

Apuntes y problemas de matemática superior

Nevot, A., Poncela, J.M. y Soler, J.

Taurus. Madrid 1994

A lo largo de 537 páginas, los autores de este libro nos presentan un trabajo desglosado en trece capítulos que abarcan cuestiones de álgebra, cálculo, lógica, estadística e investigación operativa.

Cada capítulo lo comienzan con una introducción y unos objetivos, para después ofrecer unos aspectos teóricos reducidos, los imprescindibles para dar paso a los ejercicios resueltos que van minuciosamente detallados y que constituyen el núcleo principal del libro. Después las aplicaciones del capítulo a campos como la física, informática o a los negocios. Le sigue otro apartado de ejercicios propuestos, que como dicen los autores "recogen enunciados de problemas y ejercicios similares a los resueltos en el capítulo con el objeto de facilitar el desarrollo de habilidades y destrezas en las distintas cuestiones aprendidas". Resumen los conceptos básicos y fundamentales de cada capítulo en un glosario y por último viene un cuestionario de autoevaluación en donde cada cuestión viene acompañada por cuatro posibles respuestas.

Los temas que presentan, no vienen agrupados por bloques como suele ser habitual, sino como estiman que pueden ser de mayor utilidad a los lectores del trabajo, por ello lo inician con un capítulo de "Conjuntos, relaciones y estructuras

algebraicas", pasando después a "Funciones, límites y continuidad", "Derivación", "Integración", "Sucesiones y Series", "Funciones de varias variables" y "Ecuaciones diferenciales".

Después retoman el álgebra con el estudio de "Espacios vectoriales, matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales" y con "Aplicaciones lineales y diagonalización de matrices". Como prolongación del álgebra y como pórtico de la investigación operativa dedican un capítulo a "Programación lineal".

En el capítulo dedicado a "Estadística y Probabilidad" hacen una gran síntesis al agrupar aspectos que van desde las medidas de tendencia central hasta el teorema central del límite.

Por último presentan un capítulo dedicado a "Álgebra de computación" y otro referido a las "Redes de Actividades" destacando el método PERT y el CPM.

Los autores de este libro han tenido el acierto de agrupar un núcleo importante de conceptos teóricos y acompañarlos de una gran colección de ejercicios resueltos y aplicaciones a otras ramas, para que el posible usuario pueda tenerlo de libro de consulta en aquellas cuestiones que no domina a la perfección y que sin embargo, le pueden hacer falta en su estudio diario.

Los alumnos de primeros cursos universitarios, que tienen matemáticas como una asignatura aplicada,

pueden encontrar en este manual una gran ayuda, y los profesores pueden encontrar en él un gran auxiliar por la gran cantidad de ejercicios que presenta y que pueden completar su trabajo diario en las aulas.

Andrés Nortes Checa

Más allá de los números

John Allen Paulos

Tusquets Editores (318 pp.)

Barcelona, 1993

La lectura del libro *El hombre anumérico*, me ha animado a sumergirme a un nuevo trabajo de Paulos con el propósito de pasar primero un buen rato con su lectura y después poder transmitir a los demás las ideas de este autor que subtitula su libro "Meditaciones de un matemático".

La introducción de Más allá de los números el autor la comienza diciendo: "Este libro es en parte diccionario, en parte una recopilación de ensayos matemáticos cortos y en parte las reflexiones de un matemático". Y a lo largo de 318 páginas va desgranando los 70 artículos de que consta, de temáticas o Folklore matemático o Humor y matemáticas, junto a otros más característicos como El teorema de Pitágoras o Los números primos o Programación lineal. Para indicarnos a quien va dirigido este libro el autor nos lo indica al final de su introducción

diciendo: "Este libro está pues escrito para los matemáticos que no saben que lo son (entre otros), que toda la vida han pensado matemáticamente sin haberlo notado".

En el primer ensayo el autor pone en antecedentes al lector de lo que va a ser el contenido del libro ya que bajo el título *Al estilo matemático* intenta decirnos que la matemática proporciona un modo de entender el mundo, pudiendo ayudarnos en nuestro quehacer diario. Para ello toca temas tan corrientes como las multas de tráfico o los juegos con palabras.

Álgebra, Áreas y volúmenes, Cálculo y rutina o Cintas de Möbius y orientabilidad, son títulos de otros tantos ensayos en donde el autor al hilo de pequeñas anécdotas nos introduce en aspectos generales de estas partes de las matemáticas y el saber fórmulas de las áreas y los volúmenes no siempre garantiza un sentido intuitivo de la extensión y la voluminosidad.

El autor invita a coger una lata de atún y despegarle la etiqueta que está impresa por un lado y blanca por otro, dando medio giro a la banda de papel y pegando sus dos extremos procurando que la cara blanca encaje con la cara exterior siempre se obtiene la *cinta de Möbius* que tiene una sola cara, no pudiendo nadie obtener los 100 millones de pesetas por pintar una cara de la cinta de Möbius de azul y otra de rojo.

Si importante es poseer información y datos para poder arropar nues-

tras argumentaciones, no menos importante es tener ideas para pensar, siendo más importante una buena formación y una amplia cultura general. Esto es lo que nos dice Paulos en "Clasificar y pensar", pero también nos habla de las "Coincidencias" para introducir al lector en la probabilidad o de los Mapas de cuatro colores y los siete puentes de Königsberg, cuando habla de "Combinatoria, grafos y mapas".

En otros artículos el autor se dedica a ensalzar y comentar los trabajos de otros colegas, como en "La conciencia humana y su naturaleza fractal".

En *Conjuntos infinitos* presenta un caso de la recepción de un hotel en que no hay habitaciones libres porque son finitas. Sin embargo, si el hotel estuviera lleno pero el número de habitaciones fuera infinito se podría hacer algo.

La estadística la describe el autor como una rama de la matemática que "es puro sentido común formalizado y pensamiento sencillo cuantificado", tras introducirse, utilizando ejemplos de la vida misma, en un artículo que titula *Correlación, intervalos y tests*.

Al crecimiento exponencial, a los cuantificadores en lógica, al número "e" y a las ecuaciones diferenciales le dedica sendos ensayos. Aporta dos teoremas estadísticos: la ley de los grandes números y el teorema central del límite, como aplicación de la estadística a la vida cotidiana.

No podía dejar de lado Paulos el tocar *Ética y matemáticas* presentando el dilema siguiente: "Supongamos que dos hombres sospechosos de un delito importante son detenidos mientras cometen una falta menor. Son separados e interrogados, y a cada uno de ellos se le da la posibilidad de confesar el delito importante, implicando con ello a su cómplice, o permanecer callado. Si ambos permanecen en silencio, les caerá un año de prisión a cada uno. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa será recompensado con la libertad, mientras que al otro le caerá una condena de cinco años. Si ambos confiesan, pueden esperar que les caigan tres años de cárcel. La opción cooperativa es permanecer callado, mientras que la individualista es confesar". El dilema consiste en saber que es lo mejor para ambos en conjunto.

No podía olvidar el autor a Fermat y su último teorema que tanto ha dado que hablar en los pasados meses. De la filosofía de la matemática de la mano de Kant pasa al folklore matemático, en donde destaca las abundantes enemistades personales rencorosas entre matemáticos y anécdotas de figuras carismáticas o los episodios de Arquímedes.

A la fórmula de la ecuación de segundo grado, a los fractales, a las funciones, a la geometría analítica y a la geometría no euclídea dedica Paulos sendos artículos. De los *fractales* indica el ejemplo propuesto por Benoît Mandelbrot, descubridor de la geometría fractal, sobre la estimación de la longitud de la Costa

Este de Estados Unidos que desde un satélite puede ser 4500 km y si se basa en mapas detallados puede llegar a 13500 km, dando como definición "es una curva o una superficie que presenta una complejidad mayor, aunque parecida, a medida que lo contemplamos más de cerca", llegando a decir que "la dificultad de satélite puede ser 4500 km y si se basa en mapas detallados puede llegar a 13500 km, dando como definición "es una curva o una superficie que presenta una complejidad mayor, aunque parecida, a medida que lo contemplamos más de cerca", llegando a decir que "la dificultad de una disciplina se podría tomar como un fractal, de modo que los más capaces pudieran superar con grandes zancadas cognitivas las pequeñas dificultades que otros, menos dotados, han de escalar pacientemente".

A Gödel y su teorema, al álgebra abstracta, al humor y matemáticas, a imposibilidades, a inducción matemática, a los límites y a matrices y vectores dedica Paulos sendos trabajos. Chistes pueriles son típicos de los matemáticos que siguen al pié de la letra los enunciados y no su aspecto convencional. Tanto las matemáticas como el humor dice Paulos que "son formas de juego intelectual".

Dos nuevos artículos titulados "Media, mediana y moda" y "Métodos de simulación de Montecarlo" se suman a los tratados en la rama de Estadística, aclarando que no hay que olvidar que existe una clara diferencia entre el modelo o simulación

de las demostraciones que hacían los matemáticos antiguamente que las terminaban con "como queríamos demostrar".

Al rectángulo áureo y a las sucesiones de Fibonacci, a la recurrencia, a la regla del producto (si se puede realizar tal o cual acción o hacer una... los matemáticos antiguamente que las terminaban con "como queríamos demostrar".

Al rectángulo áureo y a las sucesiones de Fibonacci, a la recurrencia, a la regla del producto (si se puede realizar tal o cual acción o hacer una elección en M modos diferentes y luego se puede realizar otra acción u otra elección en N modos distintos, entonces se pueden realizar en $M \times N$ modos distintos), a las series convergentes y divergentes, a la simetría e invariancia como conceptos complementarios, y a los sistemas de votación, que a veces benefician a unos políticos más que a otros en función del sistema electoral utilizado.

No podía faltar un artículo dedicado al Teorema de Pitágoras y otro dedicado a la Teoría de Juegos que trata de determinar las estrategias de los jugadores, sus costes y ganancias, y las situaciones de equilibrio. Nos introduce también en la teoría del caos que versa sobre el comportamiento de sistemas no lineales arbitrarios.

Del triángulo de Pascal, de Trigonometría, de Zenón y el movimiento, así como de Topología y tiempo, tienen cabida en el trabajo de Paulos.

Termina con un apéndice en el que presenta la lista cronológica de *los cuarenta principales* entre los que se encuentran Platón, Pitágoras, Euclides junto con Lagrange, Laplace o Hilbert, por citar algunos de los más conocidos por el lector.

Unas "lecturas recomendadas" que presenta la lista cronológica de *los cuarenta principales* entre los que se encuentran Platón, Pitágoras, Euclides junto con Lagrange, Laplace o Hilbert, por citar algunos de los más conocidos por el lector.

Unas "lecturas recomendadas" nos ofrece la oportunidad de poder acudir a una bibliografía vasta y actualizada en donde ampliar aquellos aspectos que de forma desenfadada, pero no exenta de rigor, desarrolla Paulos en su libro.

En definitiva se trata de un libro ameno, como su anterior de *El hombre anumérico*, que a buen seguro tendrá al menos la misma acogida.

Es de destacar la labor del autor en la popularización de las matemáticas -tema en el que también está inmerso el que esto escribe- y muestra de ello son sus colaboraciones en "The New York Times" y "Newsweek".

El trabajo de Paulos pretende ser un "antídoto eficaz contra la fobia matemática" y a buen seguro que lo consigue.

Andrés Nortés Checa
Universidad de Murcia