En Recuerdo...(*)

Juan B. Aguilar González

Es difícil comprender hoy, las enormes dificultades qu nuestros compañeros encontraban en su labor docente. Destacar que el libro de texto, que usaban, autorizado con fecha 12-4-1994 y premiado con la medalla de oro en la Exposición Científica del Palais Travail de París.

El prólogo del libro comienza así:
"Guiado por la experiencia, consecuencia de la observación en la práctica diaria de la enseñanza, y siguiendo los derroteros trazados a la misma por la moderna Pedagogía, no me olvido de la necesidad de iniciar al niño en el análisis del cálculo, sin el cual difícilmente adquiere el raciocinio..."

Hace 60 años

En una población (Huelva) donde, por su carácter comercial, se daba a la ciencia de los números toda la indiscutible importancia que ella tiene, comprendió la imperiosa necesidad de proporcionar a sus alumnos los conocimientos que, bajo un plan rigurosamente metódico desarrollaran los principios culminantes de la matemática, se hiciesen inmediata aplicación de ellos en las diferencias cuestiones mercantiles y les proporcionasen, a través del poder creador, alegría.

El tema que nos recuerda, con toda añoranza, la labor del Maestro hace más de medio siglo, es el análisis de la raíz cúbica; edad de los alumnos 12-13 (7º y 8º de E.G.B.)

¿Cómo era una jornada normal?

Comenzaba el tema con la definición de raíz cúbica.

"Raíz Cúbica de un número es otro número que tomado tres veces como factor, produce dicho número. Así la raíz cúbica de 8 es 2; la de 27 es 3; la de 125 es 5".

Definición clara, concreta y rigurosas

A continuación, citaba los casos que pueden presentarse en la extracción de la raíz cúbica de los números enteros.

PRIMERO

Que el número del cual se ha de extraer la raíz sea menor que 1000 basta saber de memoria los cubos de los diez primeros números.

Los números que los producen son sus raíces respectivas. Se citaban los cubos y sus respectivas raíces. Tengo que destacar que todo ello implicaba un dominio del lenguaje (causa importante, hoy, del fracaso en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas).

Continuaba su exposición de esta forma: "Del consiguiente, si el número del cual ha de extraerse la raíz cúbica es uno de los diez primeros números, pero si el número no es cubo perfecto su raíz cúbica es la del mayor cubo entero, contenido en él; y la diferencia entre el número y el cubo de su raíz es el residuo de la raíz".

El profesor aconsejaba qué conviene saber para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000.

(*) En recuerdo de la profesora Dª Manuela Rodríguez

A.- Las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades.

B.- Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cúbica entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raíz cúbica del número propuesto.

Después de estas recomendaciones, el Maestro desarrolla una de las más atractivas secuencias didácticas. Habla al alumno de las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades.

¡Se me olvidaba! Se recomienda esta lectura en estas situaciones:

- Un largo viaje en tren.
- Un atardecer.
- Una situación de frustración docente.

Continuamos con la labor del profesor:

"Las partes de que consta el cubo de un número formado por decenas y unidades, son cuatro, a saber:

1.- Cubo de decenas, que es un número de millares.
2.- Triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades que es un número de decenas.
3.- Cubo de unidades, que es un número de unidades.

Es el momento de comprobar.

Tomo el número 45, cuyo cubo es 45 * 45 * 45 = 91125 y por lo mismo la raíz cúbica de 19125 es 45.

91125
- 1ª parte: 4^3 = 4x4x4=64 millares 64000
- 2ª parte: $(3x4^2)x5=(3x16)x5=48x5=240$cent. 24000
- 3ª parte: $3x4x5^2$= 12x25=300 decenas 3000
- 4ª parte: 5^3= 5x5x5= 125 unidades................ 125
- Suma igual a la tercera potencia de 45.......... 125

¿Qué podemos deducir de la comprobación?

1.- Que todo número mayor que 1.000 es igual al cubo de su raíz cúbica, o al cubo de dicha raíz más el residuo, si dicho número no tiene raíz cúbica exacta.

2.- Que restando de un número el cubo de las decenas de su raíz cúbica (1ª parte), en el resto quedan: el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma (2ª parte), el triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades (3ª parte) y el cubo de las unidades (4ª parte); más el residuo, si el número no tiene raíz cúbica exacta.

No era éste el momento de dar normas o reglas para la extracción. Antes de ello, el método exigía dos investigaciones. La primera decía así:

"Problemas ahora el SEGUNDO PRINCIPIO CAPITAL, ésto es, que: Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cúbica entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto".

¿Qué debemos tener en cuenta?
(¡Qué minuciosos eran!)

1.- Que el cubo de un número de docenas da un número de millares, y que, por lo mismo, la raíz cúbica de un número de millares es un número de decenas.

Ejemplo: Tenemos el número 24695. Separando las tres primeras cifras de su derecha, queda a la izquierda el número 24 cuya raíz cúbica es 2.

En efecto, el cubo de 2, que es 8, está contenido en 24 y 2^3 millares, u ocho millares, está en 24 millares y con mayor razón estará contenido en el número propuesto. Luego la raíz cúbica del número propuesto no es menor que la de 9 millares que es 2 docenas:

Si 2 es la raíz cúbica de 24, el cubo de 3 o 3^3 es mayor que 24, luego 3^3 millares o 27 millares, es mayor que 24 millares, y también mayor que el número propuesto, ya que lo que despreciamos de él, 695 unidades no llega a 1 millar: luego la raíz cúbica del número propuesto es menor que la de 27 millares, que es 3 decenas.

Primero hemos visto que la raíz cúbica entera de 24695 no es menor que 2 decenas, y ahora vemos que no llega a 3 decenas. Luego 2 es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto.

El tema de la segunda investigación se centra en las unidades de la raíz.

"Puede suceder que al elevar al cubo la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, de la suma de las dos partes últimas, la 3ª y la 4ª no resulte ninguna centena; que resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, y que resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

En el primer caso, las centenas del resto son exactamente las que proceden de la segunda parte (triplo del cuadrado de las decenas por las unidades las que hemos de considerar como un producto formado por dos factores: 1º triplo del cuadrado de las decenas de la raíz y 2º las unidades de la raíz. Luego partiendo de las centenas del resto por el primer factor que las produce el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz), el cociente será las unidades de la raíz, o el otro factor, siendo la división exacta.

Comprobémoslo:
21^3= 9261; luego $\sqrt[3]{9261}$=21

NÚMERO DADO 9261

1ª parte: 2^3= 2x2x2=8 millares	=	8000
2ª parte: $(3x2^2)x1$=12x1=12 millares	=	1200
3ª parte: $3x2{*}x1^2$=3x2x1= 6 decenas	=	60
4ª parte: 1^3= 1x1x1=1 unidad	=	1
número dado	=	9261
Restando de él la primera parte	=	-8000
Resto igual a la suma de las otras tres últimas partes	=	1.261

Centenas de este resto es 12
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3{*}2^2)$=12
Centenas del resto

Centenas del resto, 12	12, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
0	1, unidades de la raíz

El estudio del segundo como nos lleva a las siguientes conclusiones. Si de la suma de las dos partes últimas resulta un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, o el otro factor; más la división será la inexacta siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas.

La demostración del segundo caso es la que sigue:

73^3= 389017; luego $\sqrt[3]{389017}$= 73

NÚMERO DADO 389017

1ª parte: 7^3=7x7x7= 343 millares	=	343000
2ª parte: (3x7)x3= (3x49)x3=441 centenas ...	=	44100
3ª parte: $3x7x3^3$=21x9= 189 decenas	=	1890
4ª parte: 3^3= 3x3x3x= 27 unidades	=	27
número dado	=	389017
Restando de él la primera parte	=	-343000
Restando igual a la suma de las tres partes últimas	=	46017

Centenas de este resto 46
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $3x7^2$= 147

Centenas del resto, 460	147, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
19	3, unidades de raíz

Analicemos el tercer caso:

Si la suma de las dos partes últimas (3ª y 4ª) resulta un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será mayor que las unidades de la raíz.

Veamos:

39^3=39x39x39= 59319; luego $\sqrt[3]{59319}$= 39

NÚMERO DADO 59319

1ª parte: 3^3=3x3x3= 27 millares...... =	27000
2ª parte: $(3x3^2)$x9= (3x9)x9= 243 centenas =	24300
3ª parte: 3x3x9^2= 9x81= 729 uds.... =	7290
4ª parte: 9^3=9x9x9= 729 uds. .... =	729
número dado .... =	59319
Restando de él la primera parte ... =	-27000
	32319

Centenas del resto 323

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x3^2)$= 27

Centenas del resto, 323	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
053	11, número mayor que las unidades de raíz.

Todo ello sucederá si el número constará de las cuatro partes mencionadas MAS EL RESIDUO DE LA RAÍZ, lo que nos obligará a considerar las siguientes posibilidades:

1ª POSIBILIDAD

Si la suma de las tres partes últimas no resulta ninguna centena dividimos las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará las unidades de la raíz, y la división será exacta.

31^3=	29791
número que añado	+ 3
	29794

Luego $\sqrt[3]{29794}$ = 31; raíz entera; Resto, 3

NÚMERO DADO 29794

1ª parte: 3^3= 3x3x3= 27 millares...... =	27000
2ª parte: $(3x3^2)$x1= 3x9x1= 27 cent. . =	2700
3ª parte: 3x3x1^2= 9 decenas .... =	90
4ª parte: 1^3= 1x1x1= 1 =................ =	1
5ª parte: Resto .... =	3
Numero dado............................ =	29794
Restando de él la primera parte ... =	-27000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas .... =	-2.794

Centenas del resto 27

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x3^2)$= 27

Centenas del resto, 27	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
0	1, unidades de la raíz.

2ª POSIBILIDAD

Si de la suma de las tres partes últimas resulta un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará las unidades de la raíz, y la división será exacta, siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas con el residuo.

Sea el número 62, con el que trataremos de comprobar la segunda cuestión.

62^3	238328
Número que le añado para que no tenga raíz exacta	+5
	238333

luego $\sqrt[3]{23833}$ = 62, raíz entera, resto 5

NÚMERO DADO 238333

1ª parte: 6^3= 6x6x6= 216 millares.... =	216000
2ª parte: $(3x6^2)$x2=(3x36)x2=216 cent. =	720
4ª parte: 2^3= 2x2x2= 8 unidades...... =	8
5ª parte: Resto .... =	5
	238333
Restando de él la primera parte ... =	-216000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas	22333

Centenas del resto, 223

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x6^2)$=108

Centenas del resto, 223	108, triplo del cuadrado de las decenas
007	2, unidades de la raíz.

3ª POSIBILIDAD

Si de la suma de las tres partes últimas resulta un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, partiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será mayor que las unidades de la raíz.

Tratemos de demostrarlo:

39^3=	59319
Número que le añadimos para que no tenga raíz exacta	+32
	59351

Luego $\sqrt[3]{59351}$= 39; raíz entera, resto 32

NUMERO DADO 59351

1ª parte: 3^3= 3x3x3= 27 millares ...... =	27000
2ª parte: $(3x3^2)x9$=27x9=243 cent. ... =	24300
3ª parte: $3x3x9^2$= 9x81= 729 decenas =	7290
4ª parte: 9^3: 9x9x9= 729 unidades ... =	729
5ª parte: Resto .... =	32
Número dado .... =	59351
Restando de él la primera parte ... =	-27000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas .... =	32351

Centenas de este resto 323

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x3^2)$=27

Centenas del resto, 323	27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz
053	11, número mayor que las unidades de la raíz.

Residuo, 26

¿Qué consecuencias sacamos de todo lo expuesto?

Se deduce que, para hallar las cifras de las unidades de la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, se resta de dicho número el cubo de las decenas de su raíz y las centenas del resto se dividen por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz. El cociente entero será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.

De conformidad con lo expuesto pasemos a un caso concreto. Procedamos a obtenerla raíz cúbica entera de 78956.

En primer lugar observemos que, separando las tres primeras cifras de la derecha, la raíz cúbica entera del número de la izquierda, 78 que es 4, es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número 78956. Si de este número restamos el cubo de las decenas de la raíz, 4^3=64 millares, en el resto 14.956 quedan las partes siguientes: triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma; cubo de las unidades, y el resto, si el número 78956 no tiene raíz exacta.

Las centenas del resto 149, proceden del triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma, y también habrá en ellas las que puedan resultar del triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades de la raíz más el cubo de las unidades, de la misma, y si el número no tiene raíz exacta, las centenas del resto serán las que resulten de la suma anterior más el residuo de la raíz. De todos modos, partiendo las centenas del resto, 149, por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3x4^2)$=48 el cociente 3 será las unidades de la raíz, o un número mayor estas unidades.

Ahora bien, si 3 es la cifra de las unidades de la raíz, claro está que el cubo del número formado por las decenas de la raíz y el cociente, 43, estará contenido en el número propuesto. De lo contrario, el cociente 3, será, evidentemente, mayor que las unidades de la raíz; y como el cubo de 43 es 79507, número mayor que el propuesto, infiérese que el cociente 3 es mayor que las unidades de la raíz. Disminuyendo dicho cociente en una unidad, resulta el número 2, y elevando al cubo el número 42, formado por las decenas de la raíz y la nueva cifra, hallaremos el número 74088, menor que el propuesto, de lo que inferimos que 2 es la cifra de las unidades de la raíz.

Regla para extraer la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000

Para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000, se divide dicho número en grupos de a tres cifras, empezando por la derecha; se extrae la raíz cúbica entera del primer grupo de la izquierda, y se tiene la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cubo, y este cubo se resta del primer grupo de la izquierda.

A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan con un punto las dos primeras cifras de la derecha, y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz.

El cociente hallado será la segunda cifra de la raíz, o un número mayor que ella.

Para comprobar si dicho cociente es la segunda cifra de la raíz, se eleva al cubo el número formado por la primera cifra de la raíz y dicho cociente; y si este cubo puede restarse del número formado por los dos primeros grupos de la izquierda del número propuesto, el cociente hallado es la segunda cifra de la raíz; más si dicho cubo es mayor que el número formado por las dos primeras secciones, el cociente se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo.

Halladas la primera y la segunda cifras de la raíz, se resta su cubo del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda del número propuesto.

A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan, con un punto las dos primeras de la derecha y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de las dos primeras cifras de la raíz.

El cociente hallado será la tercera cifra de la raíz, o un número mayor que ella, lo que se comprueba como anteriormente.

Y así continuamos hasta haber bajado todas las secciones, haber hallado la última cifra de la raíz y el residuo correspondiente, si la raíz es inexacta.

78956	42	
- 64		43x43 = 79507
14956		
	149 48	42x42 = 74088
- 74088	05	
	3	
04868		

Aproximación de una raíz inexacta

Si la raíz cúbica de un número entero, no es exacta, después de haber hallado la entera y el residuo correspondiente, se añaden a la derecha del número cuya raíz se extrae, tantos grupos de a tres ceros como notas decimales queramos aproximar a la raíz.

Hecho esto, se continúa la operación como en el caso anterior, y luego se separan, de derecha a izquierda de la raíz hallada, tantas cifras para decimales como grupos de a tres ceros se hayan añadido.

Cómo se extrae la raíz cúbica de un número decimal. Se procede como si fuese entero, añadiendo antes a su derecha los ceros necesarios hasta formar, con las notas decimales que ya existan, tantos grupos de a tres cifras, como notas decimales queremos aproximar la raíz.

Cómo se extrae la raíz cúbica de un quebrado común. Se ve, primero, si numerador y denominador tiene raíz cúbica exacta; en cuyo caso se extraen la raíz del numerador y del denominador, y se divide la primera por la segunda. Si ambos términos no tiene raíz cúbica exacta, se reduce el quebrado a fracción decimal y se extrae la raíz del número decimal equivalente.

Juan B. Aguilar González
C.P. Teodosio (Sevilla).