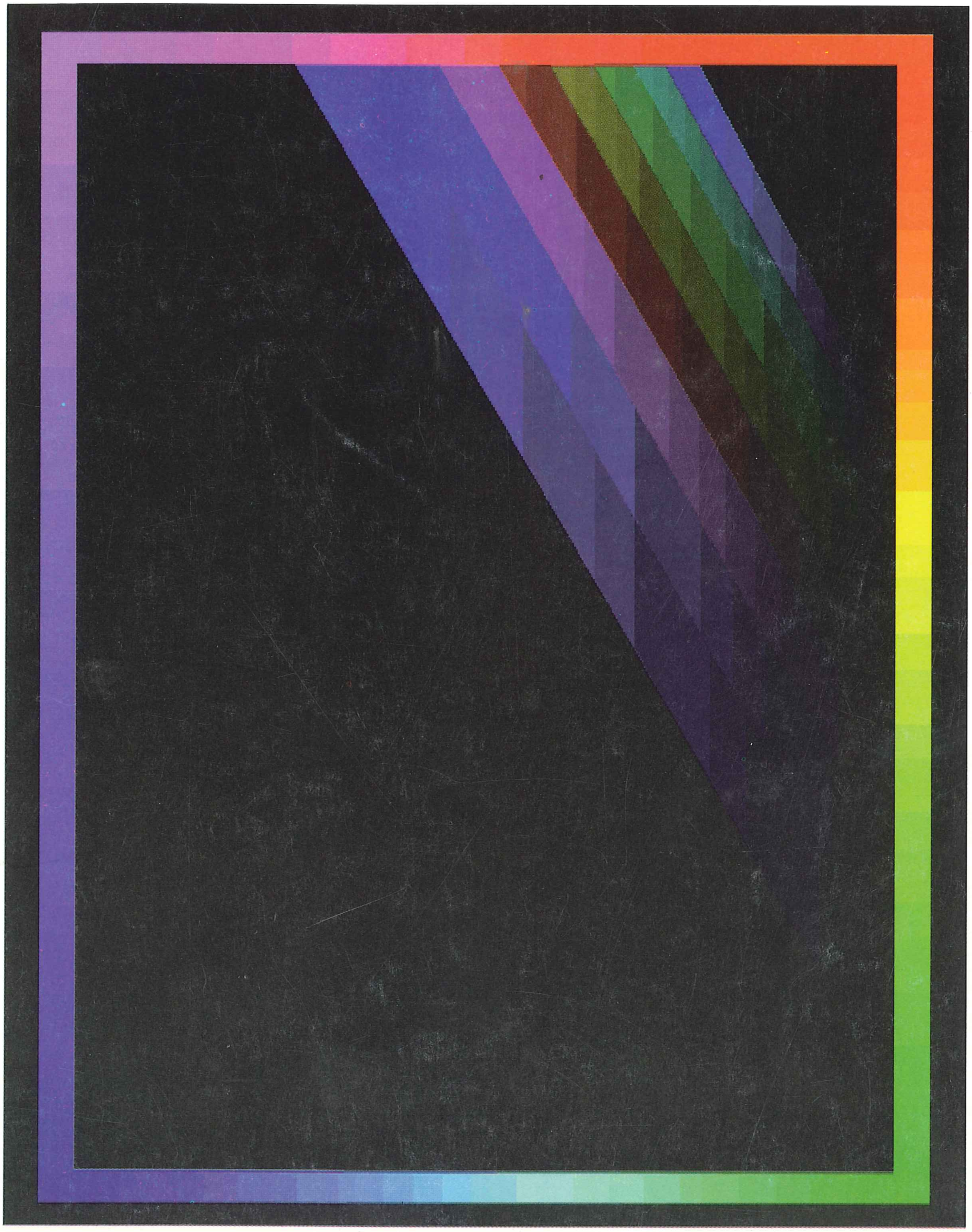
SUMA

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Número 18 - 1994



DIRECTOR:
Sixto Romero Sánchez

SUBDIRECTOR :
José Antonio Prado Tendero

ADMINISTRADOR:
Antonio J. Redondo García

CONSEJO DE REDACCIÓN:
Juan José Domínguez Alarcón
José Antonio Acevedo Díaz
Pedro Bravo Sánchez
Teresa Fernández Rodríguez
José Romero Sánchez

PORTADA:
José L. Gozálvez Escobar

CONSEJO EDITORIAL:
Juan Antonio García Cruz, S.C.P.M. "I. Newton"
Claudi Alsina Catalá, Representante en el "ICMI"
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM "Puig Adam"
Francisco Javier Muriel Durán, Soc. Extremeña de Prof. Mat.
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM "Thales"
Angel Marín Martínez, SNPM "Tornamira" MINE
Florencio Villarroya Bullido, SAPM "P.S. Ciruelo"
Antonio Pérez Sanz, Soc. Madrileña Prof. Matemáticas
José A. Mora, S.E.M. Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"

EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines ADEMGI
Presidenta: María Antonia Canals
Apartat de Correus 835. 17080-Girona

Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals
Presidente: Angel Xifré i Arroyo
Apartat 1306-43200-Reus

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Prof. de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400-Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Prof. de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Prof. de Matemáticas. I.B. Comuneros de Castilla.
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
C/ Batalla Villalar, s/n. 09006-Burgos

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática
Apartado 22045. 46071-Valencia

Sociedad Extremeña de Educ. Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia I.B. de Ribadavia. Coordinador: Andrés Marcos García
C/ Rodríguez Valcárcel. Ribadavia. 32400-Orense

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado 9479. 28080-Madrid

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

PAPEL 100% ECOLÓGICO

***Depósito legal:* Gr. 752 - 1988**
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Tlf. (958) 550381
ARMILLA (Granada)

RIO

ARTÍCULOS

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

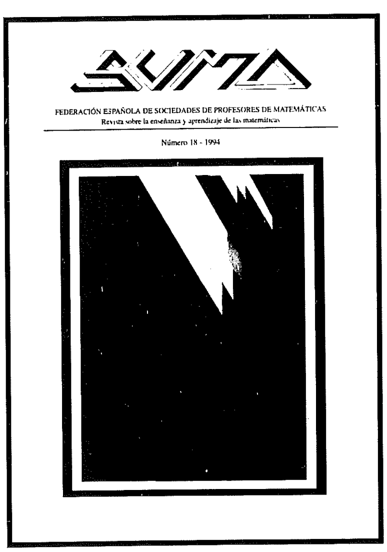
MISCELÁNEA

Suplemento "Para Coleccionar"

EDITORIAL

"No sé como el mundo me verá alguún día, pero yo sólo me siento como un niño que juega en la playa del mar y que jugando, encuentra de vez en cuando un guijarro más liso o una concha más bonita que lo normal, mientras que el océano de la verdad yace desconocido ante mis ojos".

Isaac Newton



Desde que en 1908 se creó el ICMI a iniciativas de Félix Klein durante el IV Congreso Internacional de Matemáticos, los diferentes ICME's se han celebrado en siete ocasiones. La revista SUMA, como había anunciado en números anteriores, seguirá publicando aspectos relativos al 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8).

En esta ocasión, dada la importancia histórica de aquéllos, se ha creído conveniente dedicar el "Para Coleccionar nº 9" a la presentación breve de las actividades realizadas en los citados eventos de Educación Matemática. Puede ser a nuestro juicio una información adecuada que nos muestra las inquietudes que han tenido los profesores e investigadores en Educación Matemática en el presente siglo.

Junto al coleccionable, en este número heterogéneo, el lector podrá encontrar artículos interesantes en los que se tiene muy encuenta el proceso de reforma aportando experiencias y soluciones realizadas en el aula.


x
Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedo "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
Chanson de la plus haute Tour

ARTICULOS

Matemática para la Familia

María José Cittadino

El apoyo y el ánimo por parte de los padres de la familia son vitales para que los niños se desarrollen en matemáticas y que tengan éxito en la escuela. La posición social, económica y educacional de los padres no tiende tanto efecto en el aprendizaje de sus niños como lo que *hacen* los padres con sus niños. (Mathematical Association of America, el enero de 1989).

"¿Qué puedo hacer para ayudar a mi niño con matemáticas?" ¡Qué pregunta tan importante! Si habláramos de la lectura, sabríamos una buena respuesta: lea con sus niños. Pero ¿matemáticas? ¿Cómo hacemos para hacer matemáticas con nuestros hijos?

Matemática para la Familia: ¿Qué es?

El programa de ***matemática para la familia*** ayuda a los padres y a los niños a aprender juntos las matemáticas. ¿Cómo? Les da buenas actividades matemáticas las cuales peuden hacerse en casa. Las familias se divierten mientras se ayudan y disfrutan de las matemáticas a la vez.

Antecedentes

Desde 1977 el programa ***EQUALS*** del Lawrence Hall of Science de la Universidad de California en Berkeley ha trabajado con maestros deseosos de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en sus salones de clases y escuelas. El programa ha proporcionado una gran variedad de actividades y métodos de enseñanza que ayudan a los estudiantes, especialmente a aquellos de grupos minoritarios y mujeres, a lograr el éxito en las matemáticas.

El programa ***EQUALS*** entreteje tres hebras de importancia en el estudio de las matemáticas: *conciencia, confianza* y *estímulo.* Se hace que los maestros y estudiantes ganen conciencia sobre la necesidad del estudio de las matemáticas y las oportunidades que el mismo abre para los jóvenes; se refuerza la confianza al proporcionar estrategias para alcanzar el éxito en el campo de la matemática; se estimula al estudiante a que continúe el estudio de las matemáticas y considere una amplia variedad de carreras.

Muchos de los maestros que vinieron inicialmente al programa solicitaban de ***equals*** ideas y materiales para los padres que en el seno del hogar ayudaban a sus niños en el estudio de las matemáticas. Así pues, nació ***Matematica para la familia,*** que tendría como foco el aprendizaje de las matemáticas por padres y niños que estudian juntos. Como ***EQUALS*** este programa entreteje las mismas tres hebras de importancia en el estudio de las matemáticas.

Este programa por su libro, su curso, sus talleres, trata de cómo ayudar a todo tipo de persona –padres, niños, maestros, vecinos, etc.– a lograr un pleno disfrute de las matemáticas. La Matemática es hermosa, fascinante y excitante y está ahí para disfrutarse.

El énfasis es más en el desarrollo de entendimiento conceptual, en los procesos envueltos en la práctica de la matemática que en la obtención de los resultados correctos. La contestación a un problema específico no tiene tanta importancia que conocer **cómo** llegar a la contestación correcta. Esto es una destreza para toda la vida.

¿Cóma ayudar a una familia?

Una familia tiene la opción de usar los materiales en el hogar del principio o asistir a una serie de clases con otras familias localizado en la escuela, un centro comunitario, la biblioteca –a donde sea–. Una serie típica incluye cuatro o seis sesiones de una a dos horas. ***Matemática para la familia*** le brinda a las familias oportunidades para desarrollar destrezas útiles en la resolución de problemas y ganar un entendimiento de la matemática a través de actividades que envuelven la manipulación de objetos concretos.

Método Uno: Destrezas para la resolución de problemas

Por destrezas para la resolución de problemas entendemos las formas en que la gente aprende cómo pensar sobre un problema dado, utilizando estrategias tales como la búsqueda de patrones, el dibujo de figuras, el trabajar de delante hacia atrás, el trabajar de acompañados y la eliminación de posibilidades. El tener una fuente de estrategias permite varias alternativas en cuanto a las posibles formas iniciales de visualizar un problema, aliviando así la frustración que se siente cuando no se sabe cómo ni dónde comenzar. Mientras más estrategias se tengan, más confianza se gana y más se mejora la habilidad para resolver problemas.

Método Dos: La manipulación de objetos concretos

Por la manipulación de objetos concretos nos referimos al manejo de objetos concretos tales como bloques, frijoles, monedas, palillos de dientes, etc., los cuales se utilizan para ayudar a los niños a entender el significado de los números y el espacio y ayudarnos a todos en la resolución de problemas. Una parte sustancial de la matemática se puede explicar y entender mejor mediante la utilización de modelos, herramientas y materiales a ser manipulados; en efecto muchos investigadores matemáticos aplicados utilizan este mismísimo recurso.

¿Qué más contiene un curso de Matemática para la Familia?

Para cerciorarnos de que se tienen claras las razones para el estudio de las matemáticas, se invitan a las clases de ***Matemática para la familia*** a hombres y mujeres que se trabajan en ocupaciones fundamentadas en las matemáticas. Estos hablan a las familias sobre las matemáticas utilizadas en sus ocupaciones y las de sus compañeros de trabajo. Estos *modelos* con frecuencia tienen una gran importancia para los adolescentes que comienzan a pensar que nunca encontrarán usos para la matemática como las estrellas de rock o los atletas profesionales que desean llegar a ser. Las actividades utilizadas por ***matematica para la familia*** relacionadas con las carreras ponen énfasis en las vueltas y los giros que toman la mayoría de nuestras vidas y resaltan la distancia existente entre lo que terminamos siendo y lo que pensábamos a los catorce años que íbamos a ser.

Además que Las Carreras o Profesiones, los temas cubiertos en las clases de ***Matemática para la familia*** caen dentro de las categorías generales de Aritmética, Geometría, Probabilidad y Estadistica, Medición, Estimación, Calculadoras, Computadoras, y Pensamiento Lógico. El programa quiere ampliar el concepto de lo que es la matemática. Si reflexionamos en torno a la matemática que utilizamos en el quehacer diario, nos convenceremos de que la Aritmética está muy lejos de ser el único concepto matemático de importancia; otros temas comparten la misma importancia.

Los niños al igual que los adultos que han explorado la Geometría, la Probabilidad y la Estadística, la Medición y la Lógica y que han aprendido a estimar y reconocer patrones y relaciones, son capaces de reconocer en los problemas matemáticos difíciles retos interesantes en lugar de tareas agobiantes.

Otro tema que forma la base del programa es cómo crear un ambiente matemático en el hogar. Las actividades de ***Matemática para la familia*** deben resultar divertidas. Se advierte a las familias que no se deben sentir la urgencia o necesidad de dominar actividades. Pueden tomarse todo su tiempo, continuar con una actividad mientras los niños continuen interesados, probar nuevas ideas y aprender nuevos conceptos junto a los niños. Todo esto constituye una gran oportunidad, especialmente en el hogar, de crear una atmósfera que convierte a la matemática en algo especial y atractivo.

Algunas otros ideas que las familias encuentran sobre como practicar la matemática en el hogar son las siguientes:

- Los niños deben ser conscientes de que los padres creen que ellos son capaces de lograr éxito en las matemáticas.
- Los padres deben estar preparados para hablar con sus hijos sobre las matemáticas y saber escuchar lo que ellos dicen.
- Cuidarse de no decir a los niños cómo resolver un problema.
- Practicar con los niños la estimación siempre que sea posible.

Miles de familias ya han asistido a clases de ***Matemática para la familia*** desde 1981. El programa se ha extendido de Berkeley, California, por la mayoría de los Estados Unidos y a otros países, incluyendo Costa Rica.

¿Quién enseña un curso de *Matemática para la familia*?

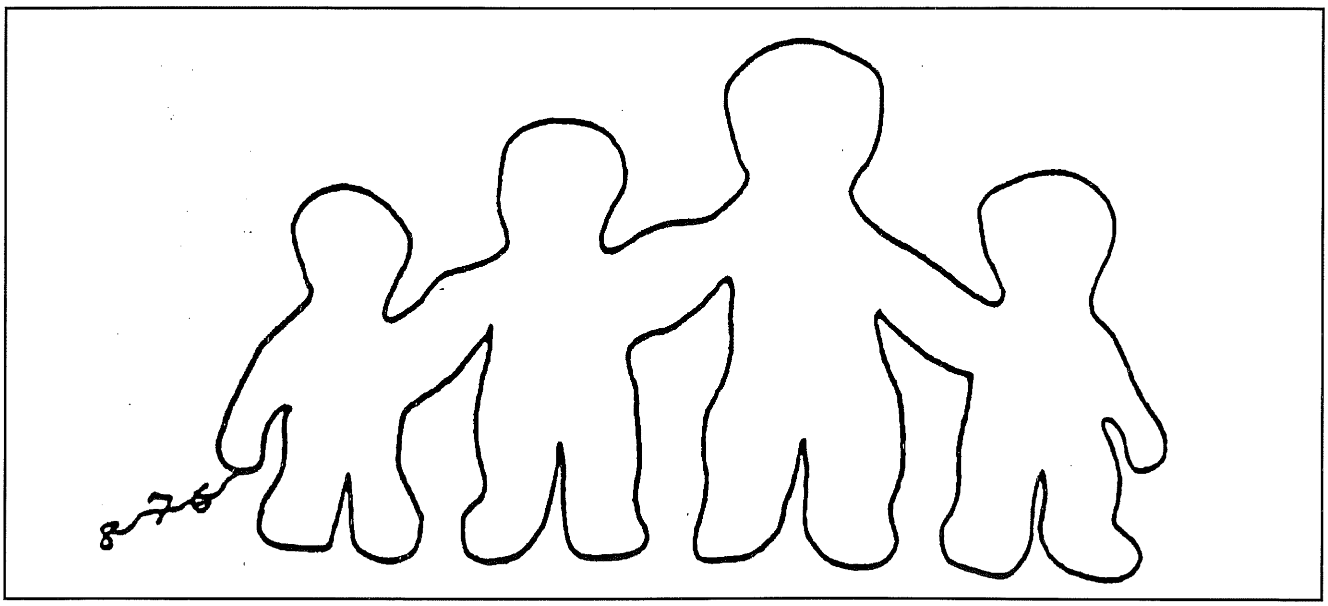
Cualquier persona entusiasta y amistosa que no sienta temor: maestros, padres de familia, asistentes de maestros, profesores, personas jubiladas.

Los padres no sólo asisten a las clases con sus familias sino también están dispuestos a colaborar con los maestros para organizar y a ofrecer las clases a otras familias. Se atreven los padres sin ser maestros experimentados porque las clases de ***Matemática para la familia*** no requieren maestros frente a las clases dando unas conferencias. Al contrario, lo mejor es actuar como facilidador. El aprendizaje de la matemática está en el hecho.

La ***Matemática para la familia*** hace que familias participen conjuntamente en la resolución de problemas, la experimentación y el descubrimiento con el objetivo de que encuentren que la matemática es un tesoro que todos podemos compartir.

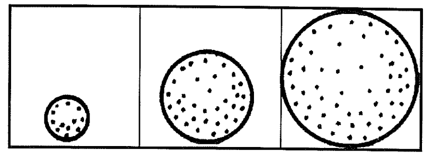
RESUMEN

Matematica para la familia es una manera de gozar juntos el estudio de las matemáticas entre los adultos y los niños en una familia. A muchos padres de la familia les gustaría ayudar a sus niños con las matemáticas pero no saben cómo empezar o qué deben hacer.



Presentación de unas Actividades Típicas

El Valor de las Palabras



Nivel

Porqué

Practicar la aplicación de la aritmética mental y la estimación a la resolución de problemas.

Cómo

- Asigna valores a las letras del alfabeto en que se indica más adelante.
- Pregunta a cada miembro de la familia por el valor de su nombre.
- ¿Si puedes, suma los números mentalmente sin usar papel ni lápiz.
- ¿Cuál es la palabra más cara que cada quien puede encontrar?
- ¿Puedes encontrar alguna palabra que valga $50?, ¿$100?

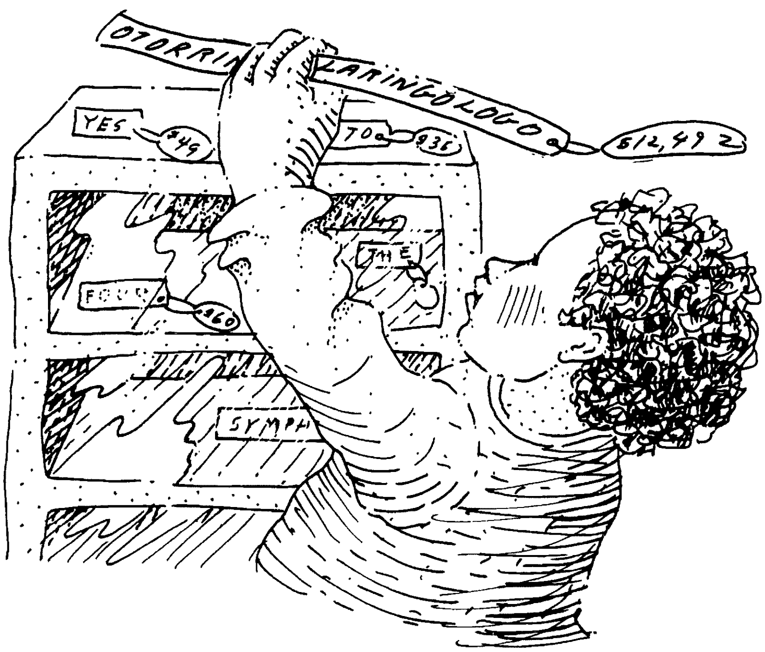
Ideas Adicionales

- Otras actividades posibles a realizar con su niño:
  - Celebra un concurso de una semana de duración para ver quien encuentra la palabra más cara.
  - Utiliza centavos en lugar de dólares para asignarle valores a las letras.
  - Determina la diferencia entre los valores de tu nombre y tu apellido.
  - Multiplica los valores en lugar de sumarios.
  - Utiliza fracciones para asignarle los valores a las letras. Por ejemplo:
    A = 1/26,   B = 2/26,   etc.

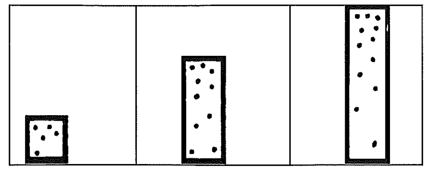
Materiales

Papel
Lápiz

A	=	$ 1	N	=	$14
B	=	$ 2	O	=	$15
C	=	$ 3	P	=	$16
D	=	$ 4	Q	=	$17
E	=	$ 5	R	=	$18
F	=	$ 6	S	=	$19
G	=	$ 7	T	=	$20
H	=	$ 8	U	=	$21
I	=	$ 9	V	=	$22
J	=	$10	W	=	$23
K	=	$11	X	=	$24
L	=	$12	Y	=	$25
M	=	$13	Z	=	$26



Dígitos Dobles



Nivel

Materiales

Hoja de anotaciones
Lápiz
Dados

Un juego para
2-6 jugadores

Porqué

Para practicar la destreza de la identificación de los valores de posición de nuestro sistema numérico y la estimación de cantidades.

En este juego tanto la suerte como la habilidad juegan papeles importantes. La utilización de los dados hace imposible que se puede determinar una estrategia ganadora consistente para el juego. Sin embargo el sentido intuitivo que los niños tienen de la Probabilidad les permite dar con una estrategia general para ganar la mayoría de las veces. El desarrollo de la destreza de la estimación hace más probable el éxito de los niños en la otras éreas de la matemática.

Cómo

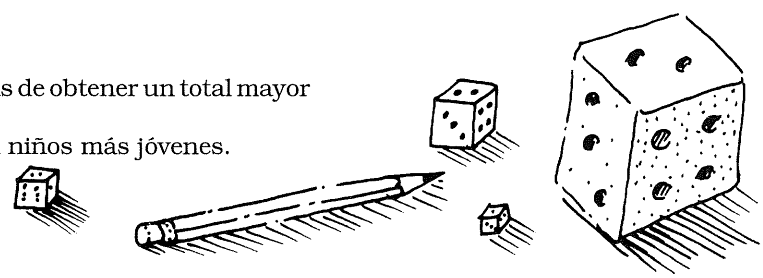
- Necesitarás un dado para todo el grupo y una hoja de anotaciones para cada miembro de la familia. La hoja se debe preparar de la siguiente manera:

	DECENAS	*UNIDADES*
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

- Los jugadores se turnan para tirar el dado.
- Cada número se puede escribir tanto en la columna de las decenas así como en la de las unidades.
- Cuando un número se escribe en la columna de las decenas, escribimos un "0" en la columna de las unidades. Así pues un "4" en la columna de las decenas representa el número 40.
- Luego de que cada jugador tire el dado siete veces, los jugadores deben sumar individualmente todos los números obtenidos.
- Los jugadores deben comparar sus totales.
- El jugador cuyo total esté más cercano a 100 sin ser mayor será el ganador.

Ideas Adicionales

- Al final del juego se deben discutir otras formas de obtener un total mayor utilizando los mismos números.
- Ver también el juego **Dígitos y Dólares** para niños más jóvenes.



María José Cittadino
Universidad de California. Berkeley

La divisibilidad, ¿En primaria o en secundaria?

Andrés Nortes Checa

Antecedentes

En 1970 la Ley General modificó el Sistema Educativo Español Estableciendo la Educación General Básica desde los 6 hasta los 14 años, subdividida en dos bloques: 1ª etapa (cinco primeros niveles) y 2ª etapa (6º, 7º y 8º). Más adelante, en 1981, el MEC subdividió la EGB en tres ciclos: Inicial (1º y 2º), Medio (3º, 4º y 5º) y Superior (6º, 7º y 8º). Los Programas Renovados (Real Decreto 710/1982 de 12 de febrero) difieren de las Orientaciones Pedagógicas del año 1971, que desarrollaban la Ley General, en que son "más concretas, amplias y desarrolladas y constan de unos niveles básicos de referencia y un documento de apoyo al profesorado" (MEC, 1981). En los Niveles Básicos de Referencia correspondientes al Ciclo Superior los contenidos a impartir se agrupan en los siguientes bloques temáticos: 1) Conjuntos Numéricos; 2) Divisibilidad; 3) Geometría plana; 4) Funciones; 5) Polinomios; 6) Proporcionalidad; 7) Geometría de espacio y 8) Estadística.

El bloque de Divisibilidad, que se iniciaba antes en 5º de EGB, pasa ahora al Ciclo Superior, estudiándolo en N y con el objeto de llegar al estudio del m.c.d. y del m.c.m. que "permitirá la operatividad en Q y la resolución de problemas" (MEC, 1981, pág. 13).

Según De Prada (MEC, 1981) la temporalización prevista para el bloque de Divisibilidad es de 3 semanas y a título orientativo se incluye en 6º de EGB, con los siguientes objetivos: 1) Adquirir el concepto de múltiplo y divisor y saber reconocer múltiplos y divisores; 2) Reconocer y definir números primos y compuestos; 3) Conocer y memorizar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11; 4) Adquirir el concepto de m.c.d. y m.c.m. en N; 5) Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o tres números y 6) Plantear y resolver problemas de m.c.d. y m.c.m.

La Reforma del Sistema Educativo

La Reforma del Sistema Educativo Español, en cuyo proceso nos encontramos, empezó a plasmarse por parte del Ministerio de Educación y Ciencia en 1989 con la publicación del Libro Blanco para la Reforma del Sistema educativo, el Diseño Curricular Base de Educación Infantil, Primaria y Secundaria Obligatoria (I y II) y el Plan de Investigación Educativa de Formación del Profesorado. Posteriormente el B.O.E. publicó la Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo; el Real Decreto 1344/1991 (BOE 6.9.91) estableció el Curriculum de la Enseñanza Primaria y en 1992 el MEC editó las "cajas rojas" desarrollando aspectos del Real Decreto.

Los contenidos de Enseñanza Primaria, que es donde nos vamos a centrar, han quedado establecidos en cuatro bloques: 1) Números y Operaciones, 2) La Medida, 3) Formas geométricas y situaciones en el espacio y 4) Organización de la Información. En cada uno de estos bloques el MEC (1992) especifica tres tipos de contenidos: a) Conceptos, b) Procedimientos y c) Actitudes. No hay que confundir un concepto en E.P. con un concepto científico acabado, siendo el primer paso el preconcepto y después el concepto que se irá haciendo más elaborado conforme se van modificando los esquemas mentales. Por procedimientos se entienden el conjunto de acciones encaminadas para conseguir una meta, siendo sinónimos de destreza, técnica, estrategia y método. Las actitudes son contenidos que hay que ir trabajando durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, siendo el gusto por las Matemáticas, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, la flexibilidad para cambiar el punto de vista de una situación, etc. contenidos necesarios para aprender otros contenidos matemáticos.

Los contenidos correspondientes al bloque de Números y Operaciones agrupan: 1) Números naturales, fraccionarios y decimales; 2) Números positivos y negativos; 3) Números cardinales y ordinales; 4) Sistema de Numeración Decimal; 5) Numeración romana; 6) Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división; 7) Algoritmos de las operaciones; 8) Reglas de uso de la calculadora de cuatro operaciones; 9) Correspondencia entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.

La pregunta

Comparando los antecedentes (Planes Renovados) que especificaban la Divisibilidad como contenido en 6º de EGB (11/12 años) con el futuro (Curriculum de Enseñanza Primaria, 6-12 años), puesto que no culminará el proceso hasta el curso 1995/96, se observa que en este bloque temático de Divisibilidad no aparece dentro de la Enseñanza Primaria, ha quedado suprimido, ¿por qué?

Nuestra intención es reflexionar sobre el bloque de divisibilidad dentro de la teoría de Piaget y llegar a alguna conclusión que nos pueda contestar a la pregunta que nos hacemos. ¿Es realmente la divisibilidad un contenido cuya adquisición se sitúa en un período posterior a la Educación Primaria?, ¿Es la divisibilidad una operación concreta o una operación formal?, ¿Nuestros niños/as de Educación Primaria están en disposición de poder adquirir conceptos de m.c.d., m.c.m., múltiplo, divisor, etc.?, ¿Es necesario estar en el período de las operaciones formales para adquirir estos conocimientos?

Para ello vamos a recordar los esquemas aditivo y multiplicativo y la conservación del número como paso previo al análisis de los conceptos de divisibilidad a la luz de teoría de Piaget.

Los esquemas aditivo y multiplicativo

Cuando se conserva el número, decimos que el número se ha constituido en un invariante. Así el número 7 es un invariante porque puede ser descompuesto en 4+3, en 5+2, en 6+1 y no pierde su sentido; el todo y las partes se conservan simultáneamente, de tal forma que dado el 7 y el 4 se puede encontrar el 3 y dado el 7 y el 3 se puede hallar el 4. Eso quiere decir que el número se conserva, que tiene una entidad.

El número empieza a tener entidad con arreglo al primer esquema que hay, que es el esquema aditivo. Pero esto no quiere decir que el número se haya constituido como concepto, se ha constituido como concepto respecto a la operación suma.

El número se puede componer y descomponer en base otros esquemas, como son los esquemas multiplicativos.

Así el 8 puede ser descompuesto en 4 por 2 o puede ser descompuesto en 1 por 8, y además el esquema puede ser conmutativo. Esto es lo que se definiría como la conservación del 8 desde el punto de vista de los esquemas multiplicativos.

Tendríamos pues la conversación del 7 desde el punto de vista de los esquemas aditivos y la conservación del 8 desde el punto de vista de los esquemas multiplicativos.

¿Qué entidad tiene la conservación del número? ¿Eso qué supone? Con esto sabemos que el número es algo con lo cual se permite clasificar y ordenar la realidad.

La clasificación y la ordenación de la realidad se hace en base a los esquemas aditivos y a los esquemas multiplicativos. El 8 se puede conservar desde el punto de vista de los esquemas multiplicativos, es decir, conservar quiere decir que el todo y las partes tienen sentido. A pesar de que el todo se descomponga en partes, el todo sigue existiendo como tal, el todo se conserva. Esto supone que la conservación del todo, si se la descompone en partes, dada una parte y el todo, se puede obtener la otra parte.

Múltiplo y divisor

Ahora bien, ¿qué es el múltiplo y el divisor? Proviene de los esquemas multiplicativos. Es simplemente decir: Si el 8 se puede descomponer en 4 por 2, entonces 4 y 2 son divisores de 8. Lo único que utilizamos es una nomenclatura nueva, es la conservación de un todo mediante un esquema concreto.

Una vez que se conserva el 8 desde el punto de vista de los esquemas multiplicativos, a 8 se le llama múltiplo de 2 y a 2 se le llama divisor de 8.

El esquema es vicariante con respecto al esquema multiplicativo, es decir, las vicariancias multiplicativas cuyo término puede parece nuevo, significa que el esquema vicariante es el esquema de descomposición de un todo en distintas partes. Así Piaget pone el ejemplo de los seres humanos que se descomponen en Suizos y No Suizos o Españoles o No Españoles, etc., pero el todo se conserva; este esquema vicariante se puede aplicar aquí pues lo único que llega a decir es que el sujeto ha construido vicarianzas con esquemas tanto aditivos como multiplicativos.

Sabemos que los ocho argumentos mayores que establece Piaget son clases y relaciones, aditivos y multiplicativos y son simples y vicariantes, dando lugar a:

	Clases	Relaciones
Aditivos	Simples	Simples
	Vicariantes	Vicariantes
Muliplicativos	Simples	Simples
	Vicariantes	Vicariantes

Utilizamos el agrupamiento más adecuado en cada caso para explicar un concepto determinado. Aquí utilizamos la vicarianza multiplicativa.

El sujeto lo único que hace es poner una estructura de agrupamiento que ya posee cambiándola de nombre (múltiplos y divisores) y aplicando el agrupamiento vicariante descompone el 8 en distintos factores como 4 por 2, 8 por 1 y decir que esos son todos los divisores del 8.

El concepto de múltiplo de un número es más sencillo porque se trataría de aplicar un esquema iterativo, pues para ver los múltiplos de 2 basta con multiplicar el conjunto de números naturales por 2.

Resumiendo, el concepto de múltiplo y divisor se genera a partir de la aplicación de un esquema multiplicativo. Pero el hecho de aplicar un pensamiento vicariante en este objetivo, no nos garantiza la construcción de todos los divisores de un número.

Una vez que se estudie la descomposición de un número en factores primos, la forma de obtener todos los divisores de un número sería aplicar un esquema combinatorio que es operación formal.

La construcción de múltiplos y divisores no pasa de ser una operación concreta, mientras que la obtención de toso los divisores de un número es operación formal.

M.C.D. y M.C.M.

La descomposición de un número en factores primos ya supone una operación formal porque es una operación sobre otra operación. Ya no supone hacer una descomposición de un número sino una descomposición de un número en función de unas determinadas reglas, es decir, no de todos los números sino de sólo algunos números y esos números tienen que tener unas características específicas. Supone aplicar un esquema sobre otro esquema, supone aplicar el esquema de números primos y efectuar una descomposición en función de ese esquema que se ha fijado.

Cuando se interaccionan dos operaciones concretas distintas, estamos hablando de una operación formal. Hay que resaltar que sean operaciones concretas distintas porque cuando son iguales se obtiene una operación concreta. Ese es el caso de la multiplicación que resulta de la intersección de dos operaciones concretas idénticas.

La obtención del m.c.d. y del m.c.m. que supone previamente la descomposición en factores primos, es operación formal.

Ocurre que a los 11-12 años se suele introducir el concepto de m.c.d. de dos números hallando en primer lugar todos los divisores de dichos números; después, obteniendo los comunes y por último el mayor de todos, será el m.c.d. de dichos números.

De igual forma el concepto de m.c.m. de dos números se introduce hallando primero los múltiplos de dichos números; después, obtenido los comunes y por último el menor de todos ellos, será el m.c.m. de dichos números.

Pero cualquier concepto se construye primero como intuición, después como preconcepto y por último como operación. Podemos decir que la operación es formal pero previamente tiene que haber pasado por unas etapas concretas (la de intuición y la de preconcepto) y el obtener el m.c.d. y el m.c.m. como se ha señalado anteriormente es un preconcepto del m.c.d. y del m.c.m.

Este preconcepto, ¿nos permite dado el m.c.d. y un número, calcular el otro? ¿Se puede hacer reversible así simplemente? No porque todavía no es formal.

No podemos llegar a un alumno de esta edad y enseñarle directamente una operación, ya que primero hay que pasar por una intuición simple y después por una intuición articulada y finalmente llegar al concepto, ¿pero cuándo? Cuando se ha hecho reversible.

La forma anterior de calcular el m.c.d. y el m.c.m. es válida lo mismo que lo es una intuición o un preconcepto, son etapas que tiene que lograr para constituirse un concepto, dicha etapa es concreta. Sin embargo como concepto es formal.

Si introducimos el m.c.d. de dos números solamente partiendo de los divisores de dichos números estamos haciendo una intuición que no es una operación, como no es operación no es formal y se queda en el plano de lo concreto. ¿Por qué no es una operación? Porque no me permite hacerla reversible.

Resumiendo, la descomposición de un número en factores primos es una operación formal y tanto la obtención del m.c.d. como el m.c.m. que se derivan de la descomposición en factores primos, son operaciones formales.

Conclusión

La consideración de excluir el bloque temático de Divisibilidad desde el punto de vista de concepto es acertada. Sin embargo, los conceptos antes de introducirse como tales, tienen una fase previa intuitiva, después de preconcepto y por último de concepto y desde esta perspectiva el MEC podría haber incluido dentro del bloque de Números y Operaciones un apartado de "introducción a la divisibilidad" una vez visto la división, porque a partir de la división exacta de números naturales los preconcepto de múltiplo y divisor son operaciones concretas, así como los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 que pueden introducirse mediante ensayo-error o la obtención del m.c.d. y m.c.m. de dos números son un paso previo a su inclusión como concepto en la Educación Secundaria Obligatoria y en consecuencia su ausencia en la Enseñanza Primaria denota un "olvido" su no introducción como preconcepto en esta etapa educativa de 6 a 12 años.

A la pregunta formulada de "Divisibilidad, ¿en Primaria o en Secundaria?" habría que contestar: Divisibilidad en Primaria y en Secundaria. En Primaria como preconcepto y en Secundaria como concepto.

Bibliografía

* FLAVELL, J. (1979). **La psicología evolutiva de Jean Piaget.** Barcelona, Paidós.

* INHELDER, B. Y PIAGET, J. (1985). **De la lógica del niño a la lógica del adolescente.** Buenos Aires, Paidós.

* MEC (1981). **Matemáticas.** Madrid, MEC.

* MEC (1989c). **Diseño Curricular Base. Educación Primaria.** Madrid, MEC.

* MEC (1991). **Real Decreto 1344/1991 de 6/9/91. (BOE 220 de 13.9.91) sobre Curriculum Enseñanza Primaria).** Madrid, BOE.

* MEC (1992). **Primaria. Área de Matemáticas.** Madrid, MEC.

* NORTES CHECA, A. (1990). **El paso de las operaciones concretas a las formales. Un análisis en el dominio de las matemáticas.** Murcia, Servicios de Publicaciones Universidad de Murcia.

* NORTES CHECA, A. Y SERRANO GONZÁLEZ-TEJERO, J. M. (1991). **Operaciones concretas y formales.** Servicio de Publicaciones Universidad de Murcia.

* PIAGET, J. (1986). **La epistemología genética.** Madrid, Debate.

Andrés Nortes Checa
Facultad de Educación
Univ. de Murcia

Algunos referentes para analizar tareas matemáticas

M. García Blanco – S. Llinares Ciscar

En este artículo se presenta (i) una forma de utilizar los sistemas de representación instruccionales como variables para el análisis de tareas en el caso del concepto función (12-16) y, (ii) el sistema de categorías obtenido. La consideración de las diferentes perspectivas (proceso y objeto) de la noción función permite realizar algunas reflexiones sobre la relación entre la presentación textual de la tarea y las características de la actividad que presumiblemente demanda del resolutor.

Introducción

Las tareas matemáticas son un instrumento que utilizamos habitualmente en el desarrollo de la labor docente. Su diseño, análisis, evaluación o elección es una de las primeras decisiones que tenemos que tomar al pensar en la enseñanza y, en particular, en la elaboración de Unidades Didácticas. Aspectos tales como secuenciación de contenidos, presentación, forma de plantear las tareas en la clase, etc., son tenidos en cuenta en esta decisión.

En este trabajo una fuente potencial desde la que extraer tareas para desarrollar el contenido en las Unidades Didácticas lo constituyen documentos ya elaborados. Los libros de texto son uno de estos tipos de documentos potenciales desde lo que elegir tareas y actividades a proponer en el aula. Sin embargo, un reciente análisis que hemos realizado nos ha indicado que todo texto puede llevar tras de sí una determinada filosofía, una forma de "ver" el contenido matemático escolar. Esto condiciona la clase de actividades y tareas que se plantean en ellos.

El análisis y evaluación de libros de texto en general , y en particular el que se centra primordialmente en el tipo de tareas presentadas, ha sido una preocupación constante en el campo de la Educación Matemática. La hipótesis que subyace en este planteamiento subraya el papel determinante que sobre el proceso de aprendizaje desempeña la forma en que las Matemáticas son presentadas por los textos o unidades didácticas a través de las tareas.

En este sentido, las características del proceso de generación del conocimiento matemático, es decir, la naturaleza del aprendizaje producido y la forma en que este se produce, viene definido, en parte, por el tipo de tareas que los estudiantes deben realizar. La relación entre las tareas y la actividad que el estudiante debe desarrollar al intentar resolverla (o la misma forma en que el profesor la plantea) puede llegar a caracterizar una determinada comprensión de las nociones matemáticas. Además, esta relación entre la tarea y lo que el estudiante debe hacer con ella hace que se genere por parte de éste unas creencias implícitas sobre lo que son las matemáticas escolares (contenido matemático) y lo que significa aprender algo en Matemáticas. En este sentido, la "imagen"[1] que un estudiante puede construir de un concepto matemático viene determinado, en parte, por esta doble perspectiva dada por:

[1] Vinner y sus colaboradores (Vinner y Dreyfus, 1989) denominan concepto imagen asociado a un concepto matemático como el conjunto de todas las 'representaciones' mentales y propiedades características que el estudiante asocia a este concepto.

– las características textuales de las tareas que tiene que realizar, y

– la naturaleza de la actividad que genera con dicha tarea.

Dentro de este marco general, tratamos de buscar instrumentos generales y fundamentos teóricos para el análisis libros de textos y de tareas matemáticas. Los trabajos de van Dormolen (1986), Otte (1986), Kang y Kilpatrick (1992), Kuchemann (1987), Leinhartd et al. (1992) y Sanz (1990) proporcionan algunas perspectivas diferentes adoptadas en el campo de la Educación Matemática para este análisis con diversas aproximaciones epistemológicas.

Otte y Dormolen aportan una perspectiva analítica general para el análisis del contenido en los libros de texto de Matemáticas, considerando algunos principios que deben tenerse en cuenta (libre de errores, naturaleza del aprendizaje pretendido,...). Por otra parte, Kang y Kilpatrick utilizan la teoría de la transposición didáctica para un análisis de algunos libros de Álgebra examinando la utilidad de los conceptos vinculados a esta teoría para el análisis de textos matemáticos. El uso de las investigaciones cognitivas sobre cómo los aprendices resuelven tareas vinculadas a un tópico concreto o cómo diferentes textos reflejaban un determinado aspecto de un contenido matemático escolar particular fue realizado por Kuchemann (1987) y en los trabajos recogidos en Leinhardt et al. (1992). Finalmente Sanz incide en la necesidad de considerar los modos de representación utilizados para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten. Esta diversidad de enfoques nos llevó a intentar recoger aquellos aspectos relevantes descritos en la literatura para el propósito de nuestro trabajo e intentar generar nuestro esquema analítico. Este proceso es el que describiremos en la próxima sección.

El objetivo final en nuestro trabajo era intentar obtener un esquema analítico que, de alguna manera, nos permitiera identificar características generales que pudieran llegar a definir un conjunto de tareas en relación a un tópico concreto. Para ello elegimos un concepto central en la enseñanza de las Matemáticas en diferentes niveles, como es el concepto de función.

El propósito de este artículo es detallar los criterios seguidos y describir el sistema de categorías obtenido. Pretendemos con ello aportar información que pueda ser útil a la hora de fundamentar nuestras decisiones ante la labor de analizar, evaluar, diseñar o elegir tareas matemáticas que desarrollen el curriculum matemático de la Educación Secundaria Obligatoria.

El proceso seguido: delimitando un marco conceptual

Tomando como referencia la cognición situada (Brown, Collins y Duguid, 1989), se puede asumir que el conocimiento es producto tanto de la tarea, como de la situación en que se da (características de la actividad generada; es decir, interacciones tarea-alumno, entre los propios alumnos, profesor-alumno). Por otra parte, estas relaciones son las que definen un aspecto de la cultura matemática escolar en la que se desarrolla y utiliza el conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva podemos subrayar dos cosas que tienen una influencia potencial en las características del conocimiento matemático generado en el aula,

(i) la presentación textual de la tarea (tipo de contenido, representación instruccional empleada, etc), y

(ii) la naturaleza de la actividad que el propio contexto en el que se presenta la tarea demanda del estudiante.

Estos dos aspectos fueron los que nos inclinaron a tener que buscar esquemas analíticos que los pudieran contemplar. Así, con esta perspectiva, y en un nivel más concreto tuvimos en cuenta

– el uso y características de la representación matemática utilizada, y

– el punto de vista que explicita la necesidad de considerar diversas perspectivas para llegar a comprender el concepto de función.

El análisis del papel desempeñado por las representaciones, en el proceso de aprendizaje de los alumnos de distintos tópicos matemáticos, ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Janvier, 1987; Kaput, 1991). Una de las ideas que, en estos momentos, se defiende con más intensidad es que la traslación entre diferentes representaciones, y las transformaciones dentro de un mismo sistema, contribuyen a que los alumnos adquieran una mayor comprensión de las nociones.

Por otra parte, las investigaciones centradas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función (Breindenbach, et al. 1992; Dubinsky y Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner y Dreyfus, 1989) han caracterizado dos perspectivas para analizar lo que significa comprender la noción de función:

– la perspectiva proceso, y
– la perspectiva objeto.

Desde la ***perspectiva proceso***, se considera que las funciones conectan los valores de x e y, es decir, para cada valor de x le corresponde un valor de y. Desde *la* ***perspectiva objeto***, la función, se contempla de forma global, como un todo.

Llegar a comprender un dominio de contenido matemático complejo, como puede ser el definido por la noción de función, significa, para algunos autores (Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993), ser flexible en los procesos de resolución de tareas,es decir,

– trasladarse entre diferentes sistemas de representación, y
– diferentes perspectivas del concepto.

Como consecuencia, un medio de determinar como la "forma" de las tareas favorece, o no, la comprensión de un concepto es analizar cómo la presentación del contenido, y el tipo de tareas/actividades propuestas, refleja los diferentes aspectos de lo que significa comprender un dominio complejo como en este caso específico, las funciones. Representaciones y perspectivas pasan así a ser las referencias a considerar.

Los textos utilizados como fuente de las tareas analizadas

Para realizar nuestro estudio utilizamos, como fuente desde las que obtener las tareas, textos publicados en nueve editoriales, no distribuidas cronológicamente de forma uniforme. Adoptamos una perspectiva temporal, examinando libros de texto publicados desde 1975 hasta 1991, del nivel 11-16.

Dado que nuestro objetivo no era establecer comparaciones, sino analizar características de las tareas propuestas en los temas relativos al concepto de función, elegimos aquellos libros que pensamos habían tenido (o tienen) una difusión más amplia en la provincia de Sevilla en los años considerados. El objetivo era intentar explicitar suposiciones epistemológicas implícitas sobre las que se apoyaban las tareas consideradas globalmente, e identificar características particulares de las tareas. En el cuadro 1 recogemos la distribución seguida en relación a niveles y años de publicación.

Por otra parte, y con objeto de apreciar lo mejor posible el cambio que se está observando en las últimas décadas en la enseñanza en general, y en la de las Matemáticas en particular, se decidió hacer dos bloques con los textos de 1º y 2º de BUP (14-16 años), atendiendo a su fecha de publicación. Así, el bloque A abarcaba el período comprendido entre 1975 y 1981, y el bloque C los años comprendidos entre 1987 y 1991. La laguna que parece existir entre ambos bloques se debe a que en esos años no hubo las suficientes

Cuadro 1. ***Distribución temporal y por cursos de los tres bloques en los que se han agrupado los textos utilizados***

<table>
<tr><th>Año de publicación</th><th>1974</th><th>1975</th><th>1976</th><th>1979</th><th>1981</th><th>1983</th><th>1984</th><th>1986</th><th>1987</th><th>1988</th><th>1990</th><th>1991</th></tr>
<tr><td>Curso/nivel
7º (12-13)
8º (13-14)</td><td colspan="5"></td><td colspan="5">BLOQUE B</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1º (14-15)
2º (15-16)</td><td></td><td colspan="4">BLOQUE A</td><td colspan="3"></td><td colspan="4">BLOQUE C</td></tr>
</table>

innovaciones como para que las editoriales, en general, editasen nuevos textos, utilizándose los del período anterior.

En cuanto a los libros revisados de 7º y 8º de EGB (12-14 años), desde la perspectiva adoptada en nuestro análisis, no hemos apreciado de forma clara cambios, por lo que hemos incluido todos ellos en un sólo bloque. Pensamos que esto es debido a que la reforma en el segundo ciclo de la Educación General Básica se realizó en 1980. Por otro lado, debemos aclarar que la elección del período 1983 a 1988 es debida a que los libros editados en estos años siguen vigentes en la actualidad.

Generación del sistema analítico y categorías obtenidas

La unidad de análisis utilizada fueron las tareas y problemas presentados en el libro de texto. Como información adicional, se recogían también las definiciones dadas por los diferentes libros al concepto de función. En este apartado inicialmente trataremos los dos aspectos que hemos considerado durante el proceso de análisis y en el mismo orden en el que se han empleado:

– sistemas de representación utilizado y las traslaciones dentro y entre ellos, y

– diferentes perspectivas (proceso, objeto) para el concepto función.

Posteriormente, describiremos el proceso de análisis seguido que nos ha permitido obtener un conjunto de categorías para las diferentes tareas relativas a las funciones desde el punto de vista de las representaciones utilizadas y de las traslaciones entre ellas (o dentro de ellas) que demanda la tarea.

El análisis de casos problemáticos permitió, por una parte, ir refinando paulatinamente el conjunto de categorías inicialmente obtenido y, por otra, incorporar en el proceso de análisis el punto de vista derivado de considerar los aspecto proceso y objeto relativos al concepto función. La forma en que hemos incorporado esta última consideración será el contenido de otro apartado.

a) Representaciones y las traslaciones entre ellas

Las tareas, actividades y ejercicios fueron analizados desde el punto de vista del tipo de representación utilizado y de la traslación que el proceso de resolución demandaba. Las primeras referencias para la generación de nuestro sistema de categorías nos la proporcionó la literatura relativa al tema (Janvier, 1987).

Por otra parte, el mismo ejercicio de análisis de las tareas permitió ir refinando el sistema inicial de categorías para poder recoger todos los matices que se iban originando. Desde este punto de vista, podemos considerar que se ha seguido un proceso inductivo en la tarea de ir generando y refinando paulatinamente las categorías consideradas inicialmente.

Como hemos indicado, utilizamos el trabajo de Janvier (1987 a) como una referencia teórica inicial relativa a diferentes formas de representar el concepto de función (objeto matemático) y a los proceso de traslación derivados. El cuadro 2 recoge esta propuesta inicial.

Cuadro 2. ***Modos de representación y procesos de traslación en el análisis del concepto función (Janvier, 1987 a).***

PROCESO DE TRASLACIÓN				
de \ a	situación, descripción verbal	tablas	gráficas	fórmula, expresión algebraica
situación, descripción verbal				
tablas				
gráficas				
fórmula, expresión algebraica				

Hay que tener en cuenta que el proceso de traslación entre representaciones implica trasladar los significados adscritos a diferentes aspectos del concepto de función (traducción).

b) Las perspectivas proceso y objeto relativas al concepto función

Desde el segundo punto de vista adoptado en el marco conceptual se consideraban dos perspectivas para el concepto función,

- la perspectiva proceso, y
- la perspectiva objeto.

Dubinsky y Harel (1992) caracterizan estas dos perspectivas de la siguiente manera:

"Una concepción ***proceso*** *de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a algunos medios repetibles que, dada la misma cantidad original, siempre producirán la misma cantidad transformada. El sujeto es capaz de pensar en la transformación como una actividad completa empezando con objetos de algún tipo, haciendo alguna cosa con estos objetos, y obteniendo nuevos objetos como resultado de lo que ha sido hecho ... Una función es concebida como un* ***objeto*** *si es posible desarrollar acciones sobre ella, en general acciones que la transforman (globalmente)" (Dubinski y Harel, 1992; pp. 85).*

c) Perfilando el análisis: obtención de un sistema de categorías

La consideración inicial de la propuesta de Janvier (1987 a) en el esquema analítico adoptado (representaciones y traslaciones) nos aportó información válida, para realizar las primeras inferencias sobre la forma en que el tratamiento del contenido (concepto de función, a través de las distintas tareas), desarrolla el concepto y promueve su comprensión por parte de los estudiantes.

Por otra parte, como decíamos anteriormente, según se procedía al análisis de las tareas, las categorías inicialmente consideradas fueron modificándose, para recoger lo más fielmente posible la información que se iba obteniendo. El sistema de categorías final que se obtuvo consta de ocho apartados, existiendo, dentro de cada uno de ellos, diferentes subcategorías. En el próximo apartado presentaremos algunos ejemplos concretos, que pensamos pueden ser representativos del proceso que nos llevó a situar determinadas tareas o actividades en una categoría específica. El sistema de categorías obtenido fue el siguiente:

Sistema de categorías

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación.

   1.1. Expresión algebraica. Formulación.
      A. Características del objeto matemático función.
      B. Cálculo y análisis de características.

   1.2. Modo gráfico.

   1.3. Situación.

2. Traslaciones entre modos de representación.

   2.1. Expresión algebraica a tabla/gráfica (y viceversa).

   2.2. Situación a gráfica (y viceversa).

   2.3. Situación a expresión algebraica (y viceversa).

3. Tareas de varios pasos.

   3.1. Traslación entre dos modos de representación para trabajar en el segundo de ellos.

   3.2. Traslación más traslación y trabajo dentro del último modo de representación utilizado.

   3.3. Traslación seguida de otra traslación.

   3.4. Trabajo dentro de un modo de representación más trabajo dentro de otro.

   3.5. Traslación seguido de trabajo dentro del primer modo utilizado.

4. Tareas en las que se plantea el análisis de una situación.

5. La tarea pide explícitamente utilizar un modo de representación diferente para resolver la cuestión planteada.

   5.1. Presentación: modo algebraico; resolución: modo gráfico.

5.2. Presentación: situación; resolución: formulación.

6. Emparejar gráficas con expresiones algebraicas (o viceversa).

7. Estudio de rasgos propios del modo de representación "independientemente" de las características del objeto matemático función.

8. Otras.

Concretando el proceso

En este apartado comentaremos la asignación realizada para algunas de las tareas a determinadas categorías. En primer lugar describiremos algunos casos en los que la asignación tarea-categoría es relativamente clara, y luego comentaremos algunos aspectos que hemos derivado del análisis en casos dudosos, o cuya asignación no era tan directa.

Por ejemplo, si analizamos las tareas siguientes:

TAREA 1.

Dibuja en unos mismos ejes coordenadas las parábolas

$$y = (x-2)^2;\ y = 2\ (x-2)^2;$$

$$y = \frac{1}{2}(x\text{-}2)^2$$

¿En qué punto tienen el vértice? ¿Cuál es el eje? ¿Cómo son?

TAREA 2.

Di en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas de las funciones siguientes:

$$y = x^2;\ y = 3x^2;$$

$$y = \frac{1}{3}x^2;$$

$$y = \frac{-4}{3}x^2;\ y = \frac{3}{4}x^2$$

Observamos que su resolución demanda los siguientes pasos:

i) traslación de expresión algebraica a gráfica,

ii) estudio de la gráfica; es decir, trabajar dentro del modo gráfico.

Por lo que han sido consideradas como tareas en la categoría 3.1. "traslación expresión algebraica a gráfica y estudio de la gráfica dentro del modo gráfico". La característica de este tipo de tareas es que la relación-función está dada en un modo de representación y la actividad que demanda es 'mostrar' esta relación en otro modo de representación.

De igual forma la tarea

TAREA 3.

Piensa en todos los rectángulos con perímetro 20 cm. Cuando la base se alarga, la altura debe disminuir. Busca la función que relaciona la base x con la altura y. Represéntala gráficamente. ¿Es una recta?

la incluimos dentro de la categoría 3.3. ya que resolver la tarea implica realizar las siguientes traslaciones entre modos de representación:

i) situación a formulación,

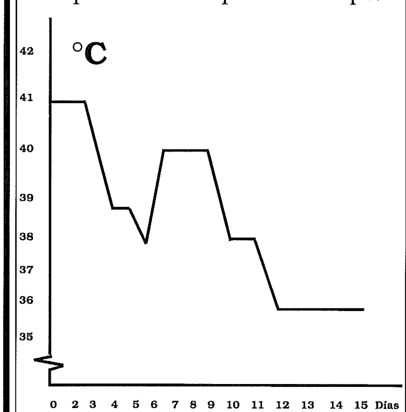
ii) formulación a gráfica.

Es decir, el texto de la tarea está en un modo de representación dado, y se demanda que se realice una actividad que consiste en obtener esta relación-función en otro modo de representación.

Sin embargo, existen tareas cuyas características hacían inicialmente difícil su asignación atendiendo únicamente a su presentación textual. Consideremos, por ejemplo, la siguiente tarea:

TAREA 4.

La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un paciente con el paso del tiempo:



a) ¿Qué variables se relacionan? ¿Qué unidades tomamos para cada variable?
b) ¿Cuántos días ha estado enfermo el paciente? (Se considera normal una temperatura de 36.5 grados).
c) ¿Qué ocurre entre los días 2 y 5? ¿Qué ocurre el 6º día?
d) ¿Cuándo es máxima la temperatura? ¿Cuándo es mínima?
e) ¿En qué períodos su temperatura ha sido estable?

En este tipo de tareas toda la información que hay que procesar proviene del significado dado a la gráfica por el conocimiento del estudiante de este tipo de contextos. Las cuestiones están centradas en enfatizar el aspecto de ***relación*** entre dos magnitudes, puesta de manifiesto por la gráfica, y los cambios de esta relación. En esta tarea el "significado" proviene de la familiaridad del estudiante con el contexto (la tarea consiste en mostrar que la gráfica es un buen descriptor de la situación -relación).

En este caso, la forma textual de esta tarea es solo el modo gráfico, ya que el contexto que le dota de significado es tan cercano al estudiante que no es necesario realizar una descripción de esta situación (toda la información la proporciona la gráfica). Teniendo en cuenta, pues, la forma textual de la tarea la hemos asignado a la categoría 1.2 "Trabajo dentro de un mismo modo de representación. Modo gráfico".

En esta tarea, por ejemplo, el contexto (la situación) está muy próximo a la experiencia del estudiante, y por tanto no se hace necesaria la inclusión de ningún texto aclaratorio. La actividad que demanda esta tarea es doble:

i) que el estudiante identifique una situación de la que la gráfica es una representación, y

ii) las cuestiones planteadas intentan poner de manifiesto si la identificación anterior (situación-gráfica) es comprendida por el estudiante. Es decir, si el estudiante puede "leer" en la gráfica información relativa a la situación (traslación de significado).

Como consecuencia de este análisis, centrado en la naturaleza de la actividad que la tarea demanda, esta tarea puede ser considerada como "traslación entre modos de representación (gráfica-situación y viceversa)".

Considerando sólo la forma de presentación es por lo que se ha colocado en la categoría 1.2. ("trabajo dentro de un mismo modo de representación, modo gráfico"). A diferencia de esto, en las tareas que implican traslación entre modos de representación las características relevantes es que se presenta la relación-función en un modo de representación, por ejemplo descripción de una situación y piden dibujar una gráfica que represente las relaciones entre los cambios de las variables descritas. Así, desde el punto de vista del análisis realizado podemos considerar dos niveles: (i) la presentación textual de la tareas, y (ii) la presumible actividad cognitiva que la tarea demanda. En algunos casos, la propia presentación textual de la tarea es paralela a la actividad cognitiva que presumiblemente se genera (como en los ejemplos 1,2,3). Pero en otros casos no existe este paralelismo tan aparente entre la forma de presentación (incluida el tipo de cuestiones planteadas) y la actividad, como probablemente ocurre en el ejemplo 4. En estos casos hemos optado por considerar solo la forma de presentación.

Sin embargo, existe otro tipo de tareas en las que las preguntas están dirigidas a la lectura de la información que proporciona la gráfica, como en el caso anterior; pero, esta actividad (la lectura) se apoya, inicialmente, en la capacidad de relacionar una situación a la gráfica (ver tarea 5). Es decir, en la capacidad de relacionar una sucesión de "cambios" (sucesos) descritos en la situación con la gráfica. Por lo tanto, aunque esta tarea puede parecer idéntica a la anterior (una gráfica describe una situación, y unas cuestiones que indagan información sobre la situación apoyándose en la información que proporciona la gráfica) plantea una dificultad adicional puesta de manifiesto por la identificación gráfica-situación que en la tarea anterior se soslayaba por ser el contexto-situación de la relación próximo a la experiencia del estudiante.

En este caso por tanto la actividad que se pretende generar es doble:

– dotar de significado a la gráfica en función de la situación descrita, y

– obtener información de la situación "leyendo" en la gráfica.

Como consecuencia de este análisis podemos decir que en esta tarea, aunque haya una descripción de la situación y una gráfica, podemos considerar que tiene dos apartados diferenciados.

El emparejamiento entre la situación y la gráfica (interpretación, actividad necesaria para dotarla de significado) puede ser considerada como una actividad consistente en una "traslación entre modos de representación" (de situación a gráfica y viceversa) desde el punto de vista de que lo que se traslada es el 'significado'. Es decir este proceso de traslación es un paso necesario para dotar de significado a la gráfica. En segundo lugar, la lectura de esta que demanda las cuestiones planteadas, podemos considerarla una actividad entre modos de representación desde la perspectiva de que la información gráfica proporcionada por la gráfica se le dota de significado desde la situación. En este caso la gráfica desempeña un papel de instrumento (un medio a través del cuál) para obtener información de la situación. Este análisis pone de relieve que en determinados tipos de tareas, el contexto introduce 'demandas cognitivas' diferentes para tareas aparentemente iguales.

Desde el punto de vista textual de la presentación de la tarea, en este caso están presentes dos modos de representación (descripción de la situación y el modo gráfico), y la actividad que demanda consiste en:

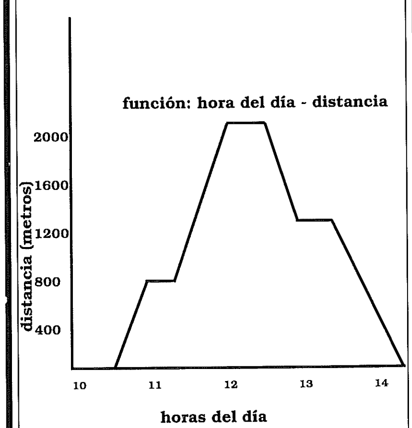
- dotar de significado a la gráfica a partir de la situación (traslación), y
- obtener información de la situación a partir de la lectura de la gráfica (forma idéntica a la tarea 4),

Inicialmente podemos considerarla como una tarea dentro del modo gráfico (por semejanza a la tarea 4), pero atendiendo a las características del modo de presentación (en particular, la no familiaridad del estudiante con la relación situación-gráfica) podemos considerarla traslación entre modos de representación, de situación a gráfica y viceversa.

Este análisis permite mostrarnos como tareas aparentemente iguales, en las que el modo gráfico se presenta como una descripción de una situación (como en la tarea 4 y 5) el contexto que proporciona el significado puede introducir matices en relación a la actividad que demanda su realización.

TAREA 5.

Juan y Ana han quedado para salir.Juan sale de su casa y tiene que esperar a Ana delante de su casa; después dan un paseo y deciden tomar un refresco en una cafetería. Al salir de la cafetería , y de vuelta a su casa, se encuentran con Jorge y Carmen y están un buen rato parados charlando; después continúan de regreso hacia su casa.
Ésta es la gráfica de la función "hora del día-distancia a casa de Juan".



a) ¿A qué distancia está la casa de Ana de la de Juan?
b) ¿Cuánto tiempo están en la cafetería?
c) ¿Cuánta distancia hay desde la casa de Ana a la cafetería?
d) ¿Durante cuánto tiempo han estado hablando con sus amigos?

Por lo tanto, la idea de traslación entre modos de representación puede llegar a tener varios significados como ha sido puesto de manifiesto en el análisis de las tareas utilizadas como ejemplo en esta sección.

Algunas reflexiones finales

El diseño, análisis o evaluación de tareas matemáticas para su utilización en las situaciones de enseñanza-aprendizaje son tareas fundamentales en la labor del profesor. Esta ocupación del profesor se puede hacer de forma implícita o de manera consciente. Tanto cuando se decide utilizar las tareas o actividades que aparecen en documentos ya elaborados (libros de texto, materiales de otros compañeros, etc) como cuando se piensa en la elaboración del propio material, la elección de las tareas a proponer a los alumnos en la clase viene determinado por lo que se quiere conseguir. Es decir, por lo que se pretende obtener como consecuencia de la actividad del alumno o alumnos al realizar la tarea.

Es, desde esta perspectiva, a través de la cual podemos pensar que la tarea que el profesor piensa proponer a sus alumnos (tanto si proviene del libro de texto como si forma parte del diseño de su propia unidad didáctica) debe llegar a ser el objeto de la actividad del estudiante. La actividad del estudiante con la tarea es un medio por el cual se consigue que se genere el aprendizaje matemático.

La elección de tareas a utilizar en clase viene determinada, desde nuestra perspectiva, por la idea de que la generación del conocimiento matemático en el aula está vinculado a la naturaleza de la relación que se origina entre el estudiante-la tarea y el mismo profesor con el propósito de conseguir un objetivo educativo predeterminado.

Colocar el énfasis en la relación entre la tarea y la presumible actividad generada por el alumno para resolverla, viene justificado por la necesidad de equilibrar, en la enseñanza de las matemáticas, el aspecto proceso y producto. En este contexto, las concepciones del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, etc. forman unos referentes psicológicos que determinan no sólo el tipo de tareas a presentar a los alumnos, sino también las características de la actividad que se genera con la tarea propuesta.

Con este transfondo pensamos que es interesante determinar algunos aspectos que permitan empezar a pensar en una aproximación sistemática a este trabajo del profesor. En el análisis presentado aquí elegimos la noción de función por ser una de los conceptos matemáticos más importantes que se desarrollan en el nivel de el Educación Secundaria Obligatoria. El objetivo fue identificar una posible tipología de tareas relativas a las funciones desde el punto de vista de las representaciones instruccionales empleadas y las traslaciones entre ellas (o dentro de ellas) que la tarea demanda.

En este sentido, el proceso seguido en la determinación de diferentes tipos de tareas pensamos que puede llegar a servir como un referente en el trabajo del profesor de secundaria al pensar en el diseño, análisis y evaluación de tareas relativas a las funciones. Como hemos descrito en otro ocasión (García y Llinares, 1993 a) la elección de tareas que van a constituir el núcleo del trabajo del estudiante en relación a las funciones no es un trabajo que esté exento de suposiciones epistemológicas implícitas.

La elección por parte el profesor de un determinado tipo de tareas, la presencia equilibrada entre unas u otras en el diseño de las unidades didácticas, la naturaleza de la actividad que los estudiantes tienen que realizar en las situaciones de enseñanza aprendizaje generadas en las aulas, etc. son aspectos que de alguna forma ayudan a caracterizar el concepto imagen de función que los estudiantes construyen como consecuencia de sus actividades generadas con las tareas propuestas.

El seleccionar libros de texto publicados en un amplio intervalo temporal, como fuente de las tareas analizadas, nos ha permitido considerar, en el sistema de categorías obtenido, un amplio conjunto de características. Colocar el énfasis sobre un determinado tipo de tareas puede subrayar un posicionamiento epistemológico determinado (García y Llinares, 1993). Esta aproximación cronológica ha permitido enriquecer el sistema de categorías globalmente obtenido. El producto final ha sido una tipología de tareas con funciones que pone de manifiesto el papel de las representaciones y sus conexiones entre sí en el proceso de aprendizaje de esta noción en el nivel 12-16.

Por otra parte, el análisis del proceso de aprendizaje del concepto función ha introducido recientemente la necesidad de considerar las diferentes perspectivas a través de las cuales se caracteriza la actividad que se genera con las tareas con funciones. Así por ejemplo, tener en cuenta el modo de representación utilizado (situación, gráfica, expresión algebraica, tablas) y lo que se pide que se haga (por ejemplo traslación entre los modos de representación) constituye un aspecto a considerar. Pero además, las características de la actividad potencial que el alumno puede generar con la tarea conlleva perspectivas diferentes para el concepto de función.

La actividad vinculada a las tareas en las que la función se contempla como una regla (un proceso en la que dada una cantidad, se realiza un proceso de cambio, y se obtiene otra cantidad de salida, se identifican claramente con la secuencia entrada-acción-salida) pueden ser diferentes a las características de la actividad vinculada a aquellas tareas en las que las funciones se ven como objetos, como entidades en sí mismas. Por ejemplo, una actividad generada para resolver una tarea que adopte una perspectiva objeto para la idea de función sería la desarrollada con familias paramétricas de funciones desde la forma algebraica o el análisis de familia de gráficas de funciones de segundo grado para determinar el efecto de diferentes parámetros sobre la forma de la gráfica. De forma particular podemos ver como las tareas que aparecen como ejemplos en este trabajo pueden demandar diferentes perspectivas (proceso, objeto). De esta forma podemos ver que dentro de un mismo tipo de tareas, desde el punto de vista del sistema de representación utilizado, la actividad que se genera puede adoptar una perspectiva proceso u objeto.

Esta relación entre la tarea, desde el punto de vista del sistema de representación utilizado, y la actividad vinculada es lo que hemos querido poner de relieve en la adopción de las dos dimensiones que consideramos se pueden tener en cuenta en el análisis de las tareas con funciones: representaciones instruccionales empleadas (y sus relaciones) y la perspectiva objeto o proceso desde la que se contempla la actividad potencial que se genera.

Por tanto, mientras el uso de representaciones o traslaciones entre ella puede estar más vinculado al aspecto de presentación de la tarea (o incluso de la pregunta que se plantea cuando la tarea consiste en realizar una traslación entre modos de representación), la perspectiva proceso u objeto esta más vinculada a la naturaleza de la actividad que se origina al intentar resolver la tarea por parte del estudiante. De todas formas no hay que olvidar que determinado tipo de tareas puede favorecer en sí mismo la adopción, por parte del estudiante, de una de las dos perspectivas para resolverla, o incluso determinarla univocamente como solía pasar con las tareas sobre funciones centradas en el modo algebraico que enfatizan la idea de función como una cadena entrada-acción-salida y que predominaron al principio de los año ochenta (García y Llinares, 1993).

Muchas son las voces que últimamente se han alzado señalando la importancia del nuevo papel que, en el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje, se asigna al profesor. Sin embargo, no hay que olvidar que ese nuevo papel implica nuevas responsabilidades, que hasta ahora no estaban presentes. El paso de considerar al profesor como un mero usuario de contenidos preestablecidos a creador del curriculum implica una serie de toma de decisiones, entre ellas, el diseño, análisis y selección de tareas que se van a utilizar. Esas decisiones deben estar fundamentadas teóricamente desde el punto de vista del aprendizaje (relación tarea-actividad), más allá de aspectos externos o de simple secuenciación. El tomar esas decisiones de manera consciente pasa a ser algo intrínseco a su labor profesional. Es en relación a este aspecto en el que pensamos que nuestro trabajo puede en algo contribuir.

Bibliografía

* BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., NICHOLS, D. y HAWKS, J. (1992): "Development of the process conception of function". **Educational Studies in Mathematics,** 23, 247-285.

* BROWN,J.S., COLLINS, A. y DUGUID, P. (1989): "Situated Cognition and the Culture of Learning", **Educational Researcher,** January-February, 32-42.

* DORMOLEN, VAN J. (1987): "Textual Analysis". En B. Christiansen et al. (Eds.) **Pespectives on Mathematics Education.** Reidel Pb. Co.: Dordrecht.

* DUBINSKY, E. y HAREL, G. (1992): "The nature of the process conception of function". En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) **The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy.** Mathematical Association of America: Washington, DC.

* GARCÍA, M. y LLINARES S. (1993): **El concepto función matemática: Un análisis de algunos libros de texto.** Documento no publicado del Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas), Universidad de Sevilla.

* GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1993 a): **El concepto de función a través de los textos escolares. Reflexión sobre una evolución.** Documento no publicado del Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas), Universidad de Sevilla.

* JANVIER, Cl. (Ed.) (1987): **Problems of the Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.** Lawrence Erlbaum: Hilldale:NJ.

* JANVIER, C. (1987 a): "Traslation processes in Mathematics Education". En

Janvier, Cl. (Ed.) (1987): **Problems of the Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.** Lawrence Erlbaum: Hilldale:NJ.

* KANG, W. y KILPATRICK, J. (1992): "Didactic Transposition in Mathematics Textbooks". **For the Learning of Mathematics,** 12(1), 2-7.

* KAPUT, J. (1991): "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes". En E. von Glasersfeld (Ed.) **Radical Constructivism in Mathematics Education.** Kluwer Academic Press: Dordrecht.

* KUCHEMANN, D. (1987): "Learning and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks". En P. Ernest (Ed.) **Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34**. School of Education. University of Exeter.

* LEINHARDT, G., PUTMAN R. y HATTRUP, R. (Eds.)(1992): **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching.** Lawrence Erlbaum Ass., Pbs.: Hillsdale, NJ.

* MOSCHKOVICH, J., ARCAVI, A. y SCHOENFELD, A. (1993): "What does it Mean to Understand a Domain?. A study of Multiple Perspectives and Representations of Linear Functions, and the connections Among Them". En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.) **Integration Research on the Graphical Representation of Functions.** Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ.

* OTTE, M. (1987): "What is a text?". En B. Christiansen et al. (Eds.) **Pespectives on Mathematics Education.** Reidel Pb. Co.: Dordrecht.

* SANZ, I. (1990): "Comunicación, Lenguaje y Matemáticas".En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) **Teoría y Práctica en Educación Matemática.** Alfar: Sevilla.

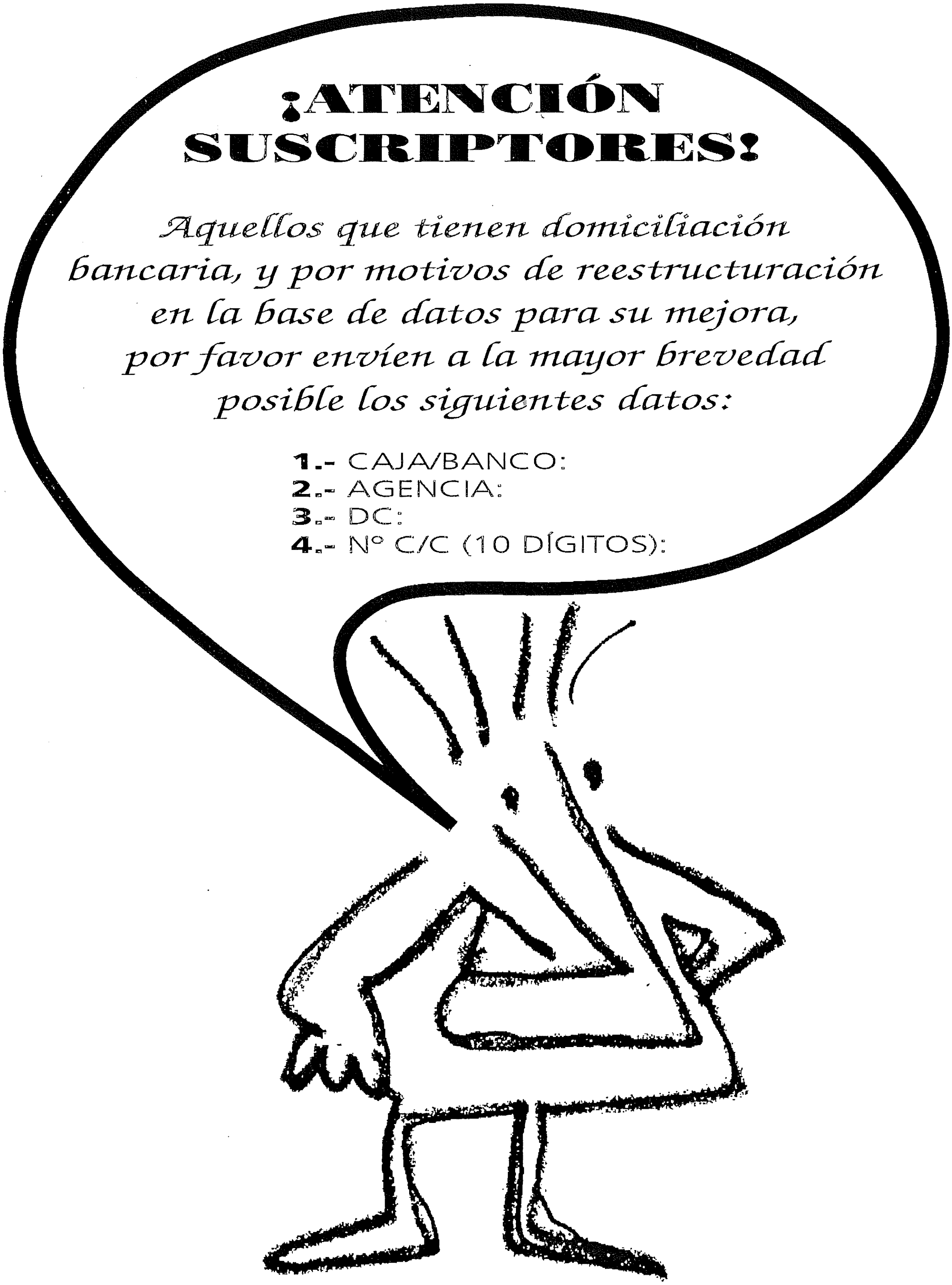
* SFARD, A. (1992): "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as diferent sides of the same coin". **Educational Estudies in Mathematics,** 22(1), 1-36.

* SHELL CENTER FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990): **El lenguaje de funciones y gráficas.** MEC. Centro de publicacioens.

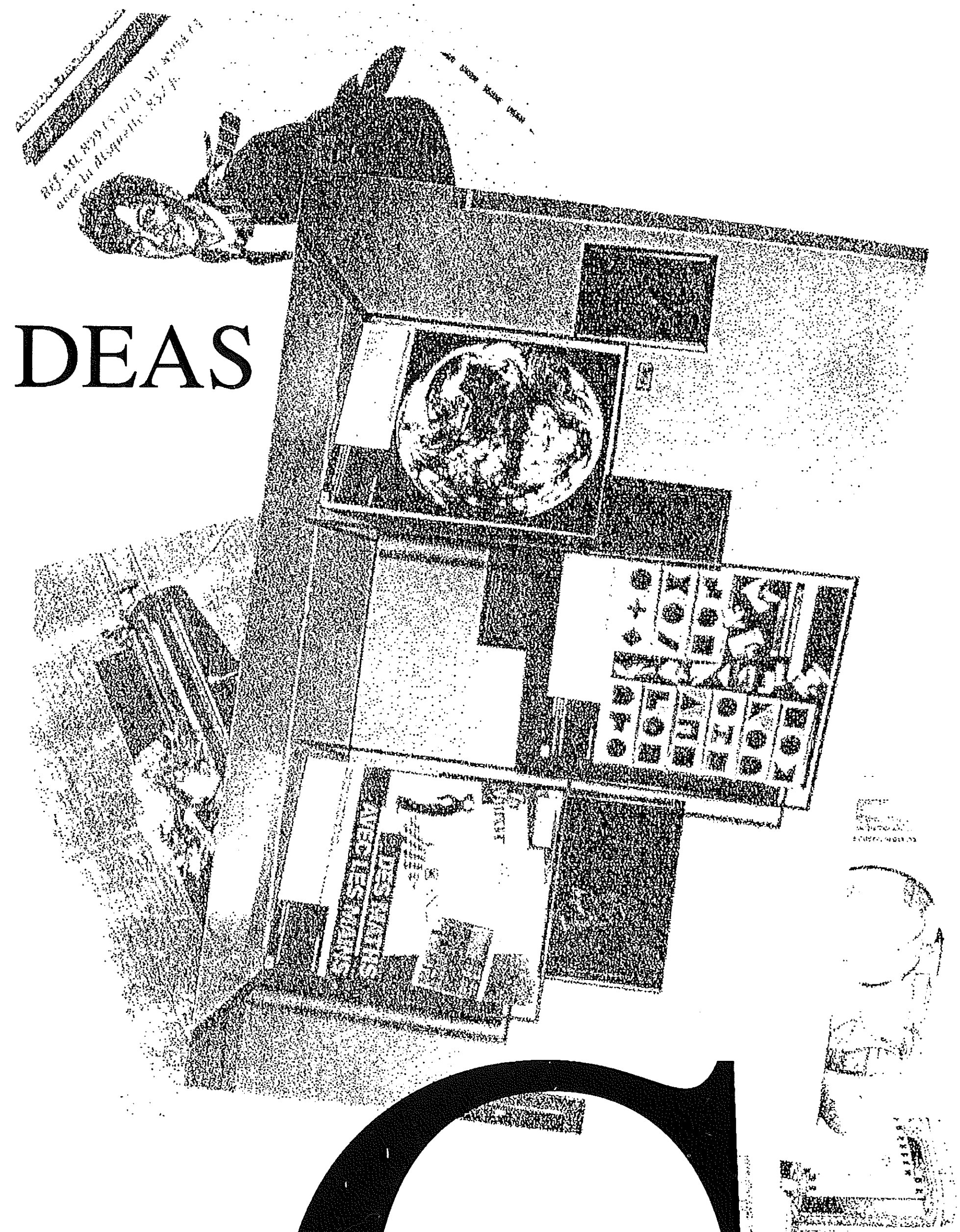
* SIERPINSKA, A. (1992): "On understanding the notion of function". En G. Harel y E. Dubinski (Eds.) **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.** Washington, DC: Mathematical Association of America.

* VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989): "Images and definitions for the concept of function»" **Journal for Research in Mathematics Education,** 20, 356-366.

Mercedes García Blanco
Salvador Llinares Ciscar
Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)
Facultad de Educación
Universidad de Sevilla


¡ATENCIÓN SUSCRIPTORES!
Aquellos que tienen domiciliación bancaria, y por motivos de reestructuración en la base de datos para su mejora, por favor envíen a la mayor brevedad posible los siguientes datos:
1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS):

IDEAS



PARA LA CLASE

El uso de cambio de variables en la resolución de derivadas "complejas"

Emilio M. Pina Coronado

Los problemas que presentan los alumnos/as a la hora de abordar la resolución de derivadas con un cierto grado de complejidad, que proviene fundamentalmente de su distanciamiento de la forma correspondiente a las derivadas inmediatas se pone de manifiesto, esencialmente, en dos aspectos:

- Dificultades a la hora de distinguir la función a derivar entre el conjunto que configura la propuesta.
- Dificultades en el cálculo y manejo de estructuras derivadas de una mala conceptualización de las operaciones y falta de perspectiva de transformaciones tendentes a un fin.

Ante esta situación, la utilización de cambios de variables, entendida como una generalización de la regla de la cadena puede contribuir a superar las mencionadas dificultades, ya que el objetivo final de las transformaciones consiste en llevar la situación problemática a modelos próximos a las inmediatas, fácilmente resolubles por los alumnos. Al mismo tiempo, y al presentar una gradación en la estructura de las operaciones facilita el proceso de resolución y simplificación, ya que las entidades con las que trabaja el alumno/a son menores en estructura y complejidad que las provenientes de un desarrollo directo. Por otra parte, al favorecer la búsqueda de vías alternativas fomenta el pensamiento divergente y la creatividad en los alumnos.

Así por ejemplo, ante una propuesta de la derivada de la función

$$y(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

el primer intento de los alumnos/as va dirigido a la aplicación de los esquemas de resolución de la derivada inmediata del logaritmo neperiano de x, y sólo en algunos casos la estrategia de resolución va dirigida, entre los alumnos/as, al logaritmo neperiano de f(x), donde suele tropezar con dificultades provenientes de la estructura interna de f(x).

La propuesta de trabajo mediante la utilización de cambio de variables se puede estructurar como sigue:

Dada la función:

$$u(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

propongo el cambio:

$$u(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

con lo que la función y su derivada quedarían como:

$$y(x) = \mathrm{Ln}\, u(x)\ ; \quad y'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Veamos ahora un segundo cambio:

$$t(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

y la función u(x) y su derivada u'(x) quedarían como:

$$u(x) = \sqrt{t(x)}\ ; \quad u'(x) = \frac{t'(x)}{2\sqrt{t(x)}}$$

Con lo que la derivada de la función original **y** se puede escribir como:

$$y'(x) = \frac{\dfrac{t'(x)}{2\sqrt{t(x)}}}{\sqrt{t(x)}} = \frac{t'(x)}{2\, t(x)}$$

queda sólo derivar **t(x):**

$$t'(x) = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$t'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Introduciendo **t'(x)** en la derivada de la función original y simplificando obtenemos el resultado final:

$$y'(x) = \frac{\dfrac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}}{2\,\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}} = \frac{-1}{\cos 2x}$$

Esta estrategia de trabajo ha sido probada con un grupo muestra compuesto por quince alumnos/as de tercero de BUP del I.B. "J. Martínez Ruiz" de Yecla, de distintos grupos, durante el pasado curso 92/93, quienes han presentado una efectividad media, entendida como la razón percentual entre situaciones problemáticas propuestas y resueltas satisfactoriamente, del 97.6% frente al 82.4% de sus compañeros. Sin embargo, lo realmente resaltable es la rapidez y seguridad que alcanzan los alumnos/as las mencionadas puntuaciones en la resolución, al mismo tiempo la claridad con la que accedían a la resolución de integrales por cambio de variables y por partes.

Emilio M. Pina Coronado
Asesor de Matemáticas CEP
Yeda (Murcia).

Una introducción a $\sqrt{2}$ como número que representa ciertas distancias

Joaquín Fernández Gajo
Emilio J. Muñoz Velasco

El presente artículo expone una introducción al número $\sqrt{2}$ basada en las ideas que nos sugieren algunos aspectos de la matemática griega, y en concreto el Libro V de los Elementos de Euclides. Con él pretendemos que el alumno "haga ciencia" en el sentido de que imponga hipótesis para que haya (o no haya) números que representen ciertas distancias o proporciones.

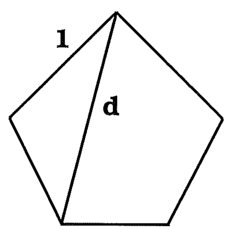
Introducción histórica

Para los pitagóricos todo era número. Su hipótesis de que un segmento continuo está constituido por un número natural de átomos les permitía comparar dos segmentos cualesquiera, siendo siempre conmensurables –es decir, existe siempre un segmento que es la menor medida común de ambos, que hoy día llamamos máximo común divisor–. En otras palabras, comparaban dos segmentos como si fuesen dos números naturales– hay que decir que la idea de proporción entre números naturales ya la tenían los pitagóricos–

$$(AB, CD) \approx (m, n)$$

El método que ellos tenían para obtener esa mayor medida común era el algoritmo de antiphairesis, análogo al algoritmo de Euclides pero para segmentos.

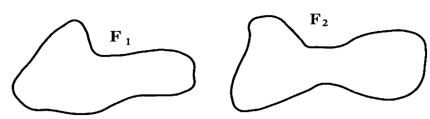
Su teoría de que todo era número no se contradecía si siempre que se aplicara el algoritmo de antiphairesis, éste tuviera un número finito de pasos, es decir, acababa. Sin embargo, esto no ocurriría siempre así: al aplicarlo a la comparación de la diagonal de un pentágono regular con su lado descubrieron que este proceso no acababa.



Esto era una catástrofe, echando por tierra su teoría de que todo era número. A partir de ahora la geometría no podría considerarse aritmética, sino que se tratarían por separado los segmentos y los números.

No obstante, y aunque Euclides trata por separado la proporción entre magnitudes y números, en la proporción 5 del Libro X afirma que "las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón que un número guarda con otro número" es decir, que los números hasta cierto punto se comportan de la misma forma que la magnitudes.

Si se quería usar ciertas proporciones y obtener resultados sobre ellas había que extender el concepto de proporción primero a áreas. Si, pero ¿Cómo comparar estas áreas?



Como las figuras cuyo borde son rectas se pueden comparar, si buscamos una figura C de igual área que F y otra figura D de igual área que G, el problema consistiría ahora en comparar C y D. Puntualizar que la equivalencia entre dos figuras planas lleva implícito el concepto de área desde un punto de vista más cualitativo que cuantitativo, seguramente porque los griegos no estaban muy interesados en la matemática aplicada. Su demostración de que dos figuras planas son equivalentes, se basan en resultados de congruencia de triángulos (proposición 4 del Libro I, que curiosamente es la única de este libro en la que se usan movimientos). Por ejemplo en la proposición 35 del Libro I se demuestra que "los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí".

Euclides usa este métodos en los Libros I, II y III, hasta que al parecer se le agota. Por eso se decide a tratar el tema de las proporciones en el Libro V que, según parece es obra de Eudoxo, aunque se considera que su organización y algunas variantes se deben al propio Euclides.

El libro V o libro de las proporciones

Este libro consta de 18 definiciones y 25 proposiciones. Como ya hemos dicho tratará de las proporciones entre magnitudes. Aunque Euclides no define lo que es una magnitud, suponemos que para él eran abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos: longitud en el caso de líneas, área en el caso de figuras planas, y volumen en el caso de sólidos.

Comienza este libro con las definiciones 1 y 2 de divisor –que llama parte–, y múltiplos.

A continuación –definición 3– define una razón como una especie de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de una misma clase. En esa definición no se define nada, al menos hasta que no se aclare el significado de la palabra relación. En este sentido, hay autores que afirman que razón es un concepto que se deja sentir más fácilmente que definir. Ha habido a lo largo de la historia diversas interpretaciones del significado de la palabra "relación" como cantidad o cuantiplicidad, es decir, número de veces que hay una cantidad en otra de la misma magnitud. Al parecer la más apropiada, según Heath, es la de magnitud relativa que no presenta dificultades de definición para magnitudes conmensurables (basta asociarlas a comparación entre números). Sin embargo, ¿qué sentido tiene la palabra relación entre magnitudes inconmensurables? La generalización de la idea de magnitud relativa para inconmensurables se basará en aproximaciones sucesivas. Pongamos el ejemplo del lado del cuadrado S y su diagonal D. S y D están en razón porque dado cualquier múltiplo de D, podremos encontrar dos múltiplos de los lados, de forma que uno de ellos sea menor y el otro sea mayor que el múltiplo de la diagonal.

$$1414213.S < 1000000.D < 1414214.S$$

La definición 4 es el postulado de Eudoxo-Arquimedes: "Se dice que tienen una razón entre sí dos magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra". Esta definición es equivalente a la proposición 1 del Libro X, que es fundamental en el cálculo infinitesimal.

La definición 5, que es la base de todo el Libro V, introduce la igualdad entre dos razones: "dícese que la razón de una magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas; o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales, o al mismo tiempo son inferiores, que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas". ¡Vaya muerto de definición! –habrá pensado el lector–. Para aclararla la presentamos con el lenguaje actual:

"X es a Y como Z es a W si, y sólo si para todo m,n se da lo siguiente:

Si $mX > nY$, entonces $mZ > nW$; o si $mX = nY$ entonces $mZ = nW$; o si $mX < nY$ entonces $mZ < nW$".

Esta definición, original de Eudoxo, es el verdadero embrión de la definición de número real de Dedekind; de hecho se basó en ella para la suya de "cortaduras":

"un número irracional x quedará definido por dos conjuntos A y B, tales que:

(I) A cada número racional se le asigna un elemento y sólo uno, de A o B.

(II) Cada número de A es menor que cada número en B".

(III) No existe último número en A ni primer número en B".

Esta construcción de los números reales implica que el orden y la topología de R no se pueden disociar, ya que un simple cambio del orden, en R, alteraría la topología de la recta.

Obsérvese que mientras en los Elementos no se tratan los incomensurables como números –véase proposición 11 del Libro V–.

Dedekind quiere construir un conjunto de números para expresar estas proporciones. Además, nótese que Dedekind no "inventa" el concepto de irracional, sino que crea una estructura abstracta en la que no haya contradicciones. Se trata de un cambio de modelo: el modelo geométrico de los griegos se sustituye por el modelo de conjuntos numéricos.

Puesta en práctica en el aula. Introducción de $\sqrt{2}$

Una observación se deduce de lo anterior, que implicará nuestra propuesta en el aula: las aproximaciones se usan para fundamentar o definir un número irracional, siendo la necesidad de fundamentación rigurosa esencial en el contexto de la matemática griega. Sin embargo esta fundamentación, a través de aproximaciones, carece de sentido para un alumno de 14 o 15 años ("tanto rigor ¿para qué?"). Creemos que el alumno logrará verle mas significado a las irracionales como número que representan distancias.

> **NOTA:** *no criticamos aquí el hecho d que el alumno busque aproximaciones decimales de irracionales, sino que use éstas como definición o fundamento para su introducción. Por ejemplo en algunos libros de texto se le da al alumno una sucesión de racionales que converge por la izquierda a $\sqrt{2}$ y otra análoga por la derecha, presentándole $\sqrt{2}$ como el número que queda en medio de las dos sucesiones. De este modo el alumno puede pensar que no ha sido lo suficientemente hábil como para descubrir nuestro número, cuando de lo que se trata es que lo invente él.*

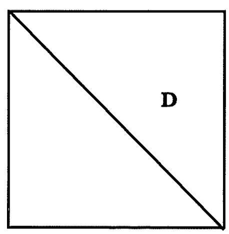
Suponemos conocidos por nuestros alumnos los números naturales, enteros y racionales.

Planteamos la siguiente cuestión: ¿Habrá un número que relacione la diagonal de un cuadrado con su lado?

Daremos los siguientes pasos:

a) Aunque los pitagóricos pensaron que ese "número" D venía dado por una fracción, se puede demostrar que esto no es cierto. (Creemos que para un curso de 1º de BUP esta demostración se debe omitir, aunque podría intentarse explicando previamente el algoritmo de antiphairesis y viendo que en este caso no acababa).

b) Si nos fijamos en el cuadrado de lado 1, por el teorema de Pitágoras:

1 

$D^2 = 1^2 + 1^2$

$D^2 = 2$

c) Por tanto, si queremos que D sea un número tendremos que crearlo de forma que cumpla las propiedades de D, es decir que su cuadrado 2, y lo llamaremos raíz cuadrada de 2, escribiendo $D = \sqrt{2}$.

Obsérvese que esta idea nos vale no sólo para construir $\sqrt{2}$, sino para obtener el conjunto de los números irracionales y, en general cualquier conjunto numérico, o cualquier concepto que venga dado por propiedades, por ejemplo:

– Si queremos expresar la característica común entre distintos grupos con la misma cantidad de cosas, inventamos los números naturales.

– Si queremos expresar numéricamente la diferencia entre dos números naturales, creamos los números enteros.

– Si queremos que existan unos números que expresen la relación entre dos enteros, los creamos y tendremos los racionales.

– Si queremos que todas las ecuaciones de 2º grado tengan solución, creamos unos números que representen estas soluciones y tendremos los números complejos.

– Si queremos que todos los vectores del mismo módulo, dirección y sentido sean iguales, inventaremos el concepto de vector libre, etc.

Así conseguiremos que el alumno "invente" en Matemáticas, creando ciertos entes abstractos para los que cobren sentido algunas propiedades intuitivas o que interesa que sean ciertas.

Bibliografía

* BOYER, CARL B., 1968. **Historia de la Matemática**. (Alianza-Universidad).
* DEDEKIND, RICHARD. Essay of the theory of numbers. I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers. "Dover Publications, INC. New York".

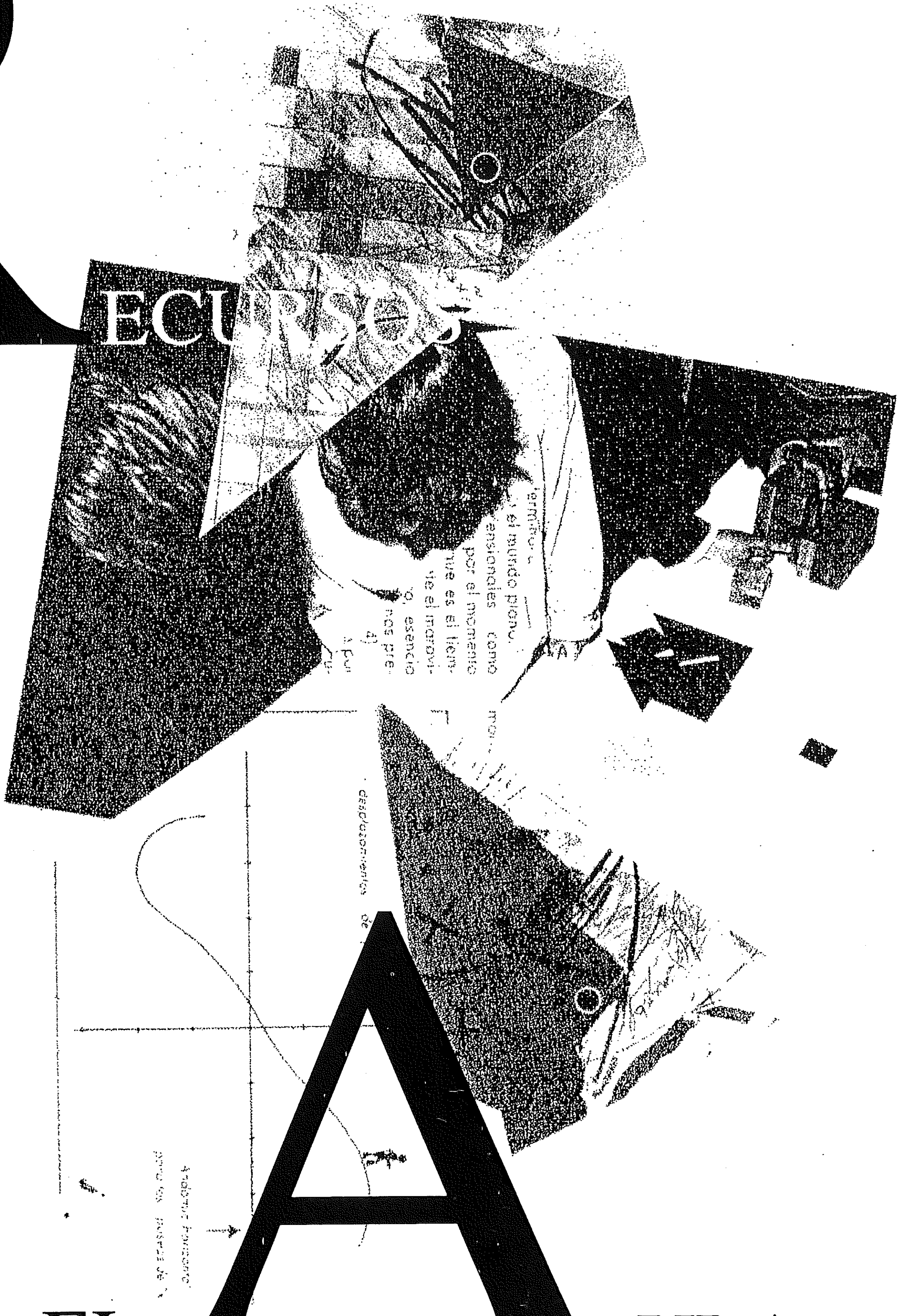
HEATH, SIR THOMAS L. **A History of Greek Mathematics**. (Dover).

HEATH, SIR THOMAS L. **The thirteen books of The Elements**. (Dover).

KHUN, TH S., 1981. **La estructura de las revoluciones científicas**. (Fondo de Cultura Económica, México).

Joaquín Fernández Gajo
Emilio J. Muñoz Velasco
I.E.S. Coin (Málaga)
I.E.S. Alozaina

RECURSOS PARA EL AULA



El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación

María Candelaria Espinel Febles

Introducción

La rapidez con que se producen los cambios en nuestra sociedad ocasiona que modelos matemáticos diseñados para resolver ciertos problemas resulten poco efectivos para dar solución a las necesidades de las siguientes generaciones.

Por ejemplo, en sentido amplio, se puede considerar que el Sistema Métrico Decimal surgió por las necesidades del hombre para pesar sus cosechas o medir sus tierras. Luego precisó medir grandes distancias a otros planetas, o pequeñas dimensiones como el átomo, y por ello se aportó la Notación Científica. Aunque estos modelos, evidentemente siguen siendo válidos, no tienen la misma proyección en la sociedad actual. La rapidez de los medios de transporte, como el «AVE» o el avión, ha determinado que las distancias tengan una importancia sólo relativa. Normalmente en la práctica, primero preguntamos en nuestra agencia de viajes si existe alguna línea aérea o terrestre que una dos ciudades determinadas y, después, nos interesamos por saber la distancia entre esas ciudades.

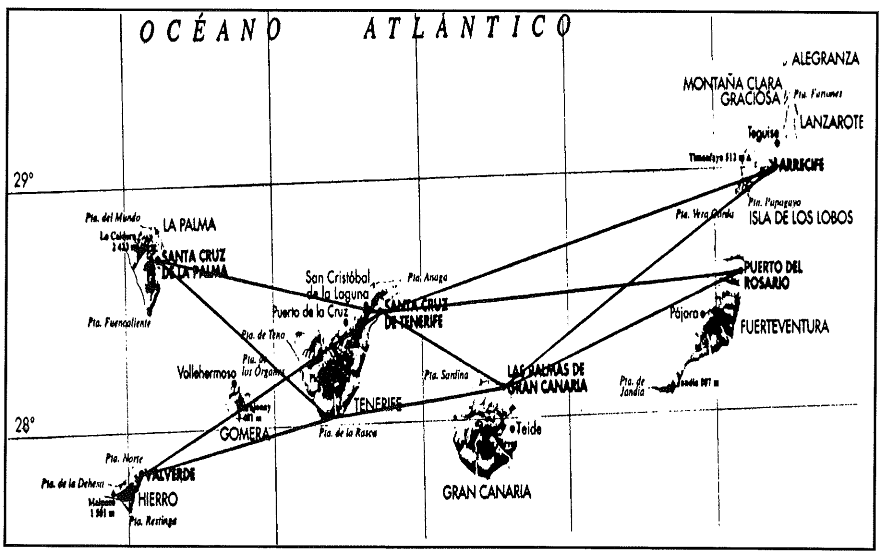
La humanidad tardó mucho tiempo en diseñar y unificar unas reglas de medida como el Sistema Métrico Decimal que hoy enseñamos en nuestras aulas. Sin embargo, serán muy pocos los alumnos que tendrán que pesar sus cosechas, o que utilicen una balanza. Sin embargo, muchos conducirán un coche y tendrán que elegir trayectorias donde los atascos sean menores o necesitarán consultar información de grandes redes de bases de datos.

En este trabajo expondremos algunos conceptos relacionados con teoría de grafos que pensamos deben incorporarse al curriculum de la enseñanza no univeritaria. Para nuestro desarrollo utilizaremos ejemplos de redes de transporte y comunicación del entorno, simulando el trabajo que también se podría desarrollar con los alumnos.

Análisis de redes. Ejemplificaciones

Algunas medidas fáciles de calcular y que aportan información sobre una red son los conceptos de:

- Conectividad,
- Accesibilidad y
- Centralización.



A continuación explicamos cada una de estos ejemplos ayudandonos de un ejemplo.

Conectividad

Ejemplo 1: Líneas maritimas y aéreas entre las Islas Canarias.

El anterior mapa muestra las líneas aéreas, entre las Islas Canarias, de la Compañia Binter según la revista «Ronda», 1994.

Un análisis de la red nos permite conocer el grado de comunicación o conexión aérea que hay entre las islas. La medida más simple del grado de conectividad de una red de transportes se puede obtener con el índice Beta. Este índice relaciona entre sí el número de líneas y el número de aeropuertos. En este caso el valor de esta medida es 10/7 = 1.43, es decir, este valor indica el índice de conectividad de las rutas de Binter en el mapa anterior.

Pero el grado de comunicación entre las islas no siempre ha sido tan rico como el que se muestra en el mapa anterior. No hace tanto años las comunicaciones usuales entre las islas eran a través de las líneas marítimas.

En la figura 1 se comparan distintas líneas marítimas mediante el índice Beta donde el número de islas permanece siempre igual a siete, mientras que el número de líneas que las une va aumentando.

Fuenteventura	F
Gran Canaria	GC
Lanzarote	L
Gomera	Go
Hierro	H
Palma	P
Tenerife	T

Líneas marítimas:

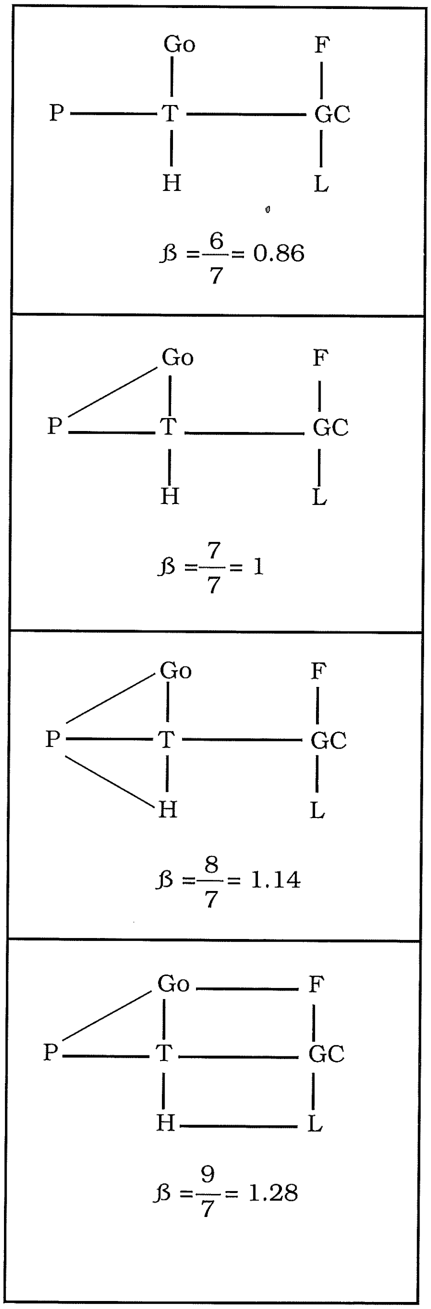


Figura 1

Líneas aéreas antes del aeropuerto Tenerife - Sur:

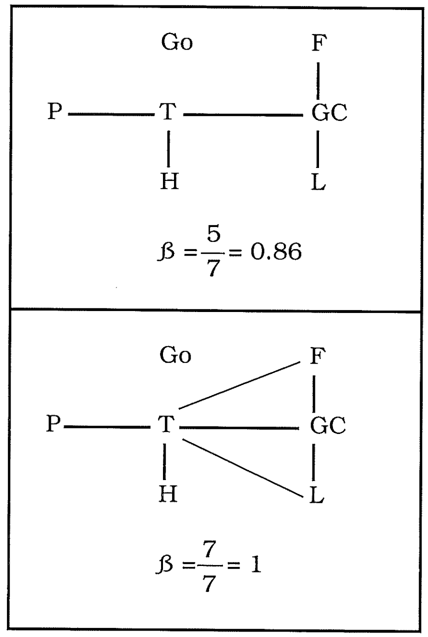


Figura 2

Consideremos un grafo G(V,A), donde V indica los vértices o nudos y A las aristas o rutas y sea $|V| = n$ y $|A| = k$. Se define el indice Beta como:

$$ß = \frac{k}{n}.$$

Si $ß < 1$ tenemos un árbol o un grafo no conexo.

Si el grafo es conexo:

$ß = 1$	un único circuito,
$1 < ß < 3$	red compleja con más de un circuito
$ß = 3$	grafo completo.

Los valores de este índice varían entre 0 y 3. Los valores inferiores a 1 indican árboles, el valor 1 indica un sólo circuito y valores superiores a 1 indican la presencia de más de un circuito. El valor 3 se alcanza cuando el grafo es completo, es decir, que entre dos vértices cualquiera hay una arista.

Otra forma de medir la conectividad de una red se obtiene al comparar el número real de aristas presentes con el máximo número posible. La relación se le conoce como índice gamma y se suele dar en porcentaje de forma que cuanto más se aproxime este valor a 100 más se acercará a la conectividad máxima.

$$\text{Grado de conectividad} = \frac{\text{(cantidad de conexiones existentes)}}{\text{(cantidad máxima de conexiones)}} \times 100$$

Hay que distinguir entre los grafos planares, que pueden representarse gráficamente en un plano único sin que las aristas se crucen excepto en los vértices, y los grafos no planares, en los que dicha representación es imposible.

El índice gamma para un grafo planar es

$$\gamma = \frac{k}{\binom{n}{2}} \times 100$$

y el índice gamma para un grafo no planar es

$$\gamma = \frac{k}{3(n-2)} \times 100$$

Las líneas aéreas suelen dar lugar a grafos no planares. En el caso de las líneas de Binter aunque el mapa se muestra como no planar, en la figura 3 se puede observar como realmente es un grafo planar. El índice gamma de este grafo es 47.6 y los índices gamma de las líneas marítimas representadas en la figura 1 son, respectivamente, 28.6, 33.3, 38.1 y 42.8.

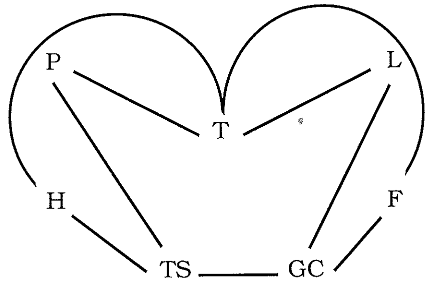
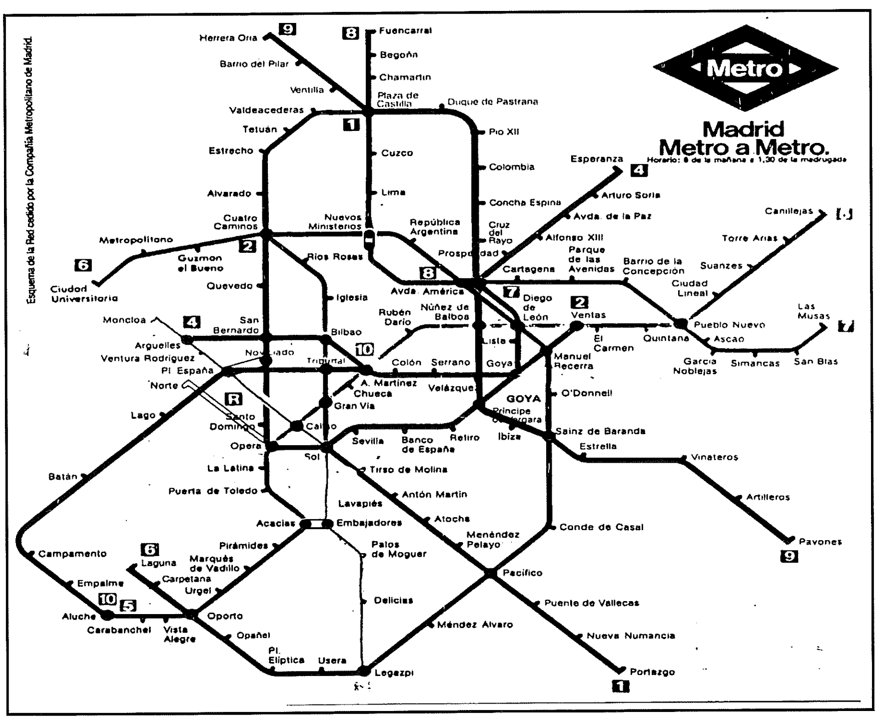


Figura 3

Accesibilidad

Ejemplo 2: Metro de Madrid.



Imaginemos que de las 10 líneas que forman el Metro de Madrid, dos están en obras, por ejemplo, las líneas 4 y 6. Sin estas dos líneas se puede llegar a todas las estaciones, excepto a las estaciones terminales de estas líneas. La red mantiene el número de vértices pero disminuye el número de aristas, es decir, la red es menos conexa.

La eficacia de una red de transporte depende del grado de conectividad y accesibilidad. Las medidas de conectividad y accesibilidad de una red se apoyan en la densidad o espesor de la red.

En geografía urbana y de transportes, se entiende por accesibilidad la mayor o menor facilidad de traslado de personas o mercancías entre el centro de una ciudad y su periferia y entre una ciudad y su región.

Para medir la accesibilidad de una red se utiliza el índice alfa.

El índice alfa para redes planares es

$$\alpha = \frac{k - n + 1}{2n - 5} \times 100$$

y el índice alfa para redes no planares es

$$\alpha = \frac{k - n + 1}{\binom{n-1}{2}} \times 100$$

Utilizando este último índice alfa para un grafo no planar, el Metro de Madrid arroja un índice de accesibilidad de 5.98 para 28 aristas y 28 vértices, mientras que si las líneas 4 y 6 están fuera de servicio el índice se reduciría a 1.14.

Teóricamente el índice alfa, tanto para redes planares como no planares, surge del estudio de los circuitos que componen un grafo. De modo general, si G denota un grafo conexo con n vértices y k aristas, cualquier árbol de expansión del grafo G, entendido éste como el árbol que llega a los n vértices, ha de tener n-1 aristas. Mientras que las aristas restantes, esto es, k - (n-1) conforman lo que se llama coárbol o esqueleto del grafo G. A este valor, k-n-1 se le conoce como **número ciclomático** de G o primer número Betti. El número ciclomático de un árbol es 0 y el de un grafo circuito es 1.

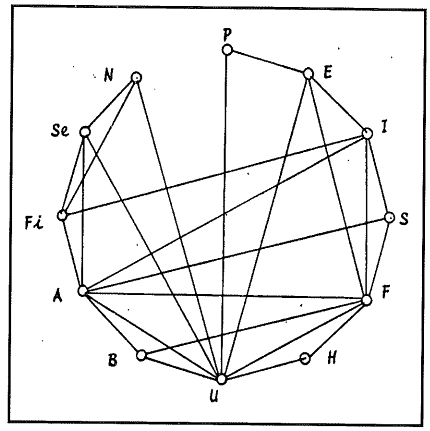
El índice alfa se obtiene de la relación entre el número de circuitos fundamentales dados por el número ciclomático y el máximo número de circuitos que vale 2n - 5 si el grafo es planar y $\binom{n-1}{2}$, o bien $\binom{n}{2}$ - (n-1), si el grafo es no planar. Cuando el índice alfa vale cero indica que la red es un árbol y según el valor de alfa aumenta hasta 100 se puede interpretar como un porcentaje de redundancia de aristas en la red.

Muchas veces interesa conocer la accesibilidad de cada vértice de la red en lugar de la red en conjunto. Para ello resulta muy adecuado el algebra de matrices. Dado la complejidad de la red del Metro necesitariamos métodos automatizados para el cálculo matricial. Tomaremos la siguiente red que tiene menos vértices.

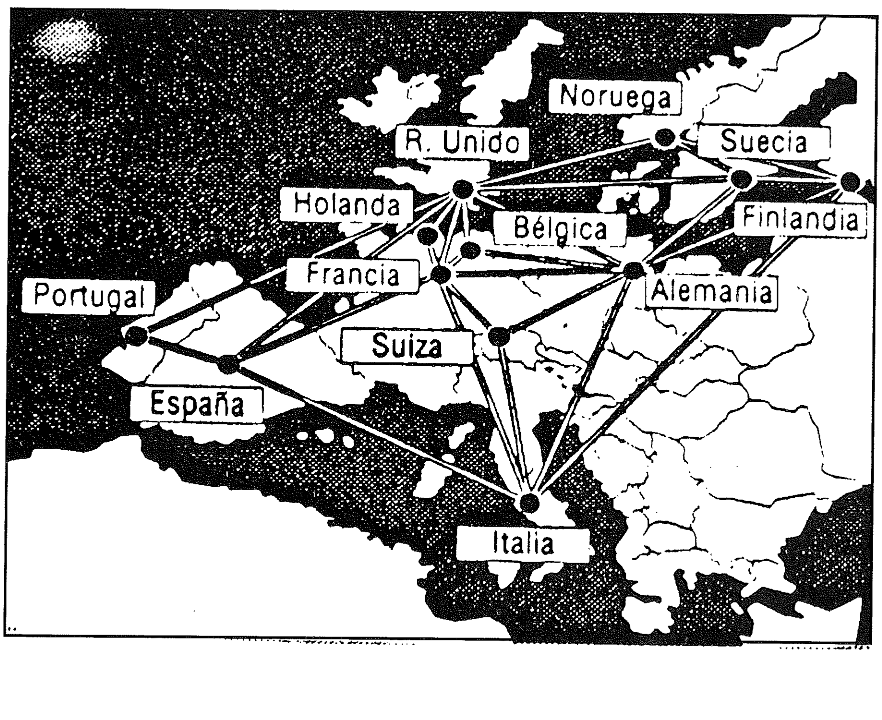
Ejemplo 3: Red Europea.

La siguiente información se ha tomado del periódico «El País» del 5 de abril de 1993, y muestra una red de telecomunicaciones entre 12 países de la CEE.

La red consta de 26 líneas de las 66 = $\binom{12}{2}$ posibles. Para indagar en la red utilizaremos el siguiente grafo y su codificación mediante diversas matrices.



Consideraremos las matrices como tablas de doble entrada donde se guarda información codificada. Una forma de codificar la red mediante matrices es asignar un 1 si alguna relación o condición es verdadera y 0 si es falsa.



La siguiente es una matriz de adyacencia entre países, que se construye poniendo un 1 si existe una línea entre dos países y un 0 si no existe tal línea, la llamaremos Σ.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} P & E & I & S & F & H & U & B & A & Fi & Se & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ E \\ I \\ S \\ F \\ H \\ U \\ B \\ A \\ Fi \\ Se \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al sumar por filas o por columnas en la matriz Σ se obtiene el número de líneas de cada país, esto es:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
2	4	5	3	7	2	8	3	7	4	4	3

El Reino Unido es el país con el mayor número de líneas directas, con 8 líneas, seguido de Francia y Alemania con 7.

A partir del grafo o de la matriz Σ, se puede observar que hay muchos países que no tienen línea directa entre sí. Para estos países resulta fundamental disponer de varias conexiones aunque sean indirectas con otros países. La siguiente matriz $\Sigma \times \Sigma$ da el número de formas distintas de conectar utilizando dos líneas, esto es utilizando un país como intermediario.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} P & E & I & S & F & H & U & B & A & Fi & Se & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ E \\ I \\ S \\ F \\ H \\ U \\ B \\ A \\ Fi \\ Se \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 8 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observamos que, por ejemplo, Portugal no tiene línea directa con Francia pero puede conectar con este país de dos formas distintas esto es vía España o via Reino Unido, así en la casilla (P,F) de la matriz anterior aparece un 2. España tampoco tiene línea directa con Alemania pero dispone de tres formas distintas utilizando dos líneas, a saber: E-I-A, E-F-A y E-U-A, por esto la matriz Σ^2 presenta un 3 en la casilla (A,E).

Por tanto la matriz de adyacencia Σ, resulta apropiada para analizar la accesibilidad de cada vértice, ya que al sumar las filas o columnas de la matriz se obtiene el grado de cada vértice. Además, puede utilizarse para encontrar las matrices: Σ^2, Σ^3, ..., Σ^n, donde los valores de las respectivas casillas (i,j) dan el número de formas distintas de ir del vértice i al vértice j en n pasos.

Centralización

Continuando con el ejemplo 3 de la red europea, la siguiente matriz recoge las trayectorias más cortas entre países. Los números de la tabla dan el mínimo de líneas necesarias para conectar dos países cualquiera.

	P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
P	0	1	2	3	2	2	1	2	2	3	2	2
E	1	0	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2
I	2	1	0	1	1	2	2	2	1	1	2	2
S	3	2	1	0	1	2	2	2	1	2	2	3
F	2	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	2
H	2	2	2	2	1	0	1	2	2	3	2	2
U	1	1	2	2	1	1	0	1	1	2	1	1
B	2	2	2	2	1	2	1	0	1	2	2	2
A	2	2	1	1	1	2	1	1	0	1	1	2
Fi	3	2	1	2	2	3	2	2	1	0	1	1
Se	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	0	1
N	2	2	2	3	2	2	1	2	2	1	1	0

Desde el punto de vista de la teoría de grafos, la información de la matriz anterior recoge la distancia más corta d_{ij} entre el vértice i y el vértice j. El **radio** de un grafo se define como la distancia mínima del grafo. El **diámetro** de un grafo es la distancia máxima que puede encontrarse en un grafo.

Para determinar el diámetro, se elige el máximo valor de cada fila o columna de la matriz distancia. A partir de la matriz se ve como Portugal, Suiza, Holanda, Finlandia y Noruega necesitan un mínimo de tres líneas para conectar con algunos países, por tanto el diámetro de esta red europea es 3.

El centro de un grafo es el vértice con la propiedad de que la distancia máxima entre ese vértice y los otros es la menor posible. No necesariamente el centro será un sólo punto.

Para hallar el centro sumamos los elementos de la matriz anterior por filas o por columnas y obtenemos:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
22	18	17	21	15	21	14	19	15	20	18	20

Resulta evidente que el Reino Unido es el centro de la red pues cumple que la distancia máxima entre él y los otros países es la menor posible.

A veces, para cuantificar la influencia de cada vértice se utiliza el índice de centralización que se obtiene del cociente entre la suma de los elementos de la matriz y la suma de las distancias del vértice i a los otros vértices.

Índice de centralización de cada vértice:

$$c_i = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij}}{\sum_j d_{ij}}$$

Los valores del índice de centralización de cada país se recogen en la siguiente tabla:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
10	12.2	12.9	10.5	14.7	10.5	15.7	11.6	14.7	11	12.2	11

Como se observa, el índice de centralización más alto lo sigue presentando el Reino Unido. Otros países bien comunicados son Francia y Alemania. Mientras que los peores comunicados son Portugal, Suiza, Holanda, Finlandia y Noruega. Resulta curioso que una isla sea el centro.

Sería interesante estudiar qué pasaría cuando se incorporen a «la banda de los 12» otros países como Grecia o bien los países del Este.

Reflexión final

Los modelos de la matemática tradicional resultan insuficientes para analizar y comprender las complejas redes de comunicaciones de la sociedad moderna.

Al mismo tiempo, el mundo en que vivimos es un espacio cada vez más pequeño por la facilidad de los desplazamientos y el volumen de información disponible. El avión y el tren de alta velocidad han determinado que en la práctica la distancia tenga una importancia secundaria siendo prioritaria la existencia de la línea de comunicación. Las «autopistas informáticas» estan imponiendo la ley del JUST IN TIME.

Algunos autores de libros de texto de segundo de BUP, como los dos que se citan en la bibliografia, para ayudar a sus alumnos a comprender las compleja redes de transporte de un país o las comunicaciones entre diversas naciones, utilizan los términos de conectividad, accesibilidad y lugar central.

Como hemos visto, los conceptos considerados, casi no requieren de otros conocimientos matemáticos, por otro lado dotan de significado a las matrices y dan la oportunidad de comenzar a enseñar la matemática de la utilidad.

Bibliografía

* CATTERMOLE, K.W. (1979) **Graph Theory and Communications Networks.** WILSON, R.J. AND BEINEKE, L.W. (Ed. by) Applications of Graph Theory. Academic Press.
* CLIFF,A. - HAGGETT, D. - ORD, K. (1979) **Graph Theory and Geography**. WILSON, R.J. AND BEINEKE, L.W. (Ed. by) Applications of Graph Theory. Academic Press.
* EDETANIA Grupo (1993). **Geografia** 2 BUP. ECIR.
* HAGGET, P.- CHORLEY, R.J. (1969). **Network Analysis in Geography**. Edward Arnold.
* HAGGET, P. (1988) **Geografía. Una sístesis moderna**. Omega.
* SÁNCHEZ, J. - ZÁRATE, A. (1989) **El mundo en que vivimos Geografía**. 2 BUP. SM.
* SMP 7-13 (1977). **The School Mathematics Project**. Further Matrices and Transformations. Cambridge University Press.
* WILSON, R.J. (1983) **Introducción a la teoría de grafos**. Alianza Universidad.

María Candelaria Espinel Febles
E.U.F.P.
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

La recta en el aprendizaje de los números negativos

Alicia Bruno
Antonio Martinón

Introducción

El papel de la recta en el aprendizaje de los números ha sido estudiado por diferentes autores, entre ellos, ERNEST (1985) distingue tres usos principales que tiene la recta en la enseñanza primaria: como un modelo de enseñanza o ayuda para ordenar números, como un modelo para las cuatro operaciones básicas, y como contenido mismo del curriculum de matemáticas. En este trabajo nos centramos, principalmente, en el segundo uso de la recta citado por ERNEST.

Algunos trabajos de investigación con números positivos han estudiado la comprensión que tienen los alumnos de la recta al usarla como modelo para representar las operaciones básicas. Es el caso de los trabajos de CARR y KATTERNS (1984) y de DUFOUR-JANVIER et al. (1987), investigaciones en las que se ponen de manifiesto algunas dificultades que tienen los alumnos al utilizar este modelo.

CARR y KATTERNS realizaron un estudio sobre los errores que cometen los alumnos al representar e interpretar sumas y restas en la recta. Para ello, encuestaron a 531 alumnos de Nueva Zelanda, de 9 y 13 años de edad, con preguntas similares a las empleadas en el segundo National Assessment in Educational Progress in Mathematics (NAEP), en Estados Unidos, de modo que pudieron comparar los resultados de los dos países. La conclusión principal a la que llegaron es que los niños de ambos países no comprenden el principio en el que se apoya el modelo de la recta para las operaciones de suma y resta.

Otras investigaciones (JANVIER, 1983; LIEBECK, 1990) se han centrado en el uso de la recta con los números negativos. En ambos trabajos se discute la efectividad de este modelo como ayuda para comprender las operaciones, en especial para la sustracción.

En este trabajo analizamos algunos aspectos del uso de la recta por parte de alumnos de 12-13 años, a partir de los datos obtenidos en una experiencia realizada sobre la enseñanza de los números negativos, en la que la recta se utilizó como un apoyo, tanto para su introducción como para la resolución de problemas. Los aspectos sobre los que nos detendremos son, entre otros:

1) los errores que cometen los alumnos al representar números en la recta, antes y después de la experiencia;
2) si diferencian la representación de estados y variaciones;
3) cómo representan en la recta las operaciones de suma y resta;
4) qué situaciones utilizan para dar sentido a los números y a las operaciones en función de que los datos sean dados numéricamente o representados sobre la recta.

Experiencia

Para realizar la experiencia trabajamos con 76 alumnos, de 12-13 años, pertenecientes a tres grupos de séptimo nivel de Educación General Básica, de dos colegios diferentes de Tenerife. Los grupos los llamaremos G1, G2 y G3.

Elaboramos un material de trabajo que recoge diversas actividades, adecuadas para realizar la extensión de los números positivos a los negativos. El material fue seguido por los alumnos de los tres grupos durante aproximadamente dos meses (4 ó 5 horas semanales). En el grupo G1 la experiencia fue realizada por el primero de los autores de este trabajo y en los otros dos por el profesor Miguel Morales.

En las actividades que realizaron los alumnos, los números aparecían en situaciones concretas, con el fin de que enriquecieran el significado de los números. Estas situaciones representaban:

- *estados* (e):
  "debo 6 pesetas",
  "la temperatura es de 6 grados bajo cero";
- *comparaciones* (c):
  "tengo 6 pesetas menos que tú",
  "hay 6 grados menos en Madrid que en Londres";
- *variaciones* (v):
  "perdí 6 pesetas",
  "la temperatura bajó 6 grados".

Además, estas actividades se referían a *contextos* distintos:

- deudas,
- temperaturas,
- nivel del mar,
- carretera,
- tiempo,
- ascensor.

Por otro lado, la operatoria de los números negativos se estudió a través de la resolución de problemas. En el caso de la suma y la resta, los problemas respondían a distintos tipos de estructura, dependiendo de las situaciones que aparecían en su enunciado (estados, comparaciones y variaciones). Las estructuras que se trataron fueron:

– *suma o resta de dos estados* (e_1 y e_2) *con resultado el estado total* (e_t):

$$e_1 \pm e_2 = e_t.$$

Ejemplo: "Juan tiene 8 pesetas y debe 15 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?".

– *suma o resta de un estado inicial* (e_i) *y una variación* (v) *con resultado el estado final* (e_f):

$$e_i \pm v = e_f.$$

Ejemplo: "La temperatura por la mañana era de 8 grados sobre cero. A lo largo del día la temperatura bajó 10 grados. ¿Cuál era la temperatura por la noche?".

– *suma o resta de dos variaciones* (v_1 y v_2) *con resultado la variación total* (v_t):

$$v_1 \pm v_2 = v_t.$$

Ejemplo: "Un buzo bajó 8 metros y posteriormente subió 11 metros. ¿Cómo ha variado su posición con respecto a la que tenía antes de moverse?".

- *suma o resta de una estado* (e_1) *y una comparación* (c) *con resultado otro estado* (e_2):

$$e_1 \pm c = e_2.$$

Ejemplo: "Un hombre nació en el año 34 antes de Cristo y una mujer nació 16 años después que él. ¿En qué año nació la mujer?".

Los problemas trabajados en la experiencia variaban también según la posición que tuviera el dato desconocido, con esto queremos indicar que también se realizaron problemas de los tipos: e_t-e_1=e_2 , v_t-v_1=v_2 , e_1-e_2=c, e_f-e_i=v. En este trabajo, siempre supondremos que los datos que da el problema son los dos primeros términos y que el dato a buscar es el otro término de la igualdad.

Más detalles acerca de la estructura de los problemas puede encontrarse en VERGNAUD (1982) y BRUNO y MARTINON (1994a, 1994b).

Uno de los objetivos fundamentales de la experiencia fue conseguir que los alumnos comprendieran que, al introducir los números negativos, los conceptos de adición y sustracción quedan unificados; es decir, que en el conjunto de los números reales toda suma se puede transformar en una resta y que toda resta se puede transformar en una suma. Esto nos parece esencial, ya que es en la adición y en la sustracción donde está el punto fundamental. Antes de la experiencia, los alumnos tenían la idea de que la suma y la resta se utilizan en situaciones distintas: sumar es "añadir", "juntar", "reunir"..., y restar es "quitar", "separar",... Ahora se trata de presentar situaciones que pueden resolverse por igual con una suma que con una resta. Esto es, sumar es también "restar el opuesto" y restar es "sumar el opuesto", no sólo desde un punto de vista operativo, sino dándole significado dentro de las situaciones que los alumnos habían trabajado.

A través de las actividades fuimos introduciendo a los alumnos en la idea de que las situaciones pueden expresarse de dos formas, aunque con un mismo siginificado. Por ejemplo,

- "debo 5 pesetas" es lo mismo que "tengo -5 pesetas",
- "tengo 5 pesetas" es lo mismo que "debo -5 pesetas",
- "subir 2 pisos" es lo mismo que "bajar -2 pisos",
- "bajar 2 pisos" es lo mismo que "subir -2 pisos".

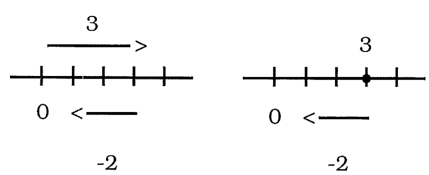
A partir de esto, un problema como "Juan tiene 6 pesetas y debe 10. ¿Cuál es su situación económica?", lo podían resolver por igual con el cálculo 6-10 que con el cálculo 6+(-10).

Por supuesto, conseguir este objetivo requiere un proceso de maduración que generalmente no se alcanza en los dos meses empleados para la experiencia, ya que se trata de modificar conocimientos fuertemente arraigados en los alumnos.

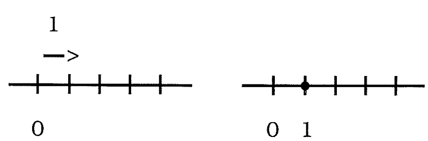
Se insistió en la representación de los números sobre la recta. Al principio se representaron situaciones numéricas correspondientes a los contextos antes mencionados (deudas, temperaturas, nivel del mar, carretera tiempo y ascensor) y más tarde se representaron los números en abstracto. Los alumnos aprendieron a representar los estados preferentemente con puntos y las variaciones y comparaciones preferentemente con flechas. Finalmente, la recta también fue utilizada como apoyo para resolver los problemas. Es importante resaltar que no se trabajó la representación en la recta de las operaciones de forma aislada o estrictamente numérica, sino que la recta siempre surgía como ayuda para la resolución de problemas.

JANVIER (1983) expone que la representación de la adición y de la sustracción con puntos y flechas en la recta puede ser ambigua para los alumnos, porque para una misma operación hay más de una representación, en algunos casos con puntos y en otros con flechas.

Por ejemplo, la suma 3+(-2) admite representaciones como



con respuestas



Efectivamente, estas representaciones pueden resultar ambiguas cuando no se dotan de significado concreto a los puntos y las flechas. Pensamos que con una aproximación de estas representaciones a través de la resolución de problemas, tal como hicimos en nuestra experiencia, puede conseguirse mejor comprensión del modelo.

Los alumnos realizaron pruebas en distintos momentos de la experiencia. Aquí nos referiremos a tres pruebas:

- Prueba Inicial: realizada antes de introducir los números negativos;
- Prueba Final 1: realizada al finalizar la experiencia;
- Prueba Final 2: realizada cinco meses después de terminar la experiencia;

Reproducimos en este trabajo las cuestiones de esas pruebas que tienen relación con la recta.

Los datos los hemos agrupado en dos apartados según el tipo de cuestiones: *representación en la recta* y *interpretación de números y operaciones.*

Representación en la recta

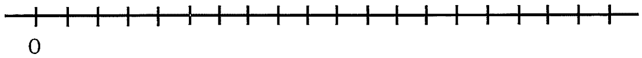
Debido a que las actividades que iban a realizar los alumnos estaban basadas en situaciones concretas, nos interesaba estudiar cómo representaban los alumnos los estados y las variaciones antes de la experiencia y cómo influyó la secuencia de aprendizaje en la forma de realizar las representaciones en la recta.

Las cuestiones que analizamos en este apartado están relacionadas con la representación en la recta y los enunciados aparecen en el cuadro 1. (Ver cuadro 1 en pág. siguiente).

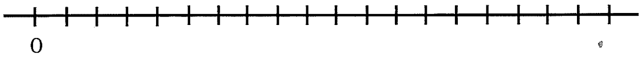
Por tanto, se pedía a los alumnos representar un estado (cuestión 1), una variación (cuestión 2), una situación que responde a la estructura $e_i \pm v = e_f$ (cuestión 3), una suma con

Cuadro 1. Enunciados de las cuestiones 1-5

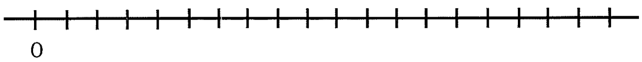
Cuestión 1. Representa en la recta la siguiente situación:
Estoy a 8 metros de altura



Cuestión 2. Representa en la recta siguiente situación:
Bajé 5 metros



Cuestión 3. Representa en la recta la siguiente situación:
Tenía 9 pesetas y perdí 5. ¿cuánto dinero me quedó?



Cuestión 4. Si tuvieras que utilizar la recta numérica o hacer un dibujo para explicar lo que significa la suma 4 + 3 = 7, ¿cómo lo harías?

Cuestión 5. Si tuvieras que utilizar la recta numérica o hacer un dibujo para explicar lo que significa la resta 6 - 2 = 4, ¿cómo lo harías?

números positivos (cuestión 4) y una resta con números positivos (cuestión 5). Las cuestiones 2, 3, 4 y 5 se les plantearon tanto en la Prueba Inicial como en la Prueba Final 2, con el fin de contrastar los errores que se cometían en ambas pruebas.

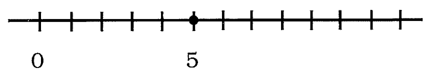
En el cuadro 2 damos los porcentajes de respuestas correctas e incorrecta de las cuestiones 1, 2 y 3. Hemos agrupado los datos de los tres grupos para facilitar la lectura.

Análisis de la Cuestión 1

Como puede observarse por los porcentajes de la Cuestión 1, en la que los alumnos tenían que representar "estoy a 8 metros de altura", las representaciones de estados las realizan con un alto grado de aciertos. La contestación más usual fue señalar un punto en la posición 8, y el error predominante fue empezar a contar las marcas de los números desde 0, y por lo tanto representar el 8 en la posición del 7.

Análisis de la Cuestión 2

Las representaciones que realizaron los alumnos de la situación "bajé 5 metros" en la Prueba Inicial demostraron que la enseñanza que habían recibido sobre los números positivos no les había llevado a diferenciar las representaciones de estados y variaciones, ya que la respuesta más frecuente fue similar a la dada para los estados, es decir



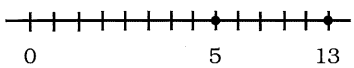
El error predominante fue similar al de la cuestión 1, es decir, en este caso colocar el número 5 en la posición del 4.

No se observan intentos de representar con segmentos, arcos o flechas el movimiento. La mayoría de los alumnos, entre el 100% y el 92% según los grupos, representan las variaciones con un punto en la recta.

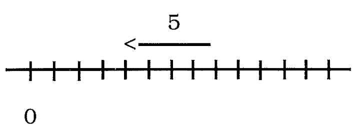
Cuadro 2. % en la Prueba Inicial y Final 2 de las cuestiones 1-3

	Cuestión 1		Cuestión 2		Cuestión 3	
	Correcto	Error	Correcto	Error	Correcto	Error
Prueba Inicial	93	7	74	26	28	72
Prueba Final 2			73	27	75	25

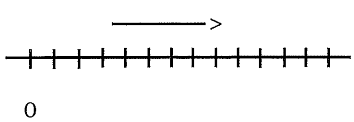
Hay muchos alumnos que muestran la necesidad de señalar una posición de partida para luego indicar la bajada, pero incluso en ese caso, el número 5 suele ser el punto final de la bajada y no la variación. De ahí que aparezcan algunos errores del tipo:



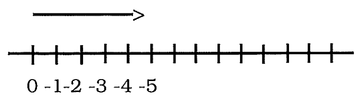
Los resultados son completamente distintos en la Prueba Final 2. Aunque el porcentaje de aciertos es similar en las dos pruebas, se produce un cambio en la forma de representar las variaciones y en el tipo de errores que se cometen. En esta prueba las representaciones de muchos alumnos son flechas o arcos orientados hacia la izquierda, indicando el movimiento (entre un 64% y un 100% según los grupos). También tienden a expresar el movimiento con el número -5. Los errores en esos casos consistieron en representar las flechas con cuatro unidades en lugar de cinco, es decir,



otro error fue orientar la flecha hacia la derecha:

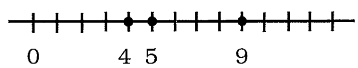


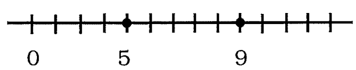
Una respuesta singular fue representar números negativos a la derecha del cero:



Análisis de la Cuestión 3

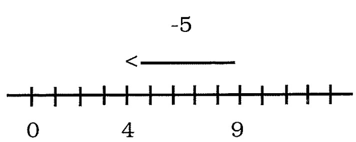
En esta cuestión sobre la representación en la recta de la situación "Tenía 9 pesetas y perdí 5, ¿cuánto dinero me quedó?", se produjo un cambio importante antes y después de la experiencia. El bajo índice de respuestas correctas de la Prueba Inicial para esta cuestión, nos indica que los alumnos tenían escasa experiencia en la representación de situación como la pedida. Los errores en este caso son muy diferentes, aunque los más frecuentes fueron los que aparecen a continuación:



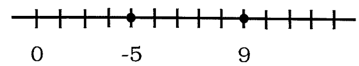


El primer error de los dos señalados indica una ausencia de significado concreto para la representación.

Esto cambia por completo en la Prueba Final 2. Se puede comprobar la mejora en todos los grupos, siendo la respuesta que más se repitió:



El error más frecuente en la prueba final 2 puede considerarse similar a uno de los de la prueba inicial, ya que fue:



Por lo tanto, podemos concluir que este tipo de enseñanza produjo una mejora significativa en las representaciones que realizan los alumnos de las situaciones estáticas y dinámicas. La experiencia realizada nos lleva a pensar que no es necesario retrasar este tipo de representaciones hasta la introducción de los números negativos. Pensamos que es posible hacerlo con anterioridad, ya que no observamos que los alumnos tuvieran excesivas dificultades en distinguir entre estados y variaciones. Por el contrario, sí observamos una falta de experiencia en el manejo de la recta, tanto en la representación de números como de situaciones concretas.

Análisis de las Cuestiones 4 y 5

Estas cuestiones sobre la representación de operaciones (suma y resta) son similares a las utilizadas en la investigación de CARR Y KATTERNS, con la diferencia que ellos no dieron la posibilidad de hacer un dibujo.

En los datos de estas cuestiones (cuadros 3 y 4) hemos distinguido los tres grupos, ya que a los grupos G2 y G3 no se les dió la opción de elegir entre hacer un dibujo o representar en la recta, sino que se les dijo que utilizaran la recta.

Cuadro 3. % de la cuestión 4

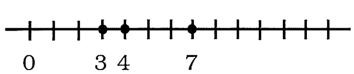
	% en la Prueba Inicial				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	9	9	61	4	17
G2	16	60	4	4	16
G3	18	78	–	–	4
	% en la Prueba Final 2				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	69	13	13	–	4
G2	68	23	–	–	9
G3	62	24	–	–	14

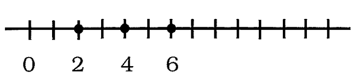
Cuadro 4. % de la cuestión 5

	% en la Prueba Inicial				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	9	9	56	4	22
G2	8	56	8	4	24
G3	15	81	–	–	4
	% en la Prueba Final 2				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Incorr.	Correcto	Incorr.	
G1	65	17	13	–	4
G2	67	24	9	–	–
G3	48	33	–	–	19

Por los resultados de la Prueba Inicial, puede comprobarse que en el grupo donde se les permitió elegir, (G1), los alumnos prefierieron hacer un dibujo antes que utilizar la recta, realizándolo con éxito en su mayoría. Mientras que en la prueba final tienden a emplear la recta. Esto es, por supuesto, una influencia de la instrucción recibida.

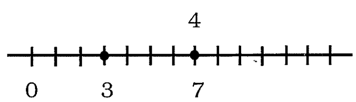
El error que cometen los alumnos en la Prueba Inicial, tanto en la suma como en la resta, es representar los números de forma aislada, es decir,

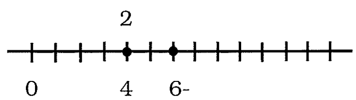


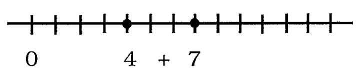


lo que denota, claramente, que los alumnos no daban significado a las operaciones en la recta. Este mismo error fue el encontrado con mayor frecuencia en la investigación de CARR y KATTERNS.

Incluso entre los alumnos que contestan correctamente, se observan otro tipo de errores, que podrían clasificarse como "errores de escritura", como los que exponemos a continuación:







Igual que ocurrió en la cuestión 3, los resultados de la Prueba Final 2 muestran una mejora considerable en las representaciones. Como puntualizamos en el apartado anterior, los alumnos no realizaron durante la experiencia, prácticas de representaciones de operaciones de forma aislada, sino que las representaciones siempre aparecían ligadas a problemas concretos. Entre las razones que CARR y KATTERNS dan a los errores que cometen los alumnos, está una insuficiente asociación de la recta con problemas verbales y un excesivo énfasis en actividades mecánicas. Los datos de nuestra experiencia demuestran que con una aproximación didáctica de las operaciones, dotándolas de significado concreto y apoyándolas en representaciones en la recta, se puede llegar a abstraer el sentido de las operaciones y puede conseguirse un buen uso del modelo.

Interpretación de números y operaciones

Como ya hemos indicado, estudiamos también las interpretaciones o significados que dan los alumnos de las operaciones suma y resta. En un trabajo anterior (BRUNO y MARTINON, 1994a; 1994b) dimos una primera aproximación a este tema, analizando los contextos y las estructuras empleadas por los alumnos al inventarse situaciones que puedan resolverse a través de operaciones dadas.

Para complementar aquel trabajo, hacemos ahora un estudio similar pero con algunas variantes metodológicas. Primero, el proceso de enseñanza que siguieron los alumnos fue distinto en las dos experiencias, ya que los alumnos en el presente caso, han recibido una enseñanza en la que los conceptos de suma y resta aparecen unificados. Segundo, hemos introducido un nuevo contexto, el ascensor. Tercero, se trabajó con más intensidad en los problemas del tipo $e_1 - e_2 = c$ y $e_f - e_i = v$, debido a la dificultad que encontraron los alumnos al trabajar con estos problemas. Y cuarto, contrastamos las interpretaciones cuando se les da una operación y cuando se les presentan los números representados en la recta.

Las cuestiones fueron respondidas en la Prueba Final 1. De ahí que los contextos empleados por los alumnos están influenciados por la enseñanza recibida en esos momentos y nos sirvió para comprobar cuáles eran los contextos más cercanos y empleados con más facilidad, lo cual no lo hemos interpretado como una ausencia de conocimiento de los otros contextos.

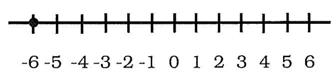
En el cuadro 5 aparece un primer grupo de cuestiones en las que se les pedía escribir situaciones concretas en donde utilizar los números dados o representados en la recta.

Cuadro 5. Enunciados de las cuestiones 6-9.

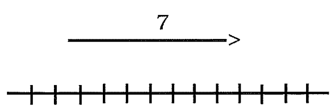
Cuestión 6. Escribe una situación en la que emplees el número 6.

Cuestión 7. Escribe una situación en la que emplees el número –8.

Cuestión 8. Escribe una situación en la que emplees el número representado en la recta:



Cuestión 9. Escribe una situación en la que emplees el número representado en la recta:



Los datos del cuadro 6 en las cuestiones 6 y 7 muestran la preferencia o inclinación de los alumnos a utilizar estados antes que variaciones, siendo la expresión más comúm "tengo 6....." o "debo 8....". Por otro lado, los resultados de las cuestiones 8 y 9 confirman que los alumnos distinguen por su representación los estados y las variaciones, ya que la representación de un número con una flecha les sugiere ejemplos de transformaciones (pérdidas, bajadas, etc.).

Cuadro 6. % de "estados" y "variaciones" en las cuestiones 6-9.

	Estados	Variaciones	Blanco
Cuestión 6	75	14	11
Cuestión 7	71	20	9
Cuestión 8	74	10	16
Cuestión 9	11	77	12

Desde el punto de vista de los contextos (cuadro 7), lo más significativo es comprobar como se amplían los contextos empleados en las cuestiones 8 y 9 frente a las cuestiones 6 y 7. Los números señalados en la recta sugieren a los alumnos situaciones distintas de las que les sugieren los números en abastrato. Por tanto la representación en la recta permite a los alumnos demostrar una mayor riqueza de conocimiento relativo a las utilidades de los números. Así, contextos como el ascensor o la carretera, aparecen en los ejemplos que dan los alumnos cuando tienen una imagen gráfica.

En un segundo grupo de cuestiones los alumnos debían inventar una situación o problema que se resolviese utilizando una operación dada (cuestiones 10, 11, 12 y 13) o utilizando los números representados en una recta que respondían a una posible representación de suma o resta (cuestiones 14 y 15). Los enunciados son los que aparecen en el cuadro 8. (Ver cuadros 7 y 8 en página siguiente).

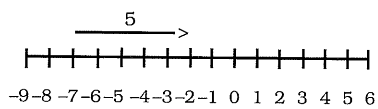
Cuadro 7. % de contextos en las cuestiones 6-9.

	Deber-tener	Temperatura	Nivel-mar	Carretera	Tiempo	Ascensor
Cuestión 6	71	5	4	3	–	6
Cuestión 7	64	9	14	3	–	–
Cuestión 8	35	19	10	9	3	14
Cuestión 9	9	16	9	24	–	32

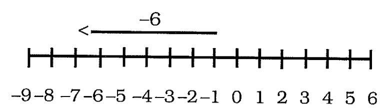
Cuadro 8. Enunciados de las cuestiones 10-15

Escribe una situación que se resuelva utilizando los siguientes operaciones:

Cuestión 10. –10 – 5.
Cuestión 11. –4 + 13.
Cuestión 13. 8 – (–6).
Cuestión 14.



Cuestión 15.



Cuadro 9. Enunciados de las cuestiones 10-15

	$e_1 \pm e_2 = e_t$	$e_i \pm v = e_f$	$v_1 \pm v_2 = v_t$	$e_1 \pm c = e_2$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	**Blanco**
Cuestión 10	50	23	13	1	–	3	10
Cuestión 11	29	46	11	3	–	4	7
Cuestión 12	50	6	17	7	–	2	18
Cuestión 13	34	29	8	1	1	9	7
Cuestión 14	2	66	3	1	14	6	8
Cuestión 15	11	59	8	5	9	9	–

Los datos del cuadro 9 confirman dos de los resultados de nuestra anterior investigación. Por un lado, el tipo de estructura que emplean los alumnos cambia dependiendo del tipo de operación dada. Así por ejemplo, para la operación **-10-5**, la estructura por la que más se inclinan es $\mathbf{e_1\text{-}e_2=e_t}$, mientras que para la operación **-4+13** la estructura más empleada es e_i+v=e_f.

Por otro lado, los problemas del tipo $\mathbf{e_f\text{-}e_i=v}$ **y** $\mathbf{e_1\text{-}e_2=c}$ están poco arraigados en el conocimiento de los alumnos, y aunque en esta experiencia se mejoró con respecto a la anterior, ya que hay más alumnos que muestran dominar estos tipos de problemas, encontramos que son estructuras difíciles de interiorizar por los alumnos. Una de las razones de este hecho es que son, efectivamente, estructuras más complejas que el resto. Pero también se une la falta de experiencia previa de estos tipos problemas con números positivos. De hecho para nuestros alumnos, antes de la experiencia, la suma con números positivos tenía un significado que respondía a las estructuras $\mathbf{e_1+e_2=e_t}$ y $\mathbf{e_i+v=e_f}$, mientras que la resta respondía a la estructura $\mathbf{e_i\text{-}v=e_f}$, es decir, sumar era "juntar" o "añadir" y restar era "quitar". Muy pocos alumnos mostraron utilizar la resta como "diferencia de dos estados", es decir, como $\mathbf{e_f\text{-}e_i=v}$ o como $\mathbf{e_1\text{-}e_2=c}$.

Llama también la atención el hecho de que al introducir los números negativos, la resta ya no siempre tiene un significado en la estructura $\mathbf{e_i\text{-}v=e_f}$, como ocurre con los positivos, sino que entre los ejemplos que escriben los alumnos se da con basatante frecuencia la estructura $\mathbf{e_1+e_2=e_f}$.

Observando ahora las situaciones utilizadas para las cuestiones 14 y 15, podemos ver una cambio en las estructuras elegidas, produciéndose un abandono de la estructura $e_1 \pm e_2 = e_f$ e inclinándose hacia la estructura $e_i \pm v = e_f$. Lo cual es razonable porque el tipo de representación es menos adecuada para la estructura $e_1 \pm e_2 = e_t$, ya que se debería interpretar un estado con una flecha. También en estas preguntas aumentan ligeramente el empleo de las estructuras $e_f - e_i = v$ y $e_1 - e_2 = c$, lo que demuestra la importancia de utilizar este tipo de representación gráfica para conseguir una comprensión de la misma.

Cuadro 10. % de contextos empleados en las cuestiones 10-15.

	Deber-Tener	Temperatura	Nivel-mar	Carretera	Tiempo	Ascensor
Cuestión 10	73	1	5	10	-	-
Cuestión 11	77	5	4	3	-	4
Cuestión 12	74	2	3	2	-	1
Cuestión 13	69	3	4	2	-	4
Cuestión 14	10	20	9	21	-	32
Cuestión 15	50	11	23	4	-	12

En el caso de los contextos, la diferencia no se producen entre las distintas operaciones, como ocurría con las estructuras, sino entre lo numérico y lo gráfico. Es curioso observar, como al presentarles los números en la recta, se deja el contexto deber-tener, surgiendo otros contextos escasamente empleados en las operaciones, como son la temperatura, el nivel del mar, la carretera y el ascensor. Al igual que ocurrió en nuestra anterior experiencia, el contexto tiempo no se utiliza, y sin embargo llamamos la atención del lector hacia el contexto "ascensor" que parece ser bastante cercano para los alumnos.

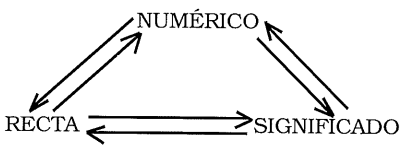
CONCLUSIONES

Como ya comentamos en el primer apartado, algunas investigaciones realizadas (LIEBECK, 1990; JANVIER, 1983) demuestran que la recta puede ser causa de muchas dificultades, en especial para dar sentido a la resta de números negativos. La experiencia que hemos realizado recoge, efectivamente, dichas dificultades en la resta. Sin embargo, pensamos que puede ser utilizada como modelo para las operaciones siempre que su uso se dote de significado concreto, empleando una variedad de situaciones y estructuras que den sentido a las representaciones y movimientos en la recta. Desde luego que este enfoque de la enseñanza de los números sería más efectivo si se sigue desde el aprendizaje de los números positivos.

Al analizar los errores que cometían los alumnos al representar en la recta la suma y resta de números positivos, encontramos una falta de experiencia, casi generalizada, del modelo de la recta. De hecho, al igual que ocurrió en la muestra de Nueva Zelanda (CARR and KATTERNS, 1984), nuestros alumnos representaron los números de forma aislada sin darle sentido operatorio. Sin embargo, pudimos comprobar que con una secuencia de aprendizaje, en la que la recta sirvió como apoyo para resolver problemas, nuestros alumnos llegaron a abstraer el sentido operatorio de las representaciones en la recta. Por tanto, no fue necesario hacer prácticas mecánicas de las representaciones en la recta, sino que llegaron a una comprensión de las mismas por medio la resolución de situaciones aditivas.

También encontramos en esta investigación, que las representaciones en la recta facilita a los alumnos el empleo de situaciones distintas y les sugieren o inducen al uso de contextos y estructuras diferentes, dándoles la posibilidad de tener mayor riqueza de conocimiento acerca de las utilidades de los números. Sin embargo, es necesario tener en cuenta a la hora de elaborar secuencias de aprendizaje, que al menos en lo referente a los números negativos, los alumnos tienden a emplear con más frecuencia las situaciones estáticas frente a las variaciones o comparaciones, y que el contexto deber-tener predomina sobre los otros, siendo un claro indicador de que es el que mejor entienden.

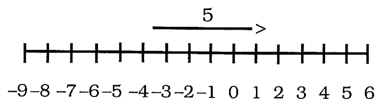
En nuestra investigación hemos contemplado tres aspectos sobre el aprendizaje del número, el estrictamente numérico, el gráfico (la recta) y el de significado. Estamos interesados en comprobar cómo entienden y se desenvuelven los alumnos en estas distintas facetas con los números negativosy cómo las relacionan entre sí:



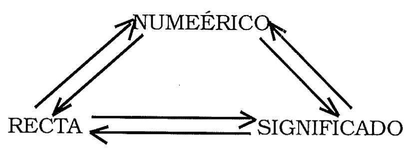
Las observaciones nos llevan a concluir, provisionalmente, que los alumnos no tienen un conocimiento homogéneo de la adición y de la sustracción, en el sentido de que no las utilizan con el mismo grado de efectividad en todos los casos. Así, para las situaciones $\mathbf{e_i \pm v = e_f}$, los tres aspectos anteriores están perfectamente interrelacionados para la mayoría de los alumnos, es decir, que pueden pasar de uno a otro sin ninguna dificultad. Por ejemplo, pueden comprender que un problema del tipo:

"La temperatura por la mañana era de 7 grados bajo cero. A lo largo del día la temperatura subió 5 grados. ¿Cuál era la temperatura por la noche?

se resuelve con la operación -7+5, e incluso pueden llegar a representarlo en la recta:



O viceversa, si se les da la recta anterior pueden escribir la operación -7+5 o inventar una situación, como la citada sobre temperaturas, para describirla. Es decir, que el conocimiento va en las distintas direcciones:



Sin embargo, para otras estructuras, como $\mathbf{e_f - e_i = v}$ **o** $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$, gran parte de los alumnos son incapaces de pasar de la recta a lo numérico, o de lo numérico al significado, o en las que para pasar del significado a lo numérico tiene que apoyarse necesariamente en la recta, etc.

Lo deseable sería que pudiesen integrar estos tres aspectos del uso de los números para todas las estructuras (incluyendo los cambios de posición de la incógnita).

Bibliografía

* BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994a): "Contexts and structures in the learning of negative numbers". **Proceedings of the XVIII Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Lisboa, 1, 32.

* BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994b): "Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos". **Suma** (pendiente de publicar).

* CARR, K. y KATTERNS, B.: 1984, "Does the number line help?". **Mathematics in School,** 13, 4, 30-34.

* DUFOUR-JANVIER, B., BEDNARZ, N. y BELANGER, M. (1987): "Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation". In Janvier, C. (ed), **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.** Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

* ERNEST, P.: 1985, "The number line as a teaching aid". **Educational Studies in Mathematics** 16, 411-424.

* JANVIER, C.: 1983, "The understanding of Directed Numbers". **Proceedings of the XV Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematicas Education,** Montreal, 295-301.

* LIEBECK, P.: 1990. "An intuitive model for integer arithmetic". **Educational Studies in Mathematics** 21, 221-239.

* VERGNAUD, G.: 1982, "A classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems". In Carpenter, T. Moser, J. and Romberg, T. (eds), **Addition and Subtraction: A cognitive pers-pective**. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Alicia Bruno. Antonio Martinón
Universidad de la Laguna

Las calculadoras en las clases de Matemáticas

José Antonio Mora Sánchez

Las calculadoras y los problemas matemáticos

Las calculadoras han entrado en las clases de matemáticas para ocupar un espacio que les ha permitido convertirse en una herramienta natural. Los estudiantes las utilizan con desparpajo y el profesorado las ve ya con menor recelo.

Las calculadoras realizan con facilidad ciertas tareas rutinarias, con ello facilitan que parte del tiempo y del esfuerzo que hasta ahora se les dedicaba, se pueda destinar a la adquisición de nuevas experiencias. Permiten igualmente concentrar intereses en la comprensión de los matemáticos y en *desarrollar nuevas estrategias de razonamiento.* Es este último efecto que subrayamos el que pasamos a analizar en el presente artículo.

En estos momentos de aparente consenso en el debate sobre la utilización de las calculadoras, es cuando resulta pertinente indagar acerca dela forma en que influyen estos aparatos en tareas habituales de la matemática escolar de todos los niveles. Los algoritmos para el cálculo, los métodos de resolución de ecuaciones, las operaciones con matrices, el cálculo de límites o la representación de funciones son algunos ejemplos de un amplio abanico de tareas matemáticas que habrá que revisar a la luz de los nuevos recursos tecnológicos.

Todo esto no es más que una parte del problema más amplio que constituye la cada vez más necesaria revisión de los contenidos de la matemática escolar, tanto en lo referente a los conceptos, como a los procesos, a las estrategias de resolución de los problemas matemáticos y a la actitud con que se enfrentan a ellos.

Resolución de ecuaciones

Hasta los más convencidos de la introducción de las calculadoras en las clases de matemáticas habremos de admitir ciertas resistencias –a veces paralizadoras–, a comparar los métodos que propician las calculadoras con los métodos clásicos de las matemáticas escolares, resistencias que se acrecientan cuando llegamos al terreno del álgebra.

Ecuaciones del tipo:
$x^2-3x+4=0$, $2^{(3+x)}=1/64$
por ejemplo, tienen un tratamiento diferenciado en las clases de matemáticas, cada una tiene su método de resolución particular e independiente del otro. La diferencia se acrecienta con el tiempo, ya que su estudio se produce en dos momentos distintos del aprendizaje escolar –con varios cursos de diferencia–.

Sin embargo, conceptualmente todas ellas proponen una misma tarea: la búsqueda de uno o varios valores de verdad o la constatación de su inexistencia. Esto es lo que les confiere su identidad como ecuaciones con anterioridad a cualquier clasificación que se establezca: lineales, cuadráticas, exponenciales, etc.

Cuando se nos ocurre la idea de dejar de lado los algoritmos tradicionales de cálculo, resolución de ecuaciones, etc. nos entra un cierto desasosiego, es la sensación de dejar de hacer algo que desde tiempo "inmemorial" venen haciendo las personas. Nos asaltan las dudas: "¿No será una transgresión producto de una moda pasajera?".

Es éste un sentimiento de precaución que, aunque natural –y en muchos casos beneficioso en educación–, no resiste aquí el análisis histórico. Todas las culturas han utilizado los mecanismos a su alcance para realizar las operaciones. Desde este punto de vista los algoritmos estándar de cálculo están lejos de ser eternos, son un invento relativamente moderno que sólo tiene unos siglos y que no es más que una herramienta entre muchas otras: cuerdas, cuentas sobre un tablero, muescas en huesos y palos o ábacos han perdurado durante miles de años hasta que la humanidad ha encontrado en cada caso otro método mejor –más rápido y/o más fiable– que lo sustituyera.

En este proceso no hay vuelta atrás, cada innovación, cada descubrimiento se ha construido sobre el armazón anterior para proseguir el avance. El proceso de cambio puede durar siglos o meses pero podemos estar seguros de que es irreversible, no está sujeto a las leyes del péndulo. Una vez conocidas las ventajas del cálculo con cifras, el ábaco queda relegado a pequeños círculos de resistencia.

Actualmente el ábaco se utiliza en las escuelas como un recurso entre otros para sentar las bases del sistema de valor posicional y para mejorar la comprensión de algunas operaciones. Éste también puede ser un buen destino para los algoritmos de lápiz y papel.

La calculadora y los métodos de las matemáticas. El caso del ensayo y error

La calculadora permite hacer efectivo el método de ensayo y error para resolver ecuaciones. Este método iterativo, conocido también con el nombre de ***tanteo***, resuelve cualquier ecuación de modo aproximado. En realidd permite más estimar que resolver la ecuación, con las limitaciones de exactitud impuestas por la máquina y de tiempo añadidas por el usuario.

Este método permite abordar con confianza muchos otros problemas matemáticos del ámbito escolar y extraescolar. Sin embargo es despreciado en cierto modo por los profesores de matemáticas al considerarlo un método "menor" con la consiguiente inducción de actitudes en los estudiantes.

Los profesores manifestamos en nuestros debates que el método de ensayo y error, por muy rfinado que sea, es menor ***potente***. Sin embargo, para una calculadora científica, las dos ecuaciones planteadas (x^2-3x+4=0 y $2^{(3+x)}$=1/64) son expresiones para las que buscamos uno o más valores y parece razonable acercarnos a ellos por aproximaciones sucesivas.

El argumento esgrimido viene a ser. "Cómo puede ser mejor un método que necesita:

* de un recurso externo a nosotros mismos –la máquina–,
* un buen rato, ya que alguien medianamente experto invertirá un mínimo de diez minutos, y
* sólo nos dará una aproximación al problema planteado.

Y todo ello ante el método algebraico que:

* sólo depende de nuestra capacidad,
* proporciona la solución en breves instantes, siempre y cuando no cometamos errores, y
* será exacta".

Introducción de nuevos criterios para el análisis

Un análisis más exhaustivo nos lleva a considerar que dependencia, rapidez y exactitud no son más que tres aspectos de la resolución de problemas matemáticos, y podemos encontrar nuevos criterios de gran utilidad para arrojar luz sobre el problema:

Restricción: Tenemos casi tantos métodos como tipos distintos de ecuaciones: lineales, cuadráticas, Ruffini para algunas polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. Cada una con su secuencia particular de instrucciones. En cambio, el método de aproximaciones sucesivas es aplicable no sólo a esas ecuaciones sino a otras muchas como:

$2^{(3+x)}=x/63$; $x^3-16x^2=x-1.12$; $x^x=3$

en las que los métodos escolares de resolución de ecuaciones comienzan a tener dificultades.

Ámbito: El método es aplicable a muchos otros tipos de problemas matemáticos: calcular la arista del cubo de volumen prefijado, obtención del máximo de una función, etc. y también a situaciones de otras áreas de conocimiento.

Persistencia: No se puede considerar como aprendizaje escolar todo aquello que se intenta comunicar al estudiante, sino aquello que el estudiante aprehende y hace suyo. Vendría a ser algo así como el poso que queda varios años después de haber finalizado los estudios.

Si exceptuamos al 2% de las personas que se dedican en mayor o menor medida a las matemáticas, el 98% restante no resolverá nunca una ecuación de segundo grado, es más, si se la encuentra, ofrecerá excusas de tipo "yo nunca fui bueno en matemáticas" o "eso lo sabía hacer yo, pero ya no me acuerdo" poco antes de abandonar el problema para dedicarse a otra cosa.

En cambio, un método que utilice una mayor carga intuitiva establecerá múltiples conexiones con otros conceptos y procedimientos y será más fácil que se encuentre incluido en la memoria a largo plazo.

Dependencia: El argumento precedente puede llevar a que es más peligroso depender de la propia memoria que de la calculadora. Pocos métodos de la matemática escolar resisten un verano, y sólo unos pocos perduran años, pero la calculadora estará al alcance de la mano.

Productividad: En algunos casos el método de ensayo y error puede ser más productivo (en cuanto que aporta más conocimiento) que los algoritmos de cálculo. El algoritmo para obtener raíces cuadradas tiene la innegable virtud de ser elegante y bello, ¡pero sólo para aquellos espíritus sutiles y muy preparados para percibir esa belleza!, y ¿cuántos de los estudiantes a los que se les está enseñando ese procedimiento en la actualidad, están capacitados para tales percepciones? Un algoritmo tan sencillo como el de la multiplicación es presentado a los estudiantes como un proceso para obtener un resultado. Como señala D. R. Hofstadter (1982), "muchos de estos alumnos, absorbidos por las operaciones, no advierten la armonía, y tampoco la razón de este proceso". De esta forma el algoritmo es automatizado pero sin ser comprendido, cualquier pequeño error u olvido será fatal ya que no podrá ser reparado mediante los mecanismos asociados a la comprensión.

La tecla de raíz cuadrada de la calculadora no podemos decir que aporte mucho más conocimiento, pero al menos no se pierde el tiempo ni se aburre a los estudiantes.

La ventaja de la calculadora es que permite diseñar mejores situaciones de aprendizaje que en el trabajo con papel y lápiz: la obtención de un número que multiplicado por sí mismo nos dé el inicial pone de manifiesto la relación raíz-potencia (que queda oculta tanto en el algoritmo como con la tecla raíz) a la vez que se profundiza en un método aplicable a otras muchas situaciones y permite abrir intresantes debates en clase sobre la exactitud requerida y se refuerza la comprensiónde los números decimales. Este proceso es inviable sin la calculadora, si los estudiantes deben realizar con el algoritmo escrito estas operaciones, necesitan prestar tanta atención a los cálculos con tal de no equivocarse, que pierden la perspectiva del problema y de los conceptos que se pretendían estudiar.

Rentabilidad: Si entramos en la valoración del tiempo empleado en la escuela, a una ecuación de segundo grado se le dedican muchos esfuerzos durante la escolaridad obligatoria y no sirve para resolver mas que ecuaciones de ese tipo. No es de extrañar que los estudiantes –mientras son estudiantes–, recuerden la fórmula, siempre que los coeficientes sean enteros, no haya muchos negatvos y no falte ninguno de ellos.

La rentabilidad no es mucha: se dedican demasiadas horas de trabajo de clase y deberes para casa durante varios cursos, para aprender a usar un método excesivamente particular. Las ecuaciones exponenciales no tienen tanta suerte, el tiempo que se les dedica es mucho menor y el olvido actúa con mayor celeridad, un par de meses suelen ser suficientes.

Además del esfuerzo invertido, la rentabilidad ha de tener en cuenta el grado de éxito alcanzado. Actualmente hay un gran porcentaje de estudiantes que sale de las escuelas sin un bagaje suficiente de matemáticas para afrontar con confianza las necesidades que se les van a plantear como ciudadanos y como profesionales. En el ámbito numérico estas carencias se revelan principalmente en la comprensión de los números negativos y los decimales, en las operaciones, en los cálculos con porcentajes y en las proporciones. Ver Hart (1981).

Lo importante aquí es que muchas de estas deficiencias son evitables con la calculadora, con ella la realización de operaciones ya no es un obstáculo insalvable para el desarrollo matemático de los estudiantes –aunque por supuesto seguirá siendo un complemento fundamental de ese desarrollo–. Dickson (1984) llega a afirmar en sus conclusiones: "para muchos alumnos, el único método realista de multiplicar o dividir números decimales es recurrir a la calculadora. Y esto ni siquiera será efectivo a menos que su comprensión de la naturaleza de los decimales y el efecto de multiplicar y dividir se encuentre suficientemente desarrollada".

Dos posibles conclusiones

De todo lo anterior podría seguirse que ha llegado la hora de abandonar todos los métodos tradicionales de las matemáticas, unos por escasamente aplicables, otros por fácilmente olvidables, etc. para ir a caer en los brazos de las calculadoras e intentar resolver a partir de ahora los problemas por tanteo.

Podríamos, por el contrario, justificar los métodos algebraicos de resolución de problemas. Generalmente estos métodos se apoyan unos en otros y contribuyen a que las reglas de manipulación algebraica sean asimiladas mediante la práctica repetida para conformar una estructura que será muy importante para estudios posteriores.

La calculadora es una herramienta suficientemente versátil como para llegar a armonizar dos planteamientos aparentemente contradictorios como los anteriores. Lo veremos con un ejemplo en el que se pone de manifiesto el papel de la calculadora como activadora de procesos. En un curso de séptimo de E.G.B. en el que hemos estado experimentando unos materiales didácticos centrados en la utilización de calculadora se planteó el siguiente problema:

"Un comerciante incrementa un 30% el precio de compra para calcular el precio de venta. ¿Cuál es el máximo porcentaje de descuento que puede realizar para no perder dinero en la venta de un determinado artículo?".

Cada estudiante toma una cantidad diferente como precio de compra para investigar el descuento que le puede hacer. A esas alturas del trabajo, la mayoría de la clase tiene claro que no se puede llegar al 30% de descuento y se deciden por un proceso de búsqueda basado en aproximaciones sucesivas. Para la puesta en común se toma un artículo que había costado 1800 ptas y que al aplicarle un incremento del 30%, se aumenta en 540 con lo que dará un precio de venta de 2340 ptas. El problema se reduce a obtener qué porcentaje de 2340 será igual a las 540 ptas. que se han añadido. Los intentos:

20% de 2340 es 468 < 540
25% de 2340 es 585 > 540
22% de 2340 es 514,8 < 540
23% de 2340 es 538,2 < 540
23.1% de 2340 es 540,54 > 540
23.08% de 2340 es 540,072 > 540
23.075% de 2340 es 540,0018

Cada estudiante con una cantidad inicial distinta había llegado a la misma solución mediante este procedimiento iterativo. La cuestión estaba a punto de ser zanjada cundo una estudiante planteó: "*"¿No podríamos haber calculado ese porcentaje de una manera más sencilla"*. Es aquí la calculadora ha jugado su doble papel:

* Por una parte ha servido para resolver un problema real que hubiera debido esperar tiempo para ser planteado de no haber estado disponible.
* Aquí la secuencia de trabajo sirvió como detonante de procesos para la búsqueda de un método mejor (más sencillo, más directo) y más adecuado a la situación planteada.

Una posible traducción numérica es:

El ❑ % de 2340 es 540,

o su transformación en una expresión del tipo:

$$\frac{\square \cdot 2340}{100} = 540$$

Estos estudiantes de 7º no habían aprendido todavía a resolver ecuaciones con lo que se nos abren aquí dos posibilidades, una es comenzar en este momento una secuencia de trabajo encaminada al tratamiento de las ecuaciones, la otra consiste en realizar una secuencia de transformaciones que pueda ser comprendida en este momento y que sirva más tarde para el aprendizaje de las ecuaciones. Esto se podría hacer con argumentos del tipo "si dos cantidades son iguales, lo seguirán siendo aunque las multipliquemos por 100" y tendremos:

❑ . 2340 = 54000

y ahora no tenemos más que buscar un número que multiplicado por 2340 nos dé 54000 que es lo mismo que obtener el resultado de dividir 54000 entre 2340 para obtener 23,07692308%.

En esta situación la calculadora no sólo ha sido compatible con la resolución de problemas mediante expresiones literales sino que lo ha provocado como una necesidad.

Otra forma de llegar a la solución que sólo toma en cuenta las relaciones entre operaciones consiste en analizar que en la obtención del precio de venta (2340), he de multiplicar el precio de compra (1800) por 1,30. Si ahora quiero deshacer el cambio, buscaré un número que multiplicado por 2340 dé por resultado 1800 y ese número no es otro que el inverso de 1,30, es decir 1/1.30

Nuevas calculadoras. Nuevos métodos para la matemática

A los argumentos apuntados en el apartado anterior: restricción, ámbito, persistencia, dependencia, productividad y rentabilidad, podemos añadir un nuevo producto de la introducción de las calculadoras gráficas en la enseñanza: la apertura.

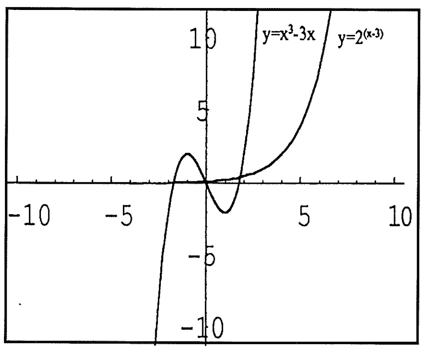
Apertura: las calculadoras abren el espectro de las matemáticas escolares, posibilitan el tratamiento de problemas impensables sin ella. El abanico de ecuaciones que podemos resolver mediante métodos algebraicos es muy limitado, mientras que la calculadora permite que se puedan abordar muchas otras.

Cuando queremos resolver la ecuación:

$$2^{(x-3)}=x^3-3x$$

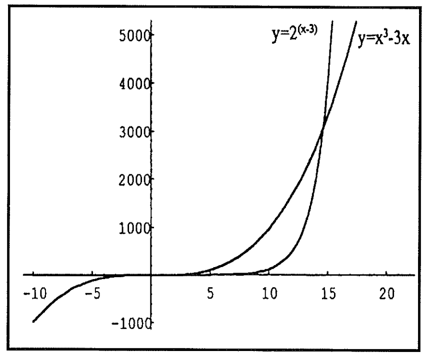
un método gráfico con calculadora pueden consistir en la introducción de las funciones $y=2^{(x-3)}$ e $y=x^3-3x$ y obtendremos los puntos de corte con una aproximación considerable en poco tiempo (el argumento de la rapidez se tambalea).

Si observamos las gráficas que ofrece la calculadora:



parece que estamos ante un problema casi resuelto. Tres puntos de corte que podemos encontrar por aproximaciones sucesivas o con el zoom de la máquina o con la opción de intersección si la calculadora dispone de ella. Pero hay algunos detalles que han escapado a la calculadora: no nos ha ofrecido más que la pantalla estándar ($-10<x<10$, $-10<y<10$). La gráfica de $y=2^{(x-3)}$ queda por debajo de $y=x^3-3x$ a partir del tercer punto de corte. Si aportamos ahora conocimientos sobre funciones exponenciales y polinómicas, podemos estar seguros de que esa situación se invertirá para valores mayores del exponente.

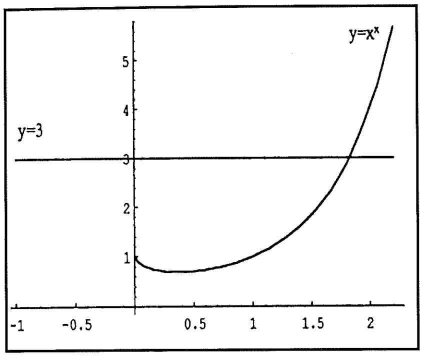
Dibujamos ahora la gráfica para $-10<x<20$, $-1000<y<5000$ nos encontramos con la confirmación de lo anterior, el cuarto punto de corte:



Tenemos otro ejemplo en una de las ecuaciones planteadas anteriormente, $x^x=3$, para la que es difícil (¿será posible?) encontrar un método algebraico de resolución. Los primeros cambios, como $x\log x=\log 3$ no aportan nueva información. La resolución gráfica comienza por la evaluación de la función $y=x^x$. Algunos datos relevantes son:

* no existe la función para $x<0$,
* crece cada vez con mayor rapidez a partir de $x=1$, incluso puede que antes,
* como $1^1=1$ y $2^2=4$, el punto de corte con $y=3$ se encontrará entre 1 y 2, más próximo a 2 que a 1.

Con todo esto ya tenemos el intervalo en el que representar las funciones:



En cuanto a la comprensión de las matemáticas no hay más que fijarse en la cantidad de conceptos matemáticos traídos a cuenta de la resolución de una ecuación: funciones, gráfica, crecimiento, tasa de crecimiento, punto de corte, dominio, etc., todos ellos se han de entrelazar para dar respuesta a la situación planteada. No se puede invocar aquí el predominio de los métodos intuitivos, muy al contrario son las consideraciones cualitativas las que han prevalecido para salir adelante.

Las calculadoras modifican el centro de atención de las matemáticas escolares con un desplazamiento hacia una comprensión más cualitativa de las matemáticas. Como se han puesto de manifiesto en el ejemplo anterior, ha sido la comprensión de los distintos tipos de crecimiento de las funciones lo que nos ha orientado sobre la solución a las situaciones planteadas.

La calculadora como recurso didáctico

Estas útlimas reflexiones nos llevan a estudiar la forma en que interviene la calculadora como un recurso más que se suma al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Este análisis no es tan fácil como el que se puede realizar en Geometría con el estudio de los poliedros, donde un mismo objeto de estudio admite diversidad de enfoqes dependiendo del recurso didáctico empleado para el estudio:

* La cartulina troquelada pone el énfasis en las caras y en la forma de unirlas mediante artistas, los conceptos que surgen son los que se pueden percibir desde el exterior: ángulos diedros, concavidad y convexidad, se aprecian mejor los planos de simetría. El paso del espacio al plano vendría dado por el desarrollo.

* Con varillas es la estructura la que resalta, las aristas y la forma de unirlas en un punto para formar un vértice. Aparecen conceptos como la rigidez. Permite ver mejor el interior: los ejes de rotación del sólido. El paso al plano se hará por el diagrama de Schlegel y las redes planas.

* El estyropor permite la comunicación entre el exterior y el interior mediante los cortes en secciones planas. El paso al plano viene dado por las tomografías.

* Las retículas espaciales centran la atención en las uniones de unos poliedros con otros para compactar el espacio.

Los conceptos introducidos con cada uno de estos recursos pueden ser revisados con otros materiales al tratar temas diferentes al de poliedros: la rigidez con el mecano, los desarrollos planos con las tramas, la regularidad con los mosaicos, la simetría con los espejos, etc...

En este sentido se podría afirmar que cada recurso didáctico es "transparente" hacia determinados conceptos o destrezas, es decir, por el hecho de ser utilizado en el estudio de un tema, es más fácil que surjan ciertas preguntas que requieran una reelaboración de determinados conceptos.

La calculadora, como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, no favorece un análisis como el anterior, no es tan fácil descubrir cuáles son los conceptos y las destrezas que se "transparentan" de su uso. En una primera aproximación ha aparecido que, por su rapidez de cálculo, los métodos "sugeridos" por la calculadora son los que se basan en aproximaciones sucesivas para llegar al objetivo marcdo. Pero un análisis más detallado nos desvela otros muchos aspectos de las matemáticas que adquieren mayor relevancia cuando se utiliza la calculadora:

* Las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes.
* El sentido común y la estimación como control de las operaciones realizadas.
* La relación entre las operaciones.
* La generalización a partir de la obtención de pautas y regularidades.

* La construcción de tablas y/o gráficas. Dominio de una función.

* La comprensión cualitativa del crecimiento de una función.

* Los métodos iterativos.

El principio de un debate

No podemos olvidar argumentos de otro tipo, algunos económicos "no todos los estudiantes pueden disponer de una calculadora gráfica". Para analizarlo, no hay más que recordar lo que se decía hace diez años de la calculadora científica, hace 25 de la calculadora de cuatro operaciones, y el mismo que hace 500 años se hacía del cálculo con cifras, y el mismo que hace miles de años sin duda se haría del ábaco, y el mismo que...

La historia se repite y parece claro que no harán falta siglos para que todos los estudiantes de Secundaria lleven su calculadora gráfica en la cartera, será entonces cuando habrán entrado en las clases, nuestros estudiantes sabrán más matemáticas de lo que sabíamos nosotros –aunque nos cueste reconocerlo–, y el profesorado estará preparado para utilizarlas.

Puede que las calculadoras no sean más que la punta visible de cambios muchos más profundos en la actividad matemática. Lo que ocurre es que se perciben mejor por su fuerte implantación en la sociedad que las empuja hacia la escuela. Quizás el problema más amplio pase por considerar las nuevas tecnologías de una forma más global. En matemáticas tendría su traducción en la pugna entre las matemáticas continuas y las discretas que han llevado a la aparición y/o auge de temas como el estudio de grafos, fractales, etc.

Los debates acerca de cuestiones como la forma en que habrá que reformular los objetivos-contenidos-evaluación con la presencia de los nuevos avances tecnológicos, no serán indispensables para que las calculadoras entren en las clases de matemáticas, pero su planteamiento nos servirá para analizar tanto los aspectos positivos como los negativos de su introducción, y para encontrar la mejor forma de utilizarlas en el aprendizaje de las matemáticas.

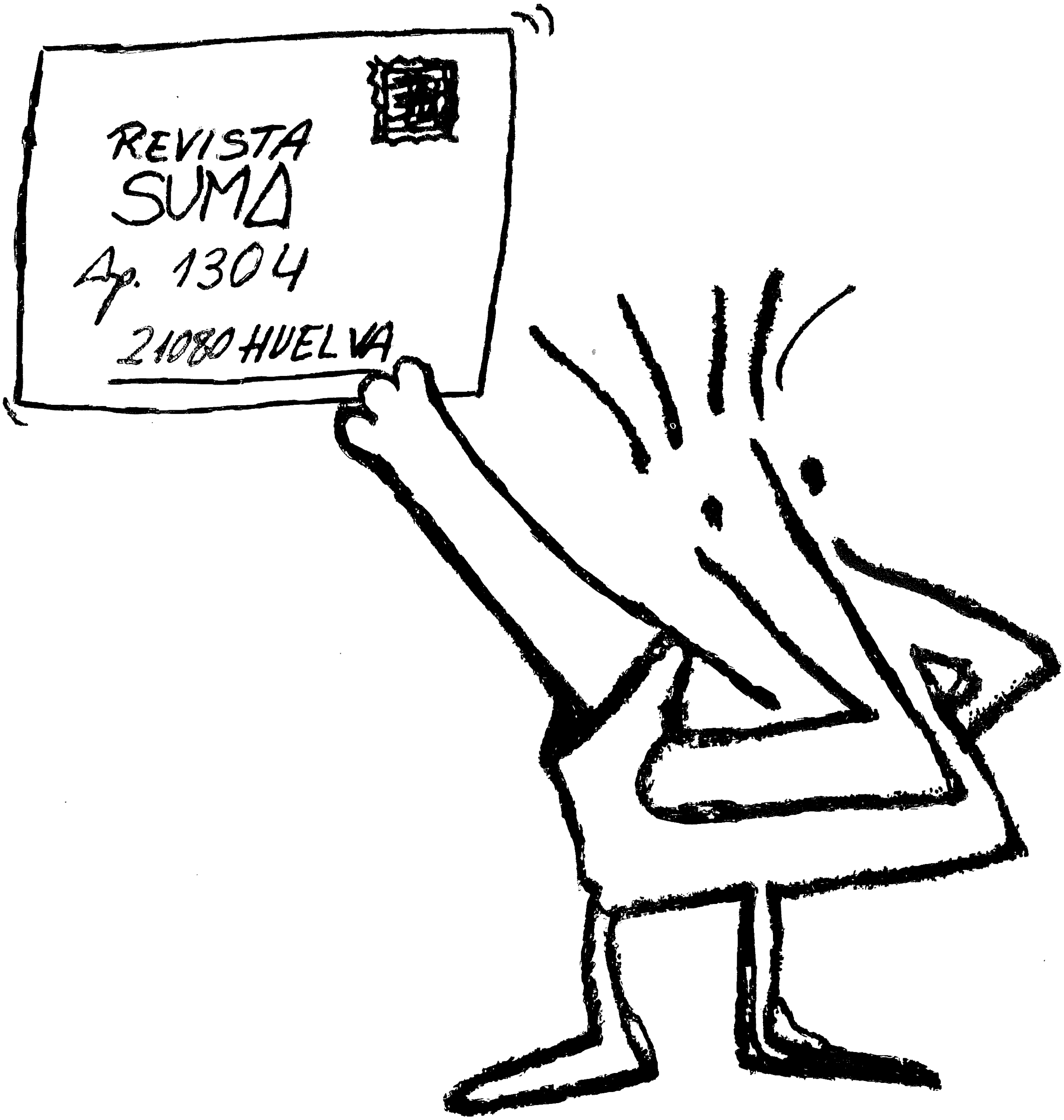
Bibliografía

* DICKSON, L. BROWN, M. y GIBSON, O. (1984). **El aprendizaje de las matemáticas**. (Labor-M.E.C.: Barcelona).

* HART, K. (1981). **Children understanding of mathematics** 11-16. (John Murray: London).

* HOFSTADTER, D.R. (1982). **Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle**. (Tusquets: Barcelona).

José A. Mora Sánchez
C.E.P. d'Alacant


REVISTA
SUMA
Ap. 1304
21080 HUELVA

INFORMACION

Jornadas de Matemáticas y coeducación

Las Jornadas de Matemáticas y Coeducación de la Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron» se han celebrado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid durante los días 10 y 11 de marzo de 1994. La OECOM «Ada Byron» es la rama española de la IOWME (Organización Internacional de Mujeres y Educación Matemática), que es un grupo de trabajo del ICMI (Comité Internacional para la Instrucción Matemática).

En ajustadas sesiones de trabajo, las Jornadas reunieron a casi un centenar de personas de toda España interesadas en los temas de coeducación, enseñanza y matemáticas, que intercambiaron valiosas opiniones e hicieron un gran esfuerzo productivo. Comenzaron con la «sesión de apertura» en la que intervinieron el Decano de la Facultad Doctor Carlos Andradas, el presidente del ICMI Doctor Miguel de Guzmán, la presidenta de la IOWME Doctora Christine Keitel y la presidenta de OECOM «Ada Byron» M. Jesús Luelmo.

La coordinadora internacional de la IOWME, la doctora Christine Keitel-Kriet, de la Universidad Libre de Berlín, ha participado activamente en todas las sesiones de trabajo. Entre otras actividades ha dictado una conferencia plenaria y coordinado un taller. En la conferencia, titulada «Más allá del juego de los números», ha analizado las modificaciones que ha sufrido la noción, el enfoque, las perspectivas y la percepción de la coeducación en matemáticas durante los últimos años.

Al principio se estudiaban datos numéricos, recogidos por profesores de matemáticas o psicólogos, para valorar si las chicas eran mejores, iguales o peores que los chicos en matemáticas, llegando algunos investigadores, para explicar las diferencias, a encontrar razones incluso biológicas. Son investigaciones basadas en métodos empíricos de la psicología, en un estudio de las cifras y explicaciones de las diferencias así analizadas. En una fase intermedia se constataban las diferencias de las mujeres ante las matemáticas afirmando que las alumnas no hacen matemáticas de igual forma que los alumnos. En la actualidad se buscan explicaciones a por qué las chicas y mujeres no quieren hacer matemáticas, analizando los motivos que las llevan a ello. Algunas de estas razones para la falta de interés hacia las matemáticas se encuentran en explicaciones sociales o psicológicas, como el investimiento de masculinidad que puede tener la Matemática en nuestra sociedad y el problema de identidad que podrían tener las alumnas que decidan profesionalmente dedicarse a investigadoras matemáticas, o como la enseñanza de las matemáticas va, a veces, acompañada de problemas de ansiedad, producidos por una concepción de competición más que de colaboración en la clase, que las hace más desfavorables a las alumnas. Sugiere incidir en la investigación mediante una perspectiva más interdisciplinar, como el estudio de textos, casos, biografías y entrevistas.

La doctora Keitel comentó el sentido usualmente dado a la utilidad de las Matemáticas, más basado en el uso de los números, mientras que la utilidad de las Matemáticas es mucho más importante como modos y estrategias de pensamiento y acción, que de forma natural pueden ser usados como modelos en múltiples ocasiones. Esto lleva a hacer una reflexión sobre la necesidad de redefinir los objetivos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en la escuela, y también de la investigación matemática desde un punto de vista científico o pedagógico. También, la doctora Keitel, en el taller que coordinó sobre las interacciones en clase entre alumnos y alumnas entre sí y con el profesorado, puso de manifiesto la importancia del trabajo en grupo dentro de la clase desde un punto de vista coeducativo, ya que promueve la cooperación.

La doctora Eulalia Pérez Sedeño dictó otra conferencia en la que dibujó un recorrido de la contribución de mujeres astrónomas y matemáticas en la historia de la Ciencia. La Ciencia se construye paso a paso, y más interés que el estudio aislado de personas concretas interesa conocer las inquietudes y contribuciones de las diferentes épocas. Pero al haber sido olvidadas muchas de estas mujeres, recordó la vida y problemas de algunas de ellas, que contribuyeron de forma notable al desarrollo de las Matemáticas.

En las ponencias y talleres se desarrollaron aspectos muy diferentes relacionados con la coeducación en general y su incidencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: factores sociales, psicológicos y de equilibrio personal que pueden favorecer el aprendizaje efectivo de las matemáticas; ideas para la elaboración de material didáctico no sexista; utilización del juego como método didáctico que favorezca la colaboración, la cooperación y el trabajo en grupos; análisis de alternativas a abordar desde el terreno escolar para fomentar el interés de las chicas a estudiar profesiones con base matemática; problemas de la mujer investigadora de matemáticas; o características diferenciales de género en educación de mujeres adultas, entre otros.

Culminó con la celebración de una mesa redonda donde representantes del Ministerio de Educación, sociedades de profesores, asociaciones de alumnos, formación del profesorado y de la propia organización «Ada Byron» debatieron, con aportaciones del público asistente, sobre las medidas urgentes en coeducación matemática.

Adela Salvador Alcaide
Profesora Titular de la E.T.S.I. Caminos
Universidad Politécnica de Madrid

VII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas)

Madrid, 14, 15 y 16 de Septiembre de 1995.
Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Organiza: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo".

La Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo", en nombre de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), le invita a participar en las **VII JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas)**.

Avance de Programa

El contenido de las VII JAEM girará, básicamente, en torno a los siguientes **temas generales**:

1. Matemáticas de ahora y enseñanza de las Matemáticas.
2. Concepciones epistemológicas de las Matemáticas y de su enseñanza.
3. Historia de las Matemáticas: ¿qué enseñar y qué nos enseña?
4. Lenguaje y Matemáticas.
5. Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.
6. Las Matemáticas en los nuevos Bachilleratos.
7. Tratamiento de la diversidad en el área de Matemáticas.
8. Matemáticas para alumnado de características especiales.
9. Influencia de las Nuevas Tecnologías en el currículo y en la intervención educativa.
10. Matemáticas lúdicas en la escuela.
11. Innovación, formación e investigación en didáctica de las Matemáticas.
12. Análisis crítico de los últimos 15 años de innovación didáctica en España.
13. Didácticas específicas de las distintas ramas de las Matemáticas.

Estos temas se desarrollarán mediante conferencias, ponencias, mesas redondas, talleres, comunicaciones, paneles y grupos de trabajo.

También habrá, simultáneamente con las sesiones anteriores y como parte importante de las Jornadas, actividades de **animación matemática**:

- Concurso-exposición de fotografía matemática.
- Rutas matemáticas por Madrid.
- Exposición de instrumentos de cálculo antiguos.
- Exposición de instrumentos de medida tradicionales.
- Exposición de libros de texto antiguos.
- Visitas especiales al Planetario y al Museo de la Ciencia.
- Muestras de software y vídeos didácticos.
- Exposición de libros y material didáctico.

Información general

Lugar y fechas

Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, los días 14, 15 y 16 de septiembre de 1995.

Cuotas de Inscripción

	Antes del 1-III-95	Después del 1-III-95
Socios/as de la FESPM	12.000 ptas.	15.000 ptas.
No Socios/as	15.000 ptas.	18.000 ptas.

Fecha límite: 15-VI-95

Asistencia limitada a 800 personas.

Inscripción

• Formas de pago:
a) Cheque nominativo o
b) Transferencia Bancaria a:

VII JAEM
La Caixa (2100), Oficina 1651,
Nº de cuenta: 0200037279

• Enviar el resguardo de transferencia o el cheque, junto con la ficha de inscripción cumplimentada a:

SEATRA CONGRESOS
Apartado de Correos 247
28230-Las Rozas (Madrid)
Tlf.: (91) 6370560
Fax: (91) 6377862

Anulaciones

Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de inscripción realizadas antes del 30 de junio de 1995.

Alojamiento

Se han concertado precios especiales (5.000 ptas./día habitación simple con ducha y pensión completa), en los siguientes Colegios Mayores:

C.M. Chaminade,
Pº Juan XXIII, 9,
Tlf.: (91) 5545400.

C.M. Loyola,
Pº Juan XXIII, 17,
Tlf.: (91) 5340404.

C.M. Elías Ahuja,
Pº Juan XXIII, 21,
Tlf.: (91) 5337700.

También se dispone de plazas en el Hotel Gran Vía, C/. Gran Vía, 25, Tlf.: (91) 5221121, Fax: (91) 5212424, (precio habitación/día incluyendo desayuno y 6% del IVA).

H. Gran Vía

— Habitación doble
Uso individual: 8.015 ptas.
— Habitación doble
Uso doble: 10.685 ptas.

• El pago se hará directamente en el Hotel o Colegio Mayor.
• Se recomienda solicitar la reserva con la máxima antelación.
• Al realizar su reserva, y para beneficiarse de estos precios, identifíquese como participante de las VII JAEM.

Almuerzo

Se pondrán a disposición de las personas inscritas bonos para comer en la misma Ciudad Universitaria con precios no superiores a 800 ptas. por comida.

Viajes

Se están gestionando con RENFE descuentos especiales para viajar a las VII JAEM.

• Comité Organizador:

SMPM
"Emma Castelnuovo"
Facultad de Matemáticas
Despacho nº 519
Ciudad Universitaria
28040-Madrid
Tlf.+Fax: (91) 394 45 80

• Secretaía Técnica:

SEATRA CONGRESOS
Apartado de Correos 247
28230-Las Rozas (Madrid)
Tlf.: (91) 637 05 60
Fax: (91) 637 78 62

Convoca: *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*
Organiza: *Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo".*

PRESENTACIÓN DE CONTRIBUCIONES

VII JAEM

- Si piensa presentar una contribución rogamos nos envíe cuanto antes fotocopia de esta ficha debidamente cumplimentada. Una vez recibida le remitiremos las normas para la presentación.

Apellidos .... Nombre ....

Domicilio .... Teléfono ....

Localidad .... Código Postal...... Provincia ....

- TEMA en el que encuadra su contenido (según la numeración del programa):

❑ 1 ❑ 2 ❑ 3 ❑ 4 ❑ 5 ❑ 6 ❑ 7 ❑ 8 ❑ 9 ❑ 11 ❑ 12 ❑ 13

- NIVEL educativo al que dirige la contribución:

❑ Infantil ❑ Primaria ❑ Secundaria ❑ EUFP ❑ Otros Centros Universitarios ❑ E. Adultos/as ❑ Otros:............

- Fecha límite de presentación de trabajos: 15 de Abril de 1995

FICHA DE INSCRIPCIÓN

VII JAEM

Apellidos .... Nombre ....

Domicilio .... NIF .... Teléfono ....

Localidad .... Código Postal...... Provincia ....

¿Pertenece a alguna Sociedad de la FESPM? ❑ Sí ❑ No ¿A cuál? ....

Indique por orden de preferencia los temas del programa que más le interesen: 1º ☐ 2º ☐ 3º ☐

Datos profesionales

Centro de trabajo ....

Domicilio ....

Código Postal......... Localidad .... Provincia.............

Nivel: ❑ Infantil ❑ Primaria ❑ Secundaria ❑ EUFP ❑ Otros Centros Universitarios ❑ E. Adultos/as ❑ Otros:............

ADJUNTO cheque nominativo o comprobante de transferencia bancaria.

ENVIAR A SEATRA • Apdo. Correos 247• 28230-Las Rozas (Madrid) • Tlf.: (91) 637 05 60 • Fax: (91) 637 78 62

Informe sobre el II CIBEM II (II Congreso Iberoamericano de Educación Matemática)

Entre los días 17 y 24 de julio de 1994 tuvo lugar el II CIBEM en la ciudad de Blumenau (Brasil), organizado por la Sociedad Brasileira de Educaçao Matemática, bajo la coordinación de los Profesores José Valdir y María Salett, de la Universidad de Regional de Blumenau.

Asistieron más de novecientos congresistas de veintidós países, entre ellos unos cincuenta españoles. En las sesiones de apertura y de clausura fueron homenajeados los profesores Luis a. Santaló (Argentina), María L. Leite López, Benedito Castrucci, Ubiratan D'Ambrosio (Brasil), y Gonzalo Sánchez Vázquez (España). Este agradeció y aceptó el homenaje, considerando que estaba dedicado a todo el movimiento español de profesores de matemáticas, que había impulsado la organización del I CIBEM en Sevilla.

Conferencias Plenarias

- "Trabajo de proyecto y aprendizaje de las Matemáticas", a cargo del Profesor Paulo Abrantes, de la Universidad de Lisboa (Portugal).

- "Inteligencia múltiple: el lugar de las Matemáticas y del Lenguaje en el espectro de competencias", a cargo del Profesor Nilson José Machado, de Sao Paulo (Brasil).

- "Etnomatemática-Didáctica Fenomenológica-Escuela", a cargo de la Profesora Isabel Soto Cornejo (Chile).

- Interrogantes en la enseñanza de las Matemáticas" a cargo del Profesor Antonio Pérez Jiménez, de Sevilla (España).

Las dos primeras conferencias fueron pronunciadas en portugués, y las dos últimas en español, que fueron los idiomas oficiales del Congreso.

La conferencia de nuestro compañero Antonio Pérez fue la de la clausura del II CIBEM, donde se analizaron los nuevos enfoques curriculares, que han de tener al profesor como principal protagonista.

Mesas Redondas

MR1 "La mujer iberoamericana en la educación matemática".
MR2 "Sociedad democrática y educación matemática".
MR3 "Calidad en la educación matemática.
MR4 "Iberoamérica como escenario internacional de la educación matemática", en la que fueron ponentes los Profesores Ubirattan D'Ambrosio y Eduardo Luna (Rep. Dominicana), actual Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática".
MR5 "Filosofía en la educación matemática".
MR6 "Historia de la Matemática iberoamericana", con la participación del Profesor Mariano Hormigón (Univ. de Zaragoza).

En cuanto a las miniconferencias, se dan los títulos como anteriormente, que reflejan su alto interés:

* "¿Qué Matemática debe enseñarse en este final de milenio?", del Prof. Ubiratan D'Ambrosio.

* "Viajes portugueses del siglo XV y enseñanza de las Matemáticas", del Prof. Eduardo Veloso (Univ. de Lisboa).

* "Calculadoras gráficas y precálculo", del Prof. Pedro Gómez Guzmán (Bogotá, Colombia).

* "Estudiando el conocimiento práctico del profesor de matemáticas", del Prof. Julio Mosquera (Caracas, Venezuela).

* "La educación matemática y el curriculo tradicional", del Prof. Luiz Marcio Pereira (Sao Paulo, Brasil).

* "Matemática y creatividad", del Prof. Ricardo Kubrusky (Río de Janeiro, Brasil).

* "De la ansiedad matemática al sabor del descubrimiento", del Prof. Luiz Roberto Dante (Brasil).

* "Matemática y calidad de vida: una cooperación fructífera", del Prof. Joao Meyer (Campinas, Brasil).

* "Cuestiones prioritarias en la investigación sobre la didáctica de la geometría", del Prof. Claude Gaulin (Quebec, Canadá).

* "Superando los discursos vacíos en educación matemática mediante el desarrollo y validación de constructors" del Prof. Patricio Montero (Santiago de Chile, Chile).

* "La etnomatemática y el aula", del Prof. Geraldo Pompeu (Campinas, Brasil).

Grupos de Trabajo y Comunicaciones

Los temas de los grupos de trabajo fueron: Enseñanza de la geometría, Educación indígena, Formación del educador matemático, Resolución de problemas, Enseñanza del cálculo, Etnomatemática, Informática y educación matemática, Psicología en la educación matemática, Matemática y arte, Organización del apoyo a la investigación en educación matemática, Matemáticas fuera del aula (olimpiadas, ferias y clubes), Nuevas tecnologías, Lenguaje y matemáticas, Historia como recursos didáctico para la enseñanza de las matemáticas, Matemáticas y ecología, Educación matemática y movimientos sociales.

Este II CIBEM ha sido extraordinario por la riqueza de grupos y el entusiasmo de los participantes. Una prueba de interés y avidez por todo lo que concierne a las nuevas tendencias en educación matemática es la presentación de tres candidaturas para la celebración del próximo CIBEM.

Se presentaron más de ciento cincuenta comunicaciones, que sería imposible reseñar en este breve informe, pero que indican por su número y contenido de la densidad de las actividades. Entre ellas habría que reseñar las de nuestros compañeros españoles Blas Ruiz Jiménez, José Ramón Vizmanos, Juan Núñez, José Muñoz, Manuel Fernández, Antonio León, Elena Ausejo.

Por otra parte, fue constante la demanda de información sobre las actividades de las Sociedades Españoles de Profesores, las suscripciones a nuestras revistas, el intercambio de material, la petición de envío del primer anuncio del ICME-8 y el compromiso de intercambio con muchas revistas de educación iberoamericanas.

Otras Actividades

* ***Presentación del ICME-8:*** Después de una breve intervención sobre el tema del Presidente de la Federación, Prof. Manuel Fernández Reyes, de la Sociedad Canaria, se proyectó un video sobre Sevilla y la celebración en julio de 1996 del ICME-8, con un éxito impresionante, lloviendo las peticiones de solicitudes de inscripción, que presagia la presencia activa y numerosa de los colegas iberoamericanos.

* ***Stand de la SAEM "Thales":*** Todos lo ejemplares de los "Estándares Curriculares", de las "Addenda", y de números de nuestra revista EPSILON, se agotaron rápidamente, apenas en dos días, Numerosas inscripciones, incluso algunas inscripciones en nuestra Sociedad, así como peticiones de información del ICME-8, fueron atendidas en el stand por los compañeros del grupo, especialmente por Concha García Severón, Antonio Aranda, Juan Núñez, y José Muñoz.

* ***Coordinadora de los CIBEM:*** En una reunión especial se acodó nombrar una Comisión Internacional para coordinar los Congresos Iberoamericanos y mantener relaciones entre los países en el vacío de cuatro años que queda entre ellos. La Comisión quedó constituida por los profesores Eduardo Luna (Rep. Dominicana). Ubiratan D'Ambrosio, (Brasil), Paulo Abrantes (Portugal), Gonzalo Sánchez Vázquez (España), y el profesor Guerra, representante de Méjico, que ha asumido la organización del III CIBEM, en 1998.

En un resumen, un congreso brillantemente organizado, con un programa científico y didáctico muy completo, que ha consolidado el camino abierto en Sevilla por nuestra Sociedad para robustecer las relaciones entre los profesores de Iberoamérica, Portugal y España en el área de la educación matemática

SAEM "Thales"

III Seminario Castellano Leonés de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Durante los días 22, 23 y 24 de septiembre de 1994 se han celebrado las Jornadas de la Sociedad Castellano-Leonesa en la ciudad de Astorga (León). Han participado unos 150 profesores de toda la región, que han asistido a las actividades organizadas debicamente por el profesor Antonio Bermejo, presidente provincial de la Sociedad en León y director del CEP, a través del cual ha colaborado el MEC.

La Federación ha estado presente con su Presidente Honorario Gonzalo Sánchez Vázquez, tanto en los actos de inauguración y clausura, como en la Mesa Redonda sobre el ICME-8, que coordinó junto con el profesor Claudi Alsina, Presidente del Comité Internacional de Programas de dicho Congreso.

Hubo tres conferencias plenarias: "Matemáticas y seducción", por Claudio Alsina; "Matemáticas en la educación", por el profesor Rafael Pérez Gómez, y "El pensamiento geométrico en la enseñanza de la Matemática", a cargo del profesor Miguel de Guzmán, presidente de la Comisión Internacional de Enseñanza de las Matemáticas, todos ellos de un altísimo nivel.

Se presentaron diversas comunicaciones sobre experiencias en la clase y propuestas metodológicas, una exposición de materiales didácticos, y se desarrollaron cinco Mesas de Trabajo, en cada una de las cuales participaron de 20 a 30 profesores: "Estadísticas y probabilidades", Resolución de problemas", "Funciones y gráficas, "Juegos matemáticos" y "Geometría", cuyas conclusiones fueron leídas en la sesión de clausura.

Durante las Jornadas, tuvo lugar la Asamblea General de la Sociedad, siendo reelegida la actual Junta Directiva, que preside nuestro Compañero Constantino de la Fuente. Felicitamos a todos su componentes por el nombramiento, así como por el éxito del III Seminario Castellano-Leónes de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

Gonzalo Sánchez Vázquez
SAEM "Thales"

XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática

30 de Julio al 4 de Agosto de 1995
Santiago-Chile. Segundo Anuncio

El Comité Internacional de Educación Matemática y la Sociedad Chilena de Educación Matemática invitan a la XI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (IX CIAEM) que se realizará entre los días 30 de julio y 4 de agosto de 1995 en el campus de la Universidad de Santiago de Chile.

Las conferencias anteriores tuvieron lugar en Bogotá (1961), Lima (1966), Bahía Blanca (1972), Caracas (1975), Campinas (1979), Guadalajara (1985), Santo Domingo (1987) y Miami (1991). Ahora, en los 35 años del Comité Interamericano de Educación Matemática, nos reunimos en torno al desafío de crecimiento que enfrenta América en la actualidad. La cita tiene por objeto lograr que el conocimiento matemático, puesto al alcance de todos, contribuya más adecuadamente en el desarrollo cultural, social y económico de las Américas.

Idiomas oficiales

Los idiomas oficiales de la Conferencia serán: español, portugués e inglés. Habrá traducción simultánea español-inglés.

Actividades científicas

Durante la IX CIAEM se realizarán conferencias, paneles de especialistas, comunicaciones orales, grupos de discusión, pósters y exhibición de materiales.

Además, en paralelo a la Conferencia se realizará una actividad especial para profesores de Matemática que incluye conferencias y talleres.

Conferencias plenarias

Corresponden a presentaciones que serán realizadas por autoridades educacionales y especialistas destacados en el área de Educación Matemática.

Conferencias paralelas

Se organizarán conferencias sobre temas específicos a cargo de destacados investigadores. Éstas se llevarán a cabo en forma paralela, de modo de que los participantes puedan optar por aquellos temas que sean de mayor interés.

Paneles

Los paneles serán sesiones de trabajo en las cuales especialistas expondrán sus puntos de vista, experiencias y recomendaciones acerca de temas específicos. Cada panel constará de dos sesiones de una hora y media de duración. En la primera, los especialistas presentarán su visión y en la segunda, contestarán las preguntas que la audiencia haya formulado por escrito y se iniciará la discusión.

Los paneles programados son:

Panel 1

Tendencias, enfoques y políticas: Análisis crítico de los problemas y enfoque de la Educación Matemática en la última década y su relación con las políticas educativas y de desarrollo de los países americanos.

Panel 2

Estándares curriculares y de evaluación: Discusión acerca del marco de referencia operativo para seleccionar, organizar y evaluar los aprendizajes matemáticos para el siglo XXI.

Panel 3

Tecnología informática y de comunicaciones: Análisis de los logros, los desafíos, los problemas y los cambios en la cultura escolar que plantea la incorporación de la tecnología informática, las comunicaciones y las calculadoras en la Educación Matemática.

Panel 4

Investigación en Educación Matemática: Estado actual de la investigación en Educación Matemática y el desarrollo de la teoría en el área. Debate sobre la generación de conocimiento en esta área y su impacto en el desarrollo Interamericano.

Comunicaciones

Sesiones breves, donde una persona o equipo expondrá, en no más de 20 minutos, su trabajo realizado en el área de educación matemática. Adicionalmente, se dispondrá de 10 minutos para preguntas por parte de los asistentes.

Grupo de Discusión

Habrá sesiones especiales para el trabajo de grupos de discusión, donde se reunirán varios investigadores a intercambiar ideas, con el fin de profundizar, realizar portes y proponer líneas de acción para el futuro, en algún tema específico.

El programa contempla tres reuniones. En la primera, el encargado del grupo presentará el tema a través de un documento base y se abrirá el debate. En la segunda se continuará con la discusión. Y por último, en la tercera se sistematizará la información mediante la redacción de un documento final.

Pósters

Los pósters son exhibiciones gráficas, donde, a través de carteles especialmente diseñados, los autores presentarán trabajos realizados en el área de educación matemática.

El encargado del póster deberá permanecer junto a él durante el tiempo destinado a ello para responder consultas respecto al trabajo presentado. Además, los autores pueden preparar un documento done se expone en extenso el contenido del póster para distribuirlo durante la sesión.

El póster debe ser confeccionado de manera tal que sea claramente legible a la distancia de un metro y contener una descripción concisa de:

a. Título y objetivos del trabajo o investigación.
b. Autores, material, equipo y procedimiento.
c. Resultados.
d. Conclusiones.

Exhibición de Materiales

Consistirá en la exposición y demostración de materiales que una persona o un grupo haya creado para la enseñanza de la matemática. Incluye software y materiales comerciales.

Otras actividades

El programa contempla además la realización de un cóctel de bienvenida, una "Noche Internacional" y una día libre donde se podrá optar por un paseo a la costa o a la cordillera.

FICHA DE INSCRIPCIÓN IX CIAEM

Apellidos ______________________________ Nombres ______________________

Dirección ____

____

Código Postal ______________________ Ciudad ______________________

País ______________________ Teléfono ( ) ______________________

Fax ( ) ______________________ E-Mail ______________________

Institución ____

Precios y plazos

Inscripción:	Hasta el 31 de Marzo de 1995	US $ 100
	Hasta el 31 de Mayo de 1995	US $ 150
	Después del 31 de Mayo de 1995	US $ 200

FORMA DE PAGO

❑ Efectivo MONTO ($) ______________________

❑ Tarjeta de Crédito ❑ Visa ❑ MasterCard

❑ Diners ❑ Magna

Número de tarjeta de crédito

Vencimiento de Tarjeta de Crédito

_____/_____
Mes Año

DINERS CLUB		MASTERCARD	VISA
____ 2 a 12	____ 3'5 a 10	____ 3 a 24	____ 2 a 24
CUOTAS		CUOTAS	CUOTAS

Firma: ______________________ Fecha: ____/____/____
Día Mes Año

MONTO: ______________________

AUTORIZO A TRANSBANK A CARGAR EN MI TARJETA DE CRÉDITO EL MONTO INDICADO EN ESTE CUPÓN

❑ Cheque Nro. ____________ Banco ______________________

MONTO ______________________

Enviar cheque o forma de pago a nombre de EDU-Chile Ltda.

TIPO DE PARTICIPACIÓN

Comunicación oral ________ Pósters ________

Grupo de discusión ________ Exhibición de materiales ________

Tema de interés ____________________

Título: ____

Autor(es): Señale apellidos: Paterno, Materno, Nombres

____

____

Datos de Edición:

____

Institución - Departamento - Área

Ciudad/ ______________ País/ ____________ Día/ ________ Mes/ ________ Año/ ________

Proyecto:

Título: ____

Institución Patrocinadora: ______________________________

Institución Auspiciadora: ______________________________

Material de Apoyo Necesario

- ❑ Retroproyector
- ❑ Computador (especificar) ____________________
- ❑ Data-Show

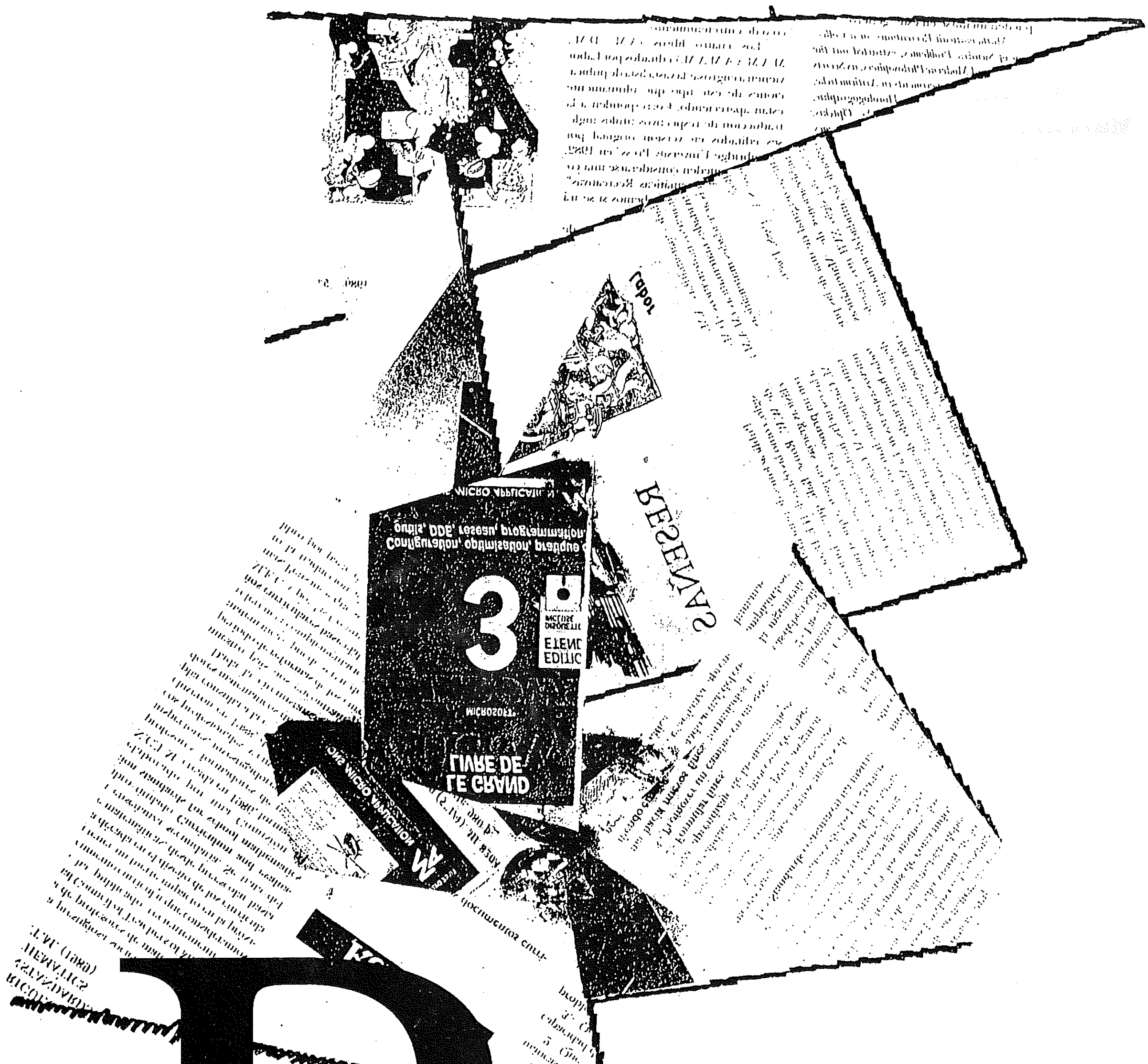
Otros (especificar) ______________________________

Enviar Ficha de Inscripción y Resumen a: ______________________________

Fidel Oteiza M.
Presidente Comisión Organizadora IX CIAEM
Universidad de Santiago de Chile
Dpto. de Matemática y Cs. de la Computación
Casilla 33081 Correo 33 Santiago-Chile.

E-mail: foteiza @ euclides.usach.cl


¿Has suscrito tu cole a SUMA ?



RESEÑAS

IV Olimpiada Matemática Nacional Española

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas acaba de publicar el libro "IV OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL ESPAÑOLA" en el que aparecen ejercicios y pruebas que se han celebrado en las diferentes sociedades de la Federación.

Los interesados pueden realizar los pedidos a:

(1) Para socios/as:

Secretaría General Federación
Apartado 329. La Laguna
38201. TENERIFE
Tfno. – Fax: 922 - 261250.

(2) Para no socios/as:

Librería Universitas
Avda. Colón 9
06005. BADAJOZ
Fax: 924 - 274656

Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática

En Diciembre de 1991, la SAEM "Thales" presentaba la edición española de los "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática". Tal fue la acogida que fue necesaria una segunda edición en julio de 1992.

Con ello se pretendía contribuir a que todos los profesores y, en particular los socios, dispusiesen de ese extraordinario documento.

Con la intención de poner a disposición de los profesores que imparten los niveles correspondientes a Infantil, Primaria y Secundaria aparecen tres fascículos: Nivel Inicial; Desarrollo del Significado Numérico y Conexiones Matemáticas.

La Junta Directiva de la SAEM "Thales" espera que con la favorable acogida que tenga la edición de estos tres ejemplares se marcará el reto de: continuar traduciendo y editando los siguientes documentos de las Addenda Series.

Los interesados podrán dirigirse a:

SAEM "Thales"

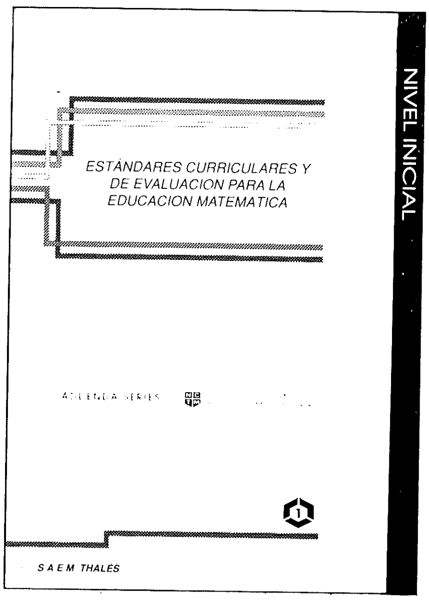
Facultad de Matemáticas

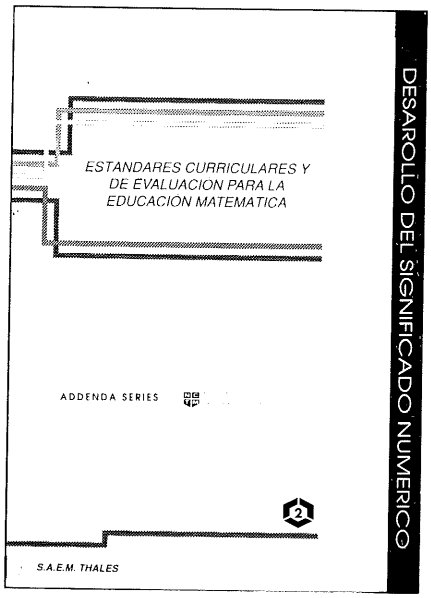
Apartado 1150

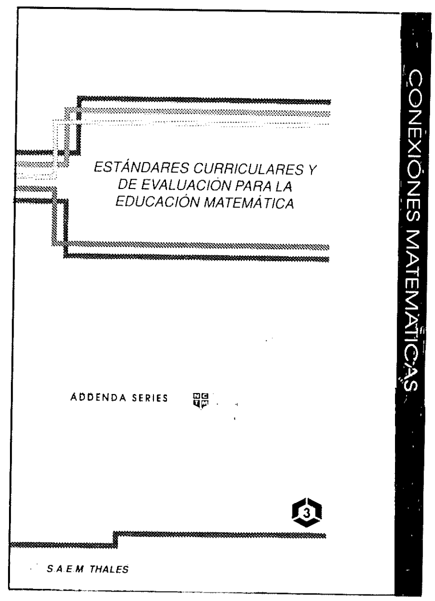
41080 - SEVILLA

Teléfono:
95 - 4623658

Fax:
95 - 4236378







MISCELANEA

Los Caminos a Santiago: Entornos matemáticos

María Victoria Veguin Casas

Las matemáticas como proceso cultural están siempre vinculadas a un espacio y un tiempo. Por tanto en cualquier manifestación histórica, siempre se encuentran implícitos mensajes matemáticos.

Introducción

El origen de estas líneas fue una pregunta que me hice mientras realizaba a pie el Camino de Santiago. Cerca de Molinaseca, pequeña villa leonesa situada en el descenso de uno de los hitos de la peregrinación jacobea, me pregunté ¿qué huellas matemáticas se pueden encontrar en esta vía milenaria? Esta cuestión quedó archivada en mi memoria diversificándose en otras cuestiones: ¿qué conexiones pueden existir entre Matemáticas e itinerarios? ¿cuáles serían las señas de identidad de la Matemática asociada a la Vía de Comunicación Medieval que fue el Camino hacia el Campus Stellae? ¿a qué se podría llamar huella matemática? ¿contribuyeron durante aquellos siglos esos viajeros a la Historia de las Matemáticas?

He encontrado estudios sobre aspectos muy diversos de la Historia y la Cultura del Camino. Ninguna referencia a las Matemáticas. No obstante, las Matemáticas como proceso cultural están siempre vinculadas a un espacio y un tiempo. Por tanto, en cualquier manifestación histórica, siempre se encuentran implícitos mensajes matemáticos. Nuestro reto, en ocasiones, y ésta puede ser una de ellas, están en descubrir esa explicación. De esta manera, ayudaríamos a romper el hiato existente a lo largo de los siglos entre Matemáticas y Cultura. Y la cultura europea de hoy es deudora del esfuerzo de todos aquellos hombres y mujeres que durante un milenio han viajado desde los lugares más diversos hasta Compostela.

Los Caminos a Santiago

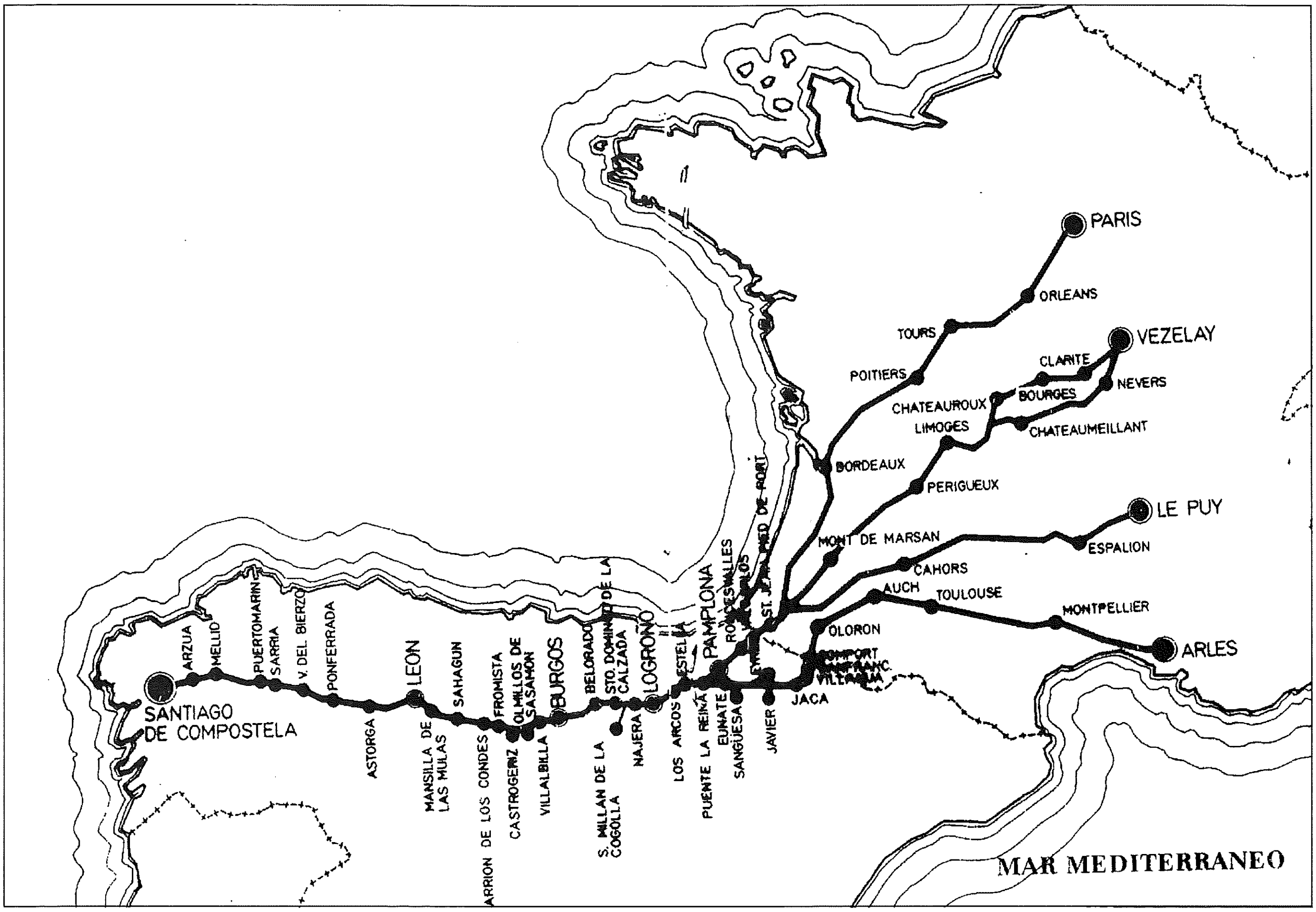
Para comprender el fenómeno jacobeo hay que hacer el esfuerzo de situarse en la Europa, impregnada de la idea de Dios, se organizaban a través de Ordenes religiosas, como la de Cluny, verdaderos "tours" turísticos. Estos tours se hacían mediante itinerarios que unían santuarios donde se conservaban reliquias. Toda la Cristiandad estaba surcada de lugares de peregrinación.

Las cuatro Vías Francesas, según el Códice Calixtinus, más transitadas por los europeos en su viaje a la tumba del Apóstol eran:

1) La Vía Tolosana que traía los peregrinos de Italia y Oriente y va por Saint Gillies, Montpellier y Toulouse.

2) La Vía Podiensis que traía los peregrinos del este europeo por Santa María del Puy, Santa Fe de Conques, y San Pedro de Moissac.

3) La Vía de Lemosina, de Bélgica, Champaña y Lorena, por Santa Mará de Vezelay, San Leonardo de Limoges y Perigueux.



4) La Vía de París, que descendía por San Martín de Tours, San Hilario de Poitiers, San Juan de Angely y Burdeos.

La primera Vía desemboca en la Península en Somport. Las otras tres en Roncesvalles. La unificación dentro de la Península se efectuaba en Puente la Reina. Desde allí continuaba un único itinerario, el Camino en singular, por Pamplona, Nájera, Estella, Burgos, Fromista, León, Villafranca del Bierzo, Samos y al final Santiago.

Existieron otras cuatro rutas notables por el interior de la península:

La Vía de la Plata: desde Mérida por Plasencia, Béjar, Salamanca, Zamora, Verín y Orense.

El Camino Inglés: desde la Coruña. Por él marchaban los ingleses e irlandeses que llegaban por mar.

El Camino Portugués, por la costa desde Tuy.

La ruta Cantábrica: Irún, Hernani, Bilbao, Oviedo, Lugo y Santiago.

Hay, por tanto, muchos posibles entornos de investigación matemática.

Matemáticas y Caminos

Las posibles conexiones entre ambos términos dependerán del punto de vista que adoptemos sobre las Matemáticas. Los que opinan, como Galileo, que el libro de la naturaleza está escrito en códigos y leyes matemáticas, encontrarían por esta vía un motivo de estudio.

Los monasterios, iglesias, catedrales, antiguos hospitales y puentes, que jalonan las diversas rutas, nos dan la oportunidad de estudiar y explicar la geometría implícita en sus piedras.

Arcas, arquetas, píxides y demás objetos jacobeos conservados en los museos nos brindan también la ocasión de ser tratados matemáticamente.

No obstante, lo que caracterizó al Camino, lo que le ha dado su esencia como hecho histórico fue el ser una **Vía de intercambio de lenguas y culturas.** En la matemática practicada por los peregrinos en el transcurso de su viaje habría también intercambio de información. **Intercambio** que pudo contribuir al avance de las Matemáticas en el Medioevo, y en el cual encontrarían, en mi opinión, las Matemáticas asociadas al Camino, sus señas de identidad.

Conjeturas

Si analizamos la vida de los peregrinos durante las diversas jornadas, encontramos que las cuestiones prácticas básicas que tienen que resolver son esencialmente las mismas hoy que hace ocho siglos. Estas cuestiones son, antes de la ruta, preparar todo lo necesario para poder efectuarla. Durante las etapas: comer, beber, descansar, dormir, proveerse de lo imprescindible para el día siguiente, adquirir algún recuerdo en los mercados locales, etc. Para resolverlas es necesario comprar y vender. Pero hoy, al comprar y vender no hacemos avanzar nuestra disciplina. Los hombres medievales, de alguna manera, sí lo hacían. Lo hacían al verse en la constante necesidad de buscar equivalencias.

Como consecuencia de la fragmentación en pequeños estados de la Europa feudal circulaban por la ruta numerosas monedas cristianas y árabes. En los sistemas monetarios europeos de los siglos XI, XII la moneda que más se utilizaba era el ***dinero de vellón,*** aleación de cobre y plata. Sus múltiples eran el sueldo y la libra. Pero de región en región cambiaba la aleación y el peso de la libra. En torno al 1170 se empezó a acuñar, en Castilla, moneda de oro a imitación árabe: los maravedís.

Había que establecer equivalencias entre todas las monedas. Hubo cambistas que se especializaban en los cálculos, que en aquellos tiempos tenían naturaleza de **problema** y no de simple **ejercicio**.

En una de las viñetas de *Las Cántigas de Santa María,* la obra cumbre de Alfonso X el Sabio, se refleja un cambista pesando las monedas.

También tendrían que buscar equivalencias entre las unidades de medida. Por cierto, en Galicia una unidad de medida de grano pequeña es precisamente la ***escudilla.*** Y la escudilla, pieza de la vajilla para tomar el alimento, es algo que siempre llevaba consigo el peregrino.

Y lo más importante: equivalencia entre los dos sistemas de numeración. Como sabemos, uno de los hechos matemáticos más notables acaecidos durante la Edad Media es la introducción y difusión de las cifras indias y del cálculo con ellas. Suceso no del todo esclarecido por los historiadores. El matemático Gerberto (941? - 1003) luego Papa Silvestre II, en su primera obra *Regulae de numerorum abaci rationi* trata estas cuestiones. Silvestre II quizás conoció estos cálculos a través de un manuscrito desaparecido a un tal José el Español (Fernández de Córdoba, pág. 32-34).

Lo cierto es que la difusión del nuevo cálculo fue muy lenta y tuvo que vencer las dificultades creadas por todos aquellos que no querían abandonar su rutina. Prueba de ello, es que tres siglos después, en 1299, se prohibía a los banqueros florentinos el cálculo con cifras indias (Fernández de Córdoba, pág. 101).

Como conjetura, podemos atribuir a la ida y vuelta a Santiago en la que participaron durante los siglos XI, XII y XIII, miles de europeos, entre ellos hombres cultos, un cierto peso en la difusión de la ventaja del cálculo con cifras indias.

Podemos establecer en este tema un paralelismo entre Matemáticas y Música; ya que en los mismos siglos se difundió en nuestro país el nuevo sistema de notación musical.

Huellas Matemáticas

La búsqueda de las huellas matemáticas que esos viajeros dejaron en los distintos códigos de comunicación, requiere aunar muchos esfuerzos, ya que pueden aparecer donde menos se esperen.

Algunas pautas de búsqueda pueden ser las siguientes:

1) Localización de documentos relativos a la peregrinación que pu-

dieran tener alguna relación con las matemáticas.

Un pequeño ejemplo que nos informa de unidades de medida nos lo proporciona el salario del limosnero de Roncesvalles en 1610 "doce ducados, cuatro robos de trigo y una carga de vino" que aparece en la Historia de Pamplona escrita por Ibarra, en la documentación contenida en la investigación llevada a cabo por Vázquez Parga, Lacarra y Uria.

2) Análisis del pensamiento matemático contenido en los diarios de los peregrinos.

La primera guía de la peregrinación, referencia obligada al tratar este tema, está contenida en un manuscrito de siglo XII conocido con el nombre de Codex Calixtinus.

El capítulo II de dicha guía está dedicado a las Jornadas del Camino de Santiago. No hay en la descripción de las etapas ninguna referencia cuantiva pero sorprende su imprecisión al adjetivar por igual a etapa de longitud muy diferente. Reproducimos el comienzo del capítulo:

"Desde el Somport a Puente la Reina, hay ***tres cortas etapas.*** La primera va de Borce, una villa situada al pie del Somport en la vertiente de Gascuña, hasta Jaca. La segunda va de Jaca a Monreal. La tercera, de Monreal a Puente la Reina".

En Kms. las etapas miden 27, 36, 97.

En la descripción de las 13 etapas del Port de Cize a Santiago la Guía continúa calificando con adjetivos similares etapas de longitudes muy diferentes.

El interés del autor pudo ser indicar, globalmente en cuántos días, se podía efectuar la ruta a caballo.

Las únicas referencias a unidades de longitud en la Guía son las siguientes:

* Del Port de Cize, entrada en España, dice: "Tiene ocho millas de subida y obras ocho de bajada; su altura es tanta que parece que toca el cielo". (Bravo Lozano, pág. 34).

* "La basílica de Santiago tiene de longitud 63 alzadas de hombre, a saber, desde la puerta occidental hasta el altar del Salvador. De anchura, en cambio, desde la puerta Francesa hasta el mediodía tiene 39. La altura interior es de 14 alzadas. Su longitud y su anchura por fuera no hay quien lo pueda saber" (Bravo Lozano, pág. 69).

* Al referirse al Paraíso de la Ciudad, el atrio de la Catedral, dice: "La extensión del Paraíso es de un tiro de piedra por cada lado". (Bravo Lozano, pág. 72).

Se conservan otros itinerarios del siglo XV. Por ejemplo el del Sr. de Cumont y el de Herman Künig von Vach. Ellos sí que especifican distancias entre las etapas, en millas; siendo ésta la única referencia matemática.

Referencias

Los caminos a Santiago pueden ser un telón de fondo adecuado para explicar la historia del uso de las Matemáticas en la vida cotidiana a lo largo de los siglos.

La Unesco declaró a Santiago, en 1985, Patrimonio Universal de la Humanidad. El Consejo de Europa reconoce, en 1987, al Camino como Primer Itinerario Cultural Europeo. Por tanto ¿qué mejor símbolo de integración entre Matemáticas y Cultura que éste?

También podría ser un interesante telón de fondo en el ICME VIII para alguna de las actividades previstas; por ejemplo para la de unidades de medida.

Se puede establecer un cierto paralelismo entre el ICME VIII, como representante de cualquier Congreso y el Camino. En ambos el progreso surge del mismo motivo: el encuentro y la comunicación entre personas de diferentes culturas Comunicación que en este caso serviría para animar a nuestros compañeros europeos a iniciar o continuar un trabajo de investigación a través de los itinerarios hacia Santiago en sus respectivos países.

Bibliografía

* BRAVO LOZANO MILLÁN. **Guía del peregrino medieval** Codex Calixtinus". Valladolid. 1989.

* COBREROS, JAIME. **Camino de Santiago.** Barcelona. Editorial Obelisco.

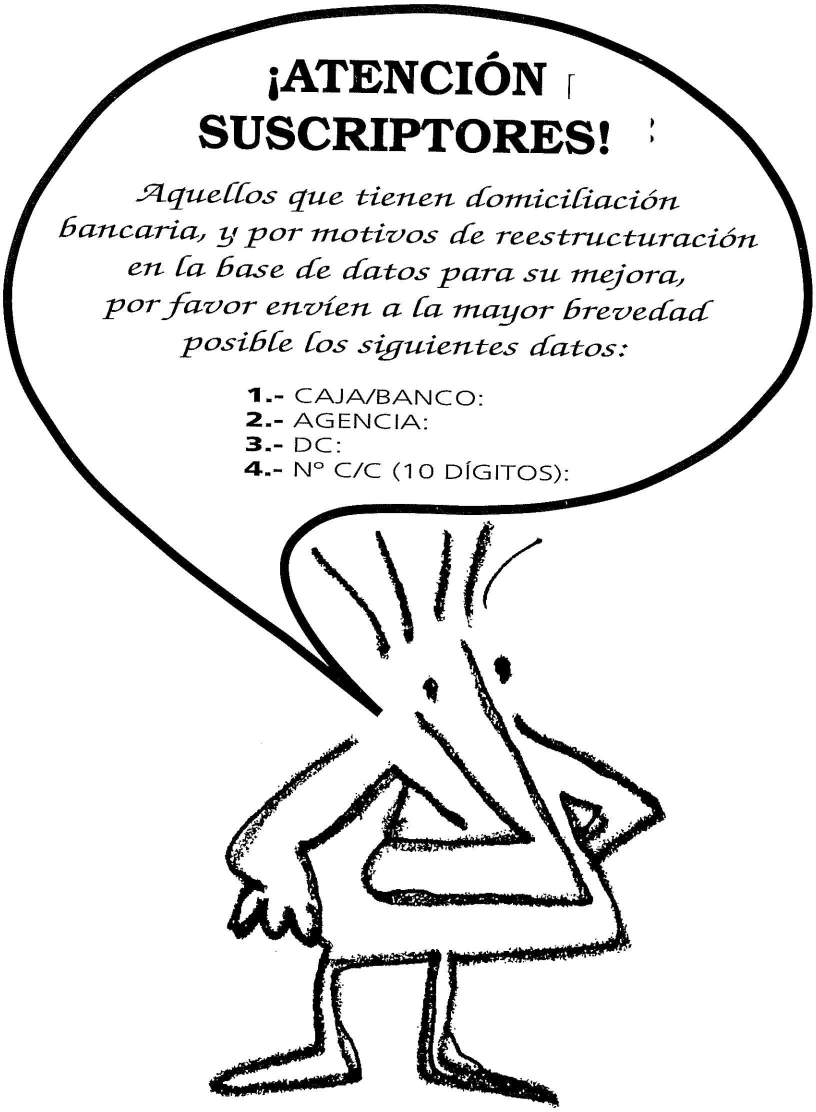
* MINISTERIO DE CULTURA **Vida y peregrinación.** Madrid. Editorial Electa. 1993.

* VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, RAFAEL. **La Matemática en el Occidente Latino Medieval.** Diputación de Badajoz. 1991.

* TORROBA BERNALDO DE QUIROS, FELIPE. **El Camino de Santiago**. Oviedo. Editorial Gea. 1993.

* VÁZQUEZ DE PARGA, LACARRA, URIA. **Las peregrinaciones a Santiago**. Madrid. CSIC. 1953.

Mª Victoria Veguín Casas
I. B. Beatriz Galindo. Madrid



Una experiencia de coeducación en el área de matemáticas

Mª Encarna Aznar Sánchez
Ángeles López Hernández

Introducción

Dentro del trabajo que veníamos realizando en el Seminario Permanente de Coeducación del C.E.P. de Cuevas del Almanzora (Almería), nos planteamos, en el curso 93/94, la necesidad de ir concretando actividades para el aula, con objetivos coeducativos, pero desarrollando contenidos propios del currículum de cada área. La idea que guiaba este planteamiento era que los ejes transversales y, en concreto la coeducación, impregnen el currículum.

Descripción de la experiencia

La experiencia que describimos a continuación fue llevada a cabo en el I.E.S.»ALYANUB» de Vera (Almería), que pertenece al ámbito del C.E.P. de Cuevas del Almanzora. Este centro contaba el curso 93/94 con 6 grupos de 4º de E.S.O. Nuestro alumnado procede de prácticamente todos los municipios de la comarca: pequeños núcleos rurales o de reciente desarrollo turístico.

La actividad a la que nos referimos pertenece al área de Matemáticas y se trata de un trabajo de investigación estadística.

Propusimos a nuestras alumnas y alumnos de 4º de E.S.O. un trabajo sobre la situación laboral de la mujer en los pueblos de la comarca. Alumnas y alumnos formaron equipos de siete u ocho componentes del mismo pueblo; o de menos, si de alguno de los pueblos había menos alumnos. A cada alumno/a se les suministró el siguiente guión de trabajo:

TEMA: Situación laboral de la mujer.

Se trata de hacer un estudio estadístico sobre la situación laboral de la mujer en vuestro pueblo.

Para organizar el trabajo, debéis tener en cuenta lo siguiente:

1º.- ¿Qué os interesa conocer sobre el tema?

Sugerencias:

– Distribución por edades.

– Distribución por sectores de empleo: trabajo en el campo, en industrias, en tiendas, en negocios familiares, en oficinas, bares, etc.

– Relación nivel de estudios/puesto de trabajo.

– ¿Están las mujeres igualmente remuneradas que los hombres?

– ¿Cuántas mujeres trabajan en casa o en negocios familiares?

– ¿Qué opinión hay sobre el hecho de que la mujer trabaje fuera de casa?

2º.- Recogida de datos.

Tened en cuenta que, si la población es muy numerosa, tal vez sea interesante escoger una muestra.

3º.- Presentación de los datos.

Debéis realizar tablas o gráficas que muestren los aspectos de la situación laboral de la mujer que más os interese poner de manifiesto, escogiendo en cada caso el tipo de gráfica más apropiado.

También conviene hacer un comentario sobre lo que los datos y las gráficas están mostrando.

Los objetivos que pretendíamos con esta actividad son los siguientes:

A) Coeducativos:

* Que nuestras alumnas y alumnos conozcan la situación laboral de

la mujer en la zona; conscientes de la relativa fiabilidad de los resultados.

* Reflexionar y hacer reflexionar sobre las desigualdes entre hombres y mujeres, en particular en el mundo laboral.

B) Del área de Matemáticas:

* Que nuestros alumnos y nuestras alumnas se enfrenten a un «auténtico problema»: deberán recopilar gran cantidad de datos, organizarlos, seleccionar aquellos que sean significativos para el estudio que pretendemos realizar, confeccionar tablas y gráficas, sacar conclusiones.

Posteriormente, ya con nuestros alumnos y alumnas enfrascados en el trabajo, descubrimos que se estaba cumpliendo otro objetivo, de carácter general ,que en principio no nos habíamos planteado:

* Para llevar a cabo este trabajo, alumnas y alumnos debieron tomar contacto con las instituciones de su pueblo: Ayuntamiento, Oficina del INEM, Instituto de la Mujer, Asociaciones Culturales, Biblioteca, Sindicatos, etc. En muchos casos acudían a estos lugares por primera vez o supieron de su existencia con motivo del trabajo.

Fijamos un plazo para la entrega del trabajo y fuimos dando pistas para resolver los problemas que se les plantearon durante la confección del mismo.

Después de una lectura de los trabajos, los devolvimos con las anotaciones y correcciones que consideramos pertinentes, para la exposición en clase y un debate sobre las conclusiones obtenidas y los aspectos matemáticos que habían entrado en juego.

Las conclusiones que se obtuvieron fueron las esperables en una zona eminentemente rural y, en algunos pueblos, con un reciente desarrollo turístico:

* La mayoría de las mujeres, de bajo nivel cultural, trabajan como amas de casa.

* Cuando la mujer trabaja fuera, lo hace preferentemente en el sector servicios o en el campo.

* Pese a todo, se observa una progresiva incorporación de las mujeres más jóvenes al mundo laboral ; aunque también sigue siendo frecuente que la mujer deje de trabajar cuando se casa.

El debate en clase fue muy animado y fructífero. Destacar del mismo, aparte de los comentarios y opiniones sobre los resultados obtenidos, la discusión en torno a la elección de la muestra y la importancia de hacer una elección adecuada para que los resultados obtenidos sean fiables.

Una selección de los trabajos presentados se imprimió en un cuadernillo que se distribuyó entre el alumnado del centro. Esto significó, para la mayoría, una gran satisfacción, pues pudieron ver "en letra impresa" lo que tanto esfuerzo les había costado.

Por último, y como colofón, tuvo lugar en el centro, con motivo del día 8 de marzo, una mesa redonda sobre salidas profesionales con la que pretendíamos defender la tesis de que el trabajo no tiene género y que hombres y mujeres estamos igualmente dotados para realizar cualquier trabajo. Participaron en la misma una arquitecta, una camionera-empresaria, una representante de la política local y un educador infantil.

Valoración

Valoramos muy positivamente la experiencia desde el puo de vista profesional, ya que consideramos que se cumplieron los objetivos que nos habíamos propuesto e incluso algunos que no nos habíamos propuesto.

También ha resultado una experiencia positiva desde el punto de vista personal, puesto que la organización de la actividad suponía un reto que vimos superado y porque creemos que nuestras alumnas y alumnos disfrutaron y aprendieron. Creemos que para ellos y ellas fue una actividad altamente motivadora, si bien no todos alcanzaron todos los objetivos.

Resumen

Describimos el trabajo llevado a cabo por alumnas y alumnos de 4º de E.S.O. del I.E.S. "ALYANUB" de Vera (Almería), en torno al tema "Situación laboral de la mujer en mi pueblo"; en el marco del desarrollo de los contenidos de estadística en el área de Matemáticas.

Bibliografía:

* GUZMÁN, M. de; COLERA,J; SALVADOR, A.- **Matemáticas 1º B.U.P.**; Anaya.

* NORTES CHECA, A.- **Encuestas y precios**; Editorial Síntesis.

* GRUPO CERO.- **Análisis y Estadística.**

* INFORME COCKCROFT.- **Las matemáticas sí cuentan**; M.E.C.; Madrid, 1985.

Mª Encarna Aznar Sánchez
Ángeles López Hernández
I.E.S. "Alyanub"
Almería

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ______________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ______________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal Nº _______ Fecha ___________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304, 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

ASESORES

- Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals.
  * Claudi Aguade Bruix

- Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
  * Ismael Roldán Castro
  * Francisco Javier Fernández
  * Rafael Pérez Gómez
  * Miguel de la Fuente
  * José Muñoz Santoja

- Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
  * Horacio Gutiérrez Fernández
  * J. Luis Álvarez García

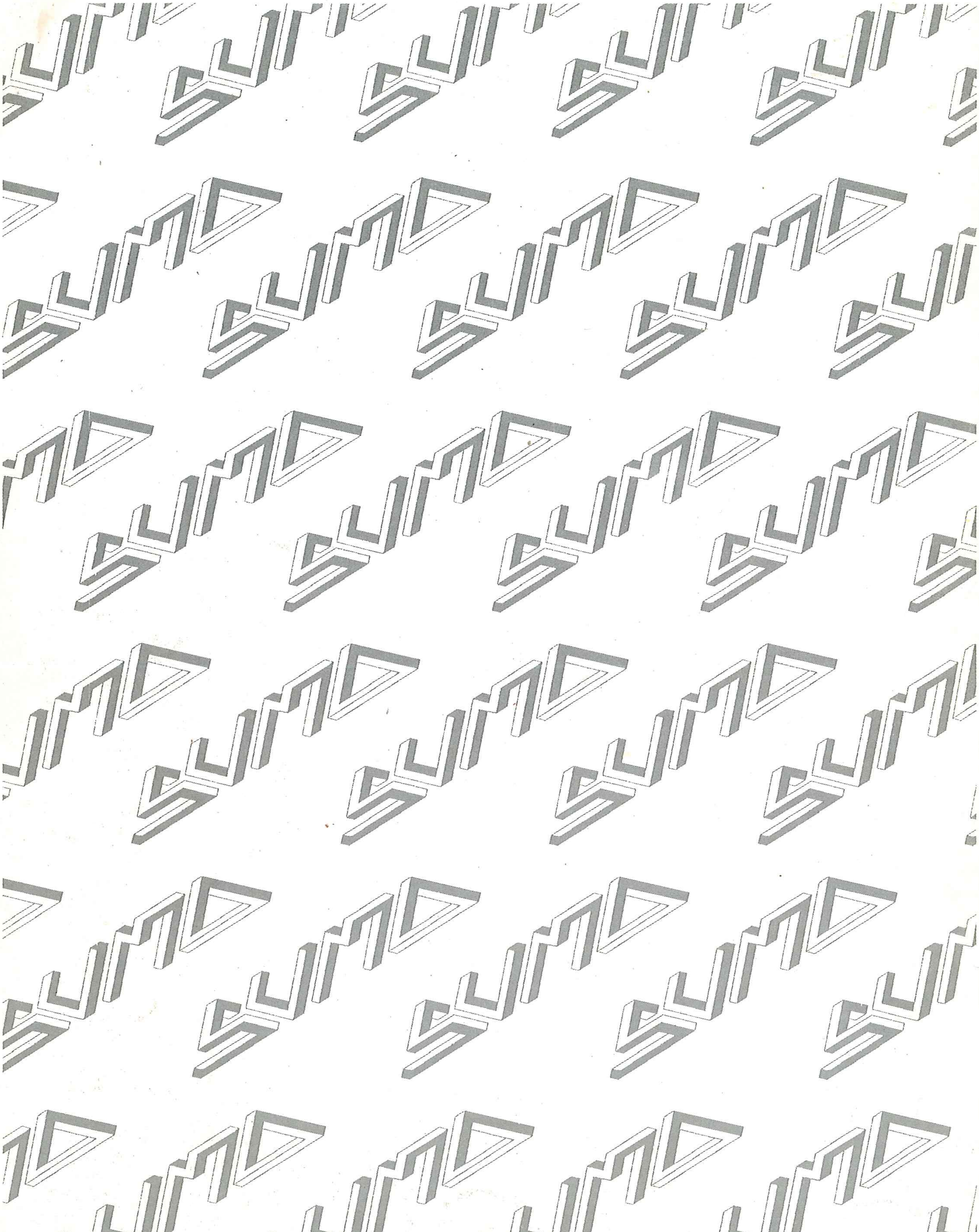
- Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
  * Fernando Hernández Guarch
  * Pilar Acosta Sosa
  * Manuel Luis de Armas Cruz
  * Mª Pilar Canción León
  * Carlos Duque Gómez

- Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
  * Antonio Bermejo
  * Francisco L. Esteban

- Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Kawarizmi"
  * Luis Puig Espinosa
  * Pascual Pérez Cuenca

- Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
  * Abilio Corchete González
  * Juan Gallardo Calderón

- Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia
  * Andrés Marcos García



PARA COLECCIONAR Nº 9

El "Para Coleccionar" nº 9 recoge un breve recorrido histórico por los Congresos de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), los ICME'S celebrados hasta la actualidad.

El ICMI (o la ICMI) se creó durante la celebración del IV Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Roma en 1908, siendo el matemático Félix Klein uno de los principales mentores de esta iniciativa. El ICMI aparece como consecuencia de:

— Expansión de los sistemas educativos. (Fundamentalmente gracias al impulso dado a la que hoy conocemos como enseñanza secundaria).

— Necesidades de reforma de los curriculum, adaptándolos a las nuevas corrientes y a las tecnologías imperantes (F. Klein llama la atención sobre la utilización de las máquinas de calcular y, en su libro "Enseñanza elemental de la matemática desde un punto de vista superior", describe una máquina de calcular, la Brunswiga, y afirma que ningún maestro debería terminar sus estudios sin conocerla).

— La geometría desde un punto de vista no euclídeo. No se refiere, obviamente, a que se pretendiera incluir las geometrías no euclídeas, sino a que se pretende adoptar, antes que el desarrollo de Euclides, otro basado en los Fundamentos de Geometría de Hilbert (hay quienes incluso escriben -Halsted- tratados de geometría elemental basándose en éstos últimos).

— Romper las barreras que separan el álgebra y la geometría, a nivel de enseñanza secundaria.

— La función como noción central del Análisis (el 'pensar funcionalmente' que proponía Klein).

— Qué matemáticas impartir a aquellos alumnos que no van a ingresar en la Universidad.

El trabajo de la Comisión durante su primera andadura se centró en la publicación de una revista, "La Enseñanza Matemática" y, sobre todo, en la realización de informes para la enseñanza de las matemáticas (Matemáticas para estudiantes de Físicas y Naturales" Milán, 1911.- "Intuición y experimentación en la enseñanza secundaria"; Cambridge, 1912; "Introducción del cálculo diferencial e integral en la secundaria"; París, 1914).

(Se paralizan las actividades con el comienzo de la 1ª guerra mundial y la Comisión no vuelve a levantar cabeza hasta después de la segunda guerra mundial, para convertirse en 1952 en una Comisión de la Unión Matemática Internacional).

Tras la inclusión del ICMI, en 1952, como una Comisión de la Unión Matemática Internacional (IMU), el ICMI se centra principalmente en aspectos puramente matemáticos:

– "El papel de las Matemáticas y de los matemáticos en el mundo actual" (Amsterdan, 1954).

– "Enseñanza de las matemáticas hasta los 15 años. Bases científicas de las matemáticas en la enseñanza secundaria y preparación científica del profesorado de enseñanza secundaria". (Ginebra, 1955).

Tras el Congreso de Royaumont, los trabajos del ICMI se dedican principalmente al desarrollo de las matemáticas modernas en la enseñanza (Congresos de la IMU, Estocolmo, 1962 y Moscú 1966. En estos Congresos, en los que el ICMI participa como una sección, se presentan ponencias tales como: "Matemáticas necesarias para entrar en la Universidad"; "La influencia de la investigación matemática en la enseñanza"):

El punto de inflexión del ICMI se produce con la llegada a la presidencia del Profesor Hans Freudhental, en 1967.

Se lanza entonces la idea de celebrar Congresos Independientes de los de la IMU, dedicándolos exclusivamente a la educación matemática. Nace así los ICME's, celebrándose el primero en Lyon (Francia) en 1969.

1º ICME: LYON -Francia-, 1969.

Asisten unos 600 profesores.

1) La didáctica de las matemáticas como ciencia autónoma.

2) Importancia de desarrollar la cooperación Internacional del profesorado.

3) Necesidad de la formación continua de los profesores de matemáticas.

4) Importancia de los niveles básicos (preescolar y primario) en la enseñanza de las matemáticas.

2º ICME: EXETER -Inglaterra-, 1972.

Asisten unos 1.500 profesores.

Se plantean las primeras críticas a la matemática moderna como eje del programa de enseñanza. Precisamente un insigne matemático, René Thom, se plantea en su conferencia plenaria: "Las matemáticas modernas, ¿existen?".

3º ICME: Karlsruhe -R.F.A.-, 1976.

Asisten unos 2.000 profesores.

Este tercer Congreso supone un cambio de rumbo respecto de la tendencia conocida como matemáticas modernas y se hace hincapié en la utilización de las nuevas tecnologías, principalmente la informática.

Hay que destacar de este Congreso también la conferencia plenaria del profesor Michael Atiyah quien dirigiéndose a sus colegas universitarios decía : "Habéis suprimido a Euclides y puedo estar de acuerdo, pero ¿cómo habéis programado la geometría en la enseñanza?. ¡No hay geometría!".

Atiyah continuó diciendo que la matemática que estudian los alumnos es todavía más lejana de la realidad justamente por el hecho de que sin geometría no se tiene ningún estimulo a observar. Y, desde un punto de vista teórico, dijo, los matemáticos deben reconocer que la intuición geométrica constituye la fuente más expresiva para la investigación y la comprensión de muchos aspectos de las diversas ramas de la matemática.

¡La polémica sobre la enseñanza de la geometría estaba servida!

4ª ICME: Berkeley -USA-, 1980.

Se estabiliza el número de asistentes en 2000 hasta el 7º ICME.

Es el único Congreso en el que el español ha sido lengua oficial.

La principal conclusión de este Congreso se centra en torno a la recomendación de que la Resolución de Problemas debería ser el eje directriz de la enseñanza de los 80.

5º ICME: Adelaide -Australia-, 1984.

El tema estrella durante este Congreso sigue siendo la Resolución de Problemas.

Irrumpe con fuerza la "Matemática para todos", que había sido objeto de uno de los grupos de trabajo.

Pero es también el Congreso del eclecticismo: ante la disparidad de métodos y tendencias se llega a decir "Hay que comer de todo", es decir ningún método es mejor que otro; hay que actuar de acuerdo con los propios condicionantes (de número de alumnos, de preparación del profesor, etc,).

Presentación de las etnomatemáticas, por el Profesor Ubiratán D'Ambrosio.

6º ICME: Budapest -Hungría-, 1988.

Podemos destacar como puntos interesantes de este Congreso:

a) El papel que jugarán las nuevas tecnologías en los años venideros.

b) Necesidad creciente de la formación permanente y continua del profesorado.

c) Consolidación de la educación matemática como ciencia autónoma.

Asisten más de 50 profesores españoles. El profesor Claudi Alsina intervino dentro de las presentaciones nacionales hablando sobre la situación de la educación matemática en nuestro país.

7º ICME: Québec -Canadá-. 1992.

Primer Congreso presidido por un profesor español: Miguel del Guzmán.

Aumenta el número de participantes a 3000, siendo España el 6º país en número de asistentes (160).

Importante asistencia del profesorado norteamericano preocupado por los avatares del análisis en la enseñanza, frente a los intentos de introducción de la matemática discreta.

Intervención del Profesor Hawson hablando de la necesidad de que la educación matemática debe extenderse a todos lo niveles, que no es sólo cosa de primaria y secundaria. En la enseñanza terciaria, también hay educación matemática, afirma.

Se hace un llamamiento para la colaboración en un Fondo de Solidaridad del ICMI, que permita la ayuda a la investigación den educación matemática a profesores de países de escasos recursos.

Stand y actos de presentación de la sede española para organizar el 8º ICME.

Intervención del Presidente de la Federación en el acto de Clausura del ICME.