Geometría de coordenadas[1]

Francisco Jesús García García

En estos días el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada dominio de las matemáticas.
Hermann Weyl

El método de las coordenadas, además de tener un conjunto de aplicaciones de amplio espectro –cronología, geografía, topografía, física, geometría,... –y de permitir la trascripción algebraica de determinados problemas geométricos, se fundamenta en ideas que son clave a la hora de comprender la eficacia de las matemáticas como herramienta de las ciencias. La tesis que aquí se sostiene es que esas ideas claves no se transparentan restringiendo la utilización del método de las coordenadas al estudio del caso supuestamente más simple, el sistema de referencia cartesiano en el plano.

Introducción

La Geometría Analítica se encuentra postergada a los últimos niveles de la enseñanza secundaria. Cabe atribuir la causa de este fenómeno a la gran cantidad de prerrequisitos –sobre todo algebraicos, pero también geométricos– que se supone deben exigirse para iniciar su estudio.

Paradójicamente, cuanto más tarde se introduce, más velocidad debe imprimirse a un recorrido que, clásicamente, tiene como meta una complicada geometría euclídea del espacio. Ésta, habitualmente, queda reducida a un pequeño listado de problemas, clasificados *ad hoc* para ser resueltos por un puñado de fórmulas parcamente relacionadas con la intuición inmediata y, en consecuencia, de difícil justificación para el estudiante medio. En compensación, dichas fórmulas son de aplicación mecánica y provocan la ilusión de dominio de la geometría analítica cuando, en realidad y en el mejor de los casos, lo único que proporcionan es un contexto para practicar algunas destrezas algebraicas.

La geometría analítica surge históricamente como un método que simplifica el tremendo esfuerzo de imaginación y razonamiento requerido por los métodos simplécticos[2]. El éxito histórico del método analítico no expide, sin embargo, un certificado de garantía sobre su eficacia en el aprendizaje de la geometría. Más bien, al contrario, la experiencia docente parece aportar fuertes indicios de que, pretendiendo romper las cadenas de Euclides, es demasiado fácil caer en las redes de Descartes[3].

Lejos de este punto de vista, aquí se plantea que la geometría analítica

[1] Reelaboración de las notas de la sesión de trabajo con el mismo título se desarrollo en noviembre de 1993 dentro del curso *La Geometría en la Enseñanza Secundaria* organizado por el CEP de Alicante.

[2] El método analítico es conceptualmente más potente que los métodos simplécticos en tanto que proporcina una ruta automática para atacar todos, supuestamente, los problemas geométricos.

[3] Un niño de corta edad es capaz de *comprender* que una recta y una circunferencia situadas en el mismo plano solo presentan tres posibilidades de incidencia. Esta misma propiedad se torna tremendamente oscura para el joven preuniversitario que se obceca en aplicar métodos analíticos.

puede ser concebida más bien como una parte de un concepto más amplio, la *geometría de coordenadas,* o método cartesiano, poderoso organizador conceptual que trasciende a la propia geometría, que no necesariamente está vinculado a grandes dosis de competencia algebraica, que admite aproximaciones con variados grados de formalidad y que, de modo natural, puede constituir, complementariamente al proceso de generalización de la aritmética y habida cuenta del potencia visual que contiene, uno de los más valiosos apoyos en los primeros pasos por los arduos terrenos de la descripción abstracta, la codificación y la simbolización algebraica.

Forma y esencia

Algunos mensajes son identificados por el receptor como tales aunque no sea capaz de atribuirles significado. Tal es lo que le ocurre a quien escucha una lengua extranjera que no entiende. La reacción característica del receptor en ese tipo de situaciones es desazón y retraimiento en sorprendente mezcla con curiosidad.

He aquí un ejemplo de esa clase de mensajes:

$$* = \square$$

Ciertamente esta terna de caracteres no sugiere nada inmediato. De los tres, sólo el carácter central tiene una significación universalmente aceptada. Él es el responsable de que se perciba alguna relación o unidad entre los miembros de la terna. La relación es, sin embargo, paradójica. El signo = parece contradecir la evidente *desigualdad* de los otros dos caracteres, sea cual sea su significado. A semejanza del que, jugando con el dial, capta una emisora en un idioma incomprendido, no entendemos nada, pero tenemos la convicción de que no estamos en presencia de un ruido blanco de fondo.

Esa impresión se confirma si nos dedicamos a practicar un poco el divertimento preferido de los científicos, a saber, la modificación de las condiciones iniciales de los fenómenos para observar las variaciones que se producen:

$$\mathbf{m = n}$$

Ahora es difícil resistirse a atribuir una interpretación *numérica* a la igualdad. Si m y n son cantidades relativas a distintas magnitudes o a la misma magnitud en distinta situación, puede tener sentido y coherencia afirmar su igualdad. Empezamos a identificar la voz que suena en el transistor.

¿Qué sugiere, sin embargo, esta otra modificación?

$$\mathbf{y = x}$$

La respuesta inmediata es distinta. Si bien nadie se opondría a admitir la interpretación *numérica* anterior, intuitivamente resulta más agradable atribuir un significado *algebraico* al mensaje. Los conceptos de ecuación y de función se agolpan inevitablemente en la mente del observador matemático.

Si uno se fuerza a sí mismo a representar gráficamente la imagen que le sugiere y = x, resulta innecesario mencionar que automáticamente se produce una identificación con *la recta bisectriz del primer y cuarto cuadrantes de un sistema cartesiano rectangular*[4].

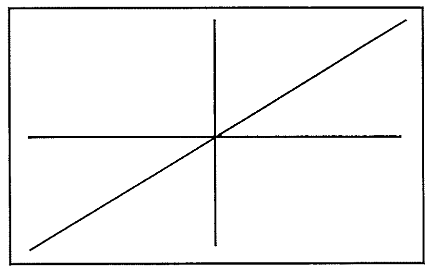

Figura 1
Visualización automática de y = x

Esta identificación automática, por muy *natural* que pueda parecer, es totalmente artificial, o si se prefiere *cultural,* y está relacionada exclusivamente con costumbres y hábitos irrelacionados con propiedades intrínsecas. La prueba estriba en la existencia de *visualizaciones* diferentes asociadas a interpretaciones distintas de la misma terna de símbolos. He aquí dos de ellas:

a) En el espacio tridimensional dotado de un sistema cartesiano de

[4] Obsérvese el alto contenido informativo de un mensaje que es una pequeña modificación de otro al que no se le había atribuido *ningún* significado.

referencia, y = x representa un plano. ¡Aquí para visualizar se requiere imaginar!

b) En el plano dotado de un sistema de referencia polar, *identificado* con ángulo e y con distancia al origen, se obtiene como representación una espiral de Arquímedes.

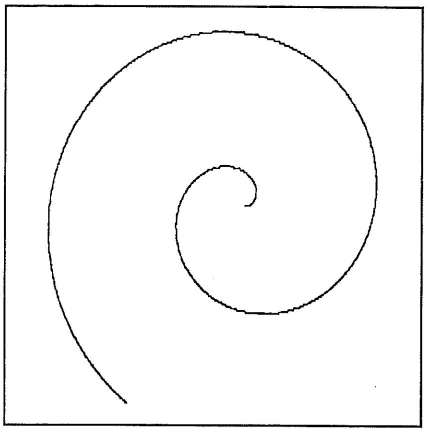

Figura 2
Una visualización alternativa de y = x

Desde un punto de vista formal, o algebraico si se prefiere, las cadenas

*** = ❒**
m = n
y = x

son *esencialmente* equivalentes. La causa de que a la vista de la primera de ellas sea muy poco probable, por no decir imposible, generar una representación como la de la figura 3, se encuentra no tanto en la *forma* de los símbolos elegidos, como en la prevalencia en la mente del lector de la forma sobre la esencia, con la consiguiente inhibición reflexiva sobre el código o entorno que dota de sentido a las expresiones simbólicas

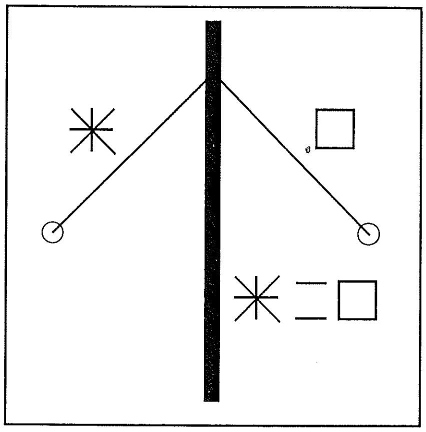

Figura 3
Visualización censurada de * = ❒

Las ideas clave de la geometría analítica

El sorprendente *poder de las convicciones* puesto de manifiesto en la discusión de los inocentes ejemplos anteriores es una muestra del bien conocido, y no menos olvidadizo, principio de la relatividad del significado de los símbolos a un contexto o a un sistema de codificación prefijado.

Cuando el contexto es fijo o persistente su omisión no sólo resulta admisible sino también conveniente: relegar los presupuestos admitidos al terreno de lo implícito constituye un abuso intelectual elegante y eficaz. Tal sería el caso del arquitecto practicón, que no necesita recordarse cada día que sus proyectos se erigirán en un espacio euclideo.

Muy distinta se plantea la cuestión desde el punto de vista del aprendizaje: tan relevante, si no más, resulta la comprensión de los tópicos del sistema de codificación como de los mensajes construidos con él.

En el caso de la Geometría Analítica o geometría de coordenadas, esos tópicos se pueden enumerar fácilmente:

a) La fijación de un *entorno* o espacio: el plano, el espacio tridimensional, la recta, la superficie esférica...

b) La elección en tal entorno de un *sistema de referencia:* dos rectas ortogonales, una recta y un punto, dos círculos máximos...

c) La *localización* de puntos en el sistema de referencia mediante números que representan medidas: distancias, ángulos,... Es aquí cuando se produce una *aritmetización* de la posición, estableciéndose el célebre vínculo entre geometría y aritmética.

d) La *descripción* de las configuraciones geométricas por las relacio-

[5] Intuitivamente hablando, el término *visualización*, en el sentido que se le otorga aquí, requiere esencialmente la encarnación de ideas en imágenes que bien se constituyen con ayuda de un soporte físico externo al individuo, constituyendo *representaciones gráficas*, o bien se forman en la mente, precisando de un canal intermediario, habitualmente la palabra, para ser descritas.

[6] Aunque, ciertamente, la elección de los caracteres * y ❒ constituye con eficacia a conjurar la evocación de interpretaciones culturalmente vinculadas con fuerza a determinadas convenciones.

nes o pautas existentes entre los números que permiten localizar sus puntos. La descripción de estas relaciones[7] genera ecuaciones y sistemas de ecuaciones, dando lugar a la algebraización de las formas.

La esencia de la geometría analítica es el establecimiento de una correspondencia, no necesariamente biunívoca, entre configuraciones geométricas y ecuaciones algebraicas. Los entresijos o ideas claves de esa correspondencia son los tópicos antes enumerados.

La tesis que aquí se sostiene es que esas ideas claves no se trasparentan restringiendo el estudio de la geometría analítica al caso supuestamente más simple, el sistema de referencia cartesiano en el plano.

Más todavía, si se produce tal restricción no se puede hablar con propiedad de *geometría analítica*, al menos en el sentido de potente y versátil método geométrico: si falta la elección o delimitación del *entorno* se pierde el concepto de dimensión y se cercena toda posibilidad de transferir el método cartesiano a otras situaciones; si no hay elección de *sistema de referencia* se absolutiza ramplonamente el significado geométrico de coordenadas y ecuaciones. En definitiva, la localización de puntos y la descripción de configuraciones geométricas se establecen, en el mejor de los casos, como conexiones en un sólo sentido (de la aritmética y el álgebra la geometría) sin llegar a revelar toda su riqueza.

Escolio histórico

Un método es tanto más rico desde el punto de vista formativo cuanto más generalidad tiene y más amplio es su campo de aplicaciones.

Aunque, como ocurre con todas las ideas importantes, el origen del método geométrico analítico se puede rastrear muy atrás en el tiempo, su consolidación tiene lugar en los siglos XVI y XVII, influida seguramente por los esfuerzos invertidos en la invención de procedimientos para localizar la posición de las naves en alta mar y por la concepción relativista de la cinemática de Galileo.

Descartes, el padre oficial del método, confesaba[8], además, una expresa intencionalidad de aritmetizar la geometría que, *de facto*, es una algebraización de la misma. Por una de esas ironías tan frecuentes en la historia de las ideas, Descartes, pretendiendo algebraizar la geometría, también geometrizó el álgebra, permitiendo a la postre la *visualización* de las relaciones abstractas entre variables.

De hecho este reverso de la moneda, la aplicación de ideas geométricas a conceptos *no* geométricos, ha resultado ser asombrosamente eficaz y se halla en la base de algunos de los desarrollo de la matemática del siglo XX[9] (v. gr. el análisis funcional, considerando a las funciones como *puntos* de un espacio abstracto que admite la definición de una *distancia)* y sus crecientes aplicaciones a las ciencias naturales y sociales.

El tocino y la velocidad

Geometría analítica y método cartesiano no son conceptos equivalentes. Aunque, por abuso del lenguaje, suelen utilizarse como términos intercambiables, existe una diferencia sutil entre ambos. El siguiente ejemplo trata de poner de manifiesto esa diferencia.

Cierto juego, que periódicamente se pone de moda entre los escolares, consiste en enlazar entre sí dos palabras, arbitrarias y prefijadas, mediante una cadena en la que cada palabra mantiene *alguna* relación con la precedente:

BARCO - FLOTA - ESCUADRA - CUADRA - BURRO - BRUTO - **CÉSAR.**

[7] Fenomenológicamente estas relaciones son descripciones estáticas y las variables no presentan los roles asimétricos característicos de las relaciones funcionales.

[8] Su intención era encontrar un método universal para la resolución de cualquier *problema*, acepción sinónima, en la época de referencia, de *problema geométrico.*

[9] Pero no exclusivamente del siglo XX. El problema de la aguja de Buffon, por ejemplo, no es originariamente un problema geométrico pero su solución pasa esencialmente por definir un espacio en el que sea representable geométricamente el conjunto de las posibles posiciones de la aguja (fijación del entorno), y por establecer un procedimiento de medida en ese espacio.

La ambigüedad del término *alguna* permite la heterogeneidad de relaciones entre las palabras del ejemplo, que se enlazan, sin pauta previsible, gracias a cacofonías, dilogías, asociaciones, sinónimos, epítetos o parentescos.

Esa ambigüedad, no obstante, es accidental y puede eliminarse sistemáticamente a través de:

a) La fijación de un *entorno* o espacio: El diccionario de sinónimos-antónimos *Proximity/Espasa-Calpe Tesoro* (v. gr.).

b) La elección en tal entorno de un *sistema de referencia:* Una palabra que forma parte del Tesoro. Pongamos por caso, *tocino.*

c) La *localización* de palabras en el sistema de referencia mediante la definición de un procedimiento de medida: la distancia de cualquier palabra al *origen* del sistema es el mínimo número de pasos necesarios para enlazarlas con sinónimos o antónimos del Tesoro.

TOCINO - COCHINO - DESALIÑADO - CUIDADO - DILIGENCIA - **VELOCIDAD**

La distancia entre tocino y velocidad es, como mucho, 5.

d) La *descripción* abstracta de configuraciones o colecciones de palabras por las relaciones o pautas existentes entre los números que permiten localizarlas en el sistema de referencia.

X = 1 ⟷ { CERDO, MARRANO, PUERCO, COCHINO }

¡En este ejemplo no hay formas geométricas pero sí método cartesiano!

El método cartesiano

Podemos usar números para identificar localizaciones. Podemos usar fórmulas para describir objetos *o situaciones*[10]. Podemos visualizar ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Estas ideas, simples pero poderosísimas, pueden y deben ser entendidas por todo el mundo, deben formar parte del bagaje cultural matemático. *Ser entendidas* quiere decir comprender que el uso de números para identificar localizaciones, el uso de fórmulas para describir objetos y situaciones y la representación gráfica de ecuaciones y sistemas requieren, explícita o implícitamente, la fijación de un entorno, la elección de un sistema de referencia, la descripción de qué medidas intervienen y cómo se asocian números y puntos.

Algunos ejemplos

a) *Escenarios alternativos para* la guerra de barquitos.

Este popular juego se desarrolla en un tablero plano convenientemente coordenado a la manera más ortodoxamente cartesiana:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

¿Cómo se podría modificar el juego para que la guerra se librase en la superficie de un cono?

¿Y si el campo de batalla fuesen las caras de un cubo?

b) *Circunferencias con centros alineados*

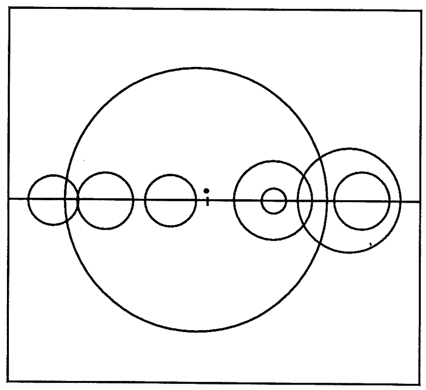

Figura 4

Sistema de referencia:
Punto O. Coordenadas de una circunferencia, (d, r)
d: distancia del centro al punto O.
r: radio de la circunferencia.
¿Qué representa la ecuación $d + r = 10$?

[10] Véase pág 1 de [C].

c) *Entorno Logo*

El procedimiento

SEA POLIGONO: N:L
REPITE: N [AV:L DE 360/:N]
FIN

genera polígonos regulares. La longitud de lado L y el número de lados N son variables enteras y positivas[11].

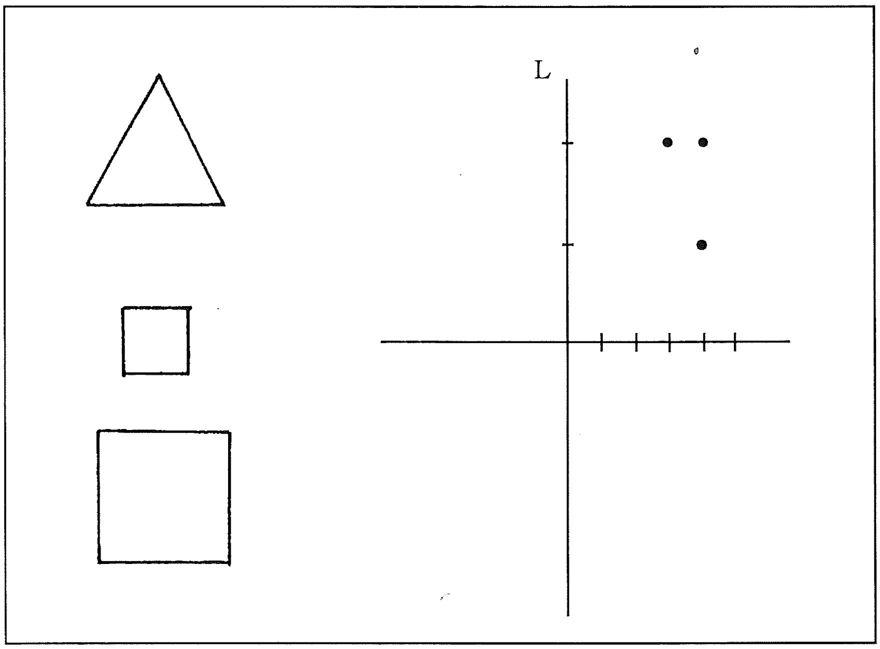

Figura 5

Salida gráfica del procedimiento y representación analítica gráfica[12].

La elección de sistema de referencia: un problema de decisión

En principio parece razonable exigir que un sistema de referencia goce de algunas virtudes tales como

i) claridad de los elementos que lo definen.

ii) sencillez del procedimiento de localización de *puntos.*

iii) eficacia para la descripción simple de *objetos.*

iv) utilidad para representar ecuaciones y sistemas.

v) aplicabilidad a situaciones prácticas.

Lamentablemente es imposible otorgar la categoría de absolutas y totalmente compatibles a tan razonables aspiraciones:

El sistema cartesiano rectangular es claro[13] pero su descripción algebraica de la espiral de Arquímedes no es nada simple, o al menos es mucho más compleja[14] que la correspondiente en un sistema polar de coordenadas.

El sistema de coordenadas trifocal (los puntos del plano son identificados por sus distancias a tres puntos fijos) es poco claro: cada punto del plano necesita una terna de números para su localización, pero no todas las ternas de números representan puntos del plano. Curiosamente, analizando los sismogramas registrados en una estación sismológica puede calcularse la distancia del epicentro del seísmo a la estación. Son necesarias entonces tres estaciones sismológicas para localizar el epicentro de un terremoto. ¡El sistema trifocal, con toda su opacidad, tiene una bonita aplicación!

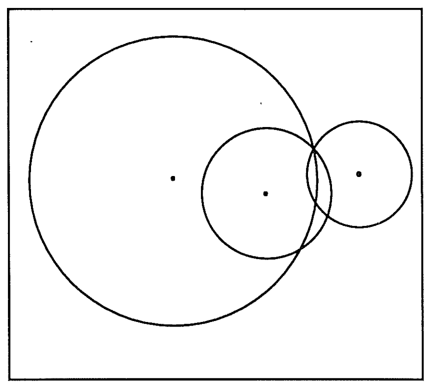

Figura 6

El sistema trifocal y la localización de epicentros

[11] Puede ser interesante remover esta limitación y estudiar qué salidas produce el procedimiento con valores negativos o no enteros de sus parámetros. Sin embargo, no estamos aquí interesados en explorar ese terreno.

[12] *Gráfica* y *representación gráfica* no son términos sinónimos. Aquí se pone de manifiesto bien claramente que un gráfico puede representar a otro gráfico, sin parecido visual alguno entre ambos.

[13] ¿O habría que decir, con más precisión, *familiar*?

[14] En el sentido de que precisa muchos más requerimientos (conceptos, destrezas, propiedades...), para su comprensión.

Los dos ejemplos anteriores muestran que la calificación de *bueno* para un sistema de referencia no es absoluta sino que depende de la situación que se esté analizando, del fin que se persiga con su utilización o del problema que se intente resolver. La elección del sistema de referencia *adecuado* a cada caso es pues un problema de decisión que no debe soslayarse.

Rompiendo las cadenas de Descartes

El sistema de referencia habitual para el plano es el cartesiano rectangular. Los elementos que lo definen son dos rectas perpendiculares o ejes, cuya intersección se denomina origen. Un punto del plano se localiza por dos números que representan sus distancias –orientadas mediante un signo– a los ejes.

Dos rectas que determinan un punto, dos distancias. ¿Qué hay de esencial y qué de accidental en estos elementos?

Si con dos rectas y dos distancias se define un sistema de coordenadas, ¿por qué no con puntos y ángulos? Un rápido juego combinatorio –justificado en los principios de simetría y dualidad, genera algunos nuevos candidatos a sistema de referencia:

Elementos que definen el sistema

Sistema	rectas	puntos	distancias	ángulos
A	2	0	2	0
B	1	1	1	1
C	1	1	2	0
D	1	1	0	2
E	0	2	0	2
F	0	2	2	0
G	0	2	1	1
H	0	3	3	0

Figura 7

Examinando las figuras 8 y 9 es notorio que los mismos códigos numéricos –esto es las mismas coordenadas– y los *mismos* códigos algebraicos –esto es las mismas ecuaciones– tienen significación e interpretación dependientes del sistema de referencia. *(Ver pág. siguiente).*

Toda esta rica diversidad de interpretaciones[15], formas, combinaciones de elementos y medidas, es fruto de especulaciones sobre la esencia del concepto de sistema de referencia. En su obtención, nada han tenido que ver manipulaciones algebraicas aparatosas, resoluciones de sistemas de ecuaciones imponentes o números irracionales barrocos.

¿Hasta dónde de lejos hemos llegado con nuestra actitud iconoclasta? ¿Hemos roto todas las convenciones?

Felizmente –escribió J. L. Borges en cierta ocasión[16] –*no nos debemos a una sóla tradición. Podemos aspirar a todas.*

Todos los sistemas de referencia anteriores están construidos con el convenio[17] de que los puntos del plano se *deben* representar con números, mientras que los conjuntos

[15] Otros ejemplos para estos sistemas de coordenadas, otros sistemas de coordenadas y una discusión sobre el aprendizaje de la relación entre sistema de referencia y lugar geométrico, pueden encontrarse en [F].
[16] Véase la autopresentación de sus Obras Completas, [B].
[17] Implícito, por supuesto.

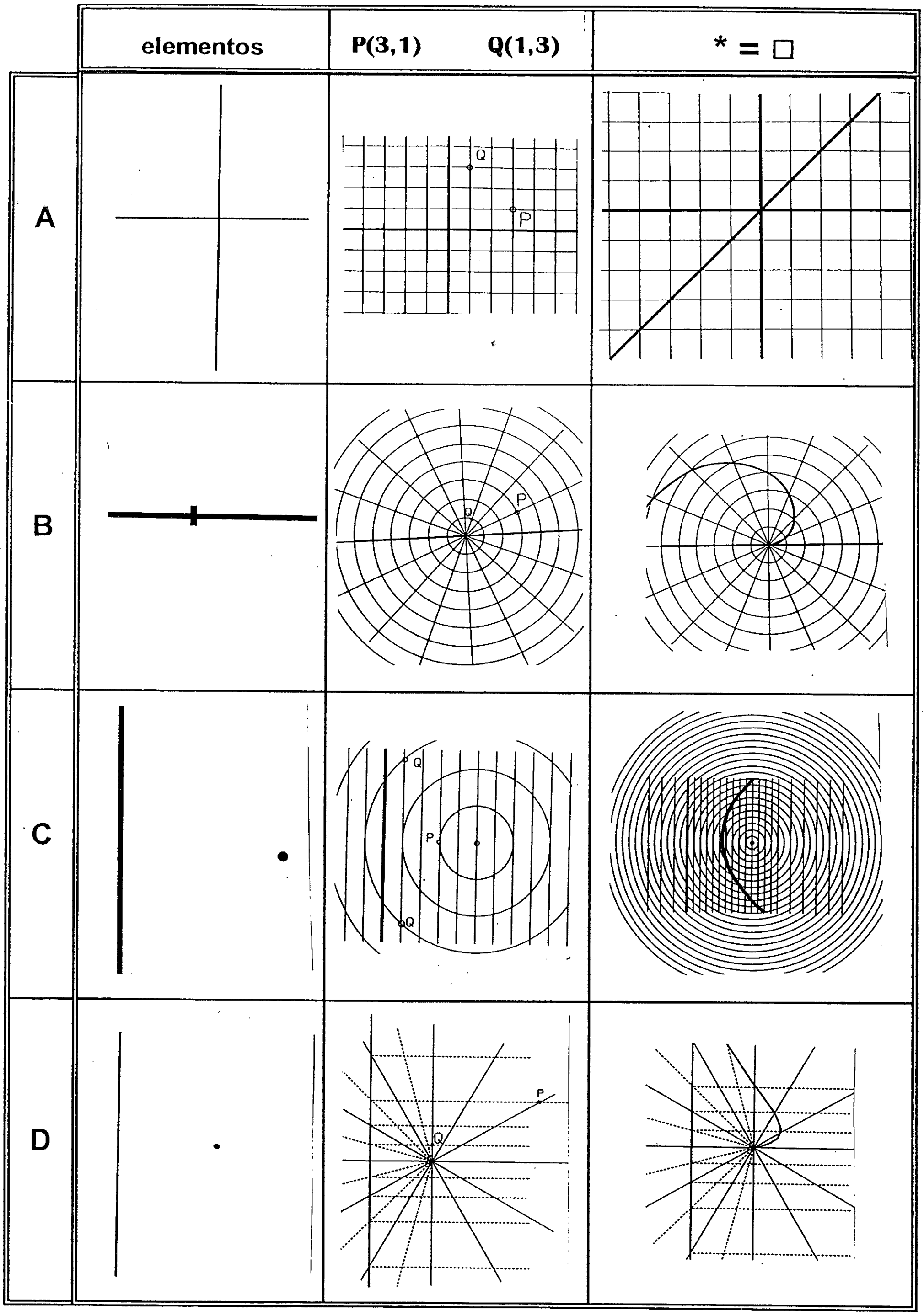

Figura 8

Pluralidad de significados de los mismos símbolos

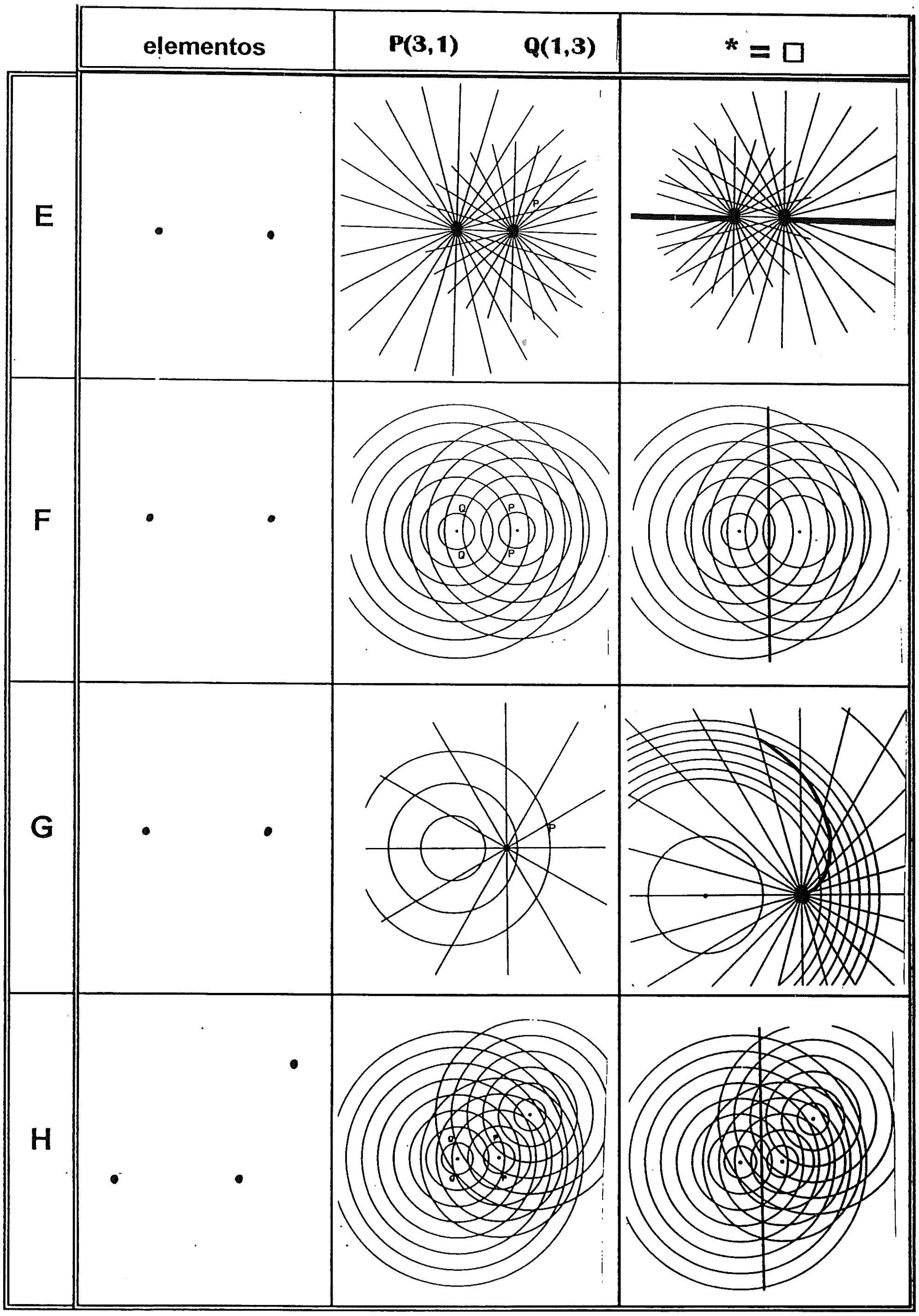

Figura 9

Pluralidad de significados de los mismos símbolos de puntos acabarán codificados con ecuaciones.

Los puntos no son, sin embargo, los únicos habitantes, ni siquiera los más privilegiados, de *Planilandia*. Esta observación abre las puertas a modificaciones más perversas de los sistemas de referencia: ¿por qué no sustituir, como elemento protagonista de partida, el punto por la recta? ¿Es posible asignar con precisión coordenadas numéricas a las rectas del plano?

Desde luego que sí, y de varias maneras:

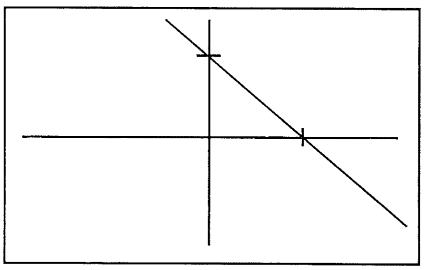

Fig. 10

$r \longleftrightarrow (0, 1, 1, 0)$

Pero también,

$r \longleftrightarrow$ recta de pendiente −1 y ordenada en el origen 1 $\longleftrightarrow (-1, 1)$

O, alternativamente,

$r \longleftrightarrow x + y = 1 \longleftrightarrow (1, 1, 1)$

(0, 1, 1, 0); (−1, 1) y (1, 1, 1)[18] son coordenadas, es decir convenios numéricos, que representan a la misma recta r.

Si coordenadas representan rectas, ¿qué representarán las ecuaciones, esto es las relaciones entre las distintas componentes de *estas* coordenadas?

Escojamos, por ejemplo, uno de los tres convenios de coordenadas anteriores:

$$\boldsymbol{r} \equiv (* , \square)$$
$$* = \text{pendiente de } \boldsymbol{r}$$
$$\square = \text{ordenada en el origen de } \boldsymbol{r}$$

Entonces

$* = \square \leftrightarrow \{ (1, 1), (2, 2), (-1/2, -1/2), \ldots \}$

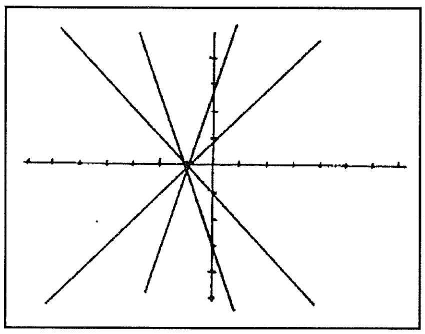

Fig. 11

$* = \square$ representa el haz de rectas que pasa por el punto P (figura 11), es decir, al propio punto P.

¡$* = \square$ es ahora un punto del plano[19]!

Conclusiones

Generalizando su significado geométrico, el método cartesiano puede definirse como la especificación de los elementos necesarios para describir coherentemente la posición de *objetos*[20] o elementos en un entorno o espacio.

Esta descripción puede ser numérica o algebraica. Las ecuaciones son descriptores de *objetos* complejos[21] del entorno, con significación que, al depender de la parametrización construida, no tiene valor universal.

Una estrategia de enseñanza que desee prestar atención a la esencia del método cartesiano, debe propiciar en consecuencia la superación de la tendencia inercial a la asociación *irreflexiva* de imágenes canónicas a las ecuaciones.

Bibliografía

* BORGES, J. L. **Obras completas.** (2 Vols.), Emecé Editores, Barcelona, 1989.

* COXFORD, A. **Geometry from multiple prespectives.** N.C.T.M. 1991.

* FRIEDLANDER, A. & DREYFUS, T. *Is the graph of = y kx straight?* **Matematics Teacher,** pp. 526-531. October, 1991.

* GARCÍA, F. J. *Una interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas.* **Eines,** *nr.* 7 y 8, pp. 159-164. Alcoy, 1987.

Francisco Jesús García García
Servicio de Programas Curriculares
Conselleria de Educación
Comunidad Valenciana

[18] Estas son las llamadas *coordenadas homogéneas*. Para una amplia discusión sobre su interpretación geométrica y sobre aplicaciones no habituales de las mismas, véase [G].

[19] Como tenía que ocurrir a causa de la dualidad existente en el plano entre recta y punto.

[20] Si se hace abstracción de su significado geométrico, las palabras *posición, objeto* y *espacio* tienen carácter metafórico.

[21] Esto es, compuestos de elementos *simples* predefinidos como tales.