Resolución gráfica de algunas inecuaciones con una incógnita cuando sólo se saben representar funciones polinómicas de primer y de segundo grado

Antonio Varo Gómez de la Torre

En este trabajo se describe un método gráfico (casi algorítmico) de resolución de inecuaciones con una incógnita, para alumnos de 1º de BUP.

El método tiene el siguiente ***fundamento teórico***:

Sea la inecuación f (x) > 0

Sea la inecuación f (x) < 0

Supongamos que la gráfica de la función y = f (x) es la de la figura 1:

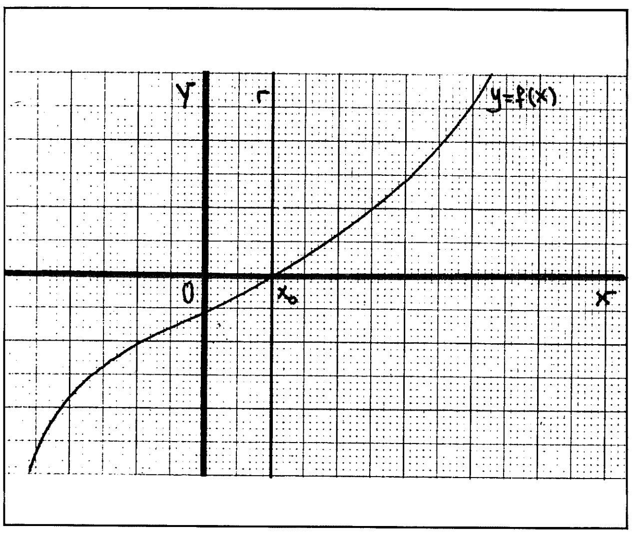
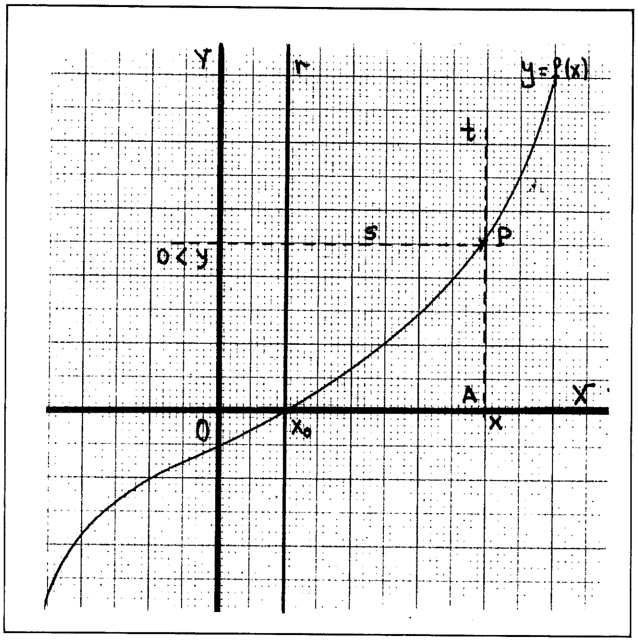


Figura 1

A la derecha de la recta r (perpendicular al eje de abcisas por el punto x_0 en el que f (x_0) = 0) la gráfica de f queda "por encima" del eje de abcisas. A la izquierda de r la gráfica de f queda "por debajo" del eje de abcisas.

Si x es un nº del dominio de f, la imagen, y, de x la encontramos trazando la recta t, perpendicular al eje 0X por el punto A (x, 0); desde el punto P, de corte de esa recta con la gráfica de f, trazamos la recta s, perpendicular al eje de ordenadas: la abcisa, y, del punto de corte de s con el eje 0Y será la imagen de x. (Ver figura 2).

Según esto, siempre que podamos dibujar la gráfica de y=f(x) podremos resolver gráficamente las inecuaciones f(x)<0 o f(x)>0. Pero no sólo eso, sino que aún desconociendo la gráfica de f, si f(x) puede descomponerse en factores polinómicos de primer o de segundo grado, o f(x) es un cociente con numerador y denominador descomponibles en factores polinómicos de primer o de segundo grado, podremos resolver gráficamente la inecuación f(x)>0 (o f(x)<0) mediante la observación conjunta de las gráficas y estudio de los signos de cada uno de los factores que componen a f(x).



si x está a la derecha de x_0 (es decir, si $x>x_0$), su imagen, y, es positiva:

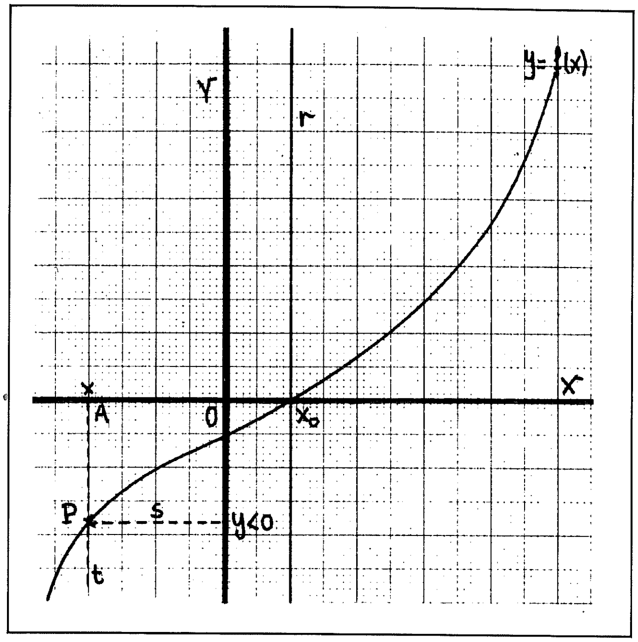
$$\text{si } x>x_0 \rightarrow y > 0$$

como y=f(x)

$$\text{si } x>x_0 \rightarrow f(x)>0$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $f(x)>0$ estará formado por los números $x \,/\, x>x_0$.

En otras palabras, y en general, los valores de x para los cuales la gráfica de la función y=f(x) queda "por encima" del eje 0X, son las soluciones de la inecuación $f(x)>0$.



si x está a la izquierda de x_0 (es decir, si $x<x_0$), su imagen, y, es negativa:

$$\text{si } x<x_0 \rightarrow y < 0$$

como y=f(x)

$$\text{si } x<x_0 \rightarrow f(x)<0$$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $f(x)<0$ estará formado por los números $x \,/\, x<x_0$.

En otras palabras, y en general, los valores de x para los cuales la gráfica de la función y=f(x) queda "por debajo" del eje 0X, son las soluciones de la inecuación $f(x)<0$.

Figura 2

Veamos cómo:

Descripción del método

Una vez descompuesta f(x), o en su caso su numerador y su denominador, en factores lineales y/o parabólicos, dibujamos la gráfica de cada uno de ellos en un mismo sistema de referencia. Seguidamente trazamos rectas perpendiculares al eje 0X por cada uno de los puntos de corte de cada una de las gráficas con el eje 0X. Esas rectas serán nuestras "fronteras", que dividen el plano en regiones disjuntas. A continuación analizaremos las posiciones de las gráficas con respecto al eje 0X ("por encima", "por debajo") en cada una de esas regiones, con lo que conoceremos el signo de cada factor, y por tanto el signo de f(x), en cada una de ellas. De ese análisis deducimos las soluciones de $f(x)>0$ o de $f(x)<0$.

Ilustremos el método con algunos *ejemplos*:

Ejemplo 1º. Resolver la inecuación $[(x^2\text{-}x\text{-}6)/(x\text{-}5)] < 0$.

Se trata de buscar los valores de x que hacen negativo el cociente $(x^2\text{-}x\text{-}6)$ / $(x\text{-}5)$.

Representamos las funciones $y=x-5$ e $y=x^2-x-6$.

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2 y r_3, que dividen el plano en las regiones definidas por:

$S_1= (-\infty, -2)$; $S_2= (-2, 3)$; $S_3= (3, 5)$ y $S_4= (5, \infty)$

En S_1 la gráfica de $y=x^2-x-6$ queda "por encima" del eje 0X, por tanto, si $x \in S_1 \rightarrow x^2-x-6 > 0$.

En S_1 la gráfica de $y=x-5$ queda "por debajo" del eje 0X, por tanto, si $x \in S_1 \rightarrow x-5 < 0$

luego, si $x \in S_1 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) < 0$

$$\text{si } x \in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_2 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) > 0$

$$\text{Si } x \in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_3 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) < 0$

$$\text{Si } x \in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_4 \rightarrow (x^2-x-6) / (x-5) > 0$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $(x^2-x-6) / (x-5) > 0$ será $S=(-\infty, -2) \cup (3, 5)$.

Ejemplo 2º. Resolver la inecuación
$-2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$.

Descomponiendo el primer miembro de la inecuación en factores, ésta podría escribirse (entre otras opciones) de la forma:

$$(x^2-x-6)\ (x-5)\ (-2x+2) > 0$$

Representemos las funciones: $y=x^2-x-6$, $y=x-5$ e $y=-2x+2$

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4, que dividen el plano en las regiones definidas por:

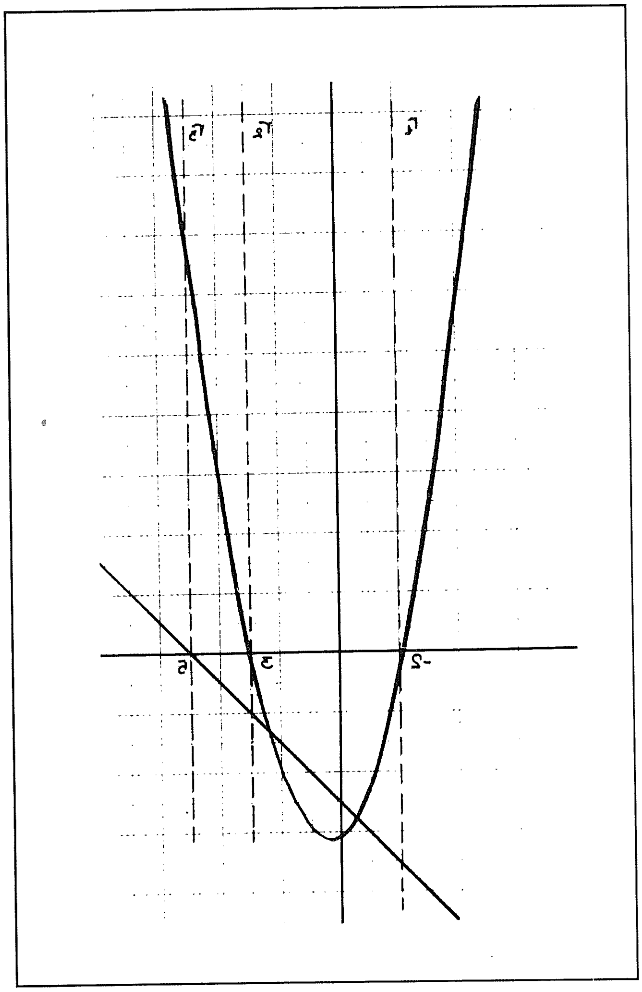


Figura 3

$S_1= (-\infty, -2)$; $S_2= (-2, 1)$; $S_3= (1, 3)$, $S_4= (3, 5)$ y $S_5=(5, \infty)$

$$\text{si } x \in S_1 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_1 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

$$\text{Si } x \in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 > 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_2 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$

$$\text{Si } x \in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$$

luego, si $x \in S_3 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

Si $x \in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 < 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_4 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$

Si $x \in S_5 \rightarrow \begin{cases} x^2-x-6 > 0 \\ x-5 > 0 \\ -2x+2 < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_5 \rightarrow -2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 < 0$

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación
$$-2x^4 + 14x^3 - 10x^2 - 62x + 60 > 0$$
será $S=(-2, 1) \cup (5, \infty)$.

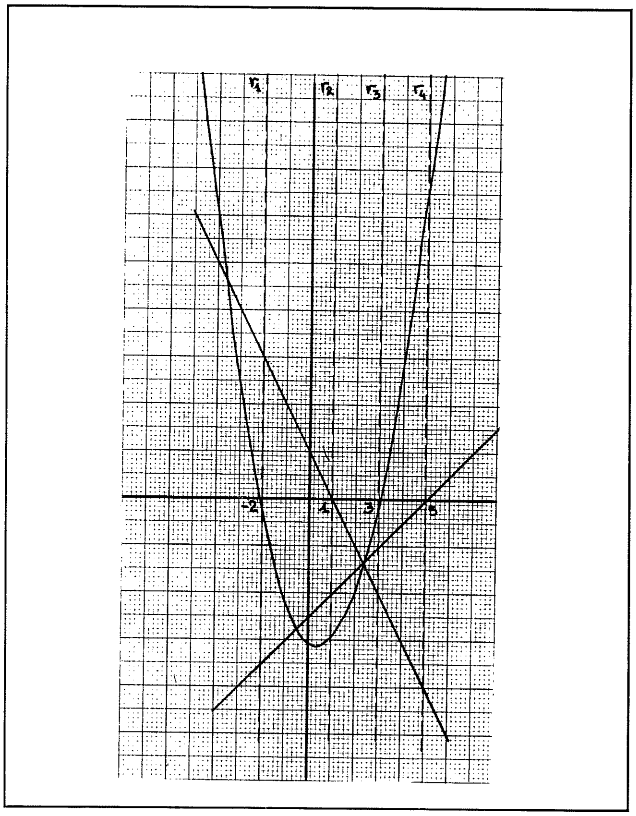


Figura 4

Ejemplo 3º. Resolver la inecuación
$$[(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$$

Representemos las funciones $y=x^2-9$ e $y=-x^2+5x$.

Nuestras fronteras son las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4, que dividen el plano en las regiones definidas por:

$S_1= (-\infty, -3)$; $S_2= (-3, 0)$; $S_3= (0, 3)$, $S_4= (3, 5)$ y $S_5=(5, \infty)$

si $x \in S_1 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ -x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_1 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

Si $x \in S_2 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 < 0 \\ -x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_2 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] > 0$

Si $x \in S_3 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 < 0 \\ -x^2+5x > 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_3 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

Si $x \in S_4 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ -x^2+5x > 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_4 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] > 0$

Si $x \in S_5 \rightarrow \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ x^2+5x < 0 \end{cases}$

luego, si $x \in S_5 \rightarrow [(x^2-9) \;/\; (-x^2+5x)] < 0$

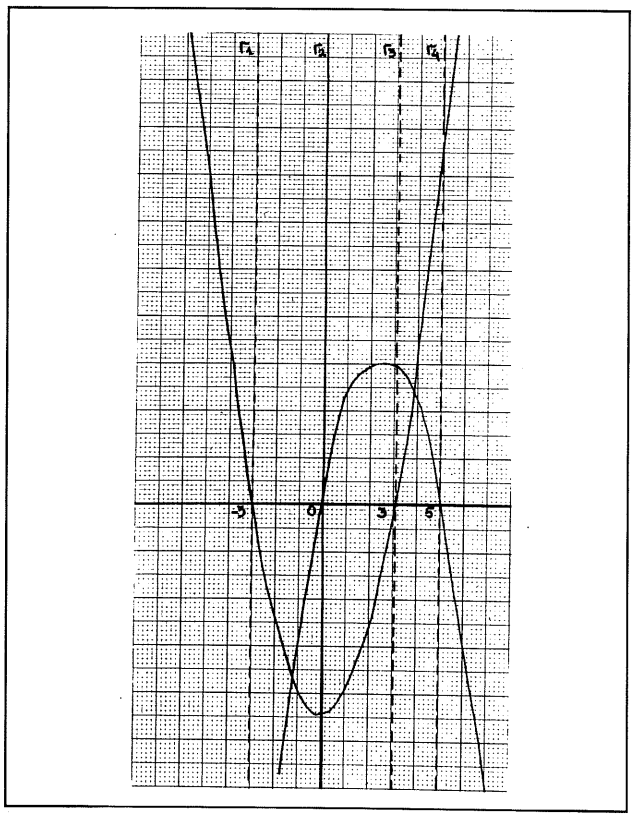


Figura 5

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $[(x^2-9) / (-x^2+5x)] < 0$, será $S=(-\infty, -3) \cup (o, 3) \cup (5, \infty)$

Justificación del método

A parte de por su sencillez, creemos que con este método dotamos a la resolución de inecuaciones de un soporte geométrico e intuitivo, que puede ayudar a que los nuevos conocimientos sobre inecuaciones se acomoden entre los esquemas conceptuales que ya se tienen, haciéndose significativos. Además, con esta forma de resolver inecuaciones damos un poco de sentido a la representación gráfica (y su lectura) de funciones polinómicas de primer y de segundo grado, tal y como aparecen en los actuales programas de 1º de BUP. Así mismo, el alumno descubre que hay características de la gráfica de una función (puntos de corte con el eje 0X, signos, etc.) que son fundamentales para la resolución de los ejercicios que abordamos en este trabajo, así como que hay otras características (monotonía, punto de corte con el eje 0Y, puntos de corte entre las distintas gráficas, etc.) que son totalmente irrelevantes para ello. En general, el alumno comienza a vislumbrar que las características de la gráfica de una función, en mayor o menor medida, pueden proporcionar claves para abordar el estudio o análisis de muchas situaciones.

Para terminar, decir que hay inecuaciones que son más fáciles o más rápidas de resolver por otros métodos distintos al expuesto (por ejemplo, el algebraico), que el alumno debe conocer, pero que debe ser él el que decida cuál de ellos aplicar en cada ocasión.

Antonio José Varo Gómez de la Torre
I.B. "Vicente Aleixandre"
Sevilla