Polígonos regulares generalizados

P. Familiar Ramos

En este trabajo se recuerda que las raíces enésimas de un complejo descansan en los vértices de un polígono regular de *n* lados, y de la forma de proceder al unir estos vértices para formar un polígono ordinario o un polígono en forma de estrella.

Es conocido que las *n* raíces *n*-ésimas del complejo

$$r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{\theta i} = re^{\theta i + 2\pi k i}\,(k \in Z)$$

están dadas por

$$(re^{\theta i + 2\pi k i})^{1/n} = r^{1/n}\,e^{\frac{\theta i + 2\pi k i}{n}} = e^{1/n}\,(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2\pi k}{n})$$

al tomar k los valores $0,1,2,\ldots,n-1$.

Ahora bien, estas n raíces tienen el mismo módulo, $r^{1/n}$, de manera que están sobre una circunferencia con centro en (0,0) y radio R= $r^{1/n}$. Como además dos argumentos consecutivos difieren de

$$\frac{\theta + 2\pi(p+1)}{n} - \frac{\theta + 2\pi p}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

resulta que estas raíces n-ésimas dividen a la circunferencia en n partes iguales, y en consecuencia *coinciden* con los vértices de un *polígono regular de n lados*.

Para hallar, por ejemplo, las raíces quintas de $1+i$, evaluamos

$$(-1 + i)^{1/5} = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4})]^{1/5} = 2^{1/10}\,(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{5}),$$

y cuando k toma los valores del conjunto {0,1,2,3,4}, obtenemos las cinco raíces

$$z_1 = 2^{1/10}\,(\cos\frac{3\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{20})$$

$$z_2 = 2^{1/10}\,(-\mathrm{sen}\frac{\pi}{20} + i\cos\frac{\pi}{20})$$

$$z_3 = 2^{1/10}\,(-\cos\frac{\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20})$$

$$z_4 = 2^{1/10}\,(-\mathrm{sen}\frac{3\pi}{20} + i\cos\frac{3\pi}{20})$$

$$z_5 = 2^{-2/5}\,(1 - i),$$

que pueden verse representadas en el diagrama de Argand de la FIGURA 1. Estas raíces ocupan los vértices de un pentágono regular inscrito el la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y radio R=$2^{1/10}$.

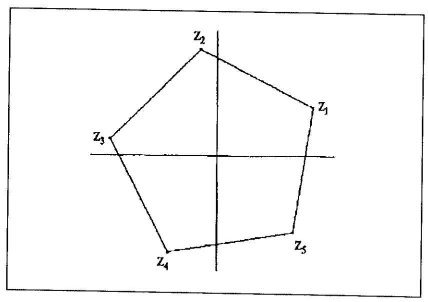


Figura 1

El pentágono regular {5} lo hemos obtenido uniendo naturalmente sus vértices correlativamente de 1-en-1. ¿Qué ocurre si los unimos de 2-en-2? En este caso obtenemos el pentágono estrellado + Figura 2+, llamado también *pentagrama místico*, el mismo que los babilonios y pitagóricos usaban como símbolo de significado especial.

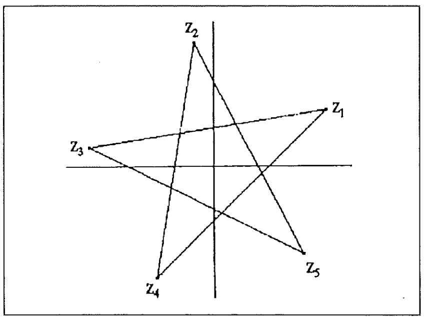


Figura 2

En general, si unimos los n vértices de un n-gono regular correlativamente de d-en-d, después de dar algunas vueltas alrededor del polígono, pasaremos por todos los vértices y llegaremos al punto de partida sólo en determinadas condiciones. En los casos en que esto ocurra, el polígono *cruzado* así obtenido es el *polígono regular estrellado* $\{n/d\}$. Si d=1, no hay estrella, y tenemos el polígono regular ordinario $\{n\}$[1]. Si d>1, los lados se cruzan unos a otros, formando la estrella; pero los puntos donde se cruzan no cuentan como vértices. Éstos son los llamados *puntos dobles* del polígono, y tiene exactamente $n(d+1)$ puntos. Como al comenzar en un vértice se deben dar d vueltas alrededor del polígono para trazar los n lados y volver al punto de partida, a este denominador d se le llama la *densidad* del polígono. El pentagrama místico corresponde al polígono {5/2} de densidad 2; análogamente, los polígonos {13} y {19/7} tienen densidad 1 y 7 respectivamente.

Ahora bien, ¿qué relación se debe cumplir entre los números naturales n y d para que pueda formarse el polígono estrellado de n vértices unidos de d-en-d? Si la densidad d no es primo con n, y δ es su máximo común divisor, entonces al unir los vértices de d-en-d se llega al punto de partida recorriendo la circunferencia d/δ veces, obteniendo así un polígono estrellado de n/δ lados. Por tanto, para que el polígono tenga n lados es necesario que +=1. Esto nos indica la sencilla relación que debe cumplirse: la densidad d del polígono debe ser primo con n. Pero como el mismo polígono se obtiene uniendo los vértices de d-en-d que de n-d-en-n-d, es decir $\{n/d\}$+$\{n/(n-d)\}$, basta considerar solamente los casos en que la densidad d sea un entero positivo primo con n y menor que $n/2$. Esta observación establece que hay un polígono regular generalizado $\{q\}$ -con o sin estrella- que corresponde a cada racional q>2. También indica que el número de polígonos regulares de n lados es el de números primos con n menores que $n/2$; por consiguiente es la mitad del indicador de Euler de n, es decir

$$\frac{1}{2}\varphi(n) = \frac{1}{2}\, n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \qquad (n > 2)$$

donde $n = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \dots p_n^{\alpha r}$

es la descomposición de n en factores primos.

Esta fórmula nos hace capaces de formar la tabla siguiente, mostrando una relación de todos los polígonos regulares que no superan los 22 lados. *(Ver pág. siguiente)*

[1] Según H.S.M. Coxeter, la notación $\{n/d\}$ fue introducida por el matemático suizo Ludwig Schläfli (1814-1895) y se justifica a que se presentan fórmulas que se cumplen igualmente para $\{q\}$ cuando q es entero o cuando es una fracción.

n	$1/2\varphi(n)$	descripción del polígono	n	$1/2\varphi(n)$	descripción del polígono
3	1	{3}	13	6	{13},{13/2},{13/3}, {13/4},{13/5},{13/6}
4	1	{4}	14	3	{14},{14/3},{14/5}
5	2	{5},{5/2}	15	4	{15},{15/2},[15/4}, {15/7}
6	1	{6}	16	4	{16},{16/3},{16/5} {16/7}
7	3	{7},{7/2},{7/3}	17	8	{17},{17/2},{17/3}, {17/4},{17/5},{17/6}, {17/7},{17/8}
8	2	{8},{8/3}	18	3	{18},{18/5},{18/7}
9	3	{9},{9/2},{9/4}	19	9	{19},{19/2},{19/3}, {19/4},{19/5},{19/6}, {19/7},{19/8},{19/9}
10	2	{10},{10/3}	20	4	{20},{20/3},{20/7}, {20/9}
11	5	{11},{11/2},{11/3}, {11/4},{11/5}	21	6	{21},{21/2},{21/4}, {21/5},{21/8},{21/10}
12	2	{12},{12/5}	22	5	{22},{22/3},{22/5}, {22/7},{22/9}

Presentamos ahora un listado de ordenador, escrito en lenguaje BASIC, y una función predefinida para el programa *DERIVE*, que tienen en común generar polígonos regulares de cualquier número de lados.

BASIC (QBasic del MS DOS 5.0)

```
CLS : SCREEN 12
   LOCATE 2, 15: PRINT «************************************»
   LOCATE 3, 15: PRINT «**   ESTE PROGRAMA DIBUJA UN        **»
   LOCATE 4, 15: PRINT «**   POLIGONO REGULAR DE n LADOS   **»
   LOCATE 5, 15: PRINT «************************************»
   LOCATE 10, 15: INPUT «¿ Número de lados del polígono «; n
   LOCATE 12, 15: INPUT «¿ Densidad del polígono «; d
   LOCATE 14, 15: INPUT «¿ Radio de la circunferencia circunscrita (0<R<240) «; R
```

```
LOCATE 16, 15: INPUT «¿ Angulo de giro (en grados) «; B
CLS : PI = 3.141592653#: C = PI * B / 180
PSET (320 + R * COS(C), 240 + R * SIN(C))
  FOR k = 0 TO n
    A = 2 * k * PI * d / n
    X = 320 + R * COS(A + C): Y = 240 + R * SIN(A + C)
    LINE +(X, Y), 14
  NEXT k
END
```

Introducido este listado en el editor de QBasic, se ejecuta con la tecla de función F5, y seguidamente se introduce el número de lados del polígono, la densidad, el radio de la circunferencia circunscrita (para R=230 queda bien) y el ángulo de giro respecto de la horizontal.

DERIVE (versión 2.57)

```
POLIGONO_REGULAR(n,d):=
VECTOR([cos(2*pi*d*k/n),
sin(2*pi*d*k/n)],k,0,n)
```

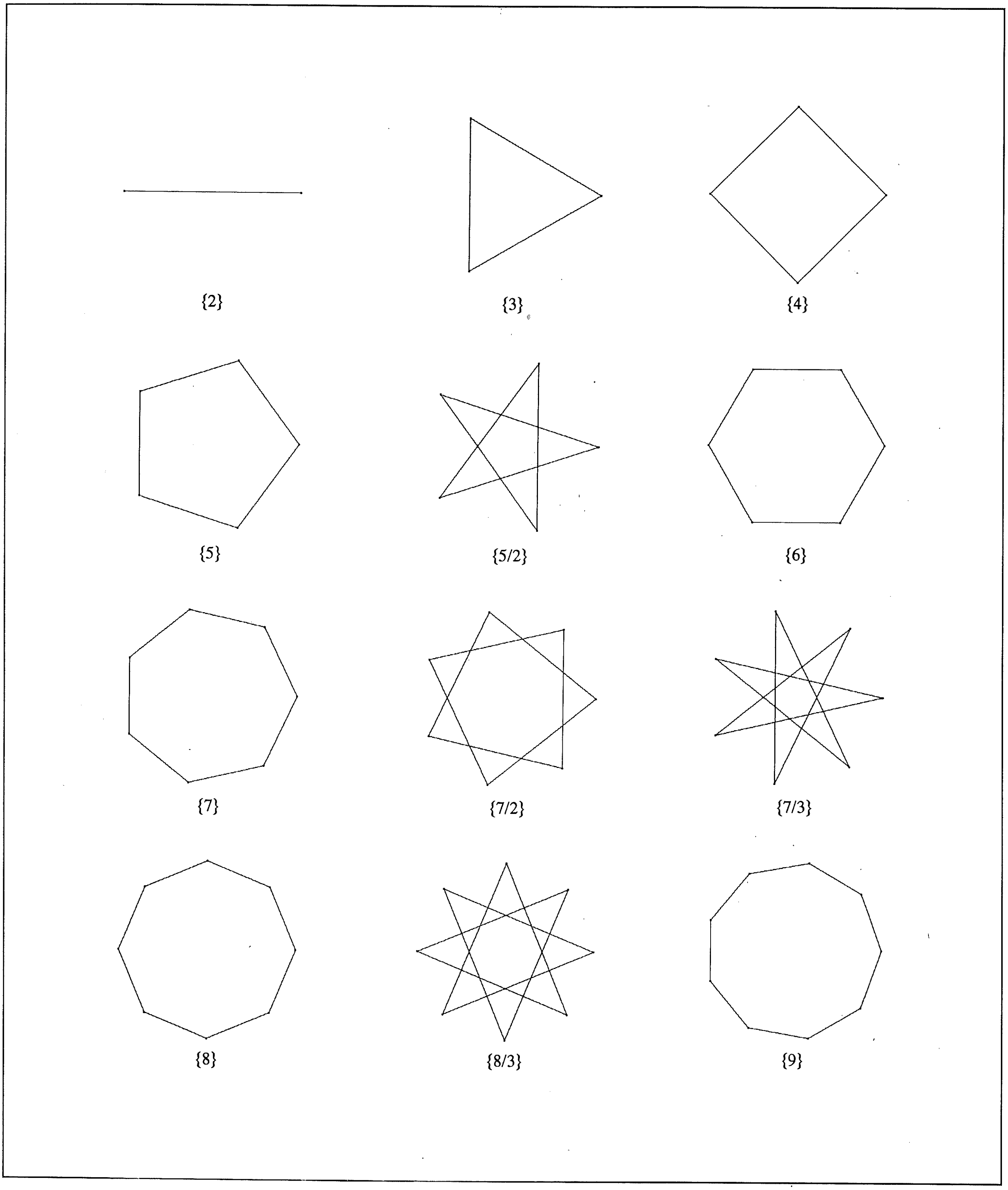
Simplificada la función POLIGONO_REGULAR(n_0,d_0) con el comando Simplify, se tiene que activar el modo que conecta dos o más puntos del plano con segmentos de recta (Plot Overlay Options State Rectangular Connected), y opcionalmente se esconden los ejes rectangulares, poniendo el color *c* de fondo –si no ha sido modificado, por defecto es el color negro: *c*=0– (Options Color Plot Tab c Tab c). Con esto DERIVE está preparado para representar los polígonos, y una vez dibujado, podemos ampliar la escala (tecla F9, o con mejor precisión, Scale).

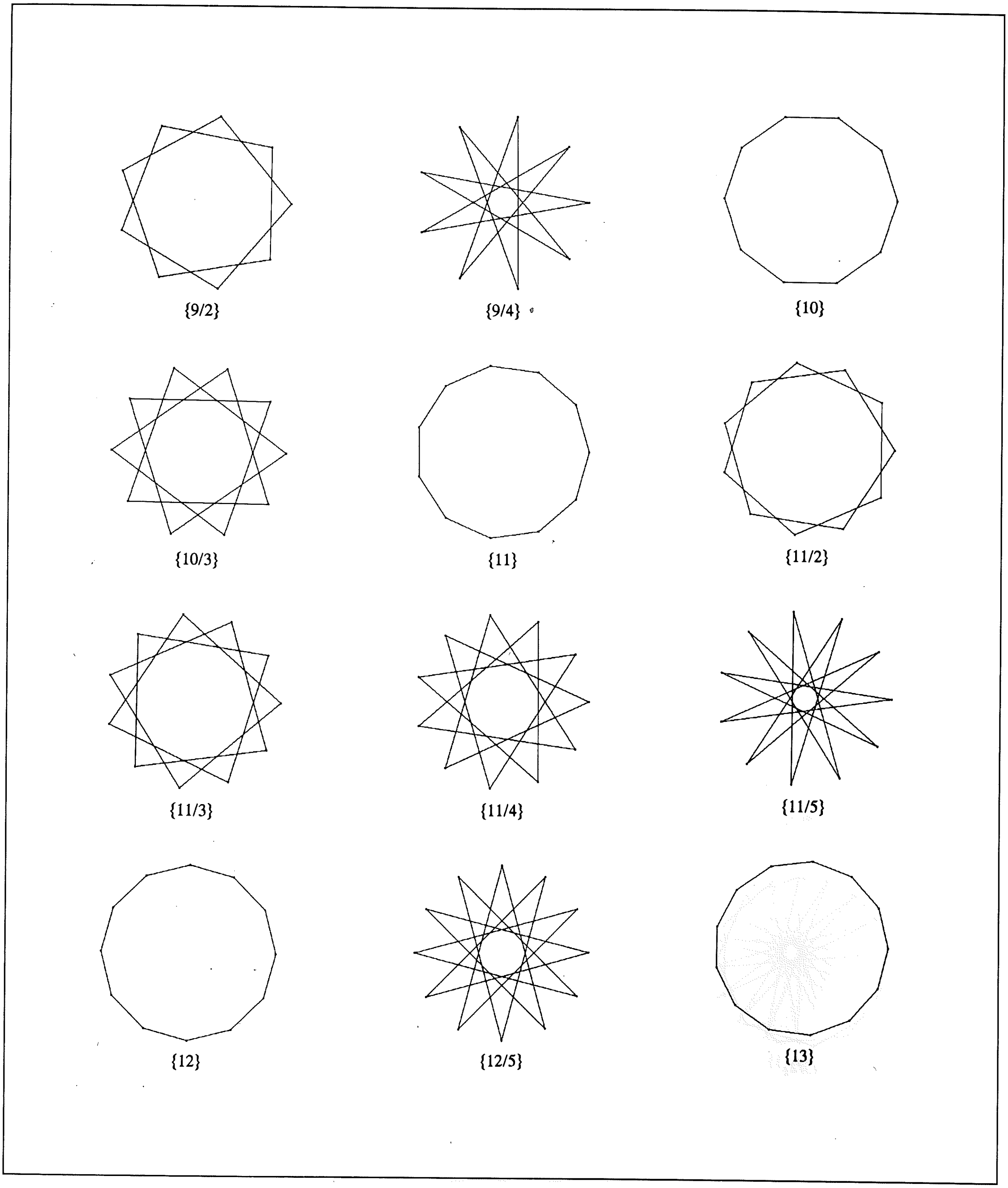
Por último dedicamos un anexo gráfico, que en realidad es un pequeño catálogo ilustrativo de los polígonos regulares que han sido evaluados en la tabla anterior, incluyendo además al *dígono* {2}, que tiene la peculiaridad de que sus dos lados coinciden.

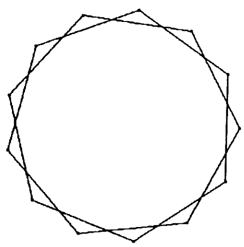
Para la elaboración de estos polígonos se ha instalado la utilidad captura de pantalla *grabber* incluido en WordPerfect 5.1 para DOS, y se han capturado las pantallas que generaba la función POLIGONO_REGULAR que hemos definido en el programa *DERIVE*. El ordenador utilizado es un «excelente» XT a 8MHz, con procesador 8086 y monitor de 12 pulgadas.

Respecto a la bibliografía, se ha consultado el apartado «*Polígonos en forma de estrella*» -páginas 62 y 63- del libro **Fundamentos de Geometría** de H. S. M. Coxeter (Limusa. México, 1984), y el término **POLÍGONO, NA** de la Enciclopedia Universal Ilustrada Espasa-Calpe (Tomo XLV de la edición de 1921. Madrid).

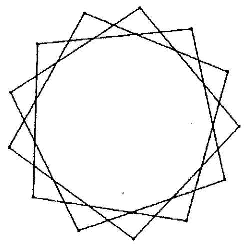
P. Familiar Ramos
Seminario de Matemáticas
I.B. Ntra. Sra. de la Cueva Santa
SEGORBE (Castellón)


{2}
{3}
{4}
{5}
{5/2}
{6}
{7}
{7/2}
{7/3}
{8}
{8/3}
{9}

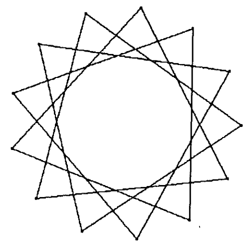

{9/2}
{9/4}
{10}
{10/3}
{11}
{11/2}
{11/3}
{11/4}
{11/5}
{12}
{12/5}
{13}



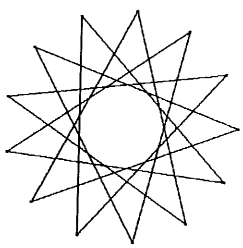
{13/2}



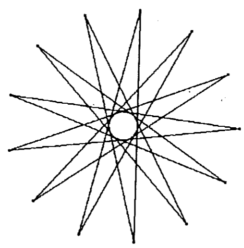
{13/3}



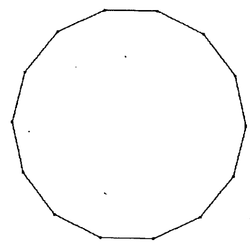
{13/4}



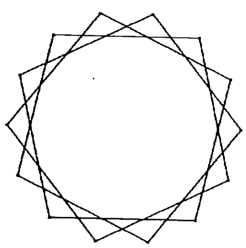
{13/5}



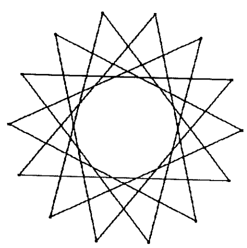
{13/6}



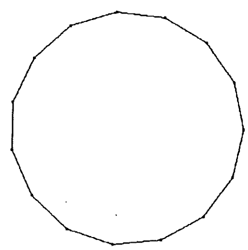
{14}



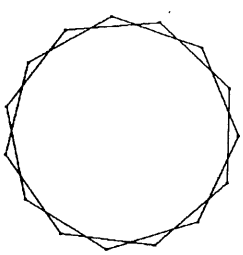
{14/3}



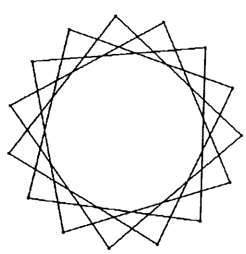
{14/5}



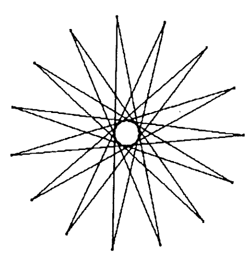
{15}



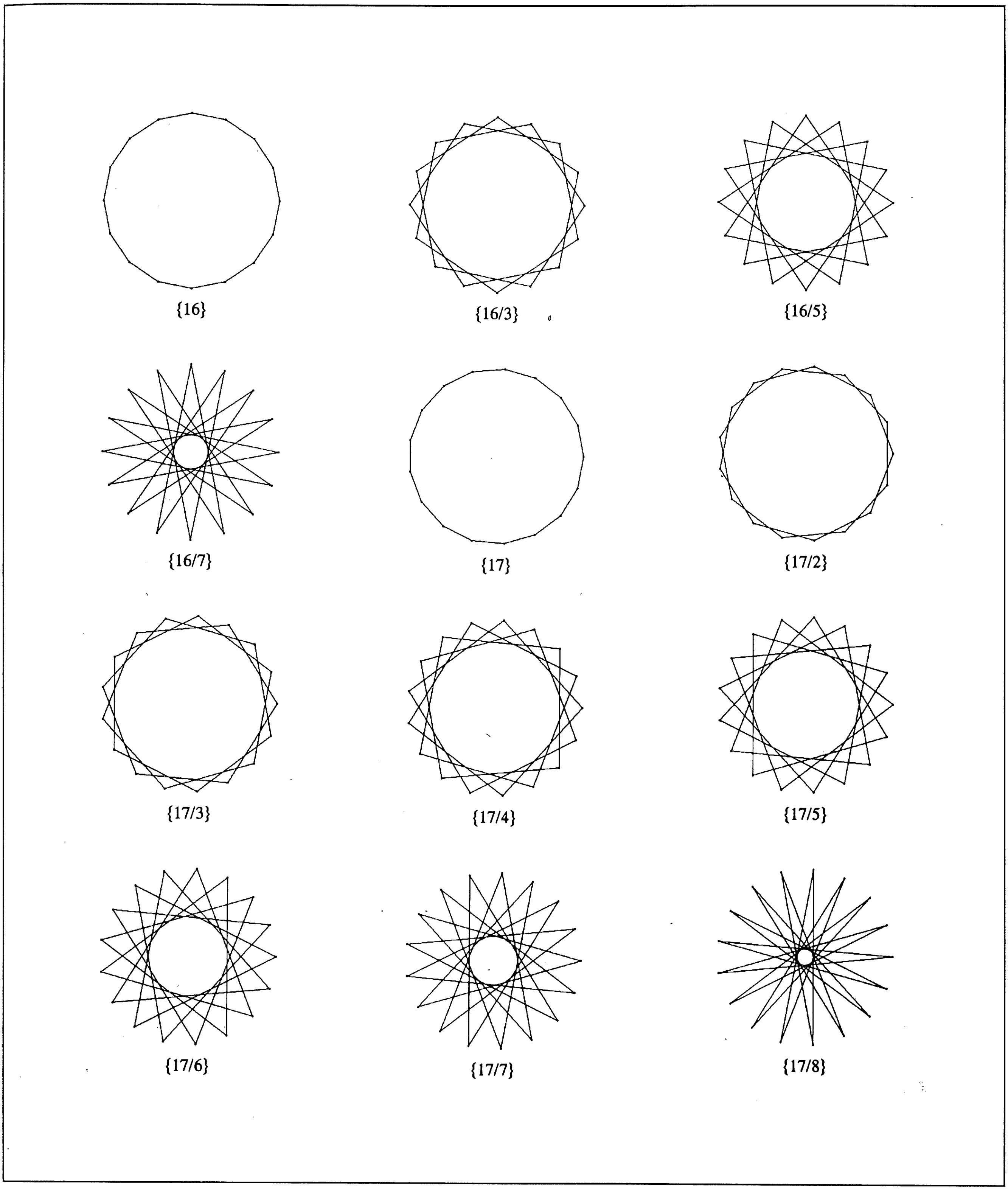
{15/2}

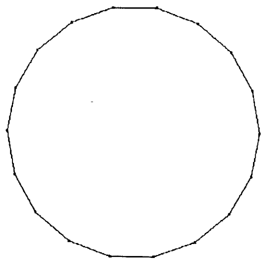


{15/4}

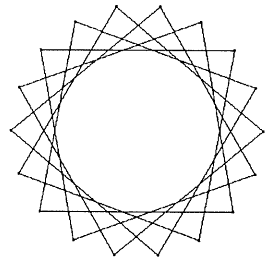


{15/7}

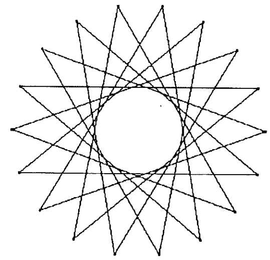

{16}
{16/3}
{16/5}
{16/7}
{17}
{17/2}
{17/3}
{17/4}
{17/5}
{17/6}
{17/7}
{17/8}



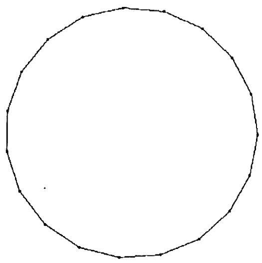
{18}



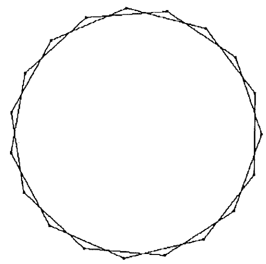
{18/5}



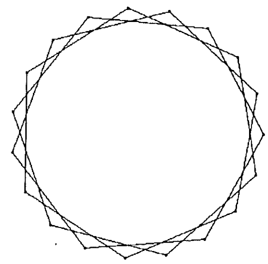
{18/7}



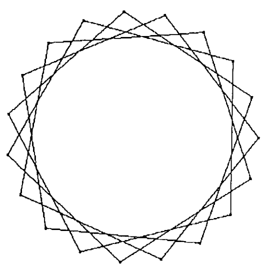
{19}



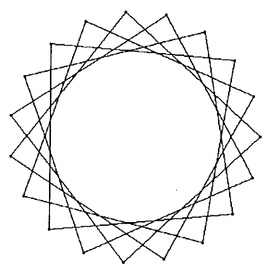
{19/2}



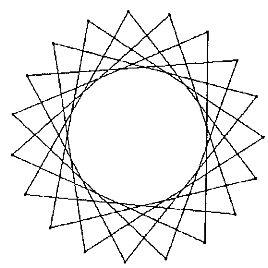
{19/3}



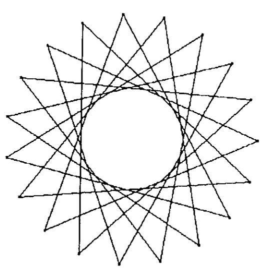
{19/4}



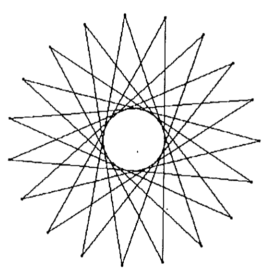
{19/5}



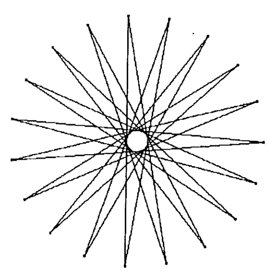
{19/6}



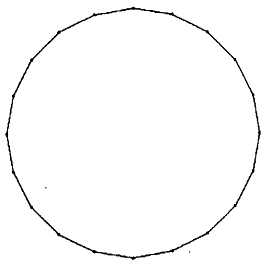
{19/7}

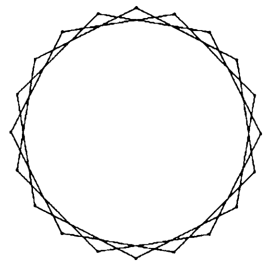


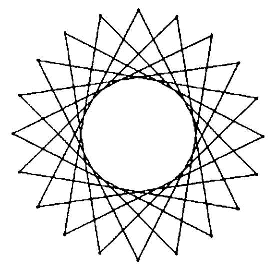
{19/8}

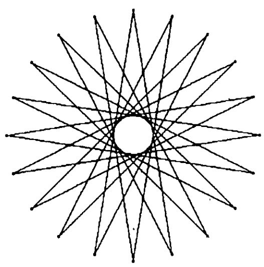


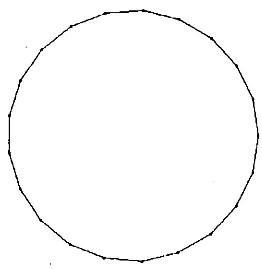
{19/9}

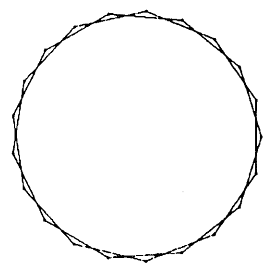

{20}

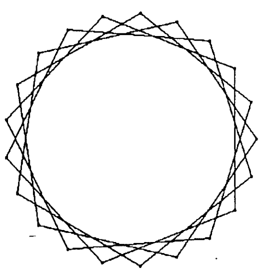

{20/3}

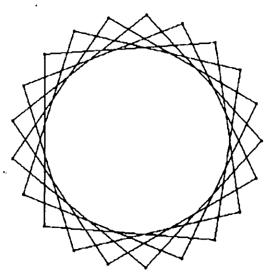

{20/7}

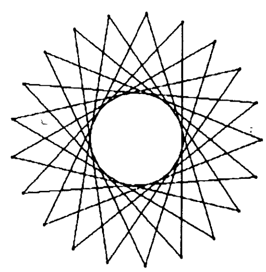

{20/9}

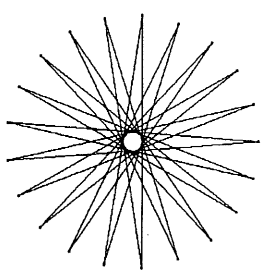

{21}

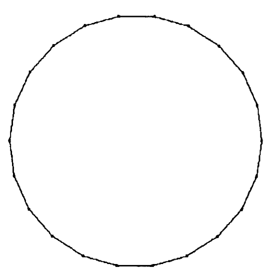

{21/2}

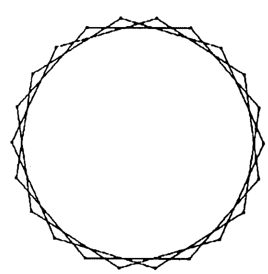

{21/4}

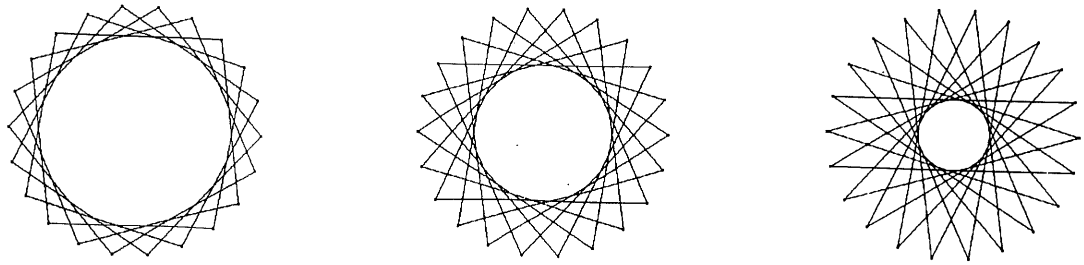

{21/5}


{21/8}


{21/10}


{22}


{22/3}



{22/5} {22/7} {22/9}


¡ATENCIÓN
SUSCRIPTORES!
Aquellos que tienen domiciliación bancaria,
y por motivos de reestructuración
en la base de datos para su mejora,
por favor envíen a la mayor brevedad posible
los siguientes datos:
1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS)