** Paidós, 1990 (Paidós educador; 96).

* CASAPONSA, Gaietà. **Contrapoposta a la resolución de problemas**. Guix, núm. 187, maig 1993.

* COMPANY, J. **El aprendizaje del cálculo y la resolución de problemas**. Promolibro. Alicante (1988).

* GARDNER, H. **Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar matemáticas las escuelas**. Paidós. Alicante (1988).

* GRUP ZERO. **Metodología: La resolución de problemas**. Cuadernos de Pedagogía. Nº 28. pp. 9-11.'

* LABORDE, Colette. **Language and Mathematics and congnition.**

* LURIA, A. R. y TSVETKOVA, L. S. **La resolución de problemas y su entorno Fontanella**. Barcelona (1981).

* MASON, John. **Pensar matemáticamente**. MEC. Ed. Labor. 1988.

* NORTES, Andrés. **Resolución de problemas**. Bordón 44(2), 1992.

* PIMM. **El lenguaje matemático en el aula.** MEC. Morata. Madrid. pp. 213-216.

* PLA, R. M. SOTELO, C., SUCARRATS, J. TEIXIDOR. del Grup Almosta. **El problema dels problemes**. "Perspectiva escolar" número 128, pàg. 29.

* POLYA, G. **Cómo plantear y resolver problemas**. Trilla. México. (21987).

* POMES RUIZ, J. **La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: un punto de vista post-piagetiano**. Enseñanza de las Ciencias, núm. 9, marzo 1991, pp. 78-82.

* PUIG ADAM, Pere. **Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas.** Enseñanza Media. Revista de orientación didáctica, nº 33-36. 1959. pp. 33-36.

* PUIG, L. **Aprender a resolver problemas, aprender resolviendo problemas** Aula, núm. 6 septiembre 1992, pp. 10-12.

* PUIG, L. y CERDAN, F. **Problemas aritméticos escolares**. Síntesis. Madrid (1988).

* SANZ, Inés. **Teoría y práctica de la Educación Matemática**. Ed. Alfar.

* SINCLER, Herminia. Sesión plenaria. NICME Berkeley. **Boletín de la S.C.P.M. "Isaac Newton" Adquisición del lenguaje y conocimiento de la matemática.**

* SOLE, R. **Evolució de la comprensió i formulació de problemes matemàtics a Estudis i recerques**, núm. 1. Ajuntament de Barcelona, 1986, pp. 187 ss.

* VALLES I GENÉ, J. **Unitats de Programació 3: La resolució de problemes, a Exemples d'Unitats de programació 2. Educació Primària.** Barcelona. Departament D'Ensenyament. Generaliatat de Catalunya, 1992.

Elvira Figueras
ADEMGI

Dibujo

Esquema

Manzanas que hay en el árbol	— — — — — — — — — — — —	Manzanas que quedan en el árbol

Inventa el enunciado de un problema:

Figura 1

Escribe el significado de las siguientes operaciones:

40 ptas. x 2 =
100 ptas.: 4 nens =
1000 ptas. el Kg. x 2 Kg. =
1500 ptas. x 1,5 Kg =
25 ptas.: 250 g. =
18 l.: 3l. =

Calcula el resultado.
Inventa un problema que se resuelva con cada una de las siguientes operaciones:

Te pondré un ejemplo:
40 ptas. x 2 =

Significado: "dos veces 40 pesetas"
Resultado: 80 ptas.
Problema: Una libreta cuesta 40 pesetas, ¿Cuánto costarán dos libretas?

Figura 2

Vamos a comprar.

Cantidad que compramos	Precio por Kg.	Valor de la compra	Operación	
1 Kg.	2000 ptas.	----------------	2000 ptas + 2000 ptas.	2000 ptas. x 2
3 Kg.	2000 ptas.	----------------	------------------------------	------------------
0,5 Kg.	2000 ptas.	----------------	------------------------------	------------------
1/2 Kg.	2000 ptas.	----------------	------------------------------	------------------
2,5 Kg.	2000 ptas	----------------	------------------------------	------------------

Figura 3

Expresa en forma de operación las siguientes expresiones:

"La mitad de la suma de mil y dos mil" 0,5 x (1000 + 2000)

"¿Cuántas veces 20 está contenido en 100?" 100 : 20

Figura 4

Queremos hacernos socios de una piscina
Con esta tabla podremos saber cuánto nos costará inscribirnos por un año.

Número miembros de la familia	Cuota anual	Alquiler armario	Precio inscripción anual
4 personas	5000 ptas.	2000 ptas.	-----------------------
-------	5000 ptas.	2000 ptas.	27000 ptas.

No todas las piscinas tienen los mismos precios.
Te atreves a inventar un problema que corresponda a un esquema parecido.

Escribe el enunciado.
Haz el esquema.
Explica cómo lo has pensado.
Escribe las operaciones.
Comprueba que la respuesta sea posible.

Figura 5

Manzanas que hay en un árbol	Manzanas que han recogido	Manzanas que han quedado en el árbol
68 manzanas	32 manzanas	-----------------
36 manzanas	-----------------	2 manzanas
123 manzanas	3 cestos de 50 manzanas	-----------------
-----------------	4 cestas de 100 manzanas	30 manzanas
283 manzanas	5 cestos de 50 manzanas	3 manzanas
	---- cestos de 15 manzanas	

Inventa un problema para cada una de las situaciones del esquema anterior.

Escribe el enunciado.
Razona la solución.
Escribe las operaciones que has necesitado.
Comprueba que la solución sea posible.

Figura 6

DISTINTAS MANERAS DE PLATEAR PROBLEMAS

	ENUNCIADO	ESQUEMA	CÁLCULO	RESPUESTA
1a	X	X	X	
2a	X	X		X
3a	X		X	X
4a		X	X	X
5a	X	X		
6a	X			X
7a			X	X
8a		X	X	
9a		X		X
10a	X		X	
11a	X			
12a		X		
13a			X	
14a				X
15a				

Extraído de ***El problema de los problemas***. Grup Almosta. Perspectiva Escolar. Febrer 1987.

Figura 7

Tabla de graduación de dificultades

		+	–	X	:
+	1	3	7	9	18
–	2	8	4	13	17
X	5	11	12	10	14
:	6	16	19	15	20

Figura 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Observación: Resolución de problemas								
2	Problema	Curso	nº alumnos	Resp. correc.	Esquemas	Expresión sintáctica		Comprobación	Tanteo
3						Algorítimica	Algebraica		
4	n° 1	6°	76	66	2	14	0,00%	2	53
5				86,64%	2,63%	18,42%	0,0%	2,63%	69,73%
6		7°	81	72	5	5	9	0	20
7				88,88%	6,17%	6,17%	11,00%	0,0%	24,69%
8		8°	87	78	0	6	62	1	14
9				89,00%	0,00%	7,40%	96,87%	1,14%	16,00%
10									
11	n°2	6°	76	64	1	68	0	3	1
12				95,00%	1,31%	89,46%	0,0%	3,94%	1,30%
13		7°	81	54	3	48	0	9	1
14				66,66%	3,70%	59,25	0,00%	11,11%	1,30%
15		8°	87	68	0	2	46	3	2
16				78,16%	0,00%	2,29%	52,87%	3,42%	2,28%
17									
18	n°3	6°	76	34	28	25	0	2	4
19				44,73%	36,83%	32,89%	0,00%	2,63%	5,26%
20		7°	81	11	15	17	0	0	1
21				13,58%	18,51%	20,98%	0,00%	0,00%	1,23%
22		8°	87	0	0	9	60	0	0
23				0,00%	0,0%	10,34%	68,96%	0,00%	0,00%
24									
25	n°4	6°	76	14	7	14	0	0	0
26				18,41%	9,20%	18,41%	0,00%	0,00%	0,00%
27		7°	81	5	8	2	0	0	0
28				6,17%	9,87%	2,46%	0,00%	0,00%	0,00%
29		8°	87	14	0	44	0	0	0
30				16,00%	0,00%	50,57%	0,00%	0,00%	0,00%

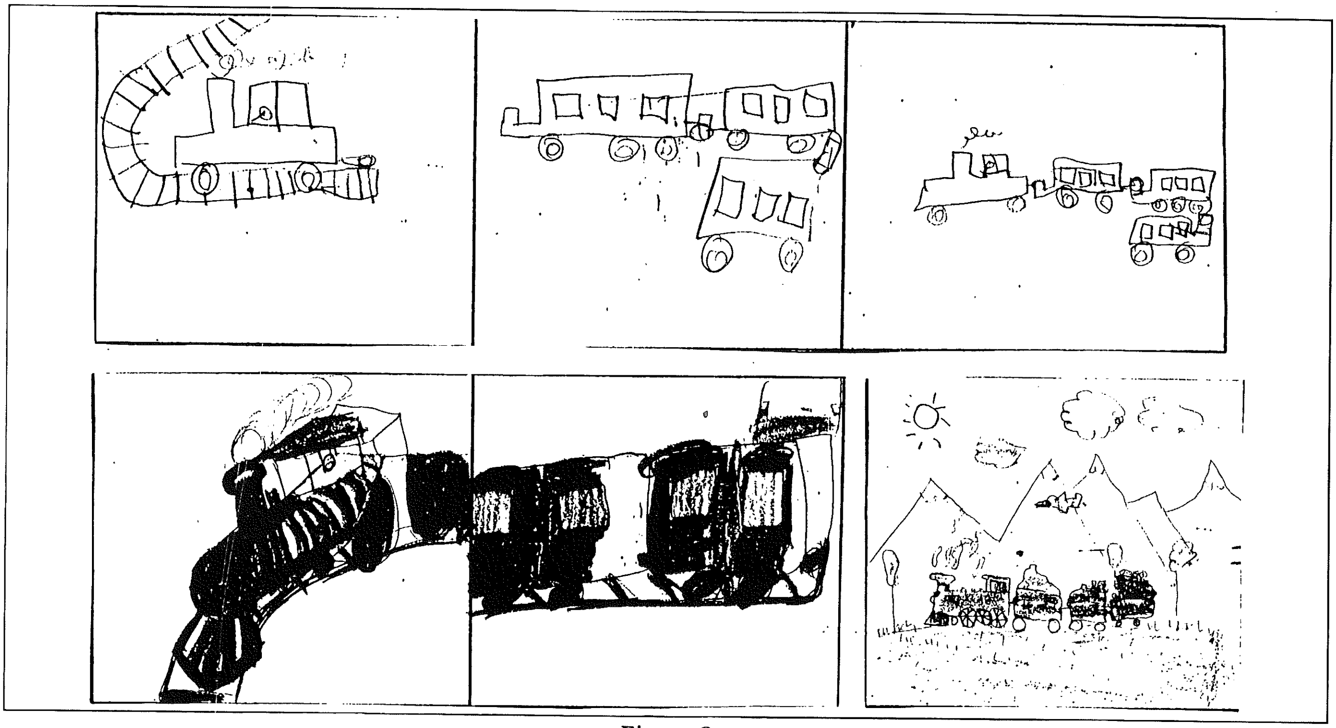


Figura 9
Dibujo figurativo, sin ningún tipo de soporte. Ciclo inicial.

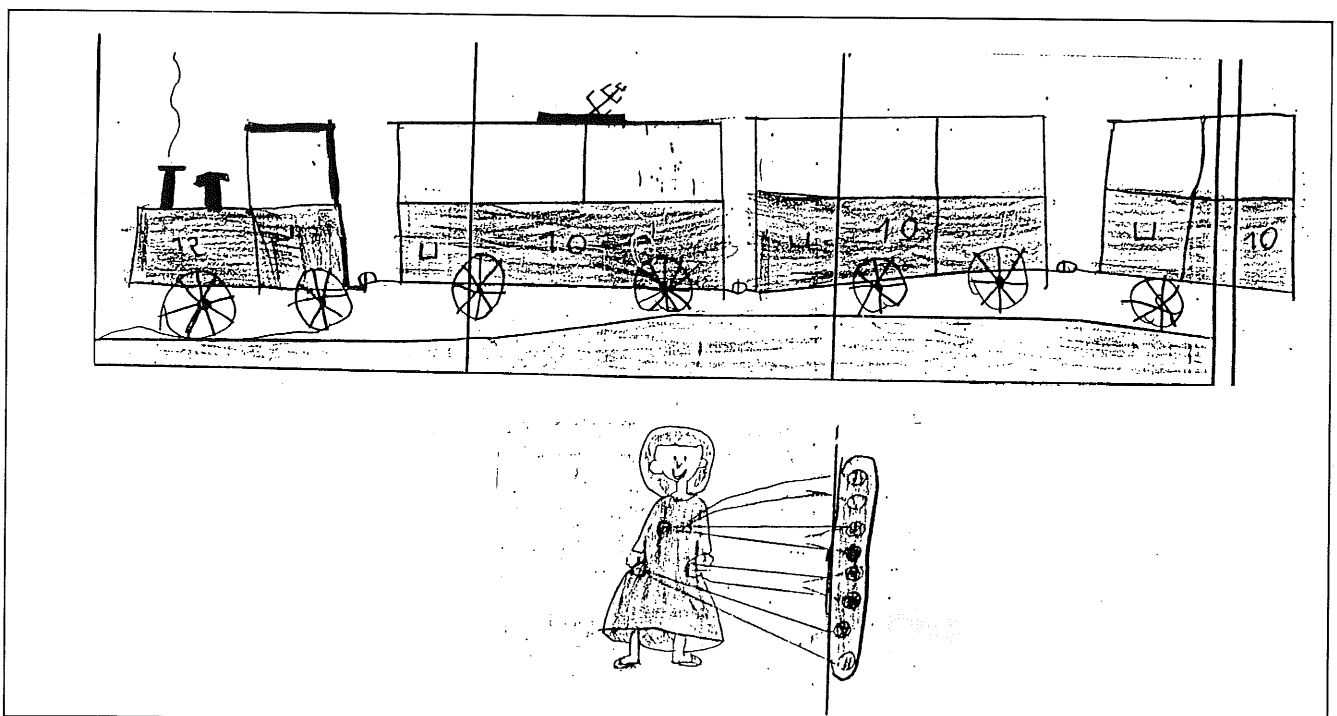


Figura 10
Dibujo figurativo, con soporte numérico. Utilización de un sencillo diagrama. Ciclo inicial.

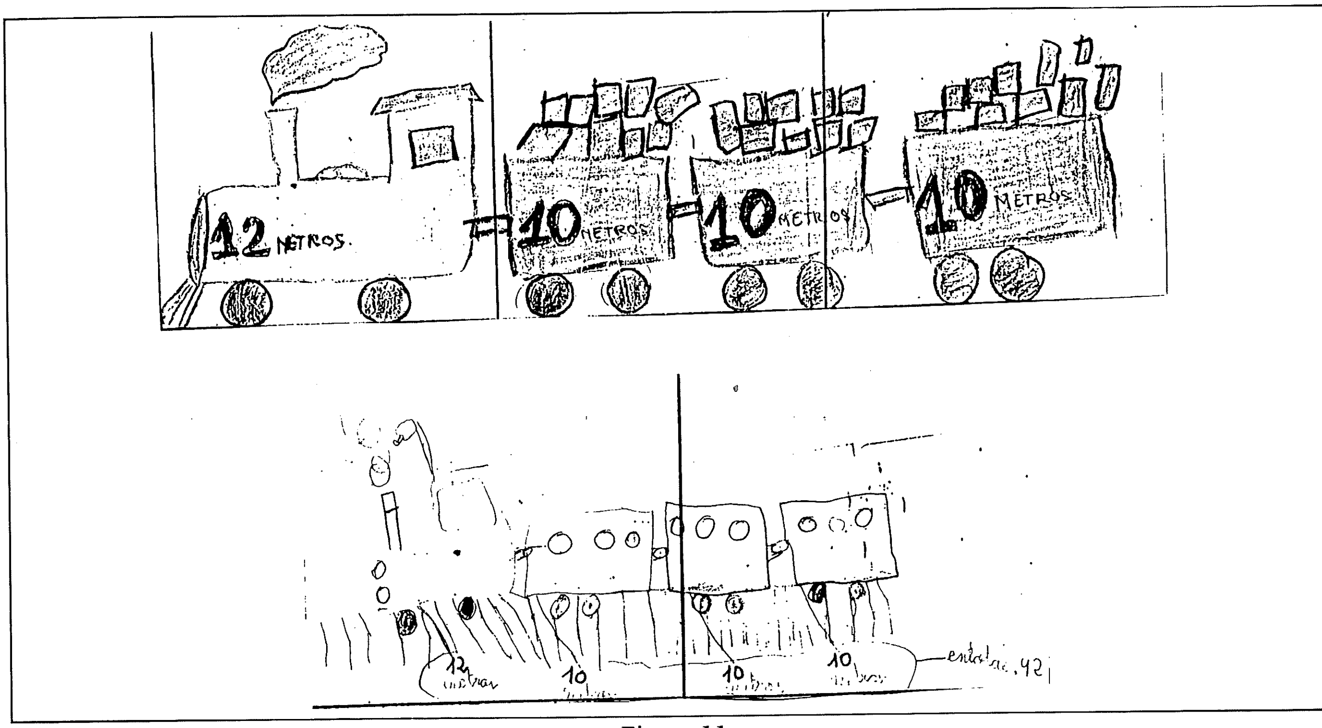


Figura 11
Dibujo figurativo, con soporte numérico y texto. Ciclo inicial

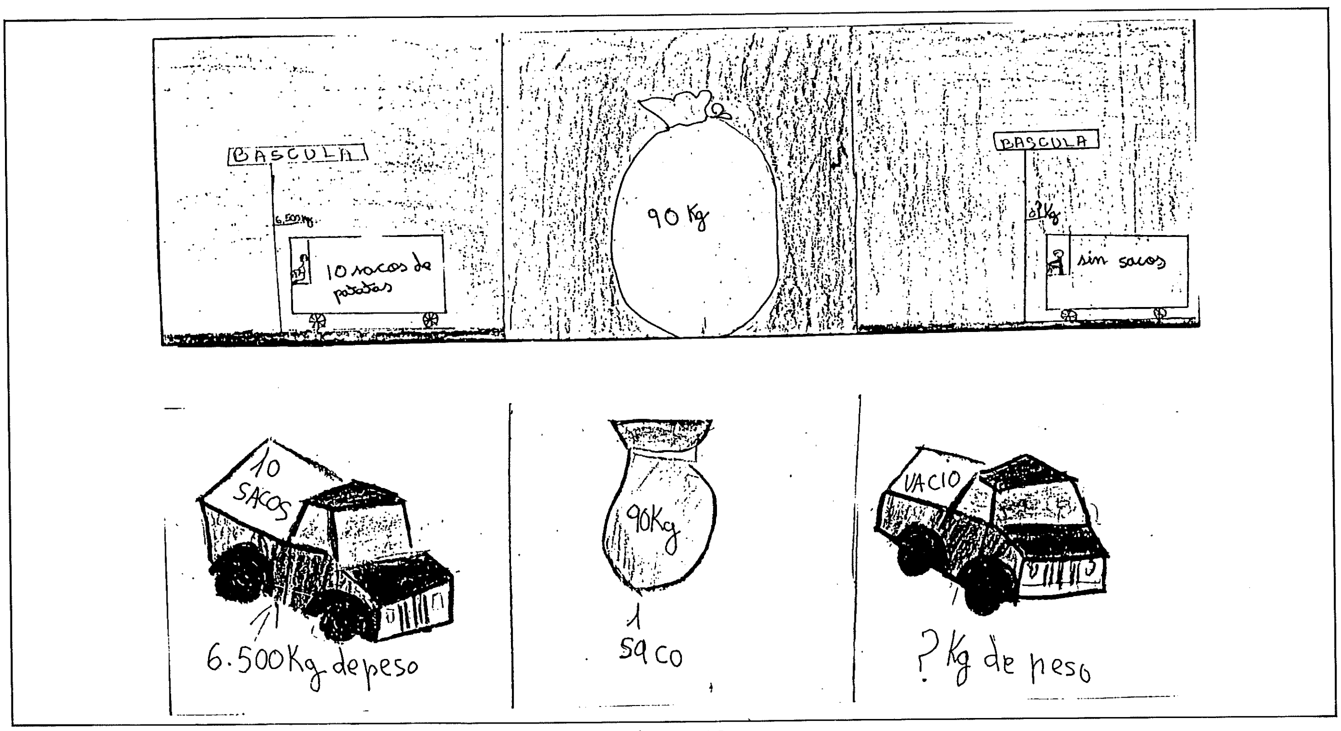


Figura 12
Dibujo figurativo, con soporte numérico y texto. Utilización de símbolos. Ciclo medio.

	23 docenas son	23 docenas de platos a 14 ptas le costaron	Después de la transporte le quedan	Para ganar algo habré de añadir	Cada plato cuesta
(oper.)	23 × 12 =	276 × 14 =	276 − 17 =	1554 : 259 = 6	14 + 6 =
(Result)	276 platos	3864 ptas	259 platos	6 ptas a cada uno	20 ptas

Figura 13
Esquema con texto, números y operaciones.

enunciado.
Un comerciante tenia un cajon con 23 docenas de platos. A transportarlos se han
rato 17 platos. Si cada uno de ellos le as costado 14 ptas? A cuanto tendrá que
vender los que los quedan para ganar en total 1554 ptas.
Estimacion

Esquema
Una docena = 12
Hay 23 docenas = 23 × 12 = 276 platos
Si se han roto 17. 276 − 17 = 259 quedan
——— = 14 pts

259 × 14 = 3826 pts   1554 pts : 259 = 6 ptas para saber cuanto vale un plato

En total es 14 + 6 = 20 pts cada plato

Figura 14
Dibujo ilustrativo que no da ningún tipo de soporte al problema. Ciclo superior.

Te agradeceríamos muchos que intentases resolver los siguientes problemas. Utiliza el sistema que para tí sea más sencillo; si lo haces mentalmente explica como lo has razonado. No es necesario que pongas tu nombre, pero sí el curso a que perteneces.
Gracias, tu colaboración será muy valiosa.

1.- Mi familia está compuesta de trece miembros. Si te digo que el número de varones supera en cinco al número de mujeres, ¿sabrías decirme cuántos hombres y mujeres forman mi familia?

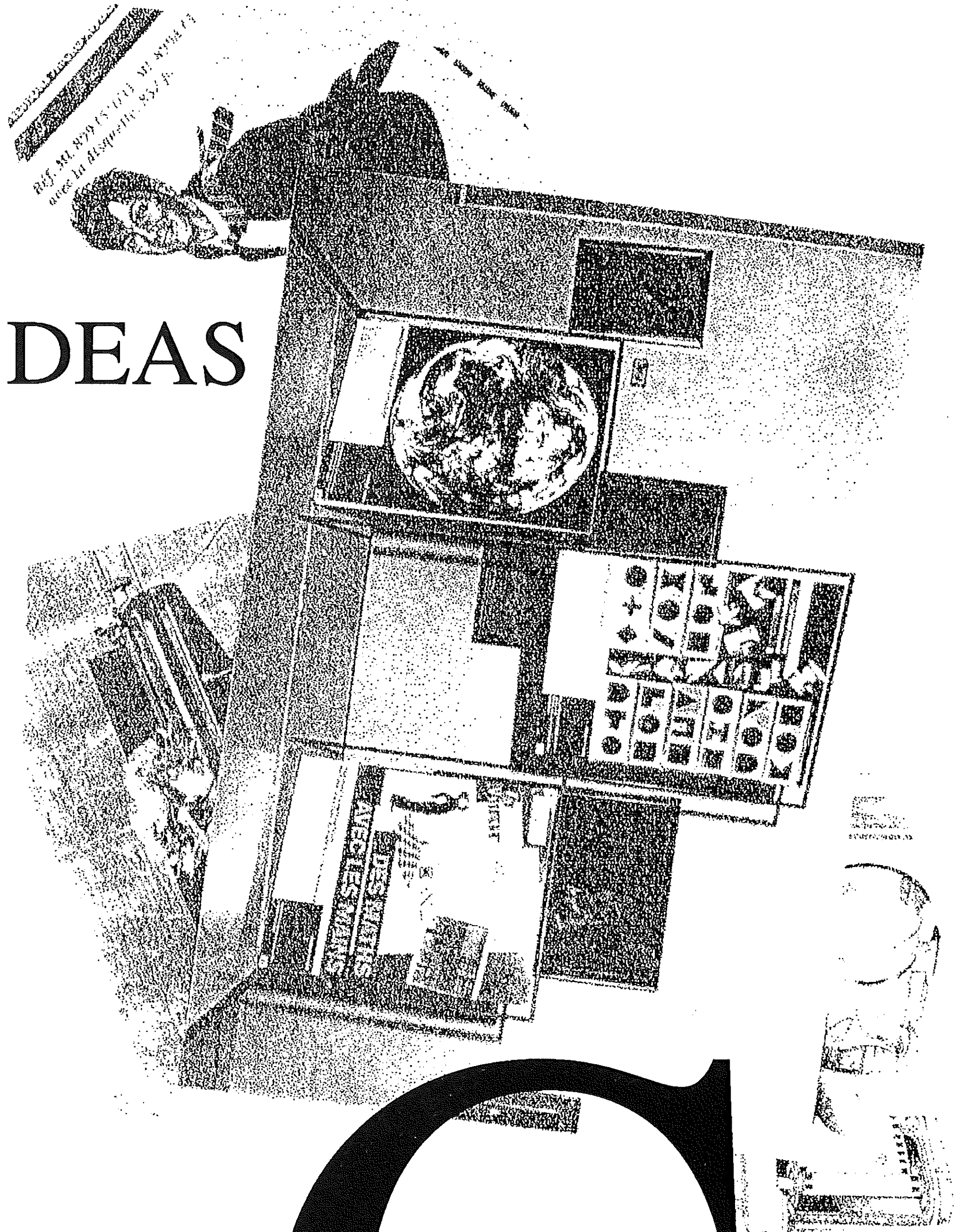
2.- En nuestra escuela hay doble cantidad de alumnos de fuera de Gerona que de la ciudad. Si la escuela tiene en total 1434 alumnos, ¿podrías calcular cuántos alumnos de Gerona hay?

3.- Una tarde salí de mi casa dispuesta a comprar golosinas. Entré en cinco tiendas y en cada una de me gasté la mitad del dinero que tenía al entrar más una peseta. Cuando salí de la última tienda me había gastado todo el dinero. ¿Cuántas pesetas me gasté aquella tarde en golosinas?

4.- Un califa musulmán para probar la inteligencia de sus hijas las envió al mercado a vender manzanas. A la mayor le dio 50 manzanas, a la mediana le dio 30 y a la pequeña sólo 10. Les sijo; –Si la mayor vende 7 manzanas por un dinar, las demás también lo tendrán que hacer. Si la mayor las vende a 3 dinares por manzana, las otras harán lo mismo. Es necesario que las tres ganen igual.
Las chicas no sabían cómo hacerlo y consultaron a un sabio; éste les dijo que lo hicieran tal como les había dicho su padre y que ya llegarían al resultado que les pedía.

Figura 15

IDEAS PARA LA CLASE



Resolución gráfica de algunas inecuaciones con una incógnita cuando sólo se saben representar funciones polinómicas de primer y de segundo grado

Antonio Varo Gómez de la Torre

En este trabajo se describe un método gráfico (casi algorítmico) de resolución de inecuaciones con una incógnita, para alumnos de 1º de BUP.

El método tiene el siguiente ***fundamento teórico***:

Sea la inecuación f (x) > 0

Sea la inecuación f (x) < 0

Supongamos que la gráfica de la función y = f (x) es la de la figura 1:

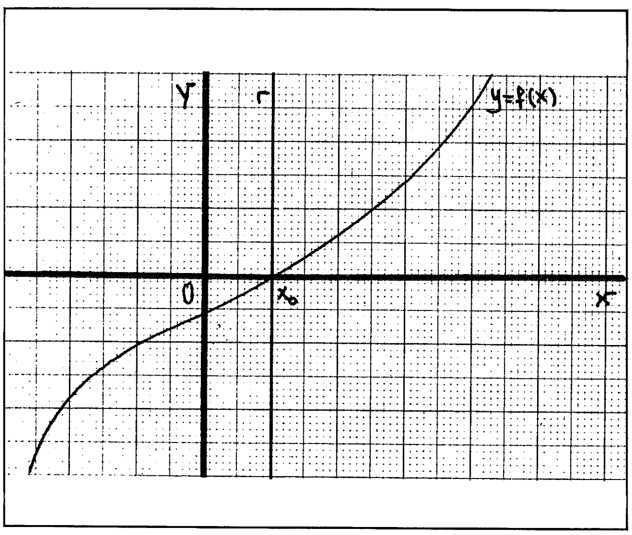
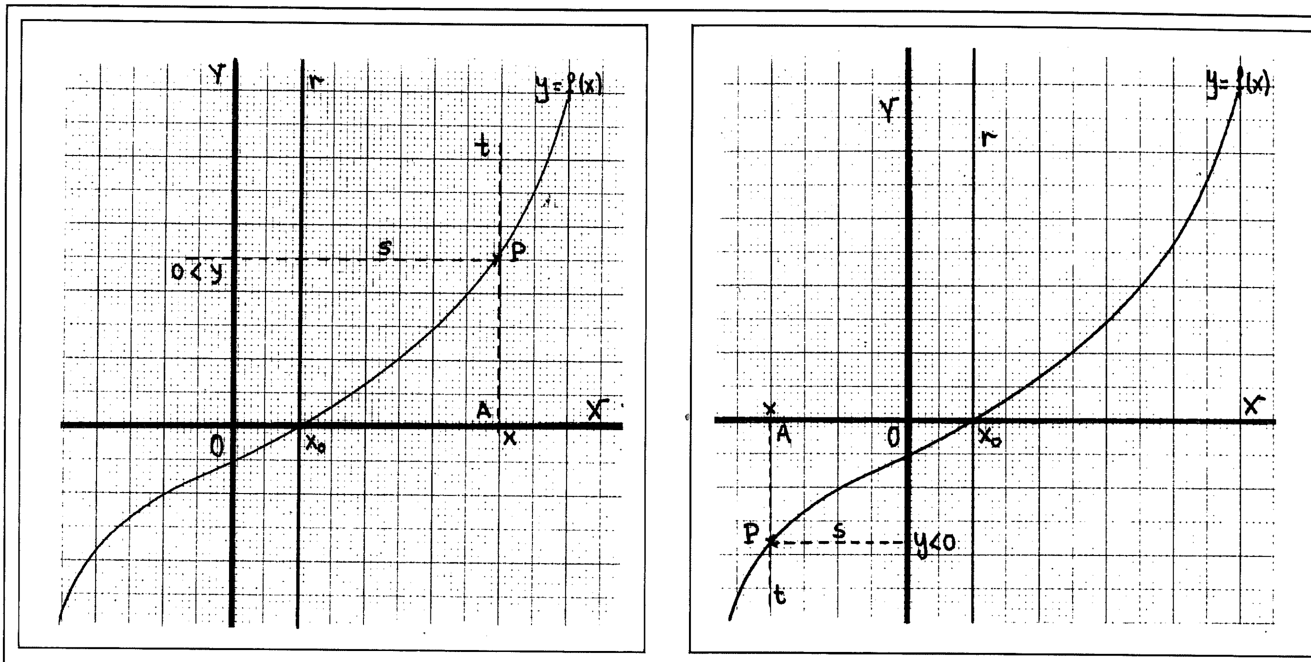


Figura 1

A la derecha de la recta r (perpendicular al eje de abcisas por el punto x_0 en el que f (x_0) = 0) la gráfica de f queda "por encima" del eje de abcisas. A la izquierda de r la gráfica de f queda "por debajo" del eje de abcisas.

Si x es un nº del dominio de f, la imagen, y, de x la encontramos trazando la recta t, perpendicular al eje 0X por el punto A (x, 0); desde el punto P, de corte de esa recta con la gráfica de f, trazamos la recta s, perpendicular al eje de ordenadas: la abcisa, y, del punto de corte de s con el eje 0Y será la imagen de x. (Ver figura 2).

Según esto, siempre que podamos dibujar la gráfica de y=f(x) podremos resolver gráficamente las inecuaciones f(x)<0 o f(x)>0. Pero no sólo eso, sino que aún desconociendo la gráfica de f, si f(x) puede descomponerse en factores polinómicos de primer o de segundo grado, o f(x) es un cociente con numerador y denominador descomponibles en factores polinómicos de primer o de segundo grado, podremos resolver gráficamente la inecuación f(x)>0 (o f(x)<0) mediante la observación conjunta de las gráficas y estudio de los signos de cada uno de los factores que componen a f(x).



si x está a la derecha de x_0 (es decir, si $x>x_0$), su imagen, y, es positiva:

$$\text{si } x>x_0 \rightarrow y > 0$$

como y=f(x)

$$\text{si } x>x_0 \rightarrow f(x)>0$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación f(x)>0 estará formado por los números x / $x>x_0$.

En otras palabras, y en general, los valores de x para los cuales la gráfica de la función y=f(x) queda "por encima" del eje 0X, son las soluciones de la inecuación f(x)>0.

si x está a la izquierda de x_0 (es decir, si $x<x_0$), su imagen, y, es negativa:

$$\text{si } x<x_0 \rightarrow y < 0$$

como y=f(x)

$$\text{si } x<x_0 \rightarrow f(x)<0$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación f(x)<0 estará formado por los números x / $x<x_0$.

En otras palabras, y en general, los valores de x para los cuales la gráfica de la función y=f(x) queda "por debajo" del eje 0X, son las soluciones de la inecuación f(x)<0.

Figura 2

Veamos cómo:

Descripción del método

Una vez descompuesta f(x), o en su caso su numerador y su denominador, en factores lineales y/o parabólicos, dibujamos la gráfica de cada uno de ellos en un mismo sistema de referencia. Seguidamente trazamos rectas perpendiculares al eje 0X por cada uno de los puntos de corte de cada una de las gráficas con el eje 0X. Esas rectas serán nuestras "fronteras", que dividen el plano en regiones disjuntas. A continuación analizaremos las posiciones de las gráficas con respecto al eje 0X ("por encima", "por debajo") en cada una de esas regiones, con lo que conoceremos el signo de cada factor, y por tanto el signo de f(x), en cada una de ellas. De ese análisis deducimos las soluciones de f(x)>0 o de f(x)<0.

Ilustremos el método con algunos *ejemplos*:

Ejemplo 1º. Resolver la inecuación $[(x^2-x-6)/(x-5)] < 0$.

Se trata de buscar los valores de x que hacen negativo el cociente $(x^2-x-6) / (x-5)$.

Representamos las funciones $y=x-5$ e $y=x^2-x-6$.

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2 y r_3, que dividen el plano en las regiones definidas por:

$S_1= (-\infty, -2)$; $S_2= (-2, 3)$; $S_3= (3, 5)$ y $S_4= (5, \infty)$

En S_1 la gráfica de $y=x^2-x-6$ queda "por encima" del eje OX, por tanto, si $x\in S_1 \rightarrow x^2-x-6 > 0$.

En S_1 la gráfica de $y=x-5$ queda "por debajo" del eje OX, por tanto, si $x\in S_1 \rightarrow x-5 < 0$

luego, si $x\in S_1 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) < 0$

$$\text{si } x\in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_2 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) > 0$

$$\text{Si } x\in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_3 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) < 0$

$$\text{Si } x\in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_4 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) > 0$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $(x^2-x-6) / (x-5) > 0$ será $S=(-\infty, -2) \cup (3, 5)$.

Ejemplo 2º. Resolver la inecuación
$$-2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0.$$

Descomponiendo el primer miembro de la inecuación en factores, ésta podría escribirse (entre otras opciones) de la forma:

$$(x^2-x-6)\ (x-5)\ (-2x+2) > 0$$

Representemos las funciones: $y=x^2-x-6$, $y=x-5$ e $y=-2x+2$

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4, que dividen el plano en las regiones definidas por:

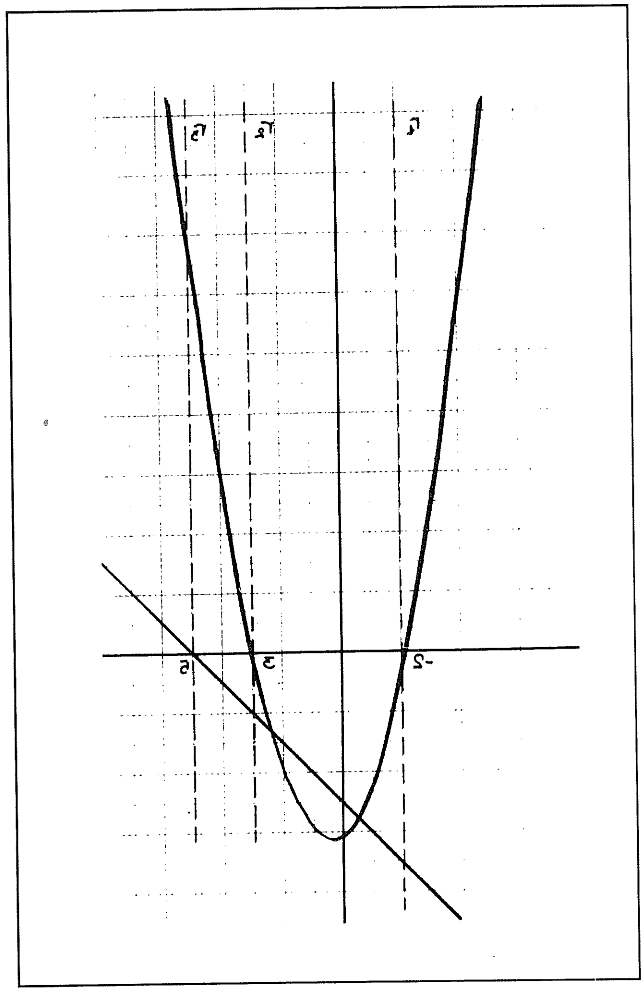


Figura 3

$S_1= (-\infty, -2)$; $S_2= (-2, 1)$; $S_3= (1, 3)$, $S_4= (3, 5)$ y $S_5=(5, \infty)$

$$\text{si } x\in S_1 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_1 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

$$\text{Si } x\in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_2 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$

$$\text{Si } x\in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x\in S_3 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

Si $x \in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_4 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$

Si $x \in S_5 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 > 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_5 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación

$$-2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$$

será $S=(-2, 1) \cup (5, \infty)$.

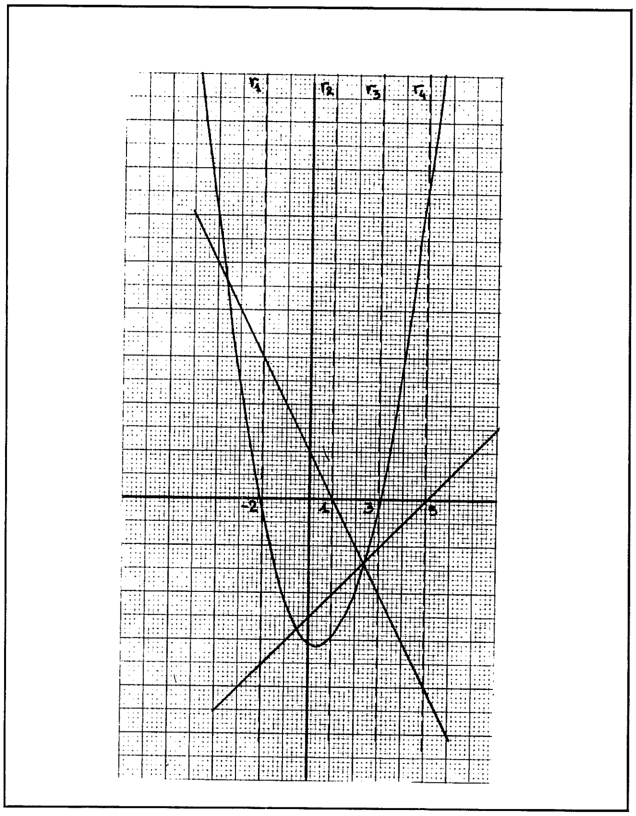


Figura 4

Ejemplo 3º. Resolver la inecuación

$$[(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$$

Representemos las funciones $y=x^2-9$ e $y=-x^2+5x$.

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4, que dividen el plano en las regiones definidas por:

$S_1= (-\infty, -3)$; $S_2= (-3, 0)$; $S_3= (0, 3)$, $S_4= (3, 5)$ y $S_5=(5, \infty)$

si $x \in S_1 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ -x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_1 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

Si $x \in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 < 0 \\ -x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_2 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] > 0$

Si $x \in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 < 0 \\ -x^2+5x > 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_3 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

Si $x \in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ -x^2+5x > 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_4 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] > 0$

Si $x \in S_5 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_5 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

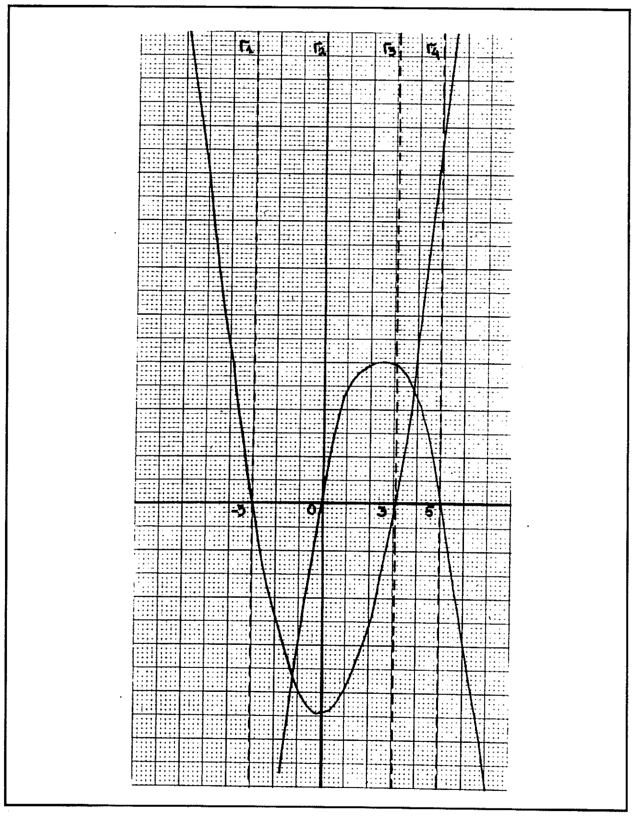


Figura 5

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $[(x^2-9) / (-x^2+5x)] < 0$, será $S=(-\infty, -3) \cup (o, 3) \cup (5, \infty)$

Justificación del método

A parte de por su sencillez, creemos que con este método dotamos a la resolución de inecuaciones de un soporte geométrico e intuitivo, que puede ayudar a que los nuevos conocimientos sobre inecuaciones se acomoden entre los esquemas conceptuales que ya se tienen, haciéndose significativos. Además, con esta forma de resolver inecuaciones damos un poco de sentido a la representación gráfica (y su lectura) de funciones polinómicas de primer y de segundo grado, tal y como aparecen en los actuales programas de 1º de BUP. Así mismo, el alumno descubre que hay características de la gráfica de una función (puntos de corte con el eje OX, signos, etc.) que son fundamentales para la resolución de los ejercicios que abordamos en este trabajo, así como que hay otras características (monotonía, punto de corte con el eje OY, puntos de corte entre las distintas gráficas, etc.) que son totalmente irrelevantes para ello. En general, el alumno comienza a vislumbrar que las características de la gráfica de una función, en mayor o menor medida, pueden proporcionar claves para abordar el estudio o análisis de muchas situaciones.

Para terminar, decir que hay inecuaciones que son más fáciles o más rápidas de resolver por otros métodos distintos al expuesto (por ejemplo, el algebraico), que el alumno debe conocer, pero que debe ser él el que decida cuál de ellos aplicar en cada ocasión.

Antonio José Varo Gómez de la Torre
I.B. "Vicente Aleixandre"
Sevilla

Actividad para un programa de proacción - recuperación

Pilar Rodríguez Peña

El trabajo adjunto, propuesto a modo de "juego" pretende que aquellos alumnos de nivel alto de una clase de E.G.B. trabajen de forma autónoma operando, comprobando, corrigiendo, etc., durante el período de tiempo que el profesor atiende más directamente a los grupos de niveles medios y bajos para la recuperación de cada tema.

Introducción

Al profesor de E.G.B. se le plantea a diario el dilema de tener que impartir unos programas en un aula en la que el grupo de alumnos es totalmente dispar en cuanto a niveles adquiridos en cursos anteriores, intereses, estudios, actitudes, aptitudes, etc.

La solución no debe pasar jamás por agrupar a los alumnos en distintas aulas según sus conocimientos o capacidades y tampoco debemos engañarnos intentando hacer la magia de mantener la atención de todos los alumnos en los mismos ejercicios, puesto que siempre habrá un grupo que se aburra del machaconeo y la insistencia en tareas que ya les vienen chicas y otro que se desanime porque es incapaz de seguir la clase. Uno y otro grupo, pueden imposibilitar totalmente cualquier labor didáctica.

Se impone la necesidad de estudiar la forma de que los alumnos más atrasados alcancen, al menos, los niveles mínimos establecidos sin detrimento de que los más aventajados puedan profundizar en los mismos contenidos, también de forma adecuada a su capacidad y digo, *profundizar en los mismos contenidos* que no trabajar programas distintos, dado el matiz de discriminación que esto conlleva.

El problema es reconocido por todos, e intentamos salirle al paso, cada curso, elaborando unas programaciones teóricas que las más de las veces, por teóricas, se quedan en agua de borrajas.

Mi propósito, este curso fue iniciar un trabajo *práctico* e irlo sistematizando y puliendo a la vista de los resultados.

La primera experiencia practicada fue la de impartir de cada tema una serie de sesiones a la totalidad de los alumnos y una vez comprobado, mediante una prueba escrita quienes habían alcanzado el nivel de Sobresaliente (o Notable en algunos casos) dedicar una sesión a la semana, en la que estos alumnos harían una competición que consistiría en resolver en el menor tiempo posible una serie de ejercicios propuestos contra reloj y de una forma inconexa, aunque siempre referidos a los mismos contenidos en los que sus compañeros estarían trabajando a niveles de recuperación o mínimos.

La autocrítica a este trabajo me llevó a detectar dos errores fundamentales:

a) Durante la sesión en la que efectuaba la competición mi atención la requería el "juego" de los más aventajados mientras trabajaban de forma autónoma los menos avanzados y esto era exactamente lo contrario de lo correcto, didácticamente.

b) Si esto se hacía durante una sesión a la semana, en el resto de sesiones el problema inicial estaba por resolver.

Rechazada, pues, la primera experiencia y analizados los errores de esta surge una 2ª experiencia que es la que expongo en el presente trabajo y que está dando resultados bastante positivos, siempre bajo el prisma de la autocrítica y la autoevaluación.

Objetivos

El trabajo está elaborado en base a los siguientes objetivos:

1. Evitar en el aula el *aburrimiento* constante de algunos alumnos que demandan tareas: "He terminado", "Que hago", ... frente al *sentimiento de impotencia* de la mayoría que terminan dibujando corazones atravesados por la flecha de Cupido o el monstruo de moda, mientras el profesor, en el encerado explica magistralmente como se resuelve un

problema, queriendo adaptar la clase a todos y sin ser escuchado por nadie.

2. *Crear* en los alumnos "hábitos" de trabajo y estudio e *instaurar* conductas que los vayan haciendo autónomos a la hora de trabajar y estudiar.

Actividad

Los propósitos a la hora de elaborar un trabajo para conseguir los objetivos anteriores son:

a) Ofrecer una actividad a los alumnos más aventajados del aula que les permita profundizar sobre los aspectos impartidos en la clase y que puedan resolver de forma lo más autónoma posible.

b) Que esta actividad sea atractiva y esté de acuerdo con sus intereses.

c) Que se resuelva en una o dos sesiones a lo sumo.

d) Que a esta actividad *tenga acceso cualquier alumno* tan pronto como su nivel de conocimiento se lo permita.

e) Utilizar la actividad como *motivación* para todos.

f) De vez en cuando proponer a todos los alumnos un trabajo similar pero de nivel adecuado a la mayoría para evitar el desánimo de unos y el engreimiento de otros.

g) Familiarizar al alumno con las notaciones matemáticas si bien debe cuidarse que el vocabulario utilizado en los textos resulte familiar al alumno y que el lenguaje sea claro y conciso.

Contenido

El trabajo consistirá en una historia planteada como un "juego" ya sea una conquista, una búsqueda, etc., que el alumno resolverá como una carrera de obstáculos y cada obstáculo será vencido mediante el descubrimiento de un número obtenido por medio de las *operaciones* que en cada momento interesen.

Una vez hechas las operaciones oportunas para vencer cada obstáculo, el alumno contará con una clave con la cual *comprobar* si el número obtenido es correcto y si es así, seguirá avanzando, en caso contrario se verá obligado a *buscar el error* y *corregirlo*.

Cada historia irá acompañada de los conocimientos que se necesitan para su ejecución.

Procedimiento

La actividad, en sí misma conlleva un programa de Reforzamiento Regular Continuo (R.R.C.) mediante el cual, *cada* "conducta" de *operar*, *comprobar* y *corregir* de forma autónoma se verá reforzada de manera inmediata con la consecución, por parte del alumno de un objetivo. Este procedimiento es el que la Psicología conductista propone como ideal para instaurar una conducta.

Metodología

1º Se imparten a la totalidad de los alumnos las sesiones programadas con las que se supone se han alcanzado los niveles mínimos de conocimientos de un tema.

2º Se hace una prueba objetiva para evaluar qué alumnos superan los niveles mínimos. Con esta prueba puede alcanzarse un máximo de 7-8 puntos.

3º Los alumnos que no lleguen al nivel 7 puntos seguirán trabajando con la atención directa del profesor y a los alumnos que lleguen a esta puntuación se les ofrecerá un "juego" para que trabajen de forma autónoma.

4º Cualquier alumno, en cualquier momento podrá acceder a trabajar en un "juego" tan pronto como supere los niveles exigidos.

5º Una vez que se pueda o se tenga que dar por terminado el tiempo dedicado a cada tema del programa, se iniciará un tema nuevo y se repetirán las pautas anteriores.

6º A los juegos a resolver se irán "incorporando" los conceptos aprendidos.

Ejecución

1º Se entrega a los alumnos el texto.

2º Efectuada una primera lectura del texto, los alumnos deben hacer una representación gráfica de la situación. Si en el texto se establecen proporciones entre números, dimensiones, etc., debe cuidarse que en el dibujo se contemplen, aunque sea de forma aproximada dichas proporciones. A la vista de los resultados finales, puede también perfeccionarse el dibujo inicial

3º Ejecución de las operaciones indicadas para vencer los obstáculos o encontrar las soluciones correctas a las cuestiones planteadas, haciendo las comprobaciones oportunas, siempre siguiendo las instrucciones del texto.

4º Buscar errores y en su caso revisar el trabajo y rectificar. Todo ello, en principio sin la intervención del profesor.

5º En el caso de que alguna cuestión ofreciese mucha resistencia el profesor dará alguna leve orientación que les servirá de ayuda, pero la prueba deber ser planteada para que esto no ocurra, y los alumnos deben acostumbrarse a *autocorregirse*, una vez que se detecta el error es importante que ellos analicen en qué consisten y lo subsanen.

6º Los alumnos, con el profesor, confrontan soluciones, comentan el ejercicio y en su caso, hacen la corrección definitiva.

7º El número de "juegos" resueltos, será aproximadamente dos, por cada tres sesiones, que el profesor dedique a la recuperación del resto de los alumnos.

Evaluación

La ponderación de los distintos aspectos del trabajo que venimos llamando "juego", se contratará con los alumnos teniendo en cuenta:

1º El máximo de puntos conseguido por la totalidad de los juegos efectuados en cada tema son 3 que se sumarán a las 7 que se habrán conseguido para poder empezar a jugar.

2º Se valorará el tiempo que se tarda en la ejecución cuando haya llegado a soluciones correctas.

3º Será opcional y a convenir si se da por terminado cada juego cuando finalice el primero o si se deja un tiempo prudencial para que haya un segundo, un tercero, etc., así como si se valoran y de qué forma los resultados parciales.

4º No considero conveniente establecer de antemano un tiempo límite para la ejecución del juego ya que se corre el riesgo de dejar a los alumnos con una tarea inacabada que podría traducirse en desánimo para lo sucesivo.

5º En caso de que nadie haya finalizado el juego en un tiempo prudencial, revisar la historia y adecuarla, ya que el error está en el trabajo propuesto.

Ejercicio modelo

Título: ¡A pescar!
Curso: 6º de E.G.B.
Nivel: Alto
Conocimientos necesarios:
Múltiplos y Divisores
M.C.D. - M.C.M.
Nº Racional
Operaciones con Nº Racionales.

Texto:
Estás dentro de una casa y quieres ir a pescar, al lago; para ello has de vencer los obstáculos que te vas a encontrar en el camino:

1º La clave para abrir la puerta de la casa es encontrar un número que sea igual a los 2/3 del m.c.d. + m.c.m. de los números 1200 y 100.

Para comprobar que la clave es correcta tienes que ver si el número que has encontrado es igual a un múltiplo de 7, menos 5.

2º Tienes que abrir la puerta del jardín, porque la tapia no se puede saltar.

El candado que tiene esta puerta, se abre también mediante una combinación, que consiste en girar la numeración del candado hasta formar un número de tres cifras que sea igual al m.c.m. de 13 y 5 multiplicado por el único número par que es primo.

Para asegurarte de que has encontrado el número correcto comprueba si es múltiplo de 2, de 5, y de 13 y si sus cifras suman 4.

3º Como es de noche y no se ve bien, para no pasarte del caminito que conduce al lago, debes contar los árboles que hay al borde del camino (sólo los de tu derecha). Sabiendo que es un número igual a los 2/3 del m.c.d. + m.c.m. de 12 y 18.

Para comprobar que no estás equivocado en cuanto a los árboles que debes contar comprueba si el número que has encontrado es igual a un número de dos cifras siendo las decenas 1/4 de las unidades y múltiplo de 14.

4º Ya estás en el lago pero necesitas las botas de agua y la caña de pescar que están dentro de una casilla, que está a tu lado y que también tiene un cerrojo de seguridad.

La combinación del cerrojo está compuesta por tres dígitos que forman un número múltiplo de 120 y 45 siendo la cifra de las centenas igual a un múltiplo de la cifra de las decenas más uno.

¿Suman 9 las cifras del número que has encontrado?

Con esto consigue llegar al lago y pasar un ratito pescando,...¡Que se te de bien!

Comentario de la actividad

1. Propuesto a 7 alumnos.

2. Pidieron ayuda para hacer el dibujo previo a las operaciones.

3. 6 alumnos, al llegar a la 4ª Solución dan como válido el Nº 360 que es el m.c.m. de 120 y 45. El error, se debe a una mala interpretación del texto que dice: "La cifra de las centenas es igual a un múltiplo de la cifra de las decenas más uno. Al ser el m.c.m. de 120 y 45 igual a 360 asocian la idea de múltiplo al hecho de que 6 sea múltiplo de tres y no se paran a pensar más. El error por otra parte era esperado y el texto fuerte de forma intencionada, para familiarizar al alumno con el lenguaje matemático. A la observación de: "lee bien el texto por favor, que 6 es múltiplo de tres pero el problema no dice eso", los alumnos rectifican sin niguna dificultad. La comprobación, además, era otra trampa, ya que tanto en 360 como en 720 las cifras suman 9.

4. Hay algún signo igual mal utilizado.

5. Debe cuidarse el orden en la ejecución, la presentación y la expresión de las soluciones.

6. El alumno que más tiempo ha tardado en terminar el trabajo lo ha hecho en 1 hora 20 minutos y el tiempo de intervención del profesor comentando los detalles expuestos en los epígrafes 2, 3, 4, ha sido de 10 minutos.

7. La distribución del tiempo del profesor durante una hora y media de clase ha sido de atención directa y personalizada a los grupos de niveles medios y bajos 1 hora y 20 minutos y a los alumnos de nivel Alto 10' sin que haya habido interferencias que molesten ni interrumpan el trabajo de uno ni otro grupo.

8. El interés y la motivación lo manifiestan los alumnos con su actitud.

El grupo que tuvo acceso desde el primer momento a participar en lo que ellos ya llaman "juego", lo pasan bien en clase y en el caso de proponerles cualquier otra actividad que en otro momento hubiesen deseado hacer, en esta ocasión no reciben la propuesta con agrado, por lo que supone de interrupción en su tarea.

La mayoría de los alumnos del grupo que empezó a trabajar en niveles más elementales, es notorio que se esfuerzan para poder integrarse en el grupo de los que "juegan" y de hecho, en una semana, este grupo se ha incrementado con 3 alumnos.

Modelos de ejercicios efectuados por los alumnos

1) 1200 | 2; 6 | 2; 3 | 3; 1; 1 — 100 | 1; 1

$1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1$
$100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 1$
$mcm(—) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1$
$mcm(—) = 1200$
$mcd(—) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 1$
$mcd(—) = 100$

$1200 + 100 = 1300$

$1300 : 5 = 260$ — $260 \times 3 = 780$ — $780 : 3 = 260$ — $260 \times 2 = 520$

2) 13 | 13; 1 | 1 — 5 | 5; 1 | 1

$13 = 13 \cdot 1$
$5 = 5 \cdot 1$
$mcm(—) = 13 \cdot 5 \cdot 1$
$mcm(—) = 65$

$65 \times 2 = 130$

3) 12 | 2; 6 | 2; 3 | 3; 1 — 18 | 2; 9 | 3; 3 | 3; 1

$12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 1$
$18 = 2 \cdot 3^2 \cdot 1$
$mcd(—) = 2 \cdot 3 \cdot 1$
$mcd(—) = 6$
$mcm(—) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 1$
$mcm(—) = 36$

$36 + 6 = 42$ — $42 : 3 = 14$ — $14 \times 2 = 28$ — $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ — $8 : 2 = 4$

4) 120 | 2; 6 | 2; 3 | 3; 1; 1 — 45 | 3; 15 | 3; 5 | 5; 1

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$
$45 = 3^2 \cdot 5 \cdot 1$
$mcm(—) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$
$mcm(—) = 360$

$8 \times 9 = 72$ — $72 \times 5 = 360$ — $360 \times 2 = 720$

$7 : 2$ — 6

7 es múltiplo de 2+1.

SOLUCIONES

1) 520
2) 130
3) 28
4) 720

1º) Clave = 520

1200	2	100	1
6	2	1	
3	3		
1	1		
1			

$1200 = \boxed{2^4} \times \boxed{3} \times \boxed{5^2} \times \boxed{1}$

$100 = 2^2 \times 5^2 \times 1$

m.c.m. (1200, 100) = 1200

m.c.d. (1200, 100) = + 100

$\overline{1300}$ | 5
30   260
00   x 2
520

Prueba: 520 | 7
30   74
2 + 5 = 7

2º) = 130

13	13	5	5
1	1	1	1
1		1	

$5 = \boxed{5} \times 1$

$13 = \boxed{13} \times \boxed{1}$

m.c.m. (13, 5) = 65
x 2
130

3º) = 28

12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1	1	1	1
1		1	

$12 = \boxed{2^2} \times 3 \times \boxed{1}$

$18 = 2 \times \boxed{3^2} \times 1$

m.c.m. (12, 18) = $2^2 \times 3^2 \times 1 = 36$

m.c.d. (12, 18) = $2 \times 3 \times 1 = + 6$

42 | 3
12   14
0   x 2
28

4º)

120	2	45	3
6	2	15	3
3	3	5	5
1	1	1	1
1		1	

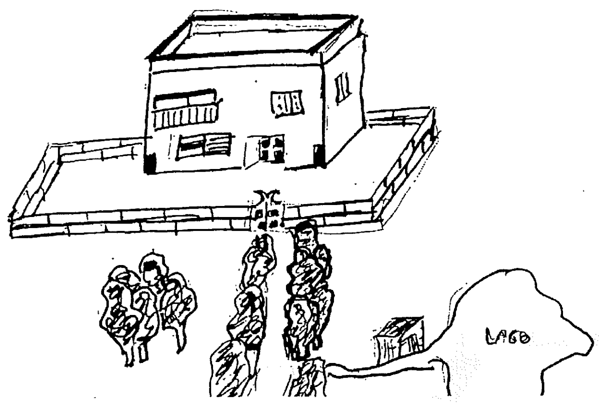
m.c.m. (120, 45) = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 1 = 360$

m.c.m. (120, 45) =

$120 = \boxed{2^3} \times 3 \times 5 \times \boxed{1}$

$45 = \boxed{3^2} \times \boxed{5} \times 1$

x 2
720 multiplo de 120 y 45



1º) $\frac{3}{5}$ de $1.300 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1.300}{1} = \frac{3.900 : 5}{5 : 5} = \frac{780}{1} = 780$

2º) $\frac{2}{3}$ de $780 = \frac{2}{3} \cdot \frac{780}{1} = \frac{1.560 : 3}{3 : 3} = \frac{520}{1} = 520$

S: El numero es 520 para abrir la puerta

2º) M.C.M $(13, 5)$ $\cancel{65} \times 2 = 130$

S: Para abrir la cancela es el 130

3º) $\frac{2}{3}$ de $42 = \frac{2}{3} \cdot \frac{42}{1} = \frac{84 : 3}{3 : 3} = \frac{28}{1} = 28$

S: Hay 28 arboles en el camino

4º) S: La combinacion es 360 $360 \cdot 2 = 720$

Conclusión

Las conclusiones a las que podemos llegar, tal y como se ha efectuado el trabajo carecen de vigor científico.

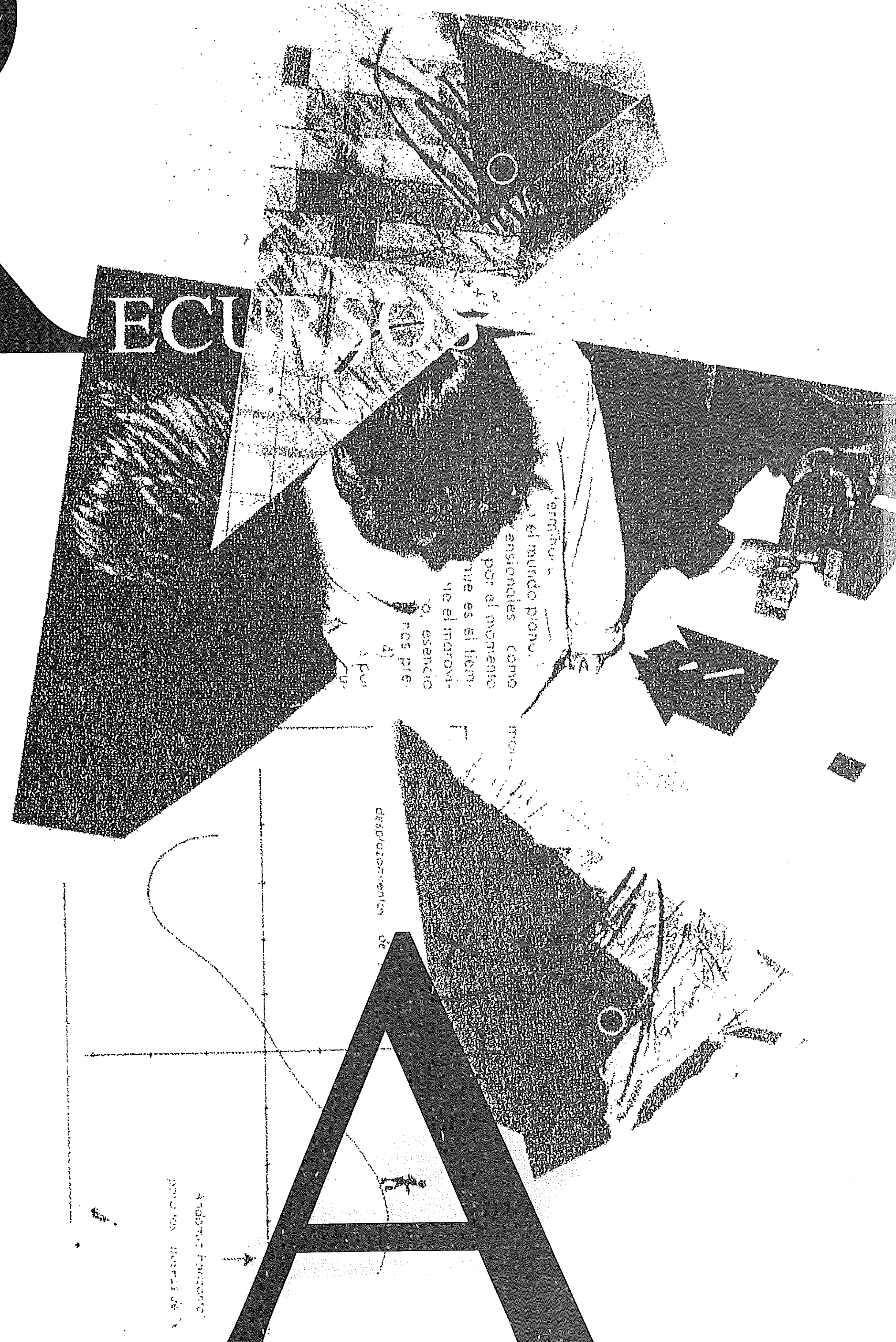
No se ha establecido una línea base, previa, de las interrupciones que se daban en clase, de las veces que un alumno que podía sacar una nota de sobresaliente sorprendía con una mediocre ejecución de una prueba porque se había abandonado, etc., para comparar con las conductas en la clase hoy, pero ya ha quedado constancia de que pretendía que el trabajo fuese eminentemente práctico y he dejado a un lado, dentro de los márgenes posibles, ese afán de cuantificación que a veces canaliza nuestras energías y nuestro tiempo más hacia lo espectacular que hacia lo práctico. Simplemente se me ocurrió y sin más a nivel intuitivo lo puse en marcha y puedo asegurar que funciona.

Las interrupciones son pocas o ninguna, los alumnos más capaces rinden más de acuerdo con sus posibilidades que antes, los alumnos menos capaces, en su mayoría, tiene un estímulo para trabajar y la minoría que queda son alumnos que por razones que no hacen al caso, han tenido que promocionar pero no siguen el programa del curso, y también pueden ser "algo" mejor y más directamente atendidos por el profesor.

Quedan por supuesto, muchos problemas del aula por resolver pero que no sea por falta de buena voluntad.

Pilar Rodríguez Peña
C. P. Teodosio
Sevilla

RECURSOS



PARA EL AULA

Polígonos regulares generalizados

P. Familiar Ramos

En este trabajo se recuerda que las raíces enésimas de un complejo descansan en los vértices de un polígono regular de *n* lados, y de la forma de proceder al unir estos vértices para formar un polígono ordinario o un polígono en forma de estrella.

Es conocido que las n raíces n-ésimas del complejo

$$r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{\theta i} = re^{\theta i + 2\pi k i}\,(k \in Z)$$

están dadas por

$$(re^{\theta i + 2\pi k i})^{1/n} = r^{1/n}\, e^{\frac{\theta i + 2\pi k i}{n}} = e^{1/n}\,(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2\pi k}{n})$$

al tomar k los valores $0,1,2,\ldots,n-1$.

Ahora bien, estas n raíces tienen el mismo módulo, $r^{1/n}$, de manera que están sobre una circunferencia con centro en (0,0) y radio R= $r^{1/n}$. Como además dos argumentos consecutivos difieren de

$$\frac{\theta + 2\pi(p+1)}{n} - \frac{\theta + 2\pi p}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

resulta que estas raíces n-ésimas dividen a la circunferencia en n partes iguales, y en consecuencia *coinciden* con los vértices de un *polígono regular de n lados*.

Para hallar, por ejemplo, las raíces quintas de 1+i, evaluamos

$$(-1 + i)^{1/5} = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}]^{1/5} = 2^{1/10}\,(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{5}),$$

y cuando k toma los valores del conjunto {0,1,2,3,4}, obtenemos las cinco raíces

$$z_1 = 2^{1/10}\,(\cos\frac{3\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{20})$$

$$z_2 = 2^{1/10}\,(-\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20} + i\cos\frac{\pi}{20})$$

$$z_3 = 2^{1/10}\,(-\cos\frac{\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20})$$

$$z_4 = 2^{1/10}\,(-\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{20} + i\cos\frac{3\pi}{20})$$

$$z_5 = 2^{-2/5}\,(1 - i),$$

que pueden verse representadas en el diagrama de Argand de la FIGURA 1. Estas raíces ocupan los vértices de un pentágono regular inscrito el la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y radio R=$2^{1/10}$.

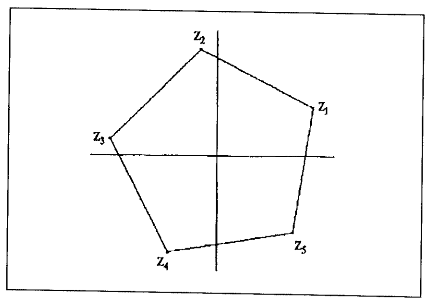


Figura 1

El pentágono regular {5} lo hemos obtenido uniendo naturalmente sus vértices correlativamente de 1-en-1. ¿Qué ocurre si los unimos de 2-en-2? En este caso obtenemos el pentágono estrellado + Figura 2+, llamado también *pentagrama místico*, el mismo que los babilonios y pitagóricos usaban como símbolo de significado especial.

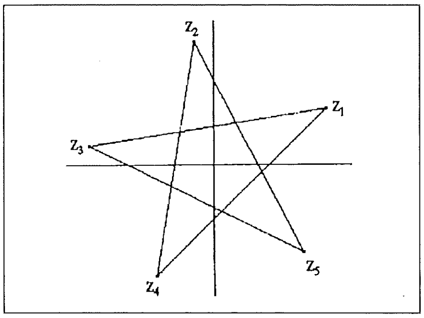


Figura 2

En general, si unimos los n vértices de un n-gono regular correlativamente de d-en-d, después de dar algunas vueltas alrededor del polígono, pasaremos por todos los vértices y llegaremos al punto de partida sólo en determinadas condiciones. En los casos en que esto ocurra, el polígono *cruzado* así obtenido es el *polígono regular estrellado* $\{n/d\}$. Si d=1, no hay estrella, y tenemos el polígono regular ordinario $\{n\}$[1]. Si d>1, los lados se cruzan unos a otros, formando la estrella; pero los puntos donde se cruzan no cuentan como vértices. Éstos son los llamados *puntos dobles* del polígono, y tiene exactamente $n(d+1)$ puntos. Como al comenzar en un vértice se deben dar d vueltas alrededor del polígono para trazar los n lados y volver al punto de partida, a este denominador d se le llama la *densidad* del polígono. El pentagrama místico corresponde al polígono {5/2} de densidad 2; análogamente, los polígonos {13} y {19/7} tienen densidad 1 y 7 respectivamente.

Ahora bien, ¿qué relación se debe cumplir entre los números naturales n y d para que pueda formarse el polígono estrellado de n vértices unidos de d-en-d? Si la densidad d no es primo con n, y δ es su máximo común divisor, entonces al unir los vértices de d-en-d se llega al punto de partida recorriendo la circunferencia d/δ veces, obteniendo así un polígono estrellado de n/δ lados. Por tanto, para que el polígono tenga n lados es necesario que +=1. Esto nos indica la sencilla relación que debe cumplirse: la densidad d del polígono debe ser primo con n. Pero como el mismo polígono se obtiene uniendo los vértices de d-en-d que de n-d-en-n-d, es decir $\{n/d\}$+$\{n/(n-d)\}$, basta considerar solamente los casos en que la densidad d sea un entero positivo primo con n y menor que $n/2$. Esta observación establece que hay un polígono regular generalizado $\{q\}$ -con o sin estrella- que corresponde a cada racional q>2. También indica que el número de polígonos regulares de n lados es el de números primos con n menores que $n/2$; por consiguiente es la mitad del indicador de Euler de n, es decir

$$\frac{1}{2}\varphi(n) = \frac{1}{2}\, n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \qquad (n>2)$$

donde $n = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_n^{\alpha r}$

es la descomposición de n en factores primos.

Esta fórmula nos hace capaces de formar la tabla siguiente, mostrando una relación de todos los polígonos regulares que no superan los 22 lados. *(Ver pág. siguiente)*

[1] Según H.S.M. Coxeter, la notación $\{n/d\}$ fue introducida por el matemático suizo Ludwig Schläfli (1814-1895) y se justifica a que se presentan fórmulas que se cumplen igualmente para $\{q\}$ cuando q es entero o cuando es una fracción.

n	$1/2\varphi(n)$	descripción del polígono	n	$1/2\varphi(n)$	descripción del polígono
3	1	{3}	13	6	{13},{13/2},{13/3}, {13/4},{13/5},{13/6}
4	1	{4}	14	3	{14},{14/3},{14/5}
5	2	{5},{5/2}	15	4	{15},{15/2},[15/4}, {15/7}
6	1	{6}	16	4	{16},{16/3},{16/5} {16/7}
7	3	{7},{7/2},{7/3}	17	8	{17},{17/2},{17/3}, {17/4},{17/5},{17/6}, {17/7},{17/8}
8	2	{8},{8/3}	18	3	{18},{18/5},{18/7}
9	3	{9},{9/2},{9/4}	19	9	{19},{19/2},{19/3}, {19/4},{19/5},{19/6}, {19/7},{19/8},{19/9}
10	2	{10},{10/3}	20	4	{20},{20/3},{20/7}, {20/9}
11	5	{11},{11/2},{11/3}, {11/4},{11/5}	21	6	{21},{21/2},{21/4}, {21/5},{21/8},{21/10}
12	2	{12},{12/5}	22	5	{22},{22/3},{22/5}, {22/7},{22/9}

Presentamos ahora un listado de ordenador, escrito en lenguaje BASIC, y una función predefinida para el programa *DERIVE,* que tienen en común generar polígonos regulares de cualquier número de lados.

BASIC (QBasic del MS DOS 5.0)

```
CLS : SCREEN 12
   LOCATE 2, 15: PRINT «************************************»
   LOCATE 3, 15: PRINT «**   ESTE PROGRAMA DIBUJA UN        **»
   LOCATE 4, 15: PRINT «**   POLIGONO REGULAR DE n LADOS   **»
   LOCATE 5, 15: PRINT «************************************»
   LOCATE 10, 15: INPUT «¿ Número de lados del polígono «; n
   LOCATE 12, 15: INPUT «¿ Densidad del polígono «; d
   LOCATE 14, 15: INPUT «¿ Radio de la circunferencia circunscrita (0<R<240) «; R
```

```
LOCATE 16, 15: INPUT «¿ Angulo de giro (en grados) «; B
CLS : PI = 3.141592653#: C = PI * B / 180
PSET (320 + R * COS(C), 240 + R * SIN(C))
  FOR k = 0 TO n
    A = 2 * k * PI * d / n
    X = 320 + R * COS(A + C): Y = 240 + R * SIN(A + C)
    LINE +(X, Y), 14
  NEXT k
END
```

Introducido este listado en el editor de QBasic, se ejecuta con la tecla de función F5, y seguidamente se introduce el número de lados del polígono, la densidad, el radio de la circunferencia circunscrita (para R=230 queda bien) y el ángulo de giro respecto de la horizontal.

DERIVE (versión 2.57)

POLIGONO_REGULAR(n,d):=
VECTOR([cos(2*pi*d*k/n),
sin(2*pi*d*k/n)],k,0,n)

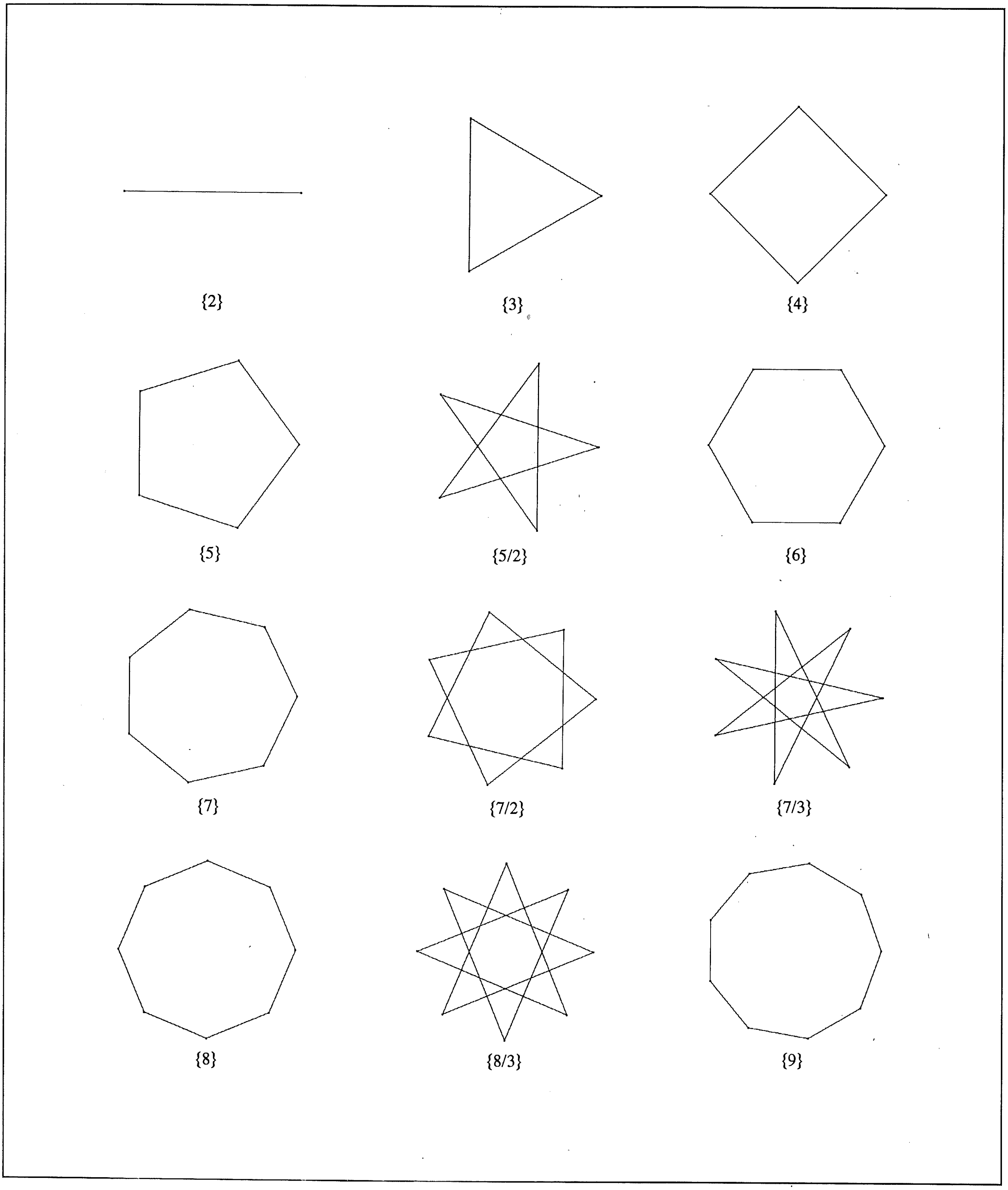
Simplificada la función POLIGONO_REGULAR(n_0,d_0) con el comando Simplify, se tiene que activar el modo que conecta dos o más puntos del plano con segmentos de recta (Plot Overlay Options State Rectangular Connected), y opcionalmente se esconden los ejes rectangulares, poniendo el color *c* de fondo –si no ha sido modificado, por defecto es el color negro: *c*=0– (Options Color Plot Tab c Tab c). Con esto DERIVE está preparado para representar los polígonos, y una vez dibujado, podemos ampliar la escala (tecla F9, o con mejor precisión, Scale).

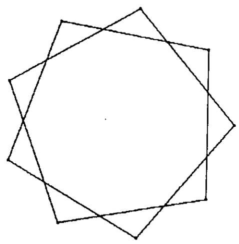
Por último dedicamos un anexo gráfico, que en realidad es un pequeño catálogo ilustrativo de los polígonos regulares que han sido evaluados en la tabla anterior, incluyendo además al *dígono* {2}, que tiene la peculiaridad de que sus dos lados coinciden.

Para la elaboración de estos polígonos se ha instalado la utilidad captura de pantalla *grabber* incluido en WordPerfect 5.1 para DOS, y se han capturado las pantallas que generaba la función POLIGONO_REGULAR que hemos definido en el programa *DERIVE*. El ordenador utilizado es un «excelente» XT a 8MHz, con procesador 8086 y monitor de 12 pulgadas.

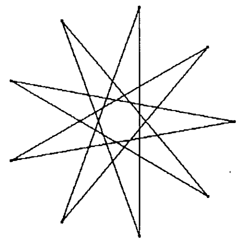
Respecto a la bibliografía, se ha consultado el apartado *«Polígonos en forma de estrella»* -páginas 62 y 63- del libro **Fundamentos de Geometría** de H. S. M. Coxeter (Limusa. México, 1984), y el término **POLÍGONO, NA** de la Enciclopedia Universal Ilustrada Espasa-Calpe (Tomo XLV de la edición de 1921. Madrid).

P. Familiar Ramos
Seminario de Matemáticas
I.B. Ntra. Sra. de la Cueva Santa
SEGORBE (Castellón)

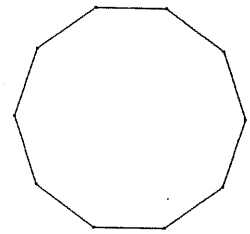

{2}
{3}
{4}
{5}
{5/2}
{6}
{7}
{7/2}
{7/3}
{8}
{8/3}
{9}



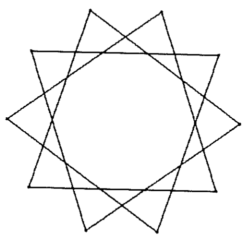
{9/2}



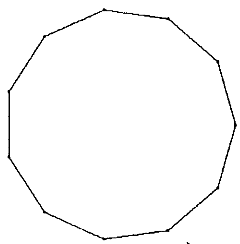
{9/4}



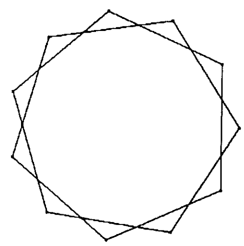
{10}



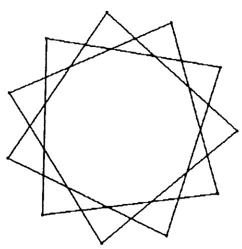
{10/3}



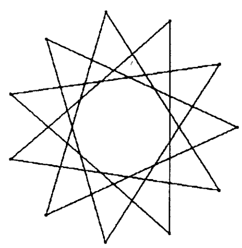
{11}



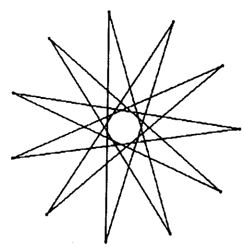
{11/2}



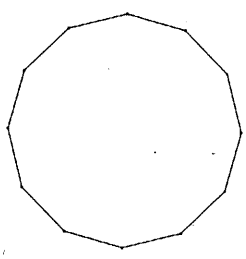
{11/3}



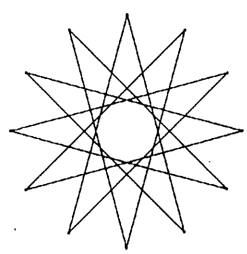
{11/4}



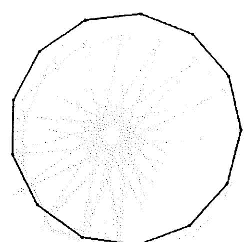
{11/5}



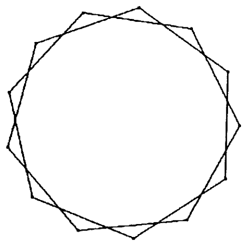
{12}



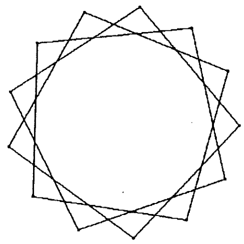
{12/5}



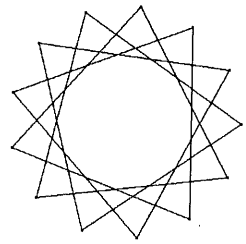
{13}



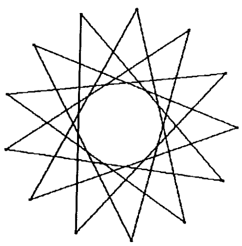
{13/2}



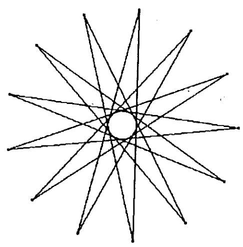
{13/3}



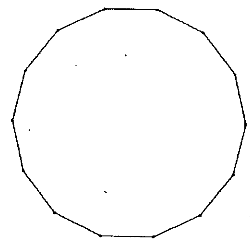
{13/4}



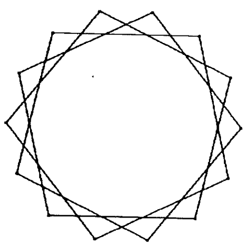
{13/5}



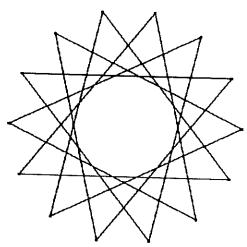
{13/6}



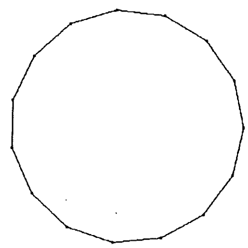
{14}



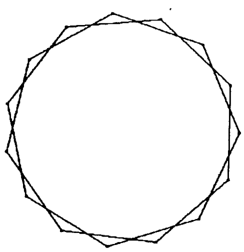
{14/3}



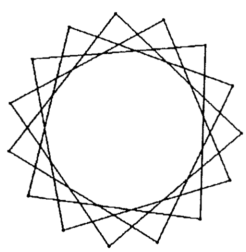
{14/5}



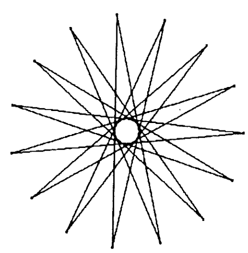
{15}



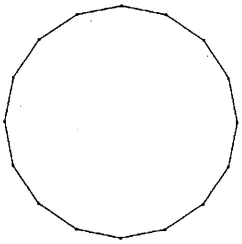
{15/2}

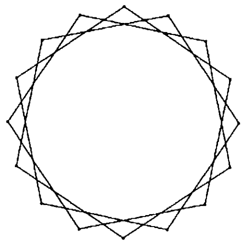


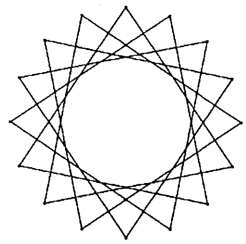
{15/4}

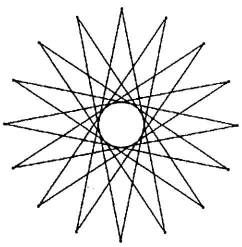


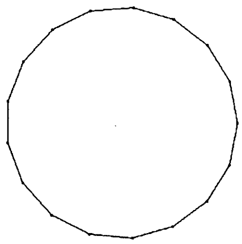
{15/7}

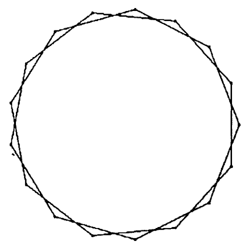

{16}

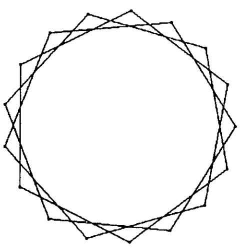

{16/3}

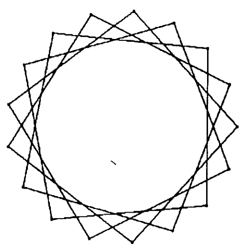

{16/5}

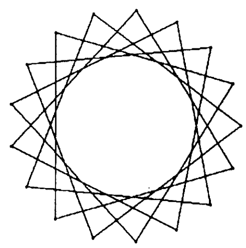

{16/7}

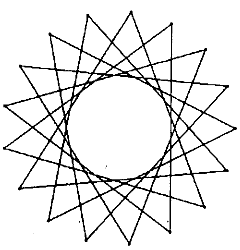

{17}

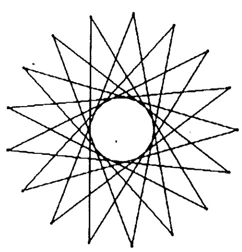

{17/2}

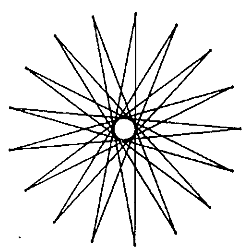

{17/3}

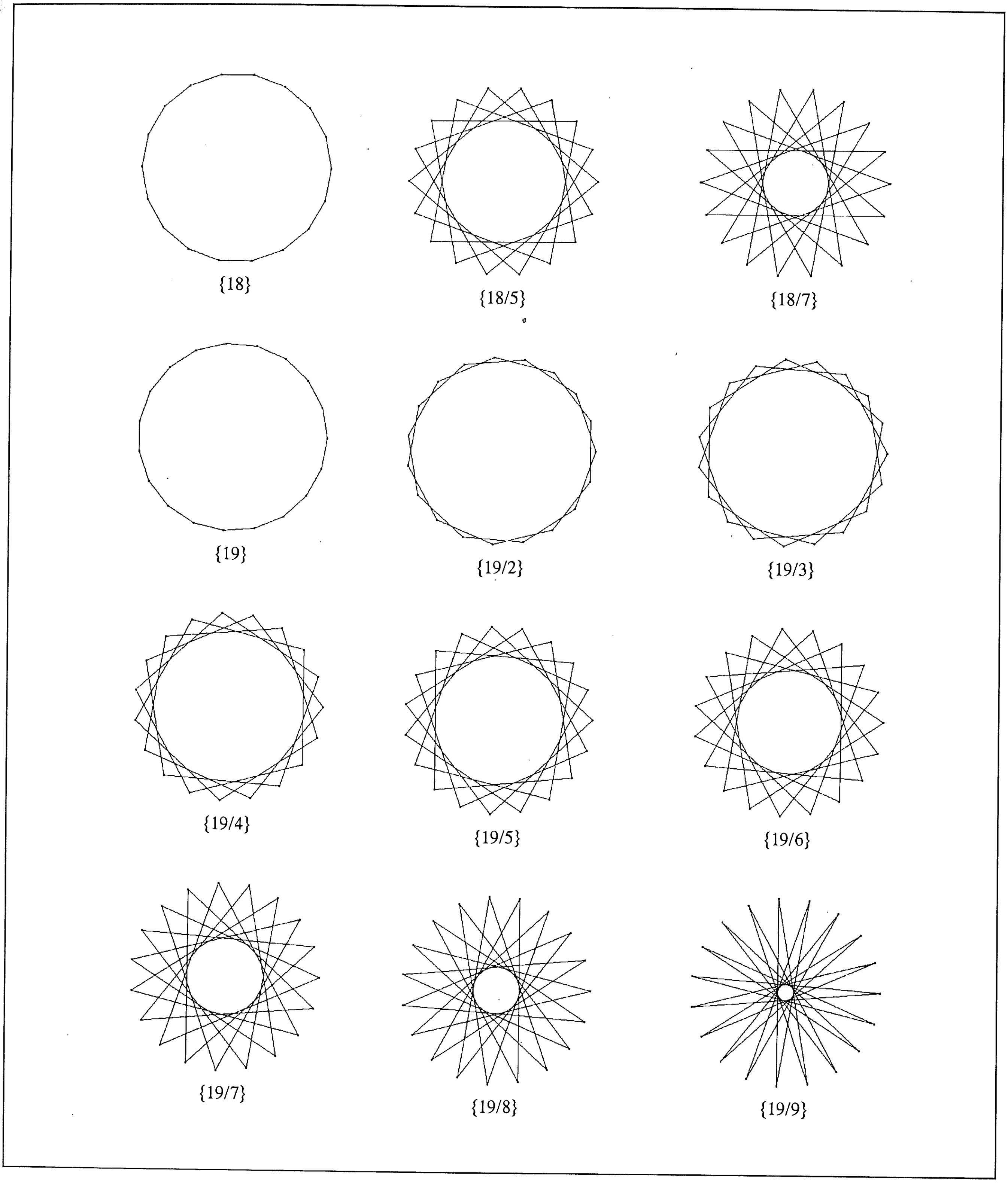

{17/4}

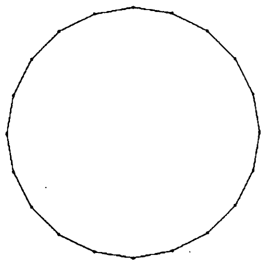

{17/5}


{17/6}

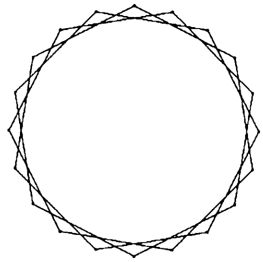

{17/7}


{17/8}

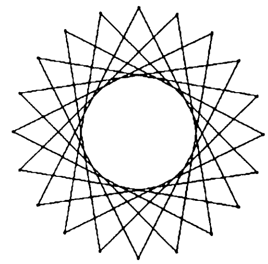

{18}
{18/5}
{18/7}
{19}
{19/2}
{19/3}
{19/4}
{19/5}
{19/6}
{19/7}
{19/8}
{19/9}



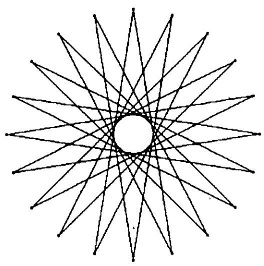
{20}



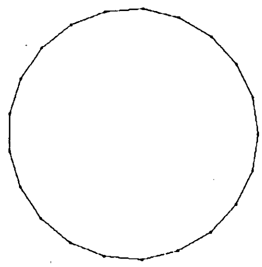
{20/3}



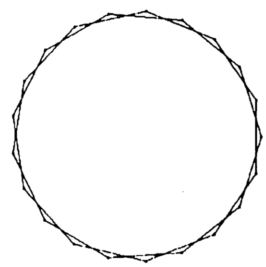
{20/7}



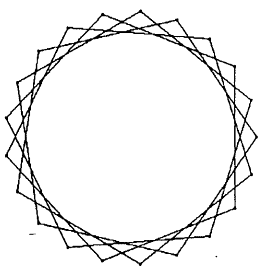
{20/9}



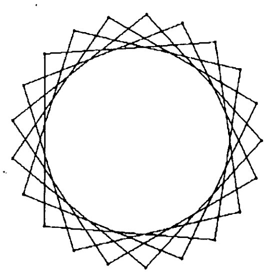
{21}



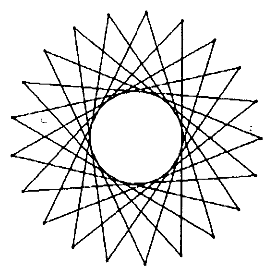
{21/2}



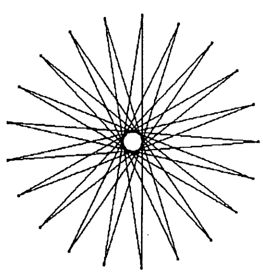
{21/4}



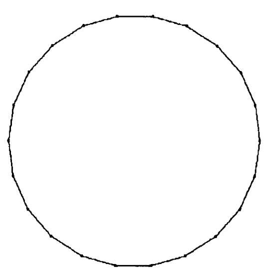
{21/5}



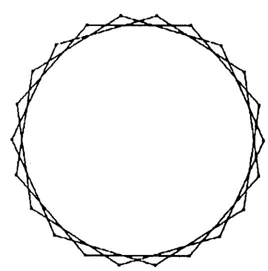
{21/8}



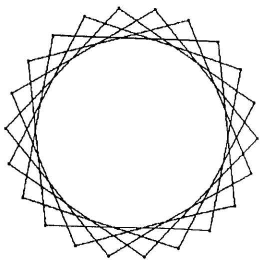
{21/10}



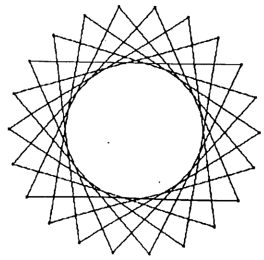
{22}



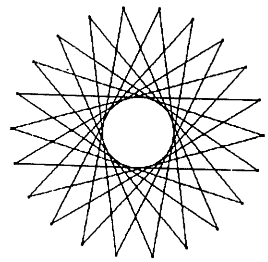
{22/3}



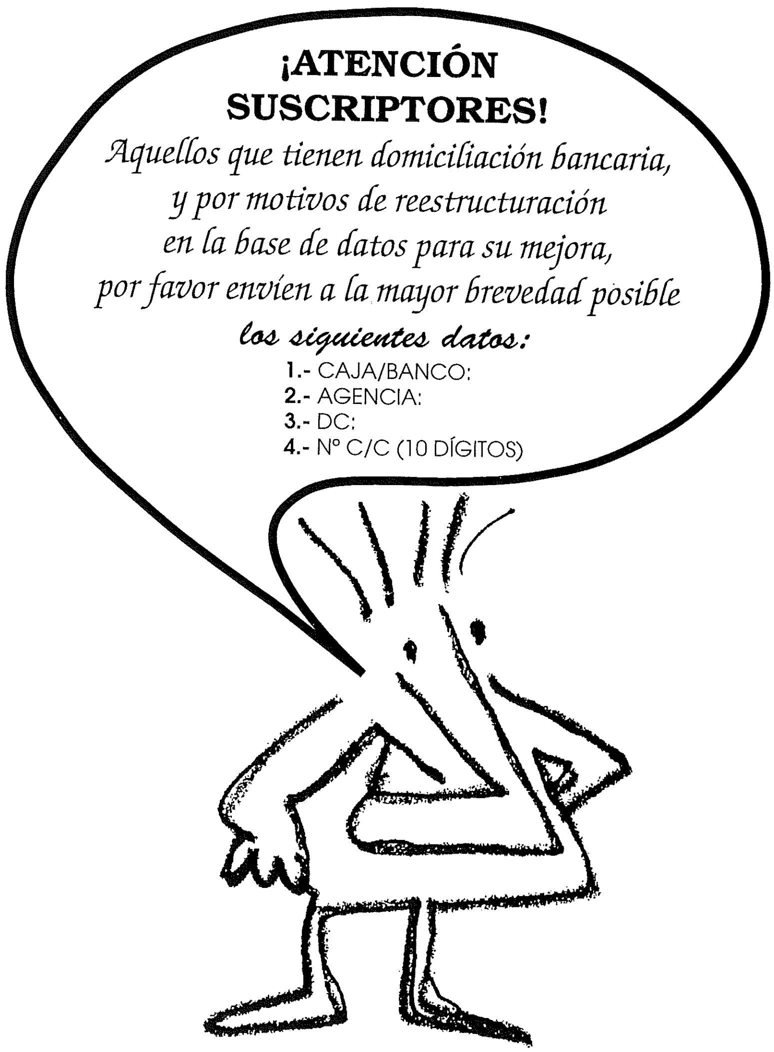
{22/5}



{22/7}



{22/9}


¡ATENCIÓN SUSCRIPTORES!
Aquellos que tienen domiciliación bancaria, y por motivos de reestructuración en la base de datos para su mejora, por favor envíen a la mayor brevedad posible
los siguientes datos:
1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS)

Uso didáctico de la criptografía: La administración de secretos

Pino Caballero Gil
Carlos Bruno Castañeda

En este artículo se presenta un protocolo criptográfico para la administración de secretos como base para la enseñanza y aplicación de las matemáticas en enseñanza secundaria. La facilidad de comprensión del problema propuesto lo convierte en un arma eficaz para atraer la atención de los estudiantes en contenidos de difícil aprendizaje como polinomios y sistemas de ecuaciones.

Introducción

En los últimos treinta años el mundo de las matemáticas aplicadas ha vivido el mayor desarrollo de la historia. Las capacidades alcanzadas por los ordenadores han hecho que se aborden problemas de difícil tratamiento por medios clásicos. Además se han planteado nuevos retos. Campos y problemas que las matemáticas tradicionales daban por resueltos han recibido tratamientos (en algunos casos heurísticos) que avivan el ingenio de los científicos y que han servido como base para el desarrollo de nuevas disciplinas.

Por ejemplo la *criptografía* afronta problemas muy diversos y combina, en muchos casos de forma brillante, conceptos de análisis matemático, álgebra y/o geometría, con tecnologías actuales para resolver problemas del mundo desarrollado. La actualidad de los planteamientos criptográficos y la utilización directa de técnicas matemáticas los convierten en candidatos para realizar una mayor investigación en didáctica. Por sus características suponen una excelente cantera para la búsqueda de situaciones problemáticas que permitan la enseñanza de muy diversos tópicos en matemáticas.

Con los ordenadores y la facilidad al acceso de la información, la criptografía ha pasado de ser un campo que únicamente pertenecía a los círculos del poder y de la diplomacia a ser un problema actual y cotidiano en muchas otras esferas. El derecho a la intimidad y el uso promiscuo de informaciones personales la convierten en un campo de especial actualidad.

La palabra *protocolo* se suele utilizar para referirse a las costumbres y normas por las que se rige la formalidad diplomática, tales como la colocación a la mesa o el orden de los discursos. Enlazando su significado habitual con su significado criptográfico, un *protocolo criptográfico* no es más que un conjunto de normas, un algoritmo, para llevar a cabo comunicaciones entre diferentes partes.

El objetivo de un protocolo, al contrario de lo que ocurre en la criptografía más conocida, no se limita al simple hecho de mantener en secreto una determinada información. Así, por ejemplo, un protocolo criptográfico sería aquél donde los comunicantes desean compartir las partes de un secreto, o bien unir sus fuerzas para descubrir un secreto desconocido por cada uno de los participantes por separado. Ambas ideas corresponden a un tipo concreto de protocolo, conocido como *administración de secretos.* Dicho protocolo se expondrá en un apartado posterior.

Objetivos didácticos

Con este trabajo se pretenden presentar algunos tipos de contenidos matemáticos que se pueden abordar desde el punto de vista de la criptografía. De hecho, el campo de los protocolos criptográficos constituye, por la originalidad de las ideas que se manejan, una herramienta útil para la enseñanza de diversos temas matemáticos. Aquí pretendemos mostrarlo haciendo una propuesta inicial para su desarrollo didáctico.

Este artículo no conforma una unidad didáctica para su desarrollo en el aula, aunque es difícil evitar dejarse tentar por las posibilidades que ofrece. Se puede tratar sobre las comunicaciones en entornos electrónicos y su uso cada vez más sofisticado, sobre el concepto de secreto y su compartimiento, o bien sobre la verificación de la confianza en un mundo cada día menos confiable. Esto nos permitiría captar la atención de los alumnos y poder elaborar un desarrollo didáctico más global. Aquí únicamente se indica dónde afloran los conceptos matemáticos que necesita un protocolo criptográfico susceptible de ser usado como recurso didáctico.

Contenidos

Los contenidos curriculares que se pueden abordar con esta herramienta giran en torno a *los números, naturales y enteros, sus operaciones y el lenguaje algebraico.* De manera facultativa permite introducir temas de creciente interés como la teoría de la información, la criptografía, la probabilidad o la informática.

Los números naturales se utilizan primordialmente para codificar la información alfabética que se desea guardar. Esta codificación puede sustituirse fácilmente por un cifrado permitiendo así abordar desde un primer momento temas propiamente criptográficos.

Los números enteros se utilizan realizando operaciones aritméticas con ellos tales como adición, sustracción, producto, división y potenciación. Utilizar con facilidad la jerarquía y las propiedades de estas operaciones es un objetivo primordial en la enseñanza secundaria. Este uso se lleva a un entorno donde el alumno puede valorar la importancia de su conocimiento. Además, para sacar partido a la potencia del recurso que representan los protocolos criptográficos será necesario, sin duda hacer uso de la calculadora u otros instrumentos de cálculo. De hecho, puede que el alumno se encuentre con problemas de grandes números o de operaciones repetitivas. En ese caso la utilización didáctica de estos instrumentos cobraría una importancia primordial para que el alumno pueda hacer un uso racional de los mismos.

El lenguaje algebraico es un tema siempre difícil de abordar en didáctica. El estudiante se tiene que enfrentar con un lenguaje no natural al que habitualmente se resiste. Mediante el protocolo criptográfico que se propone se plantean ecuaciones y sistemas de ecuaciones útiles por sí mismos como estructura matemática, sin representar problemas de planteamiento. Además se trabaja con polinomios y expresiones literales sencillas. No se requiere, en principio, el uso de operaciones con polinomios pero sí del valor numérico de estas expresiones algebraicas.

El alumno deberá hacer una valoración del lenguaje numérico y algebraico para resolver problemas reales. Podrá apreciar e incorporarse al uso del lenguaje numérico y al cálculo a través de actividades recreativas, permitiéndole alcanzar confianza y una sensibilidad en las propias capacidades para desarrollar actividades de este tipo. Sin duda reconocerá y valorará el uso racional de la calculadora y otros instrumentos para la realización de cálculos numéricos. Podrá captar la importancia de la precisión, el orden y la claridad en la realización de actividades de tipo numérico para alcanzar resultados.

Los contenidos curriculares que usa el protocolo criptográfico que desarrollamos se atienden en la actualidad en los ciclos de *Bachiller* y *Formación Profesional.* Dentro del marco de la *Educación Secundaria,* con esta actividad se logran tratar varios de los que se plantean para las etapas *obligatoria* y *post-obligatoria que la forman.*

Administración de secretos

A continuación realizamos la descripción de los fundamentos del *pro-*

tocolo criptográfico de administración de secretos que vamos a utilizar como herramienta didáctica.

Supongamos que **n** personas que denotamos $\mathbf{A}_i$, i=1,..., n desean compartir un secreto **c** de manera que se cumpla:

a) Cada persona $\mathbf{A}_i$ conocerá alguna información $\mathbf{a}_i$ (parte del secreto) desconocida para el resto del grupo.

b) El secreto **c** podrá obtenerse fácilmente mediante **k** cualesquiera de las informaciones $\mathbf{a}_i$.

c) El conocimiento de **k-1** cualesquiera de las informaciones $\mathbf{a}_i$ no es suficiente para descubrir el secreto **c**.

El conjunto { $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ } recibe el nombre de *esquema umbral* para el secreto **c**.

La utilidad de este tipo de esquema se manifiesta en situaciones donde **c** contiene instrucciones para alguna acción crucial de manera que para iniciarla sea necesario el consenso de al menos **k** partes, situaciones que podemos denominar de *quórum*. Por ejemplo, como ocurre en los banco a la hora de abrir la caja fuerte donde es necesaria la presencia simultánea del director y un número fijo de empleados responsables del banco. Este protocolo ha sido ideado para entornos de comunicaciones electrónicas y a distancia. En estas situaciones se desea compartir una información a la que deben acceder las personas adecuadas y en un número previamente fijado. No es posible verificar la presencia física de los comunicantes que intervienen pero sí se hace necesario asegurar de forma inequívoca la condición y el número de los que participan. Así podremos decir que *"No están todos los que son, pero sí son todos los que están"*.

En la práctica para asegurar un reparto equitativo y justo del secreto es necesaria la figura del *administrador de secretos*, ente ajeno al grupo que participa del problema que reparte y coordina el sistema. Es importante señalar que, tal y como se plantea en la criptografía moderna, el sistema de ocultación de la información es público incluso para un posible oponente y que es el sistema el que debe proveerse de su seguridad y de la confidencialidad de la información. Es decir, todos conocen los pasos que el administrador de secretos realiza, éste únicamente protege aquellas partes del proceso que no pueden ser elaboradas en público. Dependiendo de cómo se definan las circunstancias del problema la participación del administrador puede ser protagonista o bien reducirse a unas mínimas ejecuciones.

Existen muy diferentes esquemas matemáticos en los que un objeto queda determinado a partir de **k** elementos de un conjunto, siendo superfluo cualquier otro elemento adicional. Tales ejemplos pueden ser utilizados para la construcción de los esquemas umbral. Nosotros proponemos a continuación los sistemas de ecuaciones, así como los polinomios como herramientas para su construcción.

Aplicación de los polinomios y sistemas de ecuaciones

Consideremos un secreto **c** formado por una secuencia de **k** caracteres $\mathbf{c}_j$, j=1, 2,..., k, del conjunto de 29 símbolos **S** = { @, A, B,..., Z, . } (@ simboliza el espacio en blanco), o sea **c** es una frase secreta de **k** signos. Por sencillez en este planteamiento inicial se toma este número **k** como número de partes necesarias para recuperar el secreto.

En primer lugar es necesario traducir del lenguaje de las letras al de los números para poder operar. Esto se consigue mediante una correspondencia biunívoca **f** de **S** en $\mathbf{Z}_{29}$ (codificación). Por ejemplo la más sencilla que asigna a cada letra el orden que ocupa en el abecedario:

f:	@ → 0	F → 6	L → 12	Q → 18	W → 24
	A → 1	G → 7	M → 13	R → 19	X → 25
	B → 2	H → 8	N → 14	S → 20	Y → 26
	C → 3	I → 9	Ñ → 15	T → 21	Z → 27
	D → 4	J → 10	O → 16	U → 22	• → 28
	E → 5	K → 11	P → 17	V → 23	

Ejemplo: c = " H O L A "
f(c) = 8 16 12 1

Nota: Si el código es secreto, el proceso de codificación se transforma en un proceso de cifrado pues una vez codificado el texto no es susceptible de lectura por aquellos que no conozcan el código. Por tanto, en lugar del código propuesto, se podría trabajar con sistemas criptográficos clásicos como el de César o el de Vigénere.

Se considera cada uno de los enteros asignados a cada letra como coeficient secreto de un polinomio (con los signos alternados por razones de magnitud),

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \text{ con } a_j = (-1)^j \cdot f(c_j).$$

En el ejemplo:
$P(x) = 8 - 16x + 12x^2 - x^3$

Para dividir el secreto en **n** partes se eligen al azar **n** números $\mathbf{x}_i$, i=1,2,..., n, todos distintos y se calculan los valores $P(x_i)$. Ambos valores $(x_i, P(x_i))$ se distribuyen entre las **n** personas participantes del secreto.

En el ejemplo:

$x_1 = 2 \quad P(x_1) = 8 - 32 + 48 - 8 = 16$
$x_2 = 4 \quad P(x_2) = 8 - 64 + 192 - 64 = 72$
$x_3 = 9 \quad P(x_3) = 8 - 144 + 972 - 729 = 107$
$x_4 = 6 \quad P(x_4) = 8 - 96 + 432 - 216 = 128$
$x_5 = 3 \quad P(x_5) = 8 - 48 + 108 - 27 = 41$

Las partes del secreto son:
(2,16) (4,72) (9,107) (6,128) y (3,41)

Para reconstruir el secreto son suficientes **k** partes cualesquiera puesto que mediante ellas se logra definir un sistema compatible de **k** ecuaciones con **k** incógnitas (los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ del polinomio P(x)). Sin embargo si se reúnen menos de **k** partes, el sistema obtenido es indeterminado y por tanto, dado que tiene infinitas soluciones equiprobables, es imposible descubrir el secreto.

En el ejemplo:
Si se reúnen, A_1, A_2, A_4 y A_5 consiguen el sistema

$$\begin{aligned}
(2, 16) &\rightarrow a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 = 16\\
(4, 72) &\rightarrow a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 = 72\\
(6,128) &\rightarrow a_0 + a_1 6 + a_2 6^2 + a_3 6^3 = 128\\
(3, 41) &\rightarrow a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 = 41
\end{aligned}$$

de donde resolviéndolo obtienen $a_0=8$, $a_1=-16$, $a_2=12$ y $a_3=-1$. De estos valores deducen $f(c_0)=a_0=8$, $f(c_1)=-a_1=16$, $f(c_2)=a_2=12$, $f(c_3)=-a_3=1$ y finalmente mediante la inversa de la función **f** descubren todas las partes del secreto c_0=H, c_1=0, c_2=L, c_3=A.

Algoritmo

Presentamos a continuación el proceso en forma de algoritmo.

Reparto de partes del secreto

Paso 1: Dados los valores en **n** y de **k**, y el secreto **c**, se obtiene f (c).

Paso 2: Se divide f(c) en **k** partes asignándoles signos alternados y denotándolos a_j, j=0,1,...,k-1.

Paso 3: Se generan **n** enteros aleatorios distintos x_i, i=1,2,...,n.

Paso 4: Se calculan para cada i=1,2,...,n.

$$\mathbf{P(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j (x_i)^j}$$

Paso 5: Se reparten entre los **n** usuarios las partes del secreto $(x_i, P(x_i))$, i=1,2,...,n.

Obtención del secreto

Paso 6: A partir de **k** partes cualesquiera, sin pérdida de generalidad consideramos $(x_i, P(x_i))$, i=1,2,...,k, se construye el sistema de **k** ecuaciones con **k** incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$

$$\begin{gathered}
\mathbf{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{k-1} x_1^{k-1} = P(x_1)}\\
\mathbf{a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{k-1} x_2^{k-1} = P(x_2)}\\
\vdots\\
\mathbf{a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \ldots + a_{k-1} xk^{k-1} = P(x_k)}
\end{gathered}$$

Paso 7: Al resolver dicho sistema se obtienen los valores de $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$, y al aplicar sobre $(a_0, -a_1, a_2, \ldots)$ f^{-1} se consigue el secreto **c**.

Aplicación en el aula

Para enseñar el mecanismo de la administración de secretos no es necesario disponer de medios excepcionales. Se puede plantear simplemente como un ejemplo del uso de los polinomios y de los sistemas de ecuaciones en la actualidad.

Actividad 1.

Supongamos una clase de 30 alumnos. El profesor escoge un secreto de 30 signos (*por ejemplo, "ESTE MENSAJE SE AUTODESTRUIRÁ"*). Divide la clase en 15 parajes entre las que reparte los pares de caracteres secretos en que se divide el mensaje.

E - S 5 - 20	T - E 21 - 5	@ - M 0 - 13	E - N 5 - 14	S - A 20 - 1
J - E 10 - 5	@ - S 0 - 20	E - @ 5 - 0	A - U 1 - 22	T - O 21 - 16
D - E 4 - 5	S - T 20 - 21	R - U 19 - 22	I - R 9 - 19	A - • 1 - 28

Dividiendo el mensaje de dos en dos signos queda asegurado que los sistemas de ecuaciones a resolver por los alumnos serán de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Cada uno de los 15 grupos de alumnos se encarga de aplicar la parte del algoritmo correspondiente al reparto de partes del secreto.

Paso 1: Obtienen f(c) (*por ejemplo f(c) = f(E, S) = (5,20)*).

Paso 2: Descubren el polinomio de primer grado P(x) correspondiente (*P(x) = 5 - 20 x*).

Paso 3: Escogen dos dígitos aleatorios distintos x_1 y x_2 (*por ejemplo 2 y 6*).

Paso 4: Calculan el resultado del polinomio para cada dígito obteniendo de esta forma cada grupo dos partes de secreto (x_1, $P(x_1)$) y (x_2, $P(x_2)$) (*P(2) = -35, P(6)=-115,, luego las partes quedan (2, –35) y (6, –115)*).

Estas dos partes de cada grupo son intercambiadas entre los grupos para pasar a la segunda parte del algoritmo que es la obtención del secreto.

Paso 5: Construyen el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a y b,

$$a+bx_1=P(x_1)$$
$$a+bx_2=P(x_2)$$

Por ejemplo

$$a+2b= -35$$
$$a+6b= -115$$

Paso 6: Resuelven el sistema calculando a y b, y mediante **f** aplicada sobre a y -b descubren el secreto que les corresponde. *(Resolviendo el sistema anterior se obtienen a=5 y b=-20, $f^{-1}(a)$=E, $f^{-1}(-b)$=S, luego el secreto es ES).*

Una vez que todos los grupos han descubierto sus secretos se acaba el juego reuniendo todos y reconstruyendo la frase secreta.

De esta forma se pueden crear pequeñas dificultades que permitan detectar los problemas con respecto a los objetivos curriculares que se hayan planteado con este recurso.

Sin duda si se desea llevar al alumno a reflexionar sobre el uso de los protocolos criptográficos se recomienda disponer de unos pocos medios más. Por ejemplo, proponemos un aula de materias con al menos un ordenador y un conjunto de calculadoras adecuado al número de alumnos.

Actividad 2. (Bosquejo)

Cada uno de los alumnos de la clase realiza una apuesta que se guarda en el ordenador del aula. Dicha apuesta deberá ser verificada algún tiempo después (por ejemplo para apuestas sobre un juego de estrategia o una competición deportiva o una prediccvión meteorológica). Dado que el ordenador está disponible para cualquier usuario, se hace necesario ocultar la información de las apuestas y protegerla de cualquier cambio posterior. Por tanto se decide que la información debe ser cifrada mediante un sistema de clave secreta (por ejemplo el sistema de César o de Vigénere) que pueda ser desarrollado por los miembros de la clase. El profesor o un alumno elegido o un grupo de la clase con respecto a otro o tal vez el azar de un programa informático juega el papel de administrador de secretos. Dicho administrador elige una clave secreta de cifrado y mediante ésta, cifra la información de las apuestas.

La clave es precisamente la información que se reparte mediante el protocolo de administración de secretos. De esa forma sólo la presencia de todos los miembros del grupo o un número cualificado de ellos permite desvelar la clave según el algoritmo descrito y con ello descifrar la información de la apuesta. Si la clave es lo suficientemente larga, en el proceso los alumnos tendrán que resolver sistemas de ecuaciones de mayor tamaño y donde los números que aparecen requerirán del uso de calculadoras.

Conclusiones

La utilización de protocolos criptográficos tales como el de reparto de secretos descrito en este trabajo representa una poderosa fuente de herramientas didácticas para la introducción y enseñanza de diversos tópicos matemáticos que tradicionalmente resultan para el alumnado temas de gran dificultad.

De esta forma, como si se tratara de un juego, los alumnos tienen que aprender su funcionamiento (manejando polinomios y resolviendo ecuaciones) si quieren lograr el objetivo final (descubrir el secreto). Además, para llevarlo a cabo necesitan cooperar y participar en grupo, lo que convierte a esta herramienta en una oportunidad para combinar objetivos didácticos y generales de la ESO.

Bibliografía

* P. CABALLERO GIL: **Criptografía digital: Una introducción matemática.** Memoria de Licenciatura, Jul. 1992.

* R. CARRETERO et al: **Diseño curricular de matemáticas 16-18.** Ed. Consejería de Educación y Ciencia, Sevilla, 1989.

* M. MIGNOTTE: **How to share a secret.** Lecture Notes in Computer Science vol *149* pp. 371-375, Springer Berlin Heidelberg new York, 1983.

* J. PASTOR: **Protocolos y Aplicaciones Criptográficas.** Seminario, jun. 1994.

* A. SALOMAA: **Public-Key Cryptography.** Springer Verlag, 1990.

* A. SGARRO: **Códigos secretos.** Pirámide, 1989.

* A. SHAMIR: **How to share a secret.** Communications of the ACM, vol *122* nº 11, p. 612, 1979.

* J.R. SNOW: **An application of Number theory to Cryptology.** Mathematics teacher, vol *82,* nº 1, Ene. 1989.

Pino Caballero Eril
Carlos Bruno Castañeda
Dto. Estadística e Investigación Operativa y Computación
Univ. de la Laguna (Tenerife)
I.F.P. La Laguna (San Benito).

INFORMACION

8º Congreso Internacional sobre Educación Matemática

ICME'8

Sevilla, 1996

El ICME'8 en Sevilla, en 1996

Del 14 al 21 de julio de 1996 tendrá lugar en Sevilla el 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (8º ICME), al que se espera que acudan alrededor de 3.000 profesores de unos 90 países. Los ICME's son los Congresoo de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática, el ICMI (International Comission on Mathematical Instruction).

El ICMI es una comisión de la Unión Matemática Internacional, IMU (International mathematical Union). El IMU es el máximo organismo a nivel mundial para la coordinación de las actividades e investigaciones matemáticas y está constituido por representantes gubernamentales.

Desde 1983, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (SAEM Thales) ha venido estudiando la posibilidad de organizar un ICME en Andalucía y, concretamente, en Sevilla. En vista del apoyo encontrado, tanto en las Instituciones (de Gobierno y Académicas) como en las Asociaciones de Profesores de Matemáticas existentes, los Grupos de Trabajo (Grupo Cero, de Valencia; Grup Zero y Grup Aresta, ambos de Barcelona; Grupo Azarquiel, de Madrid; Grupo Beta, de Badajoz), y la colaboración de profesores de reconocido prestigio (Miguel de Guzmán, Claudi Alsina, José L. Vicente, entre otros), presentó la candidatura para el ICME'7 de 1992. La Comisión Ejecutiva del ICMI decidió, entonces, su celebración en Québec (Canadá), respetando una cierta alternancia de continentes en cuanto a lugar de celebración, pero acogiendo nuestra petición con talante prometedor.

En este intervalo, se crea la Federación Española de Profesores de Matemáticas (FESPM), que tiene, como objetivo principal, coordinar el cada día más fuerte movimiento de profesores de matemáticas de nuestro país.

Como consecuencia, y teniendo en cuenta la buena acogida por parte del ICMI a la petición española, la FESPM presenta nuevamente la candidatura en Abril de 1990, a través de su Presidente, el Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez y del representante español en la IMU, el Profesor Claudi Alsina Catalá.

El Comité Ejecutivo del ICMI, en su reunión de Abril de 1991, presidida por el Profesor Miguel de Guzmán Osámiz, acordó, por unanimidad, conceder la organización del 8º ICME a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, para ser celebrado en Sevilla, en 1996.

La importancia histórica de este acuerdo reside en que es la primera vez que un Congreso Mundial de tal categoría se celebra en un país de habla hispana o portuguesa, con lo que se ha colocado a la Comunidad Iberoamericana en la primera línea del movimiento en didáctica de las matemáticas.

La celebración del ICME-8 en España es un gran honor, pero, también, es un reto muy importante para nuestra Federación. Tanto desde el punto de vista de la organización, como del hecho de convertirse en 1996 en el foco de movimientos y reformas que recorre todos los países, entre ellos el nuestro. Nuestra Federación ha aceptado este reto y ha delegado en la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) "Thales" su preparación y organización, con el apoyo del movimiento internacional de matemáticas, especialmente, del portugués y del iberoamericano, y la cooperación de las instituciones internacionales, españolas y autonómicas.

Esta cooperación ya se tuvo con motivo de la petición para el ICME'7 de 1992; pero hay que recalcar que la Federación, directamente o a través de la SAEM "Thales" ya ha contado en otras ocasiones con el apoyo para sus actividades de distintas y prestigiosas Instituciones Internacionales: el ICMI, el Comité Interamericano de Educación Matemática, la UNESCO; de Instituciones Nacionales y Autonómicas: MEC y CEJA, particularmente; y, en el plano más local, con la colaboración del Ayuntamiento de Sevilla y la Diputación; y, en el orden académico, con la Universidad de Sevilla y la Delegación Provincial de Educación y Ciencia.

A través de la SAEM "Thales", España ha estado presente en Adelaide (V ICME, 1984), Budapest (VI ICME, 1988) y Québec (VII ICME, 1992), en compañía de representantes de otras regiones de nuestro país, estableciendo e intensificando estos contac-tos internacionales. Además, nuestra Sociedad ha organizado, en 1986, un Simposium Internacional sobre Renovación de la Enseñanza de las Matemáticas y, en 1990, el I-CIBEM (1º Congreso Iberoamericano de Educación Matemática), conjuntamente con la Comisión Interamericana de Educación Matemática y la Asociación Portuguesa de Profesores de Matemáticas; ambos eventos celebrados en Sevilla.

El ICME-8: Programa y organización

Programa del Congreso

En los ICME's se estudian los problemas presentes y en un inmediato futuro de la educación matemática, y se trazan las orientaciones para su desarrollo en todos los países.

El programa general de los ICME's se estructura alrededor de los siguientes núcleos:

1. Conferencias Plenarias.
2. Debates Internacionales.
3. Conferencias Regulares.
4. Grupos de Trabajo (Working Groups -*WG*-).
5. Grupos Temáticos (Topics Groups -*TG*).
6. Grupos Permanentes de Trabajo del ICMI.
7. Seminarios del ICMI.
8. Presentaciones nacionales.
9. Comunicaciones cortas.
10. Actividades Permanentes.
11. Encuentros especiales.
12. Sesiones Especiales (Asamblea del ICMI; reuniones de Asociaciones y de Editores de Revistas, etc.).
13. Actividades sociales, de tipo cultural y turístico.

Conferencias Plenarias

Una coferencia plenaria es una charla de unos sesenta minutos dada por un educador matemático de prestigio, elegido de forma que todos los participantes en el congreso puedan estar interesados tanto en el tema de la conferencia como en el ponente que va a desarrollarla. El ponente debe ser una persona con un cierto carisma.

Los ponentes deben hacer frente a las características especiales de sus conferencias, preparando y desarrollando sus mensajes teniendo en cuenta que ha de ser para todos y que todos querrán seguir su exposición.

Es criterio del ICMI que, si es posible, una de las conferencias debe ser dada por alguien no necesariamente vinculado a la educación matemática.

En el ICME-8 habrá *cuatro conferencias plenarias*. Dos de ellas después de la ceremonia de apertura, y las otras dos inmediatamente antes de la de clausura.

Para impartir las cuatro conferencias plenarias del ICME-8, han sido propuestos por el Comité Internacional de Programas, los profesores Miguel de Guzmán (España), David Tall (Reino Unido), Paulo Freire (Brasil) y la profesora Anna Sierpinska (Canadá).

Debates Internacionales

Los Debates Internacionales se organizan a través de una mesa redonda internacional con miembros de diferentes países. Es un panel en el que expertos de diferentes países exponen y discuten temas claves en Educación Matemática, y en el que las opiniones de los panelistas muestran diferentes puntos de vista, sistemas y situaciones. Esto puede proporcionar un amplio panorama del tema tratado y de sus soluciones o tendencias futuras. Está asistida por un moderador encargado de que el debate transcurra con agilidad y eficacia.

En el ICME-8, se organizará una sesión de este tipo, de unas dos horas de duración, durante la tarde del primer día del congreso, de forma que los participantes puedan permanecer en el mismo sitio donde tuvieron lugar las conferencias de apertura y plenaria.

La Mesa Redonda Internacional versará sobre: "Los profesores de matemáticas como forjadores de decisiones: cambios y desafíos". Estará moderada por el profesor Alan Bishop (Australia) y participarán los profesores: Francisco Hernán (España), maría Salett Biembengut (Brasil), Gail Burrel (USA), Ruchama Even (Israel) y Tang Ruifen (China).

Se intentará que la mesa redonda se convierta en un debate abierto con otros puntos situados en otros países (especialmente del área iberoamericana) mediante la utilización de comunicaciones vía satélite o vía telefónica. Se están estudiando los aspectos técnicos y financieros de esta posibilidad; de cualquier forma, aunque no fuera factible, el debate 'in situ' es ya de por sí interesante.

Conferencias Regulares

Una conferencia regular podría definirse como una charla de unos cuarenta y cinco minutos, seguida de un debate de unos quince. Los ponentes se eligen de acuerdo con su calidad profesional, sus habilidades comunicativas y teniendo en cuenta la selección de temas y niveles que, para esta sección, se incluyen en el programa.

En el ICME-8 se desarrollarán 60 Conferencias Regulares distribuidas en seis módulos de una hora. Se celebrarán, en cada módulo, 10 conferencias en paralelo.

En cada conferencia habrá un moderador que presentará al ponente, y que controlará la duración de la ponencia y coordinará el consiguiente debate. (Se designará a una persona cuya particpación esté confirmada con antelación para que se ponga de acuerdo con el ponente y pueda preparar el debate).

Grupos de Trabajo

Un grupo de trabajo es un conjunto de personas que se reunen varias veces para *formular y debatir preguntas* de un tema concreto sobre el que hay *posturas controvertidas o alternativas*.

Cada grupo de trabajo se articulará en torno a un Comité Científico y Organizador constituido por un Coordinador, tres Panelistas y un Organizador Local. Este comité será el encargado de estructurar el contenido y dinámica del grupo temático así como de los aspectos de organización interna. Sus miembros, que actuarán como ponentes, serán propuestos por el Comité de Programa e invitados formalmente por su presidente. Podrán proponer el Comité Nacional la participación de otros profesores para que presenten comunicaciones en el grupo; en su caso, dichos profesores deberán ser invitados a participar por el presidente del Comité Nacional. Sus exposiciones no deberán pasar, en ningún caso, de quince minutos de duración.

El Organizador Local forma parte del programa científico del grupo de Trabajo y estará encargado, además, de la coordinación con el Comité de Organización Local y, si es necesario, con los de Programa y Nacional.

Durante el Congreso, cada grupo de trabajo se reunirá cuatro veces, en sesiones de noventa minutos, que podrían ser distribuidas de la manera siguiente:

a) 1ª sesión: presentación, exposición de ponencias y debate (se podría articular las ponencias en forma de mesa redonda).
b) 2ª sesión: debates en subgrupos.
c) 3ª sesión: debates en subgrupos.
d) 4ª sesión: reunión en la que se discuten las conclusiones de cada subgrupo.

En cada sesión intervendrán, en paralelo, todos los grupos de trabajo, por lo que cada congresista ha de elegir uno a la hora de inscribirse.

Los temas de los Grupos de trabajo son "controvertidos"; los organizadores deben estimular el debate, haciendo que todos participen en él. Este aspecto polémico constituye, quizás, la principal diferencia entre un Grupo de Trabajo y un Grupo Temático.

Los temas a desarrollar en los Grupos de Trabajo durante el ICME-8, en un total de 26, son los siguientes:

WG1. Comunicación en clase.
WG2. Formas del conocimiento matemático.
WG3. Actitudes y motivación del alumnado.
WG4. Dificultades del alumnado en el aprendizaje de las matemáticas.
WG5. Enseñanza de alumnos con habilidades diversas.
WG6. Género y matemáticas.
WG7. Matemáticas para alumnos con talento.
WG8. Matemáticas para alumnos con necesidades especiales.
WG9. Innovación en evaluación.
WG10. Lenguajes y matemáticas.
WG11. Revisión del curriculum partiendo de cero.
WG12. Cambios curriculares en la enseñanza primaria.
WG13. Cambios curriculares en la enseñanza secundaria.
WG14. Relaciones de las matemáticas con otras materias escolares.
WG15. El impacto de la tecnología en el curriculum de matemáticas.
WG16. El papel de la tecnología en la clase de matemáticas.
WG17. Matemáticas instrumentales en el nivel universitario.
WG18. Formación matemática para adultos.
WG19. Formación inicial y permanente del profesorado.
WG20. Evaluación de la enseñanza, los medios y los sistemas educativos.
WG21. La enseñanza de las matemáticas en las diferentes culturas.
WG22. Matemáticas, educación, sociedad y cultura.
WG23. Cooperación en educación matemática entre países y regiones.
WG24. Criterios de calidad y relevancia en la investigación en la educación matemática.
WG25. La didáctica de la matemática como disciplina científica.
WG26. Conexiones entre investigación y práctica en educación matemática.

Grupos Temáticos

Un grupo temático está formado por un conjunto de personas interesadas en un *aspecto concreto de naturaleza educativa* que se reúnen varias veces para conocer el estado de la cuestión sobre el tema que da nombre al grupo, así como sus implicaciones.

En el ICME-8 se realizarán dos sesiones de noventa minutos para cada grupo temático. En cada sesión intervendrán, en paralelo, todos los grupos temáticos, por lo que cada congresista ha de elegir uno a la hora de inscribirse.

Cada grupo temático se articulará en torno a un Comité Científico y Organizador constituido por un Coordinador, dos Panelistas y un Organizador Local. Este comité será el encargado de estructurar el contenido y dinámica del grupo temático así como de los aspectos de organización interna. Sus miembros, que actuarán como ponentes, serán propuestos por el Comité de Programa e invitados formalmente por su presidente. Podrán proponer el Comité Nacional la participación otros profesores para que presenten comunicaciones en el grupo; en su caso, dichos profesores deberán ser invitados a participar por el presidente del Comité Nacional. Sus exposiciones no deberán pasar, en ningún caso, de quince minutos de duración.

El Organizador Local forma parte del programa científico del grupo temático y estará encargado, además, de la coordinación con los demás Comités del Congreso.

Los temas a desarrollar en los Grupos Temáticos durante el ICME-8, en un total de 26, son los siguientes:

TG1. Matemáticas en la enseñanza primaria.
TG2. Matemáticas en la enseñanza secundaria.

TG3. Matemáticas en la enseñanza universitaria.
TG4. Matemáticas en la enseñanza a distancia.
TG5. La enseñanza de las matemáticas para el trabajo.
TG6. La enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista constructivista.
TG7. Estímulo y desarrollo de la creatividad matemática.
TG8. Demostraciones y demostrar: por qué, cuándo y cómo.
TG9. Estadística y probabilidad en el nivel secundario.
TG10. La resolución de problemas en el curriculum.
TG11. El futuro del cálculo infinitesimal.
TG12. El futuro de la geometría.
TG13. El futuro del álgebra y la aritmética.
TG14. Procesos infinitos en el curriculum.
TG15. Arte y matemáticas.
TG16. Historia de la matemática y la enseñanza de la matemática.
TG17. Modelización matemática y aplicaciones.
TG18. Uso de las calculadoras en clase.
TG19. Entornos informáticos de aprendizaje interactivo.
TG20. La tecnología y la representación visual.
TG21. Enseñanza de las matemáticas basada en materiales manipulativos.
TG22. Juegos y rompecabezas matemáticos.
TG23. Formas futuras de publicación en educación matemática.
TG24. Competiciones matemáticas.
TG25. Clubs matemáticos.
TG26. Investigaciones internacionales comparativas.

Grupos permanentes de trabajo del ICMI

Los Grupos de trabajo estables del ICMI, ya descritos, PME, HPM, IOWME y WFNMC presentan las conclusiones de los trabajos realizados durante los cuatro años que median entre dos ICME's.

En el ICME-8, dichos grupos dispondrán de tres sesiones de dos horas cada una.

Seminarios del ICMI

Del mismo modo, los resultados de los seminarios del ICMI, realizados entre congresos, son expuestos en los ICME's.

En el ICME-8 se expondrán los trabajos relativos a los Seminarios desarrollados bajo la temática: *Género y Educación Matemática, ¿Qué es investigación en Educación Matemática y cuáles son sus resultados?* y *Perspectivas de la enseñanza de la geometría en el siglo XXI.*

Se articularán en sesiones de dos horas cada una.

Presentaciones Nacionales

Consisten en la presentación del estado actual de la educación matemática en determinados países, invitados a exponer la situación del mismo en esta materia.

En el ICME-8 se presentará la actualidad educativa de España, a través de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, y serán invitado algunos países de América Central y China.

Se organizarán un par de sesiones de dos horas cada una. Se recomendará que, a ser posible, la presentación se realice utilizando medios audiovisuales y dedicando un tiempo a preguntas de los asistentes. Cada presentación dispondrá de una hora (tres cuartos de hora para la exposición y un cuarto para preguntas y debate, si procede).

Se designará a un profesor para que coordine las sesiones y actúe de moderador.

Presentaciones cortas

Por presentaciones cortas se entiende aquellas que se comunican a través de posters, videos y programas informáticos, permaneciendo los autores en horas establecidas en el lugar de exposición para poder dialogar con los interesados sobre aspectos de su comunicación.

La organización del ICME-8 prevé, para aquellos autores que lo deseen, un módulo general de comunicaciones en los que, durante unos cinco minutos cada autor podrá exponer verbalmente el núcleo de su comunicación.

Para la exposición de posters se detallará un horario concreto en el programa del Congreso.

Las presentaciones cortas se clasificarán según los temas de los grupos de trabajo y temáticos, de forma que sea fácil y ágil su localización.

Un Comité de Selección será responsable de la aceptación o rechazo de los trabajos.

Actividades Permanentes

Una actividad permanente es aquella que se desarrolla durante todos los días del Congreso y se presenta mediante exposiciones en un lugar fijado al efecto, con un carácter interactivo o simplemente de información y, en su caso, de venta. La organización habilitará módulos especiales al efecto. Serán consideradas Actividades Permanentes los Proyectos, las exhibiciones especiales y de material, las ofertas comerciales, etc., que puedan visitarse durante el ICME-8. El horario de estas actividades será libre pero, con cualquier caso, ninguna podrá comenzar antes de las 10 a.m.

Por su propio carácter, la organización considera muy importante los Proyectos de Trabajo. Será considerado como tal aquel proyecto que se haya desarrollado durante varios años por un equipo de trabajo, que tenga carácter internacional y que sea de un interés claro para la comunidad educativa. Será competencia del Comité de Programa la decisión sobre el carácter de proyecto de un trabajo presentado como tal y, por tanto, su aceptación o rechazo.

Si algún grupo está interesado en la presentación de un proyecto debe dirigirse al Comité de Programas del ICME-8. La carta debe mostrar en qué medida la presentación del proyecto puede contribuir al desarrollo científico de la educación matemática y señalar qué forma tendría la presentación, así como el material que se precisa. Toda petición en este sentido deberá ser presentada antes del 31 de enero de 1996.

En relación con las demás Actividades Permanentes, un Comité de Selección se encargará, especialmente, de aceptar o no tales actividades y de fijar su hora y localización, así como de posibles negociaciones de tipo económico.

Cualquier actividad que genere ingresos económicos a quienes la presentan, deberán colaborar económicamente con la organización del Congreso. Para ello, la organización dará a conocer unas tarifas estandarizadas según módulos de utilización.

La FESPM tiene prevista distintas actividades permanentes:

- Medidas Populares en España. Responsable: profesor Luis Balbuena.
- Material didáctico del profesorado en sus aulas. Responsable (propuesto): profesor Arturo Magly.
- Panorama cultural e histórico (donde cada Sociedad podrá exponer una visión cultural e histórica de su Comunidad).
- Libros Antiguos de Matemáticas. Responsable: profesor Mariano Martínez.
- Filmes matemáticos. Responsable: profesor Jaime Yagüez.
- Fotografía y Matemáticas. Responsable: profesor Evaristo González.
- Escultura y Matemáticas. Responsable (propuesto): profesor Javier Carvajal.
- Filatelia y Matemáticas. Responsable (propuesto): profesor Jacobo González.

Encuentros especiales

Durante la celebración de los ICME's distintos colectivos y organizaciones tienen ocasión de encontrarse para intercambiar puntos de vista, establecer estrategias de trabajo, etc.

En el ICME-8 está prevista, entre otras, las reuniones siguientes: Asamblea del ICMI, Encuentro de Asociaciones de Educación Matemática, Encuentro de editores, directores y promotores de revistas sobre educación matemática.

Los colectivos interesados en mantener alguna reunión durante el Congreso deberá solicitarlo al Comité Local de Organización antes del 30 de abril de 1996. En dicha petición se hará constar, además del nombre del colectivo y fines de la reunión, número de asistentes que se estime podrán acudir, material necesario para la reunión, número de sesiones y tiempo estimado de cada una de ellas; debe también indicarse si se trata de una reunión con convocatoria abierta en cuyo caso, la organización dará publicidad a la reunión facilitando el horario y lugar así como aquellas indicaciones tales como Orden del día, etc., que el colectivo considere oportunas difundir.

La Asamblea General del ICMI se celebrará el miércoles, de las 17 a las 19 horas.

Sesiones especiales

Se entiende por Sesiones Especiales aquellas que algún Comité del Congreso considera relevante incluirlas en el programa. Los homenajes a profesores o la intervención de última hora de alguna destacada personalidad son ejemplos de este tipo de sesiones.

Para el ICME-8 se ha sugerido ya algunos homenajes a profesores vinculados estrechamente a la realización de los ICME's en particular y al desarrollo internacional de la educación matemática.

También se ha sugerido como actividades especiales unas charlas sobre los lugares y monumentos a visitar en las excursiones, para facilitar a los asistentes un conocimiento previo de carácter matemático, cultural y social. Por ejemplo, podría darse una charla sobre "La Geometría de la Alhambra de Granada", sobre "La cultura árabe y romana de Córdoba", etc. Se ha sugerido además, la formación de mesas redondas para discutir sobre estos temas.

Una sesión especial será promovida por la FESPM y estará dedicada a matemáticos españoles ilustres. Se desarrollará como mesa redonda, con varias ponencias y coloquio.

Actividades sociales, de tipo cultural y turístico

Durante la celebración del ICME-8 se desarrolla una amplia gama de actividades sociales que pretende, por un lado, el conocimiento mutuo y relaciones de los congresistas en un modo más informal y por otro dar a concer distintas facetas de la ciudad y del país sede del Congreso desde un punto de vista cultural y turístico.

Aparte de diversos actos a celebrar en la ciudad sede, entre los que se prevé el acto inicial de recepción de los congresistas y la celebración de un encuentro diario a la finalización de la jornada (happy hour), el jueves se dedicará a excursiones organizadas por Andalucía y Extremadura. Serán lugares obligados de visita en este día, Granada (La Alhambra), Córdoba (La Mezquita), Huelva (Lugares Colombinos), Cádiz y Jerez (Entornos naturales, Observatorio de S. Fernando y Ruta del vino y del caballo), Málaga (Las Playas del Mediterráneo), Mérida y Cáceres (Ruta Romana).

La Agencia oficial ofertará también un programa de excursiones pre y post-congreso.

Durante el Congreso, los acompañantes dispondrán también de un programa de actividades especialmente diseñado por la Agencia del oficial.

Organización

Entidades

El Comité ejecutivo del ICMI, como órgano máximo de decisión delega, tras convocatoria pública, la organización de los ICME's y designa la ciudad sede de los mismos.

En su reunión de Abril de 1991, dicho Comité tomó la decisión de asignar a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas la realizaron del 8º Congreso, fijándose la ciudad de Sevilla como sede.

En virtud de dicha delegación, la FESPM y la Comisión Nacional de la IMU son las entidades convocantes del 8º ICME y, a su vez, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, de ámbito andaluz y con sede en Sevilla, se encarga de los aspectos organizativos, en representación de la citada Federación.

El actual Comité Ejecutivo del ICMI está formado por los profesores:

Miguel de Guzmán (España), presidente.
Jeremy Kilpatrick (USA), vicepresidente.
Lee Pen Yee (China), vicepresidente.
Mogens Niss (Dinamarca), secretario.
Vocales:
Yuri L. Ershov (Rusia).
Eduardo Luna (Rep. Dominicana).
Anna Sierpinska (Canadá).
Jean Pierre Kahane (Francia).
J. H. van Lint (Holanda).
Jacques-Louis Lions (Francia). Presidente del IMU.
Jacob Palis Jr. (Brasil). Secretario del IMU.

Comités de Organización

La organización de los ICME's se articula esencialmente en torno a tres Comités:

El Comité Internacional de Programa, que estudia y decide los contenidos temáticos y actividades científicas del Congreso y designa a los profesores sobre los que recaen la responsabilidad del desarrollo concreto del programa (Conferenciantes, Coordinadores de Grupos, Ponentes, etc.).

Dicho Comité Internacional de Programa del ICME-8 está constituido por los profesores:

Claudi Alsina (Esp.), Presidente.
Luis Balbuena (España).
Lida Barret (España).
Werner Blum (Alemania).
Zhang Dianzhou (China).
Miguel de Guzmán (España), presidente ICMI, ex officio.
Milan Hejny (Checoslovaquia).
Bernard Hogdson (Canadá).
Jeremy Kilpatrick (USA).
Colette Laborde (Francia).
Mogens Niss (Dinamarca), secretario ICMI, ex officio.
Antonio Pérez (España).
Luis Rico (España).
Toshio Sawada (Japón).
Ana Sfard (Israel).
Saliou Touré (Costa de Marfil).

Este Comité se ha reunido ya en sesión plenaria, en Sevilla, en el mes de septiembre de 1994.

El Comité Nacional, que es el organismo responsable y representativo del Congreso ante las Instituciones, Entidades y Profesorado del país en el que se celebra el Congreso.

Las funciones del Comité Nacional del ICME-8 se centran en: a) contribuir a la difusión de las actividades del ICME-8 en el ámbito Nacional, tanto en los aspectos organizativos como de programación; b) gestionar apoyos de las Instituciones oficiales y entidades privadas, tanto académicos como económicos; c) proponer al Comité Internacional de Programas profesores para las distintas actividades científicas del Congreso; d) invitar formalmente a los profesores propuestos por los Comités de los WG y TG, así como a los designados por el Comité de Selección de Presentaciones Cortas.

El Comité Nacional se estructura con un Comité Ejecutivo y con vocales que representan un amplio espectro educativo, asociativo e institucional del país.

El Comité Ejecutivo del Comité Nacional está formado por los profesores:

Gonzalo Sánchez, Presidente.
Concepción García, Secretaria.
Luis Balbuena.
Javier Brihuega.
Ricardo Luengo.
Antonio Pérez.
Luis Puig.

Para el nombramiento de los vocales se han propuesto nombres vinculados a: Real Sociedad Matemática Española; Sociedad catalana de Ciencias; Academia Canaria de las Ciencias; Sociedad Ada Byron; Consejo de Universidades; Universidad de Sevilla; Ministerio de Educación y Ciencia; Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía y Sociedades Regionales de Profesores de Matemáticas integradas en la Federación.

El Comité Local de Organización, que es el responsable de la infraestructura y puesta en marcha del Congreso en la ciudad sede.

Son competencias del Comité Local de organización: a) determinar las fechas concretas de realización del Congreso dentro de los límites marcados por el ICMI; b) decidir el campus universitario en el que se desarrollará el Congreso; c) tomar las decisiones sobre todos los aspectos de infraestructura y logística; d) dar publicidad y difusión al Congreso; e) coordinar la participación, a todos los niveles, de los asistentes y entidades; f) determinar la cuota de inscripción así como los distintos tipos y modos de abonarla; g) establecer cuotas de pago para aquellas entidades que acudan al Congreso con fines lucrativos; h) establecer, en coordinación con el Comité Nacional, convenios de colaboración con entidades tanto públicas como privadas; elaborar el presupuesto del Congreso y llevar la contabilidad del mismo.

Para el desarrollo de estas competencias, el Comité Local de Organización se articula en torno a diferentes núcleos de actuación: a) Área del Programa Científico, responsable de las relaciones con los ponentes y la coordinación de sus actuacions; b) Área de Administración, encargada de llevar la contabilidad, de efectuar los libramientos de pagos y justificaciones; c) Área de Promoción y Relaciones Externas, responsable de la difusión del Congreso a todos los niveles así como de las relaciones con las entidades que colaboren con el Congreso y de los medios técnicos requeridos para el programa científico; d) Área de Servicios Generales, encargada, de la infraestructura, actividades sociales, publicaciones, exposiciones y servicios en general del Congreso.

Para la articulación del Comité Local de Organización se ha constituido un Comité Ejecutivo formado por miembros que coordinan cada una de las áreas. Dicho Comité Ejecutivo está formado por los profesores:

Antonio Pérez Jiménez, Coordinador.
Concepción García Severón y Fermín Novo Fernández, Área de Servicios Generales.
Juan Rodríguez Cordobés e Ismael Roldán Castro, Área de Promoción, Difusión y Medios Técnicos.
Juan Núñez Valdés, Área de Recursos Humanos.
Antonio Aranda Plata, Área del Programa Científico.
Ladislao Navarro Peinado y Juan A. Suárez Vázquez, Área de Administración.
José Mª Chacón, Secretario del Comité.
José Mª Ayerbe Toledano, representante de la Facultad de Matemáticas.

Cada una de las áreas tiene a su cargo los siguientes aspectos:

a) Área del Programa Científico:
- • Conferencias, ponencias, comunicaciones, grupos de trabajo.
- • Relación con ponentes.
- • Secretaría técnica.
- • Sesiones técnicas.

b) Área de Administración:
- • Planificación y gestión.
- • Contabilidad y administración.
- • Coordinación y control del presupuesto.

c) Área de Promoción y Relaciones externas:
- • Diseño de documento y comunicaciones.
- • Relación con los medios de comunicación.
- • Boletines y diarios.
- • Promoción del Congreso.
- • Protocolo.

d) Área de Recursos Humanos:
- • Azafatas/os.
- • Personal, en general.
- • Limpieza y conservación.

e) Área de Servicios Generales:
- • Infraestructura:
- - Inscripciones e información.
- - Recepción y entrega de documentación.
- - Recursos didácticos: retroproyectores, vídeos, etc.
- - Traductores.
- - Secretaría general.
- - Transporte.
- - Locales.
- • Actividades Sociales:
- - Programa de acompañantes.
- - Visitas turísticas.
- - Ceremonias de apertura y clausura.
- - Actos sociales.
- • Publicaciones:
- - Actas.
- - Boletines.
- - Anuncios.
- - Reprografía.
- • Exposiciones:
- - Proyecciones.
- - Promociones comerciales.

El Comité Local de Organización cuenta, además, con los servicios profesionales de una Agencia de Congresos: La Agencia Boreal, con la que tiene firmado un contrato en el que se estipula que la citada Agencia funcionará de hecho como la Secretaría Técnica del Congreso, teniendo a su cargo:

a) Secretaría administrativa para:
- • Elaboración de documentos: material de correspondencia, carpetas para dossiers, Anuncios del Congreso, etc.
- • Envío de documentos, recepción de inscripciones, acuses de recibo y correspondencia prevista para incidencias.
- • Contabilidad administrativa.

b) Gestiones:
- • Gestiones para conseguir patrocinadores en la esfera comercial. En particular, las relativas a la declaración de transportista oficial del Congreso y a la consecución de vías financieras iniciales (pólizas, etc.), para la financiación del Congreso.

c) Servicios (con la capacidad de contratar, en su caso):

- Para la elaboración de documentos.
- Para la infraestructura del Congreso:
  - Mantenimiento y limpieza.
  - Traducción.
  - Aire Acondicionado.
  - Transportes.
  - Alojamiento (en hoteles y residencias universitarias).
  - Diseño de módulos para stands, así como propuestas de precios para actividades comerciales en el Congreso.
  - Excursiones.
  - Actividades sociales.
  - Seguros (de accidene, de catástrofes, de servicios médicos, etc.).

d) Adelanto de los costes del Primer Anuncio:

- Costear la edición, envío y difusión del Primer Anuncio, estando la Organización obligada a reintegrar estas cantidades en un plazo previsto en el contrato.

e) Subcontratas, colaboraciones de otras Agencias.

La citada Agencia podrá subcontratar los servicios o colaboraciones de otras Agencias nacionales o extranjeras, sin menoscabo de las estipulaciones contratadas.

La obligación del Congreso se compromete a que dicha Agencia sea la única Agencia Oficial del Congreso.

La citada Agencia no pasará ningún coste por el trabajo desempeñado en las tareas citadas.

Los beneficios de la citada Agencia serán los que consiga a través de los proveedores.

Todas las decisiones relativas al Congreso están bajo la responsabilidad de la Organización Local, no pudiendo la citada Agencia tomar decisiones propias que involucren las acciones e imagen del Congreso.

La sede de la Organización Local del Congreso se ha fijado en la de la SAEM Thales, con autorización para la utilización de sus recursos humanos y materiales. La Organización del Congreso estará obligada a satisfacer a la citada Asociación, los importes de los servicios utilizados y cuya valoración será realizada a la finalización del Congreso, conjuntamente, por las administraciones de la Organización del ICME-8 y de la SAEM Thales.

Inscripción, Calendario y otros aspectos

Inscripción, cuota general y plazos

Todos los profesores que desen participar en el Congreso estarán obligados a formalizar su inscripción y a abonar la cuota establecida al efecto, dentro de los plazos marcados por la Organización Local. Del pago de la cuota sólo estarán exentos los Conferenciantes Plenarios.

La inscripción da derecho a:

- Participar en las actividades del Congreso.
- Recibir la Documentación Inicial, con carpeta.
- Utilizar distintos servicios del Congreso.
  - Información.
  - Servicios médicos.
  - Servicios de transportes contratados por la Organización.
  - Utilización, en su caso, de los Seguros contratados por la Organización.
- Realizar la Excursión del día 18.
- Recibir, a domicilio, las Actas.

Siguiendo la norma general de muchos congresos, se han establecido tres tipos de cuotas de acuerdo con la fecha en la que se realice la inscripción.

La cuota inicial de inscripción fue acordada en una reunión convocada por la FESPM y con asistencia del Presidente del Comité Ejecutivo del ICMI y del Vocal español de la IMU. Se acordó establecer un suplemento de, aproximadamente el 10% para ayuda a profesores de países con escasos recursos. Las cuotas, una vez conocidas por el Comité Internacional de Programa, en su reunión plenaria celebrada en Sevilla en septiembre de 1994, ha quedado establecida en los siguientes plazos y en las cantidades que se indican:

Hasta 31-XII-95	Hasta 31-V-95	Desp. 31-V-95
Congresistas		
44000 pts. (350 US$)	50000 pts. (400 US$)	58000 pts. (460 US$)
Acompañantes		
14000 pts. (110 US$)	16000 pts. (130 US$)	19000 pts. (150 US$)

Inscripción de Socios de la FESPM y de la PROFMAT

Por decisión de la Junta de Gobierno de la Federación, los socios de las sociedades Federadas podrán acogerse a una cuota especial, establecida en 30000 pts., siempre que sea abonada antes de finales de septiembre de 1995. Se entiende en la Junta de Gobierno que dicha rebaja se compensa con el adelanto que realizan los socios, pues la cuota general establecida no comenzará a pagarse hasta la recepción formal de la inscripción, tras la recepción del segundo anuncio.

En virtud del Convenio de reciprocidad firmado entre la FESPM y la Asociación Portuguesa de Profesores de Matemáticas, los socios de esta asociación podrán efectuar los pagos en la misma cuantía y plazos que los miembros de las sociedades de la FESPM.

Bolsas de Ayuda

Un porcentaje de la cuota de inscripción, más los fondos que al efecto se consigan, serán dedicados a Bolsas de Ayuda para asistencia al Congreso.

Dichas Bolsas de Ayuda serán concedidas por una Comisión nombrada especialmente y de acuerdo con criterios generales que se publicarán en el Segundo Anuncio.

Los profesores que estimen que pueden acogerse a algún tipo de ayuda, de acuerdo con los criterios establecidos, deberán dirigirse al Presidente del Comité Nacional, aportando los argumentos y testimonios que considere oportunos.

Información

Durante el Congreso se establecerán puntos de información que se indicarán claramente, en los que se intentará que los congresistas puedan disponer de recursos de tipo informático (e-mail), reprográfico (fotocopiadoras), etc.

Material impreso

• ***Primer Anuncio (finales de 1994)***

Se incluirá información sobre la estructura del programa, WG y TG.

• ***Segundo Anuncio (verano de 1995)***

Se proporcionará un listado de actividades, junto con los nombres de los organizadores y de las personas que presenten alguna comunicación. Además, se incluirá información sobre las comunicaciones cortas. Si se facilita información precisa en este segundo anuncio, no será necesario un "tercer anuncio", como en el ICME-7

• ***Programa del ICME-8 (primavera de 1996)***

Se dará información sobre todas las actividades (junto con una breve reseña de su contenido), así como los horarios. Se proporcionarán indicaciones sobre posibles itinerarios, e información sobre "cuándo" y "dónde" ir durante el congreso (mapas, localizaciones, etc.).

• ***Actas***

Las Actas oficiales se publicarán lo antes posible tras la finalización del Congreso, conteniendo diversa información útil, conferencias plenarias, etc. Del mismo modo, algunos WG y TG pueden publicar sus trabajos llevados a cabo durante el ICME.

Las conferencias pueden ser publicadas como un libro aparte, con un interés comercial, o como un segundo volumen de las Actas oficiales. Como responsables de la edición, el Comité Internacional de Programa ha propuesto a las siguientes personas:

a) Actas: Bernard Hodgson, Luis Rico, Claudi Alsina, etc.

b) Volumen II: Werner Blum, Anna Sfard, Claudi Alsina, etc. (deben añadirse algunas personas del Comité Local de Sevilla).

ICME 8
SEVILLA 1996

8º CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

14 al 21 de Julio de 1996

BOLETIN DE INSCRIPCION

EXCLUSIVO PARA MIEMBROS DE SOCIEDADES FEDERADAS

ROGAMOS CUMPLIMENTAR A MAQUINA O MAYUSCULAS.
BOLETIN VALIDO PARA UN SOLO PARTICIPANTE

PARTICIPANTE / Datos personales

APELLIDOS			NOMBRE
DOMICILIO		D.N.I.	TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA	
NOMBRE SOCIEDAD FEDERADA			

PARTICIPANTE / Datos profesionales

CENTRO DE TRABAJO			N.R.P.
DOMICILIO			TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA	
NIVEL			

NIVEL ☐ INFANTIL ☐ PRIMARIA ☐ SECUNDARIA ☐ ESCUELA UNIVERSITARIA ☐ UNIVERSIDAD

CUOTA DE INSCRIPCION

IMPORTE: 30.000 PTAS.

Esta cuota especial solamente será válida para inscripciones recibidas antes del **30 de Septiembre de 1995.**
Pasada esta fecha, el importe será de acuerdo con la norma general de inscripción al Congreso.

FORMA DE PAGO

Exclusivamente mediante transferencia bancaria a favor de:

ICME 8
EL MONTE. CAJA DE HUELVA Y SEVILLA

CODIGO CUENTA CLIENTE (CCC)

ENTIDAD	OFICINA	D.C.	NUMERO DE CUENTA
2098	0009	0 2	0130471833

Adjuntar comprobante de la transferencia.
Para esta inscripción no se considerará ninguna otra forma de pago.

ANULACIONES

Hasta 31.12.95: Devolución del 100 % del importe.
Desde 01-01-96: De acuerdo con la norma general de inscripción al Congreso.

FECHA

FIRMA

USO EXCLUSIVO SECRETARIA TECNICA
FECHA DE RECEPCION
REGISTRO NUMERO ....

ROGAMOS REMITIR ESTE BOLETIN A
ICME 8
Apartado de Correos 4172
41080 SEVILLA

NOTA: La inscripción no será considerada definitiva en tanto no reciba confirmación escrita desde la Secretaría Técnica

SECRETARIA TECNICA: BOREAL S.A.
F. Sánchez Bedoya, 7-2º B - Tlfnos: (95) 421 89 84 / 421 89 85 - Fax: (95) 421 83 34 - Télex: 72522 - 41001 SEVILLA

VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"THALES"

Cultura y Matemáticas

Córdoba 7, 8, 9 y 10 de Septiembre de 1995

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES" y el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba le invitan a participar en las "VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática".

Avance del Programa

El contenido de las VII Jornadas girará básicamente en torno a las siguientes actividades:

A. Conferencias:

- Cultura y Matemáticas.
- Geometría.
- Historia de las Matemáticas.

B. Grupos temáticos:

1. Software en el aula.
2. Calculadoras en el aula.
3. Materiales didácticos en el aula.
4. Experiencias de aula.
5. Historia de las Matemáticas y Educación.
6. Evaluación en Matemáticas.
7. Matemáticas en la Educación Universitaria.
8. Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.
9. Investigación en Educación Matemática.

C. Presentaciones especiales y exposiciones.

Información general

Lugares y fecha de celebración:

Colegios Mayores Universitarios "Nuestra Señora de la Asunción" y Escuela Universitaria Politécnica. Córdoba, 7 al 10 de septiembre de 1995.

Cuotas de inscripción:

	Antes del 1 de abril	Después del 1 de abril
Socios	7000 pts.	11000 pts.
No Socios	16000 pts.	22000 pts.

Fecha límite de Inscripción: 16 de junio de 1995.

Alojamientos:

• **Hotel Meliá** (****). El Hotel más emblemático de Córdoba. Situado en una de las principales avenidas de la ciudad y recientemente reformado. Cuenta con 142 habitaciones dotadas de teléfono, música ambiental, aire acondicionado, tv., vídeo y minibar. Piscina.

Precios diarios del alojamiento incluyendo desayuno:

Habitación doble uso individual:
8700 pts. + I.V.A.

Habitación doble:
5200 pts. + I.V.A.

• **Colegios Mayores (Residencia Universitaria).** *Sede de las Jornadas.* Situado en la zona universitaria. Cuenta con 112 habitaciones dobles y 116 habitaciones individuales con aire acondicionado, ducha y aseo. Rodeado de amplias zonas de jardin, piscina y zona polideportiva.

Precios diarios incluyendo desayuno:

Habitación individual:
3500 pts. (I.V.A. incluido).

Habitación doble:
5200 pts. (I.V.A. incluido).

Para reservar su alojamiento, debe efectuar un depósito de 5000 pts. por habitación **antes del 16 de junio de 1995**.

Inscripción

Formas de pago:

a) Talón a nombre de VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES".

b) Transferencia a CajaSur, oficina Escritor Torquemada, cuenta nº 2024.0159.92.3300013284.

Enviar talón o resguardo de la transferencia junto con la hoja de inscripción debidamente cumplimentada.

Anulaciones:

Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de inscripción y/o reserva de alojamiento realizados **antes del 16 de junio de 1995**.

Envíos

Proyectos, Incentivos y Congresos, S.L.
José Zorrilla, 5. Escalera A 3º-3
14008 Córdoba
Teléfonos: (957) 48 58 48/43
Fax: (957) 48 58 49

VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES"
HOJA DE INSCRIPCIÓN Y RESERVA DE ALOJAMIENTO

Apellidos: ....

Centro de trabajo: ....

Nivel: ☐ Infantil ☐ Primaria ☐ Secundaria ☐ Universitaria ☐ E. de Adultos Otros: ....

Domicilio: ....

Código Postal:.................. Localidad: .... Teléfono:......................... Fax: ....

¿Pertenece a la S.A.E.M. THALES? ☐ Sí ☐ No

Indique por orden de preferencia los grupos temáticos que más le interesen: 1º ☐ 2º ☐ 3º ☐

Alojamiento en: ☐ Hotel Meliá ☐ Habitación individual

☐ Colegios Mayores ☐ Habitación doble. Comparte con: D/Dª

☐ No solicita alojamiento · Día de Entrada .... Día de Salida ....

Para que se considere realizada la Inscripción, junto con esta hoja debe remitirse el importe total (inscripción + reserva de alojamiento si la ha solicitado) mediante:

☐ Talón a nombre de VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES"

☐ Transferecia a la cuenta 2024.0159.92.3300013284 (envía fotocopia del justificante del ingreso)

Cumplimentar y enviar a:

PROYECTOS, INCENTIVOS Y CONGRESOS, S.L.
José Zorrilla, 5. Escalera A 3º-3
14008 Córdoba
Tlfs: (957) 48 58 48/43 - Fax: (957) 48 58 49

..........................,a .... de .... de 1995

Firma,

VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES"
PRESENTACIÓN DE COMUNICACIONES **Fecha límite de presentación de trabajos: 15 de mayo de 1995.**

Si piensa presentar una comunicación rogamos nos envíe cuanto antes esta ficha debidamente cumplimentada. Una vez recibida le remitiremos las normas para la presentación.

Tipo de aportación: ☐ Comunicación ☐ Cartel/Poster ☐ Otros:...

Título: ....

Apellidos: ....

Centro de trabajo: ....

Domicilio: ....

Código Postal:.................. Localidad: .... Teléfono:........................ Fax: ....

¿En qué grupo temático cree que encuadra mejor su aportación? 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ Otro:.......................

¿A qué nivel/es educativo/s dirige su aportación?:

☐ Infantil ☐ Primaria ☐ Secundaria ☐ Universitaria ☐ Otros: ....

Nota: No se garantiza la publicación en el Libro de Actas de las comunicaciones recibidas después del 15 de mayo de 1995.

Cumplimentar y enviar a:

PROYECTOS, INCENTIVOS Y CONGRESOS, S.L.
José Zorrilla, 5. Escalera A 3º-3
14008 Córdoba
Tlfs: (957) 48 58 48/43 - Fax: (957) 48 58 49

..........................,a .... de .... de 1995

Firma,

Agenda de Congresos de Educación Matemática. Año 1995

1.- 8º Seminario Europeo sobre Educación Matemática en Ingeniería. (SEFI).

Esta conferencia se celebrará del 28 al 30 de Junio de 1995 en la Universidad Técnica Checa en Praga.

Los objetivos son:

- Considerar la cooperación entre instituciones educacionales en Europa con un énfasis especial en la cooperación ESTE-OESTE.
- Discutir el papel de las Matemáticas en el programa de estudios de ingeniería con especial hincapié en el ordenador en las enseñanzas de la ingeniería.
- Proporcionar un foro de discusión de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas.

Información y contacto dirigirse a:

* Fred Simons
Department of Mathematics
Eindhoven University of Technology
P.O. Box 5123
NL-5600 MB Eindhoven
The NETHERLANDS.

* Marie Demlová
Katedra Matematiky FEL CVUT
Technická 2
16627 Praha 6
The CZECH REPUBLIC.

2.- 47 CIEAEM.

Tendrá lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Técnica de Berlín (Alemania) del 23 al 29 de Julio de 1995 cuya amplia información se puede ver en el número 17.

3.- PDME III.

El PDME III, es la Conferencia de las dimensiones políticas de la enseñanza de las Matemáticas, tendrá lugar en Bergen (Noruega) del 24 al 29 de Julio de 1995.

Los idiomas oficiales serán Inglés y Español.

Para mayor información contactar con:

* Stieg Mellin-Olsen
Institut for praktisk pedagogikk,
University of Bergen,
N-5020 Bergen
NORWAY
Telf.: + 475544830
Fax: + 475544852
e-mail: < mellin-olsen@psych.vib.no>

4.- IXª Conferencia Interamericana de Educación Matemática (IX CIAEM).

Tendrá lugar del 30 de Julio al 4 de Agosto de 1995 en Santiago de Chile. Ver amplia información en el número 18 de SUMA.

5.- SEMT-95.

El Simposio Internacional sobre la Enseñanza Elemental de las Matemáticas tendrá lugar en la Facultad de Educación de la Universidad de Charles, Praga (República Checa) del 28 de Agosto al 1 de Septiembre de 1995.

El programa estructurado por el Comité Internacional de Programa se concentrará en la enseñanza de las Matemáticas para niños/as de 6 a 10 años. El idioma oficial del Congreso será el Inglés.

Para mayor información, dirigirse a:

* SEMT.95
Department of Mathematics and
Mathematical Education
Faculty of Education
Charles University
M.D. Rettigové 4
11639 Praha 1
The (ZECH REPUBLIC)
e-mail: < novotna@earn.cvut.cz>

6.- ICPAM-95.

La Conferencia Internacional sobre las Matemáticas Puras y Aplicadas tendrá lugar en la Universidad de Bahrain, del 19 al 22 de Noviembre de 1995.

Para mayor información contactar con:

* A.Q.M. Khaliq
Conference Secretary-ICPAM95
Department of Matthematics

University of Bahrain
P.O. Box 32038. ISA TOWN BAHRAIN
Telf.: +973688348
Fax: +973682582
e-mail: < icpam95@isa.cc.vob.bh>

7.- Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

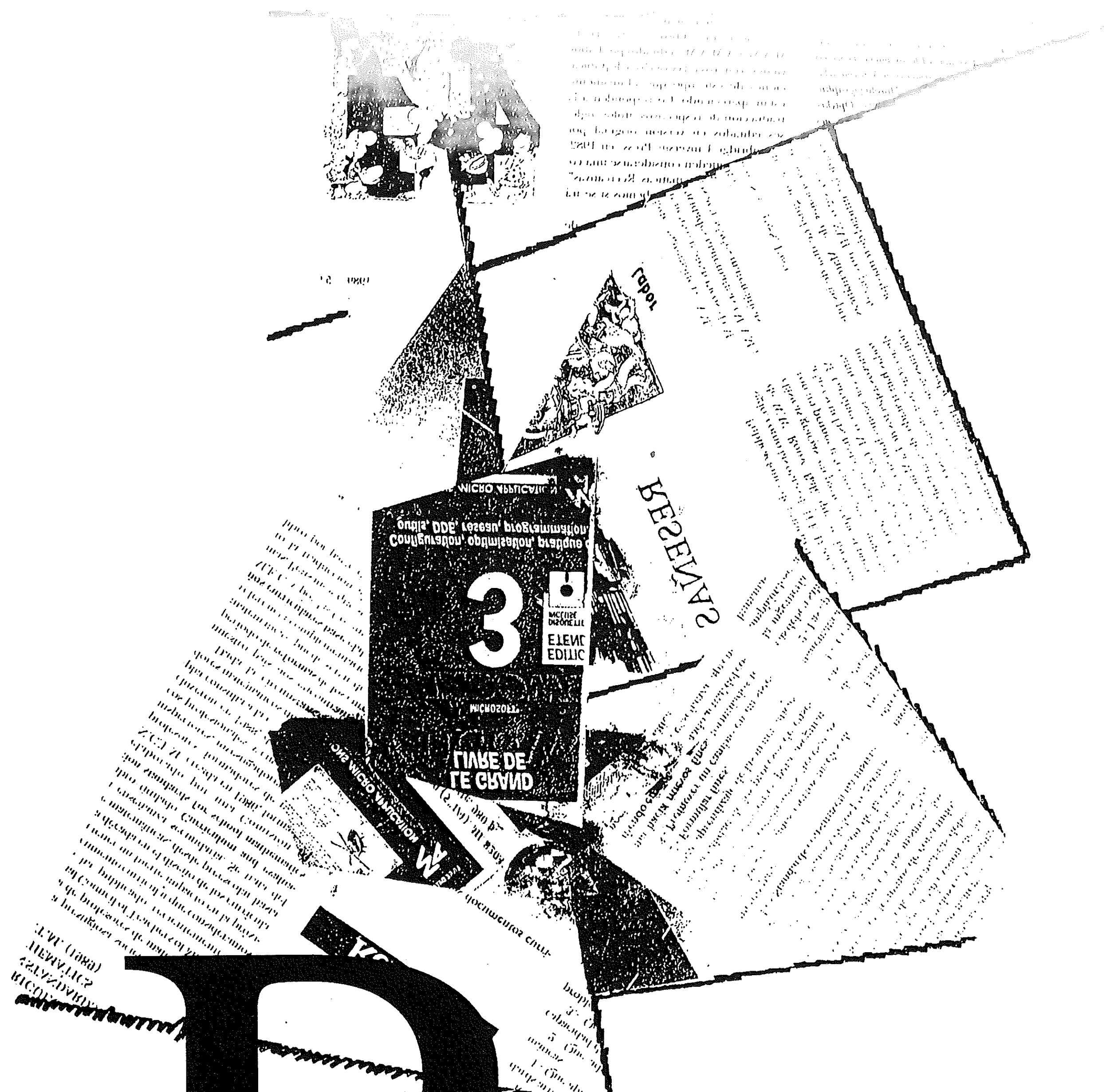
Se celebrará del 13 al 17 de Agosto de 1995 en la ciudad de la Habana (Cuba) en el Centro de Convenciones del ICE del Ministerio de Educación de Cuba.

La Conferencia ofrece la oportunidad a los participantes de intercambiar ideas y experiencias sobre los problemas que se plantean con respecto a la formación y actualización de Profesores de Matemática, conocer mejor el papel de la Matemática en los distintos sistemas educativos, comunicar resultados de investigación en Educación Matemática y proponer mejoras metodológicas.

Contactar con: (Dirección del Comité Organizador)

* Centro de Investigación y Estudios
Avanzados del IPN
Nicolás San Juan, 1421. Colonia del Valle
C.P. 03100, Distrito Federal, México.
Telf.: 604-1704
604-1635
688-63
Fax: 688-6111
e-mail: < cuba95@mvaxf.red.cinvestav.mx>


ANÍMATE
Y
COLABORA



RESEÑAS

Apuntes y problemas de matemática superior

Nevot, A., Poncela, J.M. y Soler, J.

Taurus. Madrid 1994

A lo largo de 537 páginas, los autores de este libro nos presentan un trabajo desglosado en trece capítulos que abarcan cuestiones de álgebra, cálculo, lógica, estadística e investigación operativa.

Cada capítulo lo comienzan con una introducción y unos objetivos, para después ofrecer unos aspectos teóricos reducidos, los imprescindibles para dar paso a los ejercicios resueltos que van minuciosamente detallados y que constituyen el núcleo principal del libro. Después las aplicaciones del capítulo a campos como la física, informática o a los negocios. Le sigue otro apartado de ejercicios propuestos, que como dicen los autores "recogen enunciados de problemas y ejercicios similares a los resueltos en el capítulo con el objeto de facilitar el desarrollo de habilidades y destrezas en las distintas cuestiones aprendidas". Resumen los conceptos básicos y fundamentales de cada capítulo en un glosario y por último viene un cuestionario de autoevaluación en donde cada cuestión viene acompañada por cuatro posibles respuestas.

Los temas que presentan, no vienen agrupados por bloques como suele ser habitual, sino como estiman que pueden ser de mayor utilidad a los lectores del trabajo, por ello lo inician con un capítulo de "Conjuntos, relaciones y estructuras algebraicas", pasando después a "Funciones, límites y continuidad", "Derivación", "Integración", "Sucesiones y Series", "Funciones de varias variables" y "Ecuaciones diferenciales".

Después retoman el álgebra con el estudio de "Espacios vectoriales, matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales" y con "Aplicaciones lineales y diagonalización de matrices". Como prolongación del álgebra y como pórtico de la investigación operativa dedican un capítulo a "Programación lineal".

En el capítulo dedicado a "Estadística y Probabilidad" hacen una gran síntesis al agrupar aspectos que van desde las medidas de tendencia central hasta el teorema central del límite.

Por último presentan un capítulo dedicado a "Álgebra de computación" y otro referido a las "Redes de Actividades" destacando el método PERT y el CPM.

Los autores de este libro han tenido el acierto de agrupar un núcleo importante de conceptos teóricos y acompañarlos de una gran colección de ejercicios resueltos y aplicaciones a otras ramas, para que el posible usuario pueda tenerlo de libro de consulta en aquellas cuestiones que no domina a la perfección y que sin embargo, le pueden hacer falta en su estudio diario.

Los alumnos de primeros cursos universitarios, que tienen matemáticas como una asignatura aplicada, pueden encontrar en este manual una gran ayuda, y los profesores pueden encontrar en él un gran auxiliar por la gran cantidad de ejercicios que presenta y que pueden completar su trabajo diario en las aulas.

Andrés Nortes Checa

Más allá de los números

John Allen Paulos

Tusquets Editores (318 pp.)
Barcelona, 1993

La lectura del libro *El hombre anumérico*, me ha animado a sumergirme a un nuevo trabajo de Paulos con el propósito de pasar primero un buen rato con su lectura y después poder transmitir a los demás las ideas de este autor que subtitula su libro "Meditaciones de un matemático".

La introducción de Más allá de los números el autor la comienza diciendo: "Este libro es en parte diccionario, en parte una recopilación de ensayos matemáticos cortos y en parte las reflexiones de un matemático". Y a lo largo de 318 páginas va desgranando los 70 artículos de que consta, de temáticas o Folklore matemático o Humor y matemáticas, junto a otros más característicos como El teorema de Pitágoras o Los números primos o Programación lineal. Para indicarnos a quien va dirigido este libro el autor nos lo indica al final de su introducción diciendo: "Este libro está pues escrito para los matematófilos que no saben que lo son (entre otros), que toda la vida han pensado matemáticamente sin haberlo notado".

En el primer ensayo el autor pone en antecedentes al lector de lo que va a ser el contenido del libro ya que bajo el título *Al estilo matemático* intenta decirnos que la matemática proporciona un modo de entender el mundo, pudiendo ayudarnos en nuestro quehacer diario. Para ello toca temas tan corrientes como las multas de tráfico o los juegos con palabras.

Álgebra, Áreas y volúmenes, Cálculo y rutina o Cintas de Möbius y orientabilidad, son títulos de otros tantos ensayos en donde el autor al hilo de pequeñas anécdotas nos introduce en aspectos generales de estas partes de las matemáticas y el saber fórmulas de las áreas y los volúmenes no siempre garantiza un sentido intuitivo de la extensión y la voluminosidad.

El autor invita a coger una lata de atún y despegarle la etiqueta que está impresa por un lado y blancia por otro, dando medio giro a la banda de papel y pegando sus dos extremos procurando que la cara blanca encaje con la cara exterior siempre se obtiene la *cinta de Möbius* que tiene una sola cara, no pudiendo nadie obtener los 100 millones de pesetas por pintar una cara de la cinta de Möbius de azul y otra de rojo.

Si importante es poseer información y datos para poder arropar nuestras argumentaciones, no menos importante es tener ideas para pensar, siendo más importante una buena formación y una amplia cultura general. Esto es lo que nos dice Paulos en "Clasificar y pensar", pero también nos habla de las "Coincidencias" para introducir al lector en la probabilidad o de los Mapas de cuatro colores y los siete puentes de Königsberg, cuando habla de "Combinatoria, grafos y mapas".

En otros artículos el autor se dedica a ensalzar y comentar los trabajos de otros colegas, como en "La conciencia humana y su naturaleza fractal".

En *Conjuntos infinitos* presenta un caso de la recepción de un hotel en que no hay habitaciones libres porque son finitas. Sin embargo, si el hotel estuviera lleno pero el número de habitaciones fuera infinito se podría hacer algo.

La estadística la describe el autor como uan rama de la matemática que "es puro sentido común formalizado y pensamiento sencillo cuantificado", tras introducirse, utilizando ejemplos de la vida misma, en un artículo que titula *Correlación, intervalos y tests.*

Al crecimiento expoenencial, a los cuantificadores en lógica, al número "e" y a las ecuaciones diferenciales le dedica sendos ensayos. Aporta dos teoremas estadísticos: la ley de los grandes números y el teorema central del límite, como aplicación de la estadística a la vida cotidiana.

No podía dejar de lado Paulos el tocar *Ética y matemáticas* presentando el dilema siguiente: "Supongamos que dos hombres sospechosos de un delito importante son detenidos mientras cometen una falta menor. Son sepaados e interrogados, y a cada uno de ellos se le da la posibilidad de confesar el delito importante, implicando con ello a su cómplice, o permanecer callado. Si ambos permanecen en silencia, les caerá un año de prisión a cada uno. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa será recompensado con la libertad, mientras que al otro le caerá una condena de cinco años. Si ambos confiesan, pueden esperar que les caigan tres años de cárcel. La opción cooperativa es permanecer callado, mientras que la individualista es confesar". El dilema consiste en saber que es lo mejor para ambos en conjunto.

No podía olvidar el autor a Fermat y su último teorema que tanto ha dado que hablar en los pasados meses. De la filosofía de la matemática de la mano de Kant pasa al folklore matemático, en dondes destaca las abundantes enemistades personales rencorosas entre matemáticos y anécdotas de figuras carismáticas o los episodios de Arquímedes.

A la fórmula de la ecuación de segundo grado, a los fractales, a las funciones, a la geometría analítica y a la geometría no euclidea dedica Paulos sendos artículos. De los *fractales* indica el ejemplo propuesto por Benoît Mandelbrot, descubridor de la geometría fractal, sobre la estimación de la longitud de la Costa

Este de Estados Unidos que desde un satélite puede ser 4500 km y si se basa en mapas detallados puede llegar a 13500 km, dando como definición "es una curva o una superficie que presenta una complejidad mayor, aunque parecida, a medida que lo contemplamos más de cerca", llegando a decir que "la dificultad de una disciplina se podría tomar como un fractal, de modo que los más capaces pudieran superar con grandes zancadas cognitivas las pequeñas dificultades que otros, menos dotados, han de escalar pacientemente".

A Gödel y su teorema, al álgebra abstracta, al humor y matemáticas, a imposibilidades, a inducción matemática, a los límites y a matrices y vectores dedica Paulos sendos trabajos. Chistes pueriles son típicos de los matemáticos que siguen al pié de la letra los enunciados y no su aspecto convencional. Tanto las matemáticas como el humor dice Paulos que "son formas de juego intelectual".

Dos nuevos artículos titulados "Media, mediana y moda" y "Métodos de simulación de Montecarlo" se suman a los tratados en la rama de Estadística, aclarando que no hay que olvidar que existe una clara diferencia entre el modelo o simulación de las demostraciones que hacían los matemáticos antiguamente que las terminaban con "como queríamos demostrar".

Al rectángulo áureo y a las sucesiones de Fibonacci, a la recurrencia, a la regla del producto (si se puede realizar tal o cual acción o hacer una elección en M modos diferentes y luego se puede realizar otra acción u otra elección en N modos distintos, entonces se pueden realizar en MxN modos distintos), a las series convergentes y divergentes, a la simetría e invariancia como conceptos complementarios, y a los sistemas de votación, que a veces benefician a unos políticos más que a otros en función del sistema electoral utilizado.

No podía faltar un artículo dedicado al Teorema de Pitágoras y otro dedicado a la Teoría de Juegos que trata de determinar las estrategias de los jugadores, sus costes y ganancias, y las situaciones de equilibrio. Nos introduce también en la teoría del caos que versa sobre el comportamiento de sistemas no lineales arbitrarios.

Del triángulo de Pascal, de Trigonometría, de Zenón y el movimiento, así como de Topología y tiempo, tienen cabida en el trabajo de Paulos.

Termina con un apéndice en el que presenta la lista cronológica de *los cuarenta principales* entre los que se encuentran Platón, Pitágoras, Euclides junto con Lagrange, Laplace o Hilbert, por citar algunos de los más conocidos por el lector.

Unas "lecturas recomendadas" nos ofrece la oportunidad de poder acudir a una bibliografía vasta y actualizada en donde ampliar aquellos aspectos que de forma desenfadada, pero no exenta de rigor, desarrolla Paulos en su libro.

En definitiva se trata de un libro ameno, como su anterior de El hombre anumérico, que a buen seguro tendrá al menos la misma acogida.

Es de destacar la labor del autor en la popularización de las matemáticas –tema en el que también está inmerso el que esto escribe– y muestra de ello son sus colaboraciones en "The New York Times" y "Newsweek".

El trabajo de Paulos pretende ser un "antídoto eficaz contra la fobia matemática" y a buen seguro que lo consigue.

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia

MISCELANEA

T

Nicómaco y una propiedad de los números impares

Ricardo Barroso Campos

No solamente porque decimos que existía en las demás en la mente del Dios creador como algún plan universal y ejemplar, confiando en ella como un diseño y arquetipo, el creador del universo puso en orden sus creaciones materiales y las hizo de acuerdo con sus propios fines; sino también porque es por su naturaleza anterior en su nacimiento...

Nicómaco de Gerasa fue un filósofo griego de fines del siglo I de nuestra era; se distinguió, además, como músico y matemático. Pertenece a la época de sincretismo de la filosofía griega, caracterizada por la renovación de las doctrinas pitagóricas, en cuya labor le acompañan el español Moderato de Cádiz y Apolonio de Tyana. Los biógrafos antiguos le atribuyen una Vida de Pitágoras, una Colección de los dogmas pitagóricos y un Tratado sobre las fiestas de los egipcios. La primera y la última se han perdido y de la segunda formaban quizá parte los diferentes fragmentos que hoy nos quedan de él. Tales son los Arithmetica Theologumena, conservados por Focio y publicados por Aot junto con la obra del mismo título de Jámblico (Leipzig, 1817). Se ocupan de las relaciones místicas de los números.

Su Enchiridion Harmonices es la fuente más antigua acerca de la teoría musical de los pitagóricos.

La obra que ha cimentado la fama de Nicómaco es la Introductio Arithmetica en dos tomos, publicada por Wechel en 1538, por Nobbe en 1862 y por Pistelli en 1894; pero su importancia no es debido al mérito intrínseco de la obra, sino a sus condiciones didácticas, y, sobre todo, a la influencia que ejerció durante la Edad Media, tanto en Oriente, donde fue comentada por Jámblico, Proclo, Filopón y otros, como en Occidente, gracias a la versión de Apuleyo y a la paráfrasis de Boecio. Todas las obras de Nicómaco ofrecen un mismo carácter: la unión de la teoría mística de los números con la simbólica explicativa del Universo.

La Introductio es considerada por Morris Kline como el resurgimiento de una aritmética independiente. Desde el punto de vista histórico, su importancia para la aritmética es comparable a la de los Elementos de Euclides para la geometría. Este libro no sólo fue estudiado, tomado como referencia y copiado por decenas de autores posteriores, sino que se reconoce como inspirador de varios libros por otros autores del mismo período, con lo que refleja el interés de la época. Los números representaban cantidades de objetos y dejaron ya de ser considerados como longitudes de líneas. Nicómaco utiliza siempre palabras, mientras que Euclides emplea dos letras tales como AB -refiriéndose a un segmento lineal-al hablar de números.

De las cuatro materias destacadas por Platón (aritmética, geometría, música y astronomía), Nicómaco afirma que la aritmética es la madre de las demás. Mantiene que:

La aritmética, continúa, es esencial para las demás ciencias ya que éstas no existirían sin ella. Sin embargo, si las demás ciencias fueran abolidas ,la aritmética seguiría existiendo.

La esencia de la Introductio está en los trabajos aritméticos de los primeros pitagóricos. Considera números pares e impares, cuadrados, rectangulares, primos, compuestos y paralelepipédicos (de la forma $n*n*(n+1)$) y define muchos más tipos. Da la tabla de multiplicar entre el 1 y el 9 tal y como la aprendemos nosotros.

Descubrió la siguiente proposición: Si escribimos los números impares:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...

entonces el primero es el cubo de 1; la suma de los dos siguientes, $3 + 5 = 8$, es el cubo de 2, la suma de los tres siguientes, $7 + 9 + 11 = 27$, es el cubo de 3, y así sucesivamente.

Comprobemos esta propiedad:

1	=	1^3
3 +5	=	2^3
7 +9 +11	=	3^3
13 + 15 + 17 + 19	=	4^3
...		

El primer número impar de cada una de las n-uplas es:

$$n^2 - n + 1$$

Veámoslo por inducción:
La n-upla 1ª lo verifica:

Para n=1, es: $1^2 - 1 + 1 = 1$

Supongamos que el primer elemento de la n-upla h es:

$$h^2 - h + 1$$

Dicha n-upla tiene h números impares, por lo que habría que sumarle 2h para obtener el primer elemento de la n-upla siguiente, sería:

$$h^2 - h + 1 + 2h = h^2 + h + 1$$

Valor que coincide con:

$$(h + 1)^2 - (h + 1) + 1 =$$
$$= h^2 + 2h + 1 - h - 1 + 1 =$$
$$= h^2 + h + 1$$

c. q. d.

También es posible verlo mediante las diferencias :

1 3 7 13 21 31 ...

Primeras dif: 2 4 6 8 10 ...

Segundas dif: 2 2 2 2 ...

Luego el término general es un polinomio de 2º grado:

$$a\,n^2 + b\,n + c$$

Para n=1	$a + b + c = 1$
Para n=2	$4a + 2b + c = 3$
Para n=3	$9a + 3b + c = 7$

Sistema en a, b, c que resuelto nos da: a=1 b=-1 c =1, es decir, el primer término de las n-uplas es:

$$n^2 - n + 1$$

Veamos a continuación la suma de los n términos de la correspondiente n-upla.

Los valores a sumar son:

$(n^2-n+1) + (n^2-n+1+2) + (n^2-n+1+ 2*2) +..$

$..+ (n^2-n+1+2*j)+...+(n^2-n+1+2*(n-1)).$

Tenemos, pues, una progresión aritmética cuyo primer elemento es

$$n^2 - n + 1$$

la diferencia es 2 y está compuesta por n elementos.

Por ello, sus suma es:

$$S = \frac{(n^2-n+1) + (n^2-n+1+2\,(n-1))}{2}\,n = \frac{2n^2}{2}\,n = n^3$$

Una consecuencia muy interesante del resultado anterior es la siguiente:

Todo número cubo perfecto es la diferencia entre dos cuadrados.

En efecto, la suma de los números impares nos va dando cuadrados perfectos:

1	=	1^2
1 + 3	=	2^2
1 + 3 + 5	=	3^2
1 + 3 + + 7	=	4^2

Veámoslo en general:
Por inducción:

Para n=1 es cierto: $1=1^2$

Supongamos que para n=h sea:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2h-1) = h^2$$

Para n= h + 1, será:

$$1 + 3 + 5 + 7 +...+ (2h-1) + (2(h+1)-1) =$$

$$h^2 + (2h + 2 - 1) = h^2 + 2h + 1 = (h + 1)^2$$

c.q.d.

Pues bien, del primer resultado y de este, podemos concluir que:

$$1^3 = 1^2 - 0^2$$
$$2^3 = 3^2 - 1^2$$
$$3^3 = 6^2 - 3^2$$
$$4^3 = 10^2 - 6^2$$

Es decir, se verifica que:

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

En efecto, desarrollando obtenemos:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n^2+n)}{4}\right)^2 - \left(\frac{(n^2-n)}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(n^4+2n^3+n^2) - (n^4-2n^3+n^2)}{4}\right) =$$

$$= \frac{4n^3}{4} = n^3$$

c.q.d.

Bibliografía

* KLINE,MORRIS (1992).**El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.** Madrid. Alianza Editorial.

* **Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana.** (1966). Madrid. Espasa-Calpe.

Ricardo Barroso Campos
Departamento de Didáctica de las Ciencias
Universidad de Sevilla

En Recuerdo...(*)

Juan B. Aguilar González

Es difícil comprender hoy, las enormes dificultades qu nuestros compañeros encontraban en su labor docente. Destacar que el libro de texto, que usaban, autorizado con fecha 12-4-1994 y premiado con la medalla de oro en la Exposición Científica del Palais Travail de París.

El prólogo del libro comienza así:
"Guiado por la experiencia, consecuencia de la observación en la práctica diaria de la enseñanza, y siguiendo los derroteros trazados a la misma por la moderna Pedagogía, no me olvido de la necesidad de iniciar al niño en el análisis del cálculo, sin el cual difícilmente adquiere el raciocinio..."

Hace 60 años

En una población (Huelva) donde, por su carácter comercial, se daba a la ciencia de los números toda la indiscutible importancia que ella tiene, comprendió la imperiosa necesidad de proporcionar a sus alumnos los conocimientos que, bajo un plan rigurosamente metódico desarrollaran los principios culminantes de la matemática, se hiciesen inmediata aplicación de ellos en las diferencias cuestiones mercantiles y les proporcionasen, a través del poder creador, alegría.

El tema que nos recuerda, con toda añoranza, la labor del Maestro hace más de medio siglo, es el análisis de la raíz cúbica; edad de los alumnos 12-13 (7º y 8º de E.G.B.)

¿Cómo era una jornada normal?

Comenzaba el tema con la definición de raíz cúbica.

"Raíz Cúbica de un número es otro número que tomado tres veces como factor, produce dicho número. Así la raíz cúbica de 8 es 2; la de 27 es 3; la de 125 es 5".

Definición clara, concreta y rigurosas

A continuación, citaba los casos que pueden presentarse en la extracción de la raíz cúbica de los números enteros.

PRIMERO

Que el número del cual se ha de extraer la raíz sea menor que 1000 basta saber de memoria los cubos de los diez primeros números.

Los números que los producen son sus raíces respectivas. Se citaban los cubos y sus respectivas raíces. Tengo que destacar que todo ello implicaba un dominio del lenguaje (causa importante, hoy, del fracaso en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas).

Continuaba su exposición de esta forma: "Del consiguiente, si el número del cual ha de extraerse la raíz cúbica es uno de los diez primeros números, pero si el número no es cubo perfecto su raíz cúbica es la del mayor cubo entero, contenido en él; y la diferencia entre el número y el cubo de su raíz es el residuo de la raíz".

El profesor aconsejaba qué conviene saber para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000.

(*) En recuerdo de la profesora Dª Manuela Rodríguez

A.- Las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades.

B.- Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cúbica entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raíz cúbica del número propuesto.

Después de estas recomendaciones, el Maestro desarrolla una de las más atractivas secuencias didácticas. Habla al alumno de las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades.

¡Se me olvidaba! Se recomienda esta lectura en estas situaciones:

- Un largo viaje en tren.
- Un atardecer.
- Una situación de frustración docente.

Continuamos con la labor del profesor:

"Las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades, son cuatro, a saber:

1.- Cubo de decenas, que es un número de millares.
2.- Triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades que es un número de decenas.
3.- Cubo de unidades, que es un número de unidades.

Es el momento de comprobar.

Tomo el número 45, cuyo cubo es 45 * 45 * 45 = 91125 y por lo mismo la raíz cúbica de 19125 es 45.

91125
- 1ª parte: 4^3 = 4x4x4=64 millares 64000
- 2ª parte: ($3x4^2$)x5=(3x16)x5=48x5=240cent. 24000
- 3ª parte: $3x4x5^2$= 12x25=300 decenas 3000
- 4ª parte: 5^3= 5x5x5= 125 unidades 125
- Suma igual a la tercera potencia de 45 125

¿Qué podemos deducir de la comprobación?

1.- Que todo número mayor que 1.000 es igual al cubo de su raíz cúbica, o al cubo de dicha raíz más el residuo, si dicho número no tiene raíz cúbica exacta.

2.- Que restando de un número el cubo de las decenas de su raíz cúbica (1ª parte), en el resto quedan: el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma (2ª parte), el triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades (3ª parte) y el cubo de las unidades (4ª parte); más el residuo, si el número no tiene raíz cúbica exacta.

No era éste el momento de dar normas o reglas para la extracción. Antes de ello, el método exigía dos investigaciones. La primera decía así:

"Problemas ahora el SEGUNDO PRINCIPIO CAPITAL, ésto es, que: Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cúbica entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto".

¿Qué debemos tener en cuenta?
(¡Qué minuciosos eran!)

1.- Que el cubo de un número de docenas da un número de millares, y que, por lo mismo, la raíz cúbica de un número de millares es un número de decenas.

Ejemplo: Tenemos el número 24695. Separando las tres primeras cifras de su derecha, queda a la izquierda el número 24 cuya raíz cúbica es 2.

En efecto, el cubo de 2, que es 8, está contenido en 24 y 2^3 millares, u ocho millares, está en 24 millares y con mayor razón estará contenido en el número propuesto. Luego la raíz cúbica del número propuesto no es menor que la de 9 millares que es 2 docenas:

Si 2 es la raíz cúbica de 24, el cubo de 3 o 3^3 es mayor que 24, luego 3^3 millares o 27 millares, es mayor que 24 millares, y también mayor que el número propuesto, ya que lo que despreciamos de él, 695 unidades no llega a 1 millar: luego la raíz cúbica del número propuesto es menor que la de 27 millares, que es 3 decenas.

Primero hemos visto que la raíz cúbica entera de 24695 no es menor que 2 decenas, y ahora vemos que no llega a 3 decenas. Luego 2 es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto.

El tema de la segunda investigación se centra en las unidades de la raíz.

"Puede suceder que al elevar al cubo la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, de la suma de las dos partes últimas, la 3ª y la 4ª no resulte ninguna centena; que resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, y que resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

En el primer caso, las centenas del resto son exactamente las que proceden de la segunda parte (triplo del cuadrado de las decenas por las unidades las que hemos de considerar como un producto formado por dos factores: 1º triplo del cuadrado de las decenas de la raíz y 2º las unidades de la raíz. Luego partiendo de las centenas del resto por el primer factor que las produce el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz), el cociente será las unidades de la raíz, o el otro factor, siendo la división exacta.

Comprobémoslo:
21^3= 9261; luego $\sqrt[3]{9261}$=21

NÚMERO DADO 9261

1ª parte: 2^3= 2x2x2=8 millares	=	8000
2ª parte: $(3x2^2)x1$=12x1=12 millares	=	1200
3ª parte: $3x2*x1^2$=3x2x1= 6 decenas	=	60
4ª parte: 1^3= 1x1x1=1 unidad	=	1
número dado	=	9261
Restando de él la primera parte	=	-8000
Resto igual a la suma de las otras tres últimas partes	=	1.261

Centenas de este resto es 12
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3*2^2)$=12
Centenas del resto

Centenas del resto, 12	12, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
0	1, unidades de la raíz

El estudio del segundo como nos lleva a las siguientes conclusiones. Si de la suma de las dos partes últimas resulta un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, o el otro factor; más la división será la inexacta siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas.

La demostración del segundo caso es la que sigue:

73^3= 389017; luego $\sqrt[3]{389017}$= 73

NÚMERO DADO 389017

1ª parte: 7^3=7x7x7= 343 millares	=	343000
2ª parte: (3x7)x3= (3x49)x3=441 centenas ...	=	44100
3ª parte: $3x7x3^3$=21x9= 189 decenas	=	1890
4ª parte: 3^3= 3x3x3x= 27 unidades	=	27
número dado	=	389017
Restando de él la primera parte	=	-343000
Restando igual a la suma de las tres partes últimas	=	46017

Centenas de este resto 46
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $3x7^2$= 147

Centenas del resto, 460	147, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
19	3, unidades de raíz

Analicemos el tercer caso:

Si la suma de las dos partes últimas (3ª y 4ª) resulta un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será mayor que las unidades de la raíz.

Veamos:

39^3=39x39x39= 59319; luego $\sqrt[3]{59319}$= 39

NÚMERO DADO 59319

1ª parte: 3^3=3x3x3= 27 millares...... =	27000
2ª parte: (3x3^2)x9= (3x9)x9= 243 centenas =	24300
3ª parte: 3x3x9^2= 9x81= 729 uds.... =	7290
4ª parte: 9^3=9x9x9= 729 uds. .... =	729
número dado .... =	59319
Restando de él la primera parte ... =	-27000
	32319

Centenas del resto 323

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz (3x3^2)= 27

Centenas del resto, 323	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
053	11, número mayor que las unidades de raíz.

Todo ello sucederá si el número constará de las cuatro partes mencionadas MAS EL RESIDUO DE LA RAÍZ, lo que nos obligará a considerar las siguientes posibilidades:

1ª POSIBILIDAD

Si la suma de las tres partes últimas no resulta ninguna centena dividimos las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará las unidades de la raíz, y la división será exacta.

31^3=	29791
número que añado	+ 3
	29794

Luego $\sqrt[3]{29794}$ = 31; raíz entera; Resto, 3

NÚMERO DADO 29794

1ª parte: 3^3= 3x3x3= 27 millares...... =	27000
2ª parte: (3x3^2)x1= 3x9x1= 27 cent. . =	2700
3ª parte: 3x3x1^2= 9 decenas .... =	90
4ª parte: 1^3= 1x1x1= 1 =................ =	1
5ª parte: Resto .... =	3
Numero dado............................ =	29794
Restando de él la primera parte ... =	-27000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas .... =	-2.794

Centenas del resto 27

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz (3x3^2)= 27

Centenas del resto, 27	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
0	1, unidades de la raíz.

2ª POSIBILIDAD

Si de la suma de las tres partes últimas resulta un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará las unidades de la raíz, y la división será exacta, siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas con el residuo.

Sea el número 62, con el que trataremos de comprobar la segunda cuestión.

62^3	238328
Número que le añado para que no tenga raíz exacta	+5
	238333

luego $\sqrt[3]{23833}$ = 62, raíz entera, resto 5

NÚMERO DADO 238333

1ª parte: 6^3= 6x6x6= 216 millares .... =	216000
2ª parte: (3x6^2)x2=(3x36)x2=216 cent. =	720
4ª parte: 2^3= 2x2x2= 8 unidades ...... =	8
5ª parte: Resto .... =	5
	238333
Restando de él la primera parte ... =	-216000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas	22333

Centenas del resto, 223

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz (3x6^2)=108

Centenas del resto, 223	108, triplo del cuadrado de las decenas
007	2, unidades de la raíz.

3ª POSIBILIDAD

Si de la suma de las tres partes últimas resulta un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, partiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será mayor que las unidades de la raíz.

Tratemos de demostrarlo:

39^3=	59319
Número que le añadimos para que no tenga raíz exacta	+32
	59351

Luego $\sqrt[3]{59351}$= 39; raíz entera, resto 32

NUMERO DADO 59351

1ª parte: 3^3= 3x3x3= 27 millares ...... =	27000
2ª parte: $(3x3^2)$x9=27x9=243 cent. ... =	24300
3ª parte: $3x3x9^2$= 9x81= 729 decenas =	7290
4ª parte: 9^3: 9x9x9= 729 unidades ... =	729
5ª parte: Resto .... =	32
Número dado .... =	59351
Restando de él la primera parte ... =	-27000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas..................... =	32351

Centenas de este resto 323

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x3^2)$=27

Centenas del resto, 323	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
053	11, número mayor que las unidades de la raíz.

Residuo, 26

¿Qué consecuencias sacamos de todo lo expuesto?

Se deduce que, para hallar las cifras de las unidades de la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, se resta de dicho número el cubo de las decenas de su raíz y las centenas del resto se dividen por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz. El cociente entero será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.

De conformidad con lo expuesto pasemos a un caso concreto. Procedamos a obtenerla raíz cúbica entera de 78956.

En primer lugar observemos que, separando las tres primeras cifras de la derecha, la raíz cúbica entera del número de la izquierda, 78 que es 4, es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número 78956. Si de este número restamos el cubo de las decenas de la raíz, 4^3=64 millares, en el resto 14.956 quedan las partes siguientes: triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma; cubo de las unidades, y el resto, si el número 78956 no tiene raíz exacta.

Las centenas del resto 149, proceden del triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma, y también habrá en ellas las que puedan resultar del triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades de la raíz más el cubo de las unidades, de la misma, y si el número no tiene raíz exacta, las centenas del resto serán las que resulten de la suma anterior más el residuo de la raíz. De todos modos, partiendo las centenas del resto, 149, por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x4^2)$=48 el cociente 3 será las unidades de la raíz, o un número mayor estas unidades.

Ahora bien, si 3 es la cifra de las unidades de la raíz, claro está que el cubo del número formado por las decenas de la raíz y el cociente, 43, estará contenido en el número propuesto. De lo contrario, el cociente 3, será, evidentemente, mayor que las unidades de la raíz; y como el cubo de 43 es 79507, número mayor que el propuesto, infiérese que el cociente 3 es mayor que las unidades de la raíz. Disminuyendo dicho cociente en una unidad, resulta el número 2, y elevando al cubo el número 42, formado por las decenas de la raíz y la nueva cifra, hallaremos el número 74088, menor que el propuesto, de lo que inferimos que 2 es la cifra de las unidades de la raíz.

Regla para extraer la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000

Para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000, se divide dicho número en grupos de a tres cifras, empezando por la derecha; se extrae la raíz cúbica entera del primer grupo de la izquierda, y se tiene la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cubo, y este cubo se resta del primer grupo de la izquierda.

A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan con un punto las dos primeras cifras de la derecha, y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz.

El cociente hallado será la segunda cifra de la raíz, o un número mayor que ella.

Para comprobar si dicho cociente es la segunda cifra de la raíz, se eleva al cubo el número formado por la primera cifra de la raíz y dicho cociente; y si este cubo puede restarse del número formado por los dos primeros grupos de la izquierda del número propuesto, el cociente hallado es la segunda cifra de la raíz; más si dicho cubo es mayor que el número formado por las dos primeras secciones, el cociente se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo.

Halladas la primera y la segunda cifras de la raíz, se resta su cubo del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda del número propuesto.

A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan, con un punto las dos primeras de la derecha y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de las dos primeras cifras de la raíz.

El cociente hallado será la tercera cifra de la raíz, o un número mayor que ella, lo que se comprueba como anteriormente.

Y así continuamos hasta haber bajado todas las secciones, haber hallado la última cifra de la raíz y el residuo correspondiente, si la raíz es inexacta.

78956	42	
- 64		43x43 = 79507
14956		
	149 48	42x42 = 74088
- 74088	05	
	3	
04868		

Aproximación de una raíz inexacta

Si la raíz cúbica de un número entero, no es exacta, después de haber hallado la entera y el residuo correspondiente, se añaden a la derecha del número cuya raíz se extrae, tantos grupos de a tres ceros como notas decimales queramos aproximar a la raíz.

Hecho esto, se continúa la operación como en el caso anterior, y luego se separan, de derecha a izquierda de la raíz hallada, tantas cifras para decimales como grupos de a tres ceros se hayan añadido.

Cómo se extrae la raíz cúbica de un número decimal. Se procede como si fuese entero, añadiendo antes a su derecha los ceros necesarios hasta formar, con las notas decimales que ya existan, tantos grupos de a tres cifras, como notas decimales queremos aproximar la raíz.

Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado común. Se ve, primero, si numerador y denominador tiene raíz cúbica exacta; en cuyo caso se extraen la raíz del numerador y del denominador, y se divide la primera por la segunda. Si ambos términos no tiene raíz cúbica exacta, se reduce el quebrado a fracción decimal y. se extrae la raíz del número decimal equivalente.

Juan B. Aguilar González
C.P. Teodosio (Sevilla).


REVISTA
SUMA
I.C.E. UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
C/. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

SUMA

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ______________ Centro de Trabajo ______________

Firmado: ______________________ Fecha: ______________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ______________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº _______ Fecha ______________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: ______________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C. Postal: ______________

Provincia: ______________________

Titular: ______________________

Firmado: ______________________ Fecha: ______________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304. 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

ASESORES

- Associació de Professors de Matemátiques de les Comarques Meridionals.
  * Claudi Aguade Bruix

- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
  * Ismael Roldán Castro
  * Francisco Javier Fernández
  * Rafael Pérez Gómez
  * Miguel de la Fuente
  * José Muñoz Santoja

- Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
  * Horacio Gutiérrez Fernández
  * J. Luis Álvarez García

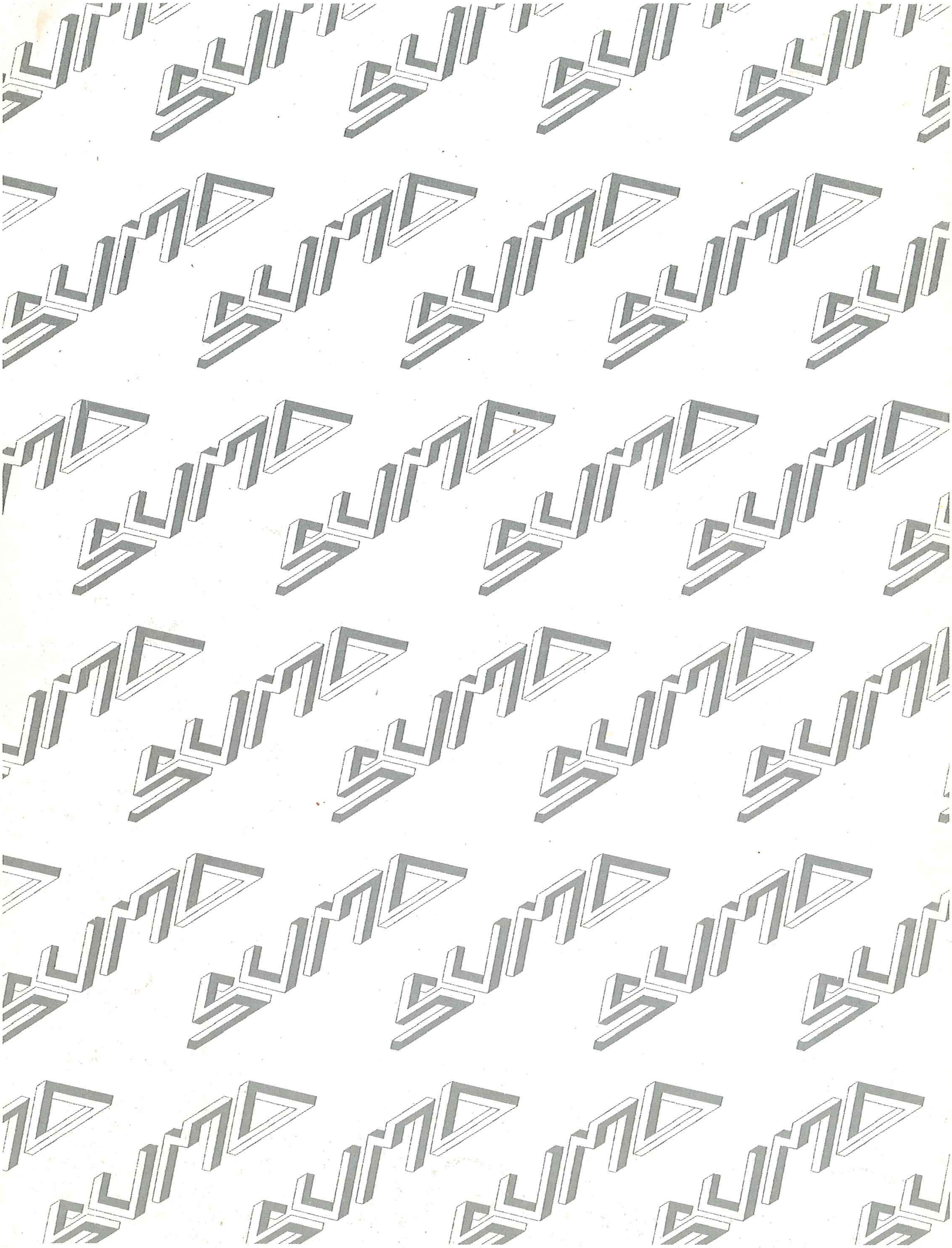
- Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
  * Fernando Hernández Guarch
  * Pilar Acosta Sosa
  * Manuel Luis de Armas Cruz
  * Mª Pilar Canción León
  * Carlos Duque Gómez

- Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
  * Antonio Bermejo
  * Francisco L. Esteban

- Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Kawarizmi"
  * Luis Puig Espinosa
  * Pascual Pérez Cuenca

- Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
  * Abilio Corchete González
  * Juan Gallardo Calderón

- Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia
  * Andrés Marcos García



PARA COLECCIONAR SUMA Nº 10

El *Calendario Matemático* se realiza para proporcionar a los profesores un instrumento que sirva para animar a los estudiantes a la resolución de problemas matemáticos, plantear retos a sus capacidades, presentar curiosidades, proponerles que indaguen en la historia de los matemáticos, suscitar la curiosidad por las relaciones numéricas y las formas geométricas y relacionar las matemáticas con otras manifestaciones culturales.

La selección de las propuestas se realiza para que tengan cabida en las matemáticas de los últimos cursos de E.G.B. y los primeros de B.U.P. o F.P., los estudiantes que en un futuro próximo cursarán la etapa de Secundaria Obligatoria. Los problemas se pueden aprovechar para complementar, profundizar o reforzar la programación de la asignatura.

En lo referente a los contenidos hemos considerado interesante diversificar los contenidos del calendario en una serie de secciones que intentamos mantener fijas.

Enero 95

Calendario Matemático - 22

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

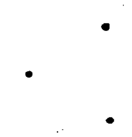
COLES DE BRUSELAS

Te proponemos un juego para estos primeros días del año. Fue inventado por el matemático inglés Horton Conway y se llama Coles de Bruselas por el aspecto resultante al finalizar la partida. Practica varias veces e intenta ver si hay alguna estrategia ganadora.

Reglas del juego:

1. Se parte de varios puntos dibujados en un papel (en el ejemplo tres puntos).
2. Un movimiento consiste en trazar una línea que una un punto con otro o consigo mismo y marcar un nuevo punto en cualquier lugar sobre la línea.
3. La línea puede tener cualquier forma pero sin cortarse a si misma, cortar a otra línea o pasar por otro punto.
4. De ningún punto pueden salir más de tres líneas.
5. Pierde el jugador que no puede tirar en su turno.

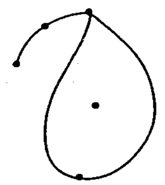
Un ejemplo de partida partiendo de tres puntos :



1

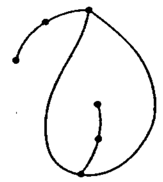
jugador A

2



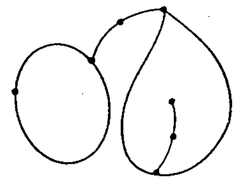
Jugador B

3



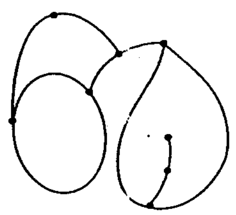
Jugador A

4



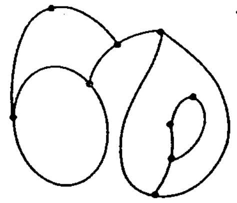
Jugador B

5



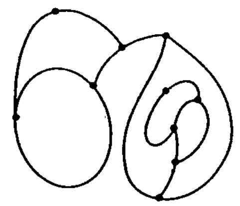
Jugador A

6



Jugador B

7



Jugador A

8

Por lo tanto el jugador B pierde la partida ya que no puede unir los dos únicos puntos que quedan con 2 líneas pues cortaría a otra ya dibujada.

9 DIAGONALES

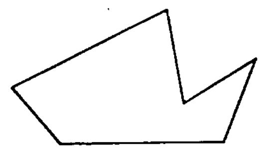
Traza en un hexágono regular dos diagonáles que partan de un mismo vértice y que vayan a vértices consecutivos.

¿Qué ángulo forman?

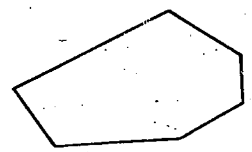
10 DÍA SOLEADO

Hace muchos años, en una tórrida noche madrileña cayó a medianoche un tremendo chaparrón. ¿Es posible que 72 horas después ya tuvieran en Madrid tiempo soleado?

11 CÓNCAVO



12 CONVEXO



¿Cómo definirías lo que es un polígono cóncavo y un polígono convexo?

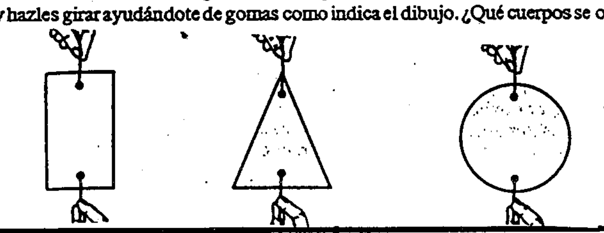
13 ¿QUÉ MES?

El primer y último día de un mes fue Viernes.

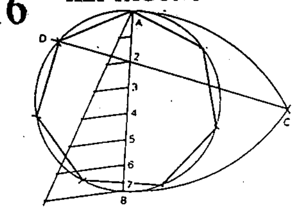
¿De qué mes se trata?

14 CUERPOS DE REVOLUCIÓN 15

Recorta un rectángulo, un triángulo isósceles y un círculo y hazles girar ayudándote de gomas como indica el dibujo. ¿Qué cuerpos se obtienen?



16 HEPTÁGONO



Dibuja un pentágono regular

17 UN MILLÓN

Si das un millón de pasos, ¿cuánto andarás?, ¿más o menos de 10 km.?

18 TODAS

¿Puedes, igual que en este ejemplo, obtener 1/3 usando todas las cifras del 1 al 9?

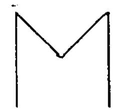
$$\frac{6729}{13458} = \frac{1}{2}$$

19 LAS LLAVES

En una noche obscura una persona lleva en el bolsillo 6 llaves. Toma una de ellas y si no abre la vuelve a meter en el bolsillo y coge otra, y así sucesivamente. Simula esta situación y determina cuántas veces por término medio necesita probar hasta abrir la puerta.

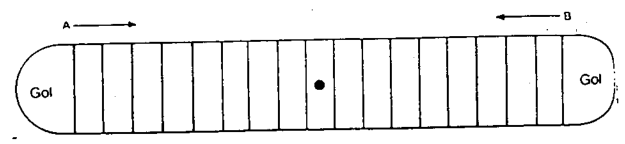
20 CORTA LA M

Corta la M del dibujo con tres líneas rectas para que se formen 9 triángulos.



21 FÚTBOL AMERICANO (Juego para dos jugadores) 22

Ambos parten del centro colocando una ficha. Se lanza un dado, si sale 5 o 6 el jugador A avanza hacia B igual cantidad de casillas y si sale 1,2,3 o 4 el jugador B avanza esa cantidad de casillas hacia A. ¿Es justo?



23 TREINTA

El número 30 es fácil de obtener con tres cincos: 5x5+5.

¿Puedes conseguirlo con otras tres cifras iguales?

30

24 CUADRADOS CURIOSOS

$1^2=1$

$11^2=121$

$111^2=12321$

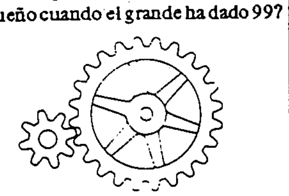
$1111^2=1234321$

......

31

25 PIÑONES

Al girar, el piñón pequeño mueve al grande. ¿Cuántas vueltas habrá dado el pequeño cuando el grande ha dado 99?



26 TRES LITROS

Una madre mandó a su hijo a la fuente para que le trajese exactamente 3 litros de agua. Le dio para ello dos cubos de 7 litros y uno de 4.

¿Cómo lo consiguió?

27 LA EXCEPCION

-No hay regla sin excepción.

-¿También tiene excepción la que acabas de decir?

-Sí, también.

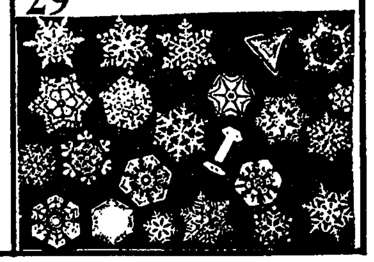
-Entonces habrá alguna regla sin excepción.

-Rectifico, la que he dicho no tiene excepción.

-Pues entonces ella misma contradice la primera afirmación

28

29 CRISTALES



Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel. 5100284

Selección de problemas: Pascual Pérez Cuenca

Gener 95

Calendari Matemàtic - 22

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

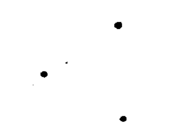
COLS DE BRUSEL.LES

Et proposem un joc per aquests primers dies de l' any. Va ser creat pel matemàtic anglés Horton Conway i es diu Cols de Brusel.les pel seu aspecte en finalitzar una partida. Practica diferents vegades i intenta vore si n'hi ha alguna estratègia guanyadora.

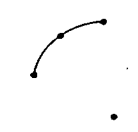
Regles del joc:

1. S'hi parteix d'uns quants punts dibuixats en un paper (en l'exemple tres punts).
2. Un moviment consisteix a fer una línia unint 2 punts o un punt amb si mateix i fer un nou punt sobre la línia.
3. La línia pot tindre qualsevol forma sense tallar-se a si mateixa, tallar altra línia o passar per més d'un punt.
4. De cap punt poden sortir més de tres línies.
5. Perd el jugador que en el seu torn no pot jugar.

Un exemple de partida partint de tres punts:

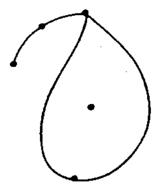


1



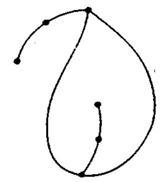
Jugador A

2



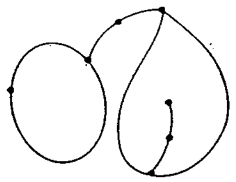
Jugador B

3



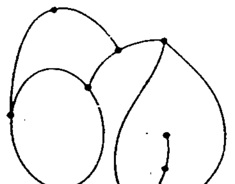
Jugador A

4



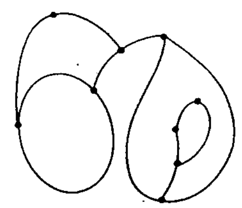
Jugador B

5



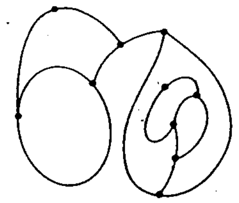
Jugador A

6



Jugador B

7



Jugador A

8

Per tant perd el jugador B per no poder unir els unics dos punts possibles ja que la línia tallaria unaaltra.

9 DIAGONALS

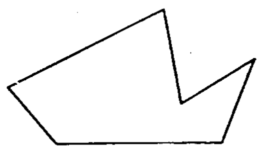
En un hexàgon regular traça dues diagonals que partint del mateix vèrtex vagen a dos vèrtexs consecutius.

Quin angle formen?

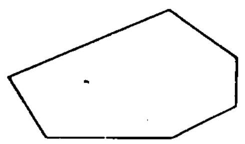
10 DIA ASSOLEJAT

Fa molts anys a Madrid en una nit molt càlida va caure un tremend ruixat. Es possible que 72 hores després ja tingueren temps assolejat?

11 CÒNCAU



12 CONVEXE



Com definiries un polígon còncau i un convexe?

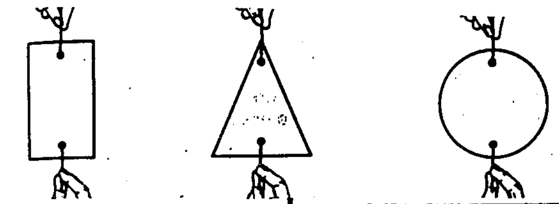
13 QUIN MES

El primer i el darrer dia d'un mes va ser divendres.

De quin mes estem parlant?

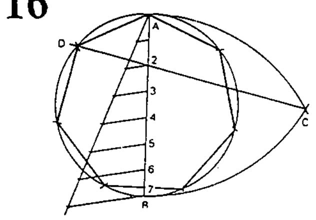
14 COSSOS DE REVOLUCIÓ

Retalla un rectangle, un triangle isòsceles i un cercle i gira'ls ajudan-te de gomes com indica la figura. Quins cossos s'obtenen?



15

16 HEPTÀGON



Dibuixa un pentàgon regular.

17 UN MILIÓ

Si dones un milió de passos quant caminaràs?

Més o menys de 10 km?

18 TOTES

Pots de la mateixa forma que diu aquest exemple obtindre 1/3 utilitzant totes les xifres des de l'1 al 9?

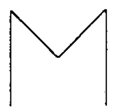
$$\frac{6729}{13458} = \frac{1}{2}$$

19 LES CLAUS

En una nit molt fosca una persona du a la butxaca 6 claus. En pren una i si no obri la torna a la butxaca i en trau una altra, i així successivament. Fes la simulació d'aquesta situació i determina quantes vegades per terme mitjà necessita provar per obrir la porta.

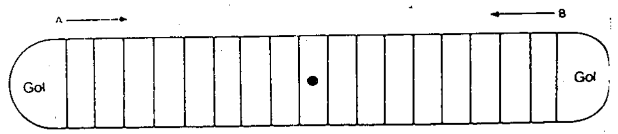
20 TALLA LA M

Talla la M amb tres línies rectes de manera que formen 9 triangles



21 FUTBOL AMERICÀ (Joc per a 2 jugadors)

Els dos parteixen del centre posant una fitxa única. Es llança un dau, si ix un 5 o 6 el jugador A avança cap a B la mateixa quantitat de llocs, si ix un 1,2,3 o 4 el jugador B avança cap a A aquesta quantitat de caselles. És un joc just?



22

23 TRENTA

El nombre 30 es fàcil d'obtindre amb tres cincs: 5x5+5.

Pots fer-ho també amb altres tres xifres iguals?

30

24 QUADRATS CURIOSOS

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

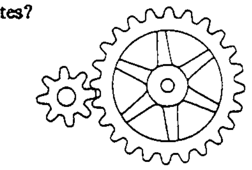
$1111^2 = 1234321$

.....

31

25 PINYONS

Al girar, el pinyó xicotet mou al gran. Quantes vegades haurà girat el xicotet quan el gran haja donat 99 voltes?



26 TRES LITRES

Una mare envià el seu fill a una font perquè li portara exactament 3 litres d'aigua. Li donà dos poals de 7 litres i un altre de 4.

Com el va aconseguir?

27 L'EXCEPCIÓ

-No hi ha regla sense excepció.

-També té excepció aquesta?

-Sí, també.

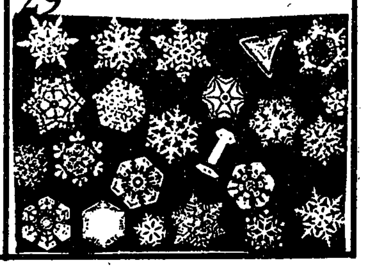
-Aleshores n'hi haurà alguna que no té excepció.

-Rectifique, aquesta no té excepció.

-Doncs aleshores ella mateixa contradiu la primera afirmació.

28

29 CRISTALLS



Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel. 5100284

Selecció de problemes: Pascual Pérez Cuenca

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL-KHWÀRIZMÍ

PARA COLECCIONAR SUMA Nº10

Febrer 95

Calendari Matemàtic - 23

Dilluns · Dimarts · Dimecres · Dijous · Divendres · Dissabte · Diumenge

1 DIVISORS

Calcula tots el divisors de 5400.

2 DÍGITS

Utilitzant una i només que una vegada cadascun dels 10 dígits, pots escriure cinc nombres de 2 xifres que sumen 200?

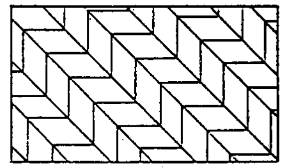
3 ÉS JUST?

Es llancen dos daus i es calcula la diferència del major respecte del menor. Guanya Carme si el resultat és 2, 3 o 4 i guanya Daniel si és 0, 1 o 5.

És just el joc?

4 ACOLOREIX EL MAPA 5

És suficient utilitzar quatre colors per acolorir un mapa de manera que dues regions adjacents no tinguen el mateix color?. Prova amb diferents mapes incloent-hi aquest:



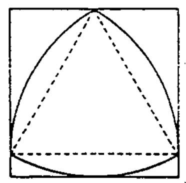
6 DIOFANT D'ALEXANDRIA

Pensador i matemàtic greco-hel·lènic. En la seua obra "Aritmètica" tracta els problemes d'equacions amb solucions que siguen nombres enters positius.

EQUACIÓ DIOFÀNTICA és aquella que té coeficients enters i de la qual només ens interessen les solucions enteres.

7 EL "ROULEAU"

Dibuixa "rouleaux" de cinc, set o més costats corbs.

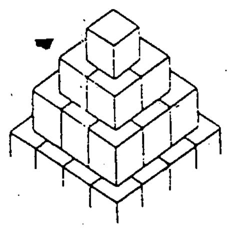


8 POTÈNCIA

Quina és l'última xifra del nombre:

$$8^{9.999} - 1$$

9 PIRÀMIDE DE CUBS 10



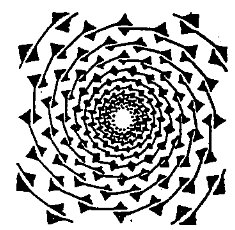
En una piràmide de cubs com aquesta, que tinga 10 files, quants hi haurà en total?, quants es veuran totalment o parcialment?

11 EL GARBELL D'ERATÒSTENES

Per a calcular tots els nombres primers anteriors a 100 eliminem els múltiples de 2, 3, 5 i 7 distints d'ells mateixos. Els nombres que queden entre 2 i 100 són primers.

De quins nombres s' han d'eliminar els múltiples per a trobar els primers anteriors a 10.000?

12 L'ESPIRAL DE FRASER



13

Troba totes les solucions enteres de l' equació 3x+2y = 0.

Demostra que l'equació diofàntica 3x+9y = 0 no té solució.

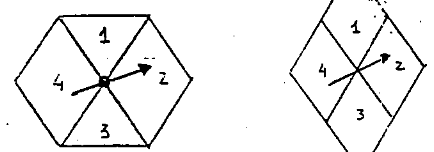
14 PROJECTOR

Un projector de diapositives es troba a un metre de la pantalla i dóna una imatge de 20 cm X 20 cm.

Representa gràficament la relació "distància a la pantalla - àrea de la imatge".

15 RULETES 16

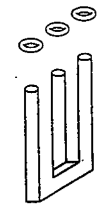
Calcula la probabilitat de cada número en aquestes ruletes:



17 NOMBRES PITAGÒRICS

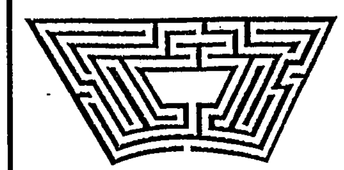
Direm que una terna de nombres és pitagòrica si poden ser mesures dels costats d'un triangle rectangle. Per exemple la terna 3, 4, 5 és pitagòrica. Busca un procediment per obtenir infinites ternes pitagòriques.

18 BARRES I ANELLES



Trobes alguna cosa rara?

19 LABERINT DE HAMPTON COURT



20 NOMBRE DE 3 XIFRES

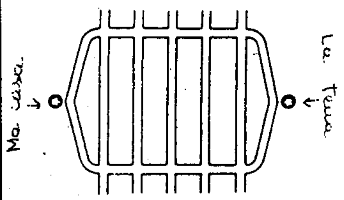
Pren un nombre de 3 xifres per exemple el 345, considera el nombre 345345 i divideix-lo per 7, el resultat per 11 i el resultat per 13.

Dóna de nou 345?

Passarà el mateix amb altres nombres de 3 xifres? Per què?

21 CAMINS A CASA

De quantes maneres distintes puc anar de ma casa a la teua?



22 LLET

Tenim un recipient amb 8 litres de llet i volem repartir-la en dues parts iguals utilitzant només que 2 recipients buits i també sense subdivisions, de 3 i 5 litres.

Com ho podem fer?

23 FRACCIONS

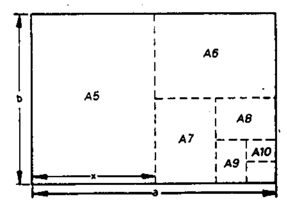
Expressa en forma de fracció la part ombrejada respecte del total.

Quina seria en un quadrat de costat n?

24 AMB PARAULES 25

Expressa el que et pareix que vol dir aquest dibuix

26 DIN A



El rectangle gran és un full DIN A4

27 ANY TRÒPIC - ANY CIVIL 28

Any Tròpic és el temps que tarda la Terra en donar una volta sencera al voltant del Sol: 365 dies, 5 hores, 48 minuts i 46 segons.

En la pràctica s'ha establit l'Any Civil que té exactament 365 dies, però per a compensar l'error de quasi un quart de dia, cada quatre anys s'afegeix un dia. Com saps aquests anys es denominen bixests.

Calcula al pas d'un segle quina és la diferència exacta entre l'any tròpic i l'any civil.

Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel 5100284

Selecció de problemes: Ferran Ferré Domenech. CEP de Elda

Febrero 95

Calendario Matemático - 23

CENTRES DE PROFESSORS

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 DIVISORES

Calcula todos los divisores de 5400.

2 DÍGITOS

Utilizando una y sólo una vez cada uno de los 10 dígitos, ¿podrías escribir cinco números de dos cifras cuya suma fuese 200?

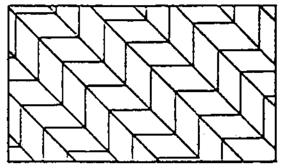
3 ¿ES JUSTO?

Se lanzan dos dados y se calcula la diferencia entre el mayor y el menor. Gana Carmen si el resultado de la resta es 2, 3 o 4 y gana Daniel si es 0, 1 o 5.

¿Es justo el juego?

4 COLOREA EL MAPA 5

¿Son suficientes cuatro colores distintos para colorear cualquier mapa, de manera que nunca haya dos regiones adyacentes del mismo color?. Inténtalo con distintos mapas y, entre otros, hazlo con éste:



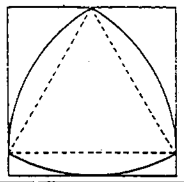
6 DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

Pensador y matemático griego-helenístico. En su obra "Aritmética" trata los problemas de las ecuaciones con solución en los números enteros.

ECUACIONES DIOFÁNTICAS son las que tienen coeficientes enteros y de las que sólo interesan sus soluciones enteras.

7 EL "ROULEAU"

Dibuja "rouleaux" de cinco, siete o más lados curvados.

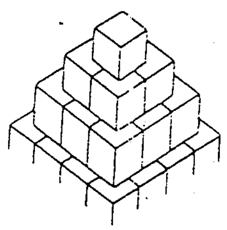


8 POTENCIA

¿Cuál es la última cifra del número

$8^{9999} - 1$?

9 PIRÁMIDE DE CUBOS 10



En la pirámide de diez filas de cubos ¿Cuántos cubos hay en total?

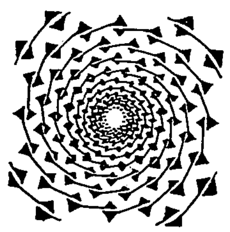
¿Cuántos se podrán ver ya sea total o parcialmente?

11 LA CRIBA DE ERATÓSTENES

Para calcular todos los números primos anteriores a 100, eliminamos los múltiplos de 2,3,5 y 7 distintos de ellos mismos. Los números que quedan entre 2 y 100 serán primos.

¿De qué números hay que eliminar los múltiplos para encontrar los primos anteriores a 10000?

12 LA ESPIRAL DE FRASER



13

Expresa todas las soluciones enteras de $3x+5y=0$.

Demuestra que la ecuación diofántica $3x+9y=0$ no tiene solución.

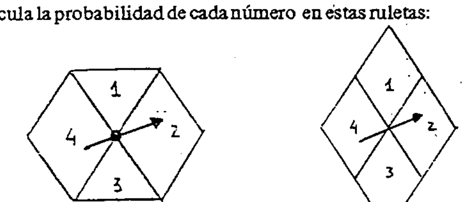
14 PROYECTOR

Un proyector de diapositivas que se encuentra a un metro de la pantalla hace una imagen de 20 cm. x 20 cm.

Representa gráficamente la relación "Distancia a la pantalla - Área de la imagen"

15 RULETAS 16

Calcula la probabilidad de cada número en estas ruletas:

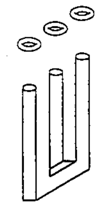


17 NÚMEROS PITAGÓRICOS

Diremos que una terna de números naturales es pitagórica si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo la terna 3, 4 y 5 es pitagórica.

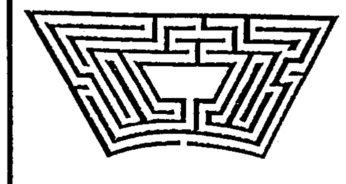
Busca un procedimiento para obtener infinitas ternas pitagóricas

18 BARRAS Y ANILLAS



¿Pasa algo extraño?

19 LABERINTO DE HAMPTON COURT



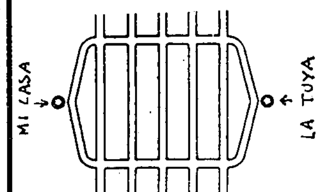
20 EL NÚMERO DE 3 CIFRAS

Toma un número de tres cifras por ejemplo 345. Considera el número 345345 y divídelo por 7, después el resultado lo divides por 11 y por último lo divides por 13. Y, ¡nos aparece de nuevo 345!

¿Funcionará para cualquier número de tres cifras? ¿Por qué?

21 CAMINO A CASA

¿De cuántas maneras distintas puedo ir de mi casa a la tuya?



22 LECHE

Tenemos un recipiente con 8 litros de leche y lo queremos separar en dos partes iguales. Para ello disponemos de otros dos recipientes, también sin graduar, de 3 y 5 litros.

¿Cómo debemos proceder?

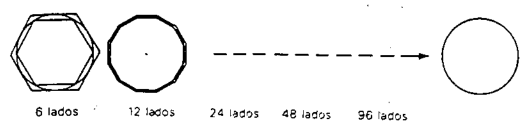
23 FRACCIONES

Expresa en forma de fracción la parte sombreada respecto al total

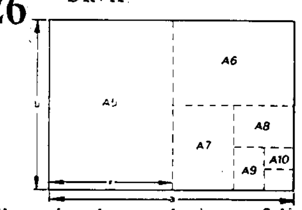
¿Que fracción será en el cuadrado de lado n?

24 CON PALABRAS 25

Expresa lo que parece querer decir este dibujo:



26 DIN A



(El rectángulo grande es un folio DIN A4)

27 AÑO TRÓPICO - AÑO CIVIL 28

Año Trópico es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol: 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos.

En la práctica se ha establecido el Año Civil, que tiene 365 días exactos; pero para compensar el error de casi un cuarto de día se añade un día cada cuatro años con lo que resulta un año -bisiesto- de 366 días.

Calcula al cabo de un siglo cual es la diferencia exacta entre el año trópico y el año civil.

Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel. 5100284

Selección de problemas: Ferran Ferré Domenech. CEP de Elda

Març 95

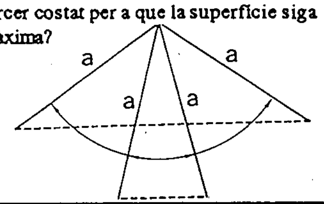
Calendari Matemàtic - 24

CENTRES DE PROFESSORS

Dilluns | Dimarts | Dimecres | Dijous | Divendres | Dissabte | Diumenge

1 ISÒSCELES MÀXIM

Donats els costats iguals d'un triangle isòsceles, quina longitud ha de tindre el tercer costat per a que la superfície siga màxima?



2 CUBS I

$17^3 = 4913$; $4+9+1+3=17$

$18^3 = 5832$; $5+8+3+2=18$

Hi ha altres dos nombres consecutius amb la mateixa propietat?

3 CUBS II

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$
$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$
$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$

Hi ha un altre nombre de tres xifres que també ho compleix. Quin és?

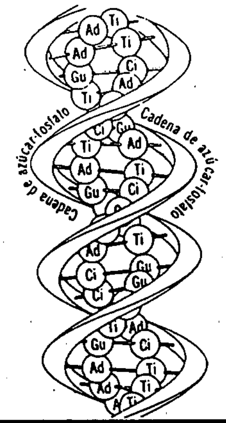
4 LA MOSCA EN EL CAFÈ

En un restaurant un client es trobà amb una mosca en el café. Cridà el cambrer i féu que li portaren una tassa nova. A penes el va tastar, el client cridà irritat: " Aquesta tassa és la mateixa que m'ha portat abans!" Com pogué saber-ho?

5 ÀCID DESOXIRIBONUCLEIC (ADN)

Les molècules que formen l'ADN estan unides per enllaços d'oxigen formant una hèlice doble.

12



6 FRACCIÓ IRREDUCTIBLE

Si en la fracció 16/64 eliminem el 6 en el numerador i en el denominador ens resulta la fracció equivalent 1/4.

Hi ha més fraccions en què funcione aquesta curiosa regla de simplificar?

7 ELS PRIMERS

Si multipliquem tots els nombres primers,

a) amb quina xifra del 0 al 9 acabaria el producte?

b) la segona xifra (la de les desenes) és parell o senar?

8 JUGADORS

Dos jugadors A i B aposten l'un contra l'altre la mateixa quantitat de diners en un joc en el qual el guanyador serà aquell que primer guanye tres partides. Quan A guanya la primera partida el joc s'interromp per causes alienes als jugadors. En el repartiment de l'apostat és natural que A reba més que B. Quant ha de rebre el jugador A?

9 MULTIPLICACIONS I

```
   @ @
x    @
-------
   @ @
```

Amb les xifres 1, 2, 3, 4 i 5 fes aquesta multiplicació

10 MULTIPLICACIONS II

```
   @ @ @
x      @
---------
   @ @ @
```

Ho pots fer amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7?

11 SUMA

```
  CUATRO
  CUATRO
  CUATRO
 +CUATRO
 --------
  VEINTE
```

Quant val cada lletra?

13 NOMBRES PERIÒDICS

Calcula la fracció generatriu de $1,\overline{9}$ i de $99,\overline{9}$.

Què passa amb els decimals que tenen com a única xifra periòdica el 9?

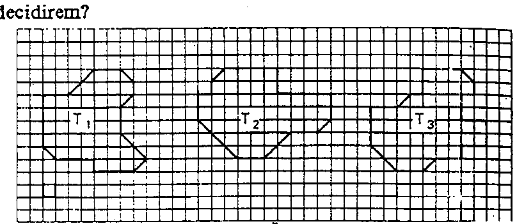
14 COMETES

Dos cometes s'aproximen al Sol, un cada 25 anys i l'altre cada 60 anys.

Havent-se aproximat junts al Sol en 1950, dir la data més pròxima en què tornaran a fer-ho junts.

15 TERRENYS 16

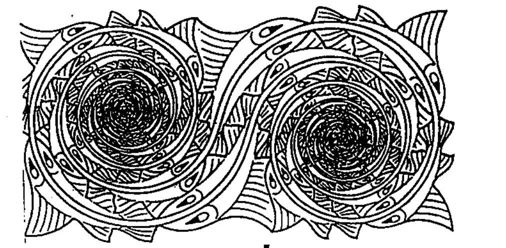
Si volem seleccionar el terreny de major superfície, per quin ens decidirem?



17 EL MAJOR

Quin és el major nombre que es pot escriure amb tres xifres?

18 L'ESPIRAL EQUIANGULAR (M.C. Escher) 19



20 MENJAR

Sabem que 17 óssos mengen tant com 170 mones; 100.000 musaranyes tant com 50 mones, i 14 elefants el mateix que 10 óssos.

Quantes musaranyes seran necessàries per a acabar amb el menjar de 12 elefants?

21 TERÇOS I MITJOS 22

Trobar:

a) Un terç més un mig d'un terç més un mig de 10.

b) Un terç més un mig d'un terç, d'un mig de 10.

c) Un terç més un mig d'un terç d'un mig de 10.

23 TRANSATLÀNTICS

Una línia de transatlàntics té eixides diàries de Nova York a Londres, i la durada de la travessia és de 7 dies. També cada dia ix el corresponent vaixell de Londres cap a Nova York, amb la mateixa durada de viatge. Amb quants vaixells de la línia es creuarà cadascun en la travessia?

24 QUADRATS

Observa:

$25^2 = (2\times3)25 = 625$
$35^2 = (3\times4)25 = 1225$
$45^2 = (4\times5)25 = 2025$
....
$85^2 = (8\times9)25 = 7225$

Per què passa?

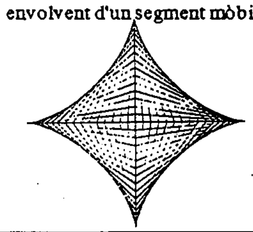
25 PRODUCTE

```
  CUATRO
  x    5
 --------
  VEINTE
```

Calcula el valor de cada lletra per a que siga cert.

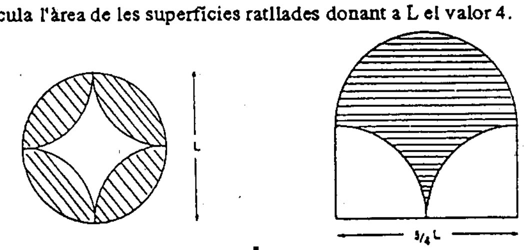
26 ASTROIDE

Dibuix de l'astroide com envolvent d'un segment mòbil.



27 ÀREA 28

Calcula l'àrea de les superfícies ratllades donant a L el valor 4.



29 PARELLES

La suma 2 + 2 és igual al producte 2 x 2.

Pots trobar 3 exemples de parelles de nombres tals que la seua suma i el seu producte siguen iguals?

30 DESPESES

Tenia 83 pessetes i me les he gastat totes menys 17.

Quantes me'n queden?

31 EDATS

L'edat de l'Albert és el doble de la que tindrà Bernat quan Carles siga tan vell com ho és Albert actualment.

Digues quina és l'ordenació per edats d'aquestes tres persones.

Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel. 5100284

Selecció de problemes: Tomás Queralt i Llopis. CEP de Torrent

Marzo 95

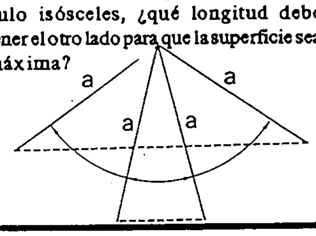
Calendario Matemático - 24

CENTRES DE PROFESSORS

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 ISÓSCELES MÁXIMO

Dados los lados iguales de un triángulo isósceles, ¿qué longitud debe tener el otro lado para que la superficie sea máxima?



2 CUBO I

$17^3 = 4913$; $4+9+1+3 = 17$

$18^3 = 5832$; $5+8+3+2 = 18$

¿Hay otros números consecutivos con la misma propiedad?

3 CUBO II

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$
$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$
$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$

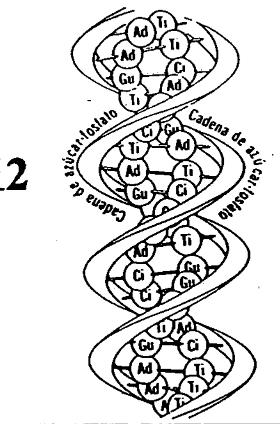
¿Hay otro número de tres cifras que también lo cumpla?, ¿cuál es?

4 LA MOSCA EN EL CAFÉ

En un restaurante un cliente se encuentra una mosca en el café, llama al camarero y le dice que le traiga una taza nueva. Apenas lo probó llamó al camarero gritando: "esta taza es la misma que me trajo antes".
¿Cómo pudo saberlo?

5 ÁCIDO DESOXIRRIBONUCLEICO(DNA) **12**

Las moléculas que forman el DNA están unidas por enlaces de oxígeno formando una hélice doble.



6 FRACCIÓN IRREDUCIBLE

Si en 16/64 eliminamos el 6 en el numerador y en el denominador nos queda 1/4 y ambas fracciones son equivalentes.

¿Hay más fracciones con esta curiosa regla de simplificar?

7 PRIMOS

Si multiplicamos todos los números primos,

a) ¿en qué cifra acabará el producto?

b) ¿la segunda cifra (la de las decenas) es par o impar?

8 JUGADORES

Dos jugadores A y B apuestan uno contra otro la misma cantidad de dinero en un juego en el que el ganador será el que primero gane tres partidas. Cuando A va ganando una partida el juego tiene que interrumpirse por causas imprevisibles. En el reparto de lo apostado es natural que A reciba mayor parte. ¿Pero cuál?

9 MULTIPLICACIÓN I

```
  @ @
X   @
------------
  @ @
```

Resuelve esta multiplicación con las cifras 1,2,3,4 y 5.

10 MULTIPLICACIÓN II

```
 @@@
X  @
----------
 @@@
```

¿Puedes hacer ésta con las cifras 1,2,3,4,5,6 y 7?

11 SUMA

```
 C U A T R O
 C U A T R O
 C U A T R O
+C U A T R O
-----------------
 V E I N T E
```

¿Cuánto vale cada letra?

13 NUMEROS PERIÓDICOS

Calcula la fracción generatriz de $1,\overline{9}$ y de $99,\overline{9}$.

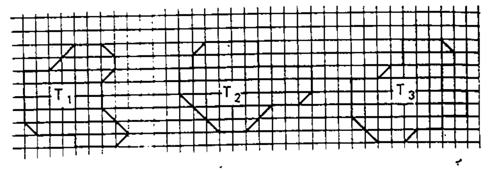
¿Qué ocurre con los decimales cuya única cifra periódica es el 9?

14 COMETAS

Dos cometas se aproximan al sol uno cada 25 años y el otro cada 60 años. Si se aproximaron juntos al Sol en 1959, ¿en qué año volverán a coincidir?

15 TERRENOS 16

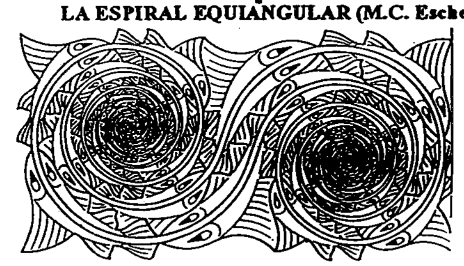
Si queremos seleccionar el terreno de mayor superficie, ¿por cuál nos decidiremos?



17 EL MAYOR

¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con 3 cifras?

18 LA ESPIRAL EQUIANGULAR (M.C. Escher) 19



20 COMIDA

Sabemos que 17 osos comen tanto como 170 monos; 100.000 musarañas tanto como 50 monos, y 14 elefantes lo mismo que 10 osos.

¿Cuántas musarañas se necesitan para acabar con la comida de 12 elefantes?

21 MITADES Y TERCIOS 22

Calcula:

a) Un tercio más un medio de un tercio más un medio de 10.

b) Un tercio más un medio de un tercio, de un medio de 10.

c) Un tercio más un medio de un tercio de un medio de 10.

23 TRANSATLÁNTICO

Una línea transatlántica tiene salidas diarias de Nueva York a Londres y la duración es de 7 días. También cada día sale un barco de Londres hacia Nueva York.
¿Cuántos barcos de la línea se cruzará cada barco durante la travesía?

24 CUADRADOS

Observa:

$25^2 = (2X3)25 = 625$
$35^2 = (3X4)25 = 1225$
$45^2 = (4X5)25 = 2025$
......
$85^2 = (8X9)25 = 7275$

¿Por qué pasa?

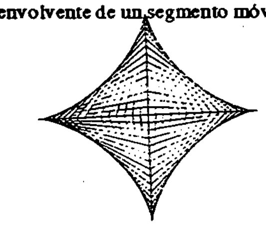
25 PRODUCTO

```
 C U A T R O
X          5
-----------------
 V E I N T E
```

Calcula el valor de cada letra para que sea cierto.

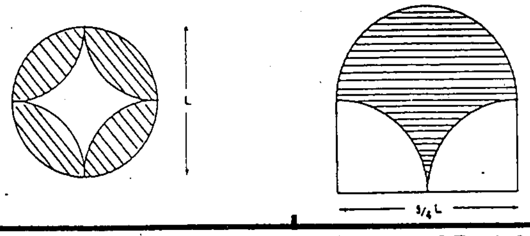
26 ASTROIDE

Trazado de la astroide como envolvente de un segmento móvil.



27 ÁREA 28

Calcula el área de las superficies rayadas dando a L el valor 4.



29 PAREJAS

La suma 2 + 2 es igual al producto 2 X 2.

¿Puedes encontrar 3 ejemplos de parejas de números tales que la suma y el producto sean iguales?

30 GASTO

Tenia 83 pesetas y me las he gastado todas menos 17.

¿Cuántas me quedan?

31 EDADES

La edad de Albert es el doble que la que tendrá Bernat cuando Carlos sea tan viejo como lo es Albert actualmente. Decir cuál es la ordenación por edades de estas tres personas.

Coordina: Pascual Pérez Cuenca. CEP d'Alacant. C/Bahía 2, 03008 Alacant. Tel. 5100284

Selección de problemas: Tomás Queralt i Llopis. CEP de Torrent