Las calculadoras en las clases de Matemáticas

José Antonio Mora Sánchez

Las calculadoras y los problemas matemáticos

Las calculadoras han entrado en las clases de matemáticas para ocupar un espacio que les ha permitido convertirse en una herramienta natural. Los estudiantes las utilizan con desparpajo y el profesorado las ve ya con menor recelo.

Las calculadoras realizan con facilidad ciertas tareas rutinarias, con ello facilitan que parte del tiempo y del esfuerzo que hasta ahora se les dedicaba, se pueda destinar a la adquisición de nuevas experiencias. Permiten igualmente concentrar intereses en la comprensión de los matemáticos y en *desarrollar nuevas estrategias de razonamiento.* Es este último efecto que subrayamos el que pasamos a analizar en el presente artículo.

En estos momentos de aparente consenso en el debate sobre la utilización de las calculadoras, es cuando resulta pertinente indagar acerca dela forma en que influyen estos aparatos en tareas habituales de la matemática escolar de todos los niveles. Los algoritmos para el cálculo, los métodos de resolución de ecuaciones, las operaciones con matrices, el cálculo de límites o la representación de funciones son algunos ejemplos de un amplio abanico de tareas matemáticas que habrá que revisar a la luz de los nuevos recursos tecnológicos.

Todo esto no es más que una parte del problema más amplio que constituye la cada vez más necesaria revisión de los contenidos de la matemática escolar, tanto en lo referente a los conceptos, como a los procesos, a las estrategias de resolución de los problemas matemáticos y a la actitud con que se enfrentan a ellos.

Resolución de ecuaciones

Hasta los más convencidos de la introducción de las calculadoras en las clases de matemáticas habremos de admitir ciertas resistencias –a veces paralizadoras–, a comparar los métodos que propician las calculadoras con los métodos clásicos de las matemáticas escolares, resistencias que se acrecientan cuando llegamos al terreno del álgebra.

Ecuaciones del tipo:
$x^2-3x+4=0$, $2^{(3+x)}=1/64$
por ejemplo, tienen un tratamiento diferenciado en las clases de matemáticas, cada una tiene su método de resolución particular e independiente del otro. La diferencia se acrecienta con el tiempo, ya que su estudio se produce en dos momentos distintos del aprendizaje escolar –con varios cursos de diferencia–.

Sin embargo, conceptualmente todas ellas proponen una misma tarea: la búsqueda de uno o varios valores de verdad o la constatación de su inexistencia. Esto es lo que les confiere su identidad como ecuaciones con anterioridad a cualquier clasificación que se establezca: lineales, cuadráticas, exponenciales, etc.

Cuando se nos ocurre la idea de dejar de lado los algoritmos tradicionales de cálculo, resolución de ecuaciones, etc. nos entra un cierto desasosiego, es la sensación de dejar de hacer algo que desde tiempo "inmemorial" venen haciendo las personas. Nos asaltan las dudas: "¿No será una transgresión producto de una moda pasajera?".

Es éste un sentimiento de precaución que, aunque natural –y en muchos casos beneficioso en educación–, no resiste aquí el análisis histórico. Todas las culturas han utilizado los mecanismos a su alcance para realizar las operaciones. Desde este punto de vista los algoritmos estándar de cálculo están lejos de ser eternos, son un invento relativamente moderno que sólo tiene unos siglos y que no es más que una herramienta entre muchas otras: cuerdas, cuentas sobre un tablero, muescas en huesos y palos o ábacos han perdurado durante miles de años hasta que la humanidad ha encontrado en cada caso otro método mejor –más rápido y/o más fiable– que lo sustituyera.

En este proceso no hay vuelta atrás, cada innovación, cada descubrimiento se ha construido sobre el armazón anterior para proseguir el avance. El proceso de cambio puede durar siglos o meses pero podemos estar seguros de que es irreversible, no está sujeto a las leyes del péndulo. Una vez conocidas las ventajas del cálculo con cifras, el ábaco queda relegado a pequeños círculos de resistencia.

Actualmente el ábaco se utiliza en las escuelas como un recurso entre otros para sentar las bases del sistema de valor posicional y para mejorar la comprensión de algunas operaciones. Éste también puede ser un buen destino para los algoritmos de lápiz y papel.

La calculadora y los métodos de las matemáticas. El caso del ensayo y error

La calculadora permite hacer efectivo el método de ensayo y error para resolver ecuaciones. Este método iterativo, conocido también con el nombre de ***tanteo***, resuelve cualquier ecuación de modo aproximado. En realidd permite más estimar que resolver la ecuación, con las limitaciones de exactitud impuestas por la máquina y de tiempo añadidas por el usuario.

Este método permite abordar con confianza muchos otros problemas matemáticos del ámbito escolar y extraescolar. Sin embargo es despreciado en cierto modo por los profesores de matemáticas al considerarlo un método "menor" con la consiguiente inducción de actitudes en los estudiantes.

Los profesores manifestamos en nuestros debates que el método de ensayo y error, por muy rfinado que sea, es menor ***potente***. Sin embargo, para una calculadora científica, las dos ecuaciones planteadas (x^2-$3x+4=0$ y $2^{(3+x)}=1/64$) son expresiones para las que buscamos uno o más valores y parece razonable acercarnos a ellos por aproximaciones sucesivas.

El argumento esgrimido viene a ser. "Cómo puede ser mejor un método que necesita:

* de un recurso externo a nosotros mismos –la máquina–,
* un buen rato, ya que alguien medianamente experto invertirá un mínimo de diez minutos, y
* sólo nos dará una aproximación al problema planteado.

Y todo ello ante el método algebraico que:

* sólo depende de nuestra capacidad,
* proporciona la solución en breves instantes, siempre y cuando no cometamos errores, y
* será exacta".

Introducción de nuevos criterios para el análisis

Un análisis más exhaustivo nos lleva a considerar que dependencia, rapidez y exactitud no son más que tres aspectos de la resolución de problemas matemáticos, y podemos encontrar nuevos criterios de gran utilidad para arrojar luz sobre el problema:

Restricción: Tenemos casi tantos métodos como tipos distintos de ecuaciones: lineales, cuadráticas, Ruffini para algunas polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. Cada una con su secuencia particular de instrucciones. En cambio, el método de aproximaciones sucesivas es aplicable no sólo a esas ecuaciones sino a otras muchas como:

$2^{(3+x)}=x/63$; $x^3-16x^2=x-1.12$; $x^x=3$

en las que los métodos escolares de resolución de ecuaciones comienzan a tener dificultades.

Ámbito: El método es aplicable a muchos otros tipos de problemas matemáticos: calcular la arista del cubo de volumen prefijado, obtención del máximo de una función, etc. y también a situaciones de otras áreas de conocimiento.

Persistencia: No se puede considerar como aprendizaje escolar todo aquello que se intenta comunicar al estudiante, sino aquello que el estudiante aprehende y hace suyo. Vendría a ser algo así como el poso que queda varios años después de haber finalizado los estudios.

Si exceptuamos al 2% de las personas que se dedican en mayor o menor medida a las matemáticas, el 98% restante no resolverá nunca una ecuación de segundo grado, es más, si se la encuentra, ofrecerá excusas de tipo "yo nunca fui bueno en matemáticas" o "eso lo sabía hacer yo, pero ya no me acuerdo" poco antes de abandonar el problema para dedicarse a otra cosa.

En cambio, un método que utilice una mayor carga intuitiva establecerá múltiples conexiones con otros conceptos y procedimientos y será más fácil que se encuentre incluido en la memoria a largo plazo.

Dependencia: El argumento precedente puede llevar a que es más peligroso depender de la propia memoria que de la calculadora. Pocos métodos de la matemática escolar resisten un verano, y sólo unos pocos perduran años, pero la calculadora estará al alcance de la mano.

Productividad: En algunos casos el método de ensayo y error puede ser más productivo (en cuanto que aporta más conocimiento) que los algoritmos de cálculo. El algoritmo para obtener raíces cuadradas tiene la innegable virtud de ser elegante y bello, ¡pero sólo para aquellos espíritus sutiles y muy preparados para percibir esa belleza!, y ¿cuántos de los estudiantes a los que se les está enseñando ese procedimiento en la actualidad, están capacitados para tales percepciones? Un algoritmo tan sencillo como el de la multiplicación es presentado a los estudiantes como un proceso para obtener un resultado. Como señala D. R. Hofstadter (1982), "muchos de estos alumnos, absorbidos por las operaciones, no advierten la armonía, y tampoco la razón de este proceso". De esta forma el algoritmo es automatizado pero sin ser comprendido, cualquier pequeño error u olvido será fatal ya que no podrá ser reparado mediante los mecanismos asociados a la comprensión.

La tecla de raíz cuadrada de la calculadora no podemos decir que aporte mucho más conocimiento, pero al menos no se pierde el tiempo ni se aburre a los estudiantes.

La ventaja de la calculadora es que permite diseñar mejores situaciones de aprendizaje que en el trabajo con papel y lápiz: la obtención de un número que multiplicado por sí mismo nos dé el inicial pone de manifiesto la relación raíz-potencia (que queda oculta tanto en el algoritmo como con la tecla raíz) a la vez que se profundiza en un método aplicable a otras muchas situaciones y permite abrir intresantes debates en clase sobre la exactitud requerida y se refuerza la comprensiónde los números decimales. Este proceso es inviable sin la calculadora, si los estudiantes deben realizar con el algoritmo escrito estas operaciones, necesitan prestar tanta atención a los cálculos con tal de no equivocarse, que pierden la perspectiva del problema y de los conceptos que se pretendían estudiar.

Rentabilidad: Si entramos en la valoración del tiempo empleado en la escuela, a una ecuación de segundo grado se le dedican muchos esfuerzos durante la escolaridad obligatoria y no sirve para resolver mas que ecuaciones de ese tipo. No es de extrañar que los estudiantes –mientras son estudiantes–, recuerden la fórmula, siempre que los coeficientes sean enteros, no haya muchos negatvos y no falte ninguno de ellos.

La rentabilidad no es mucha: se dedican demasiadas horas de trabajo de clase y deberes para casa durante varios cursos, para aprender a usar un método excesivamente particular. Las ecuaciones exponenciales no tienen tanta suerte, el tiempo que se les dedica es mucho menor y el olvido actúa con mayor celeridad, un par de meses suelen ser suficientes.

Además del esfuerzo invertido, la rentabilidad ha de tener en cuenta el grado de éxito alcanzado. Actualmente hay un gran porcentaje de estudiantes que sale de las escuelas sin un bagaje suficiente de matemáticas para afrontar con confianza las necesidades que se les van a plantear como ciudadanos y como profesionales. En el ámbito numérico estas carencias se revelan principalmente en la comprensión de los números negativos y los decimales, en las operaciones, en los cálculos con porcentajes y en las proporciones. Ver Hart (1981).

Lo importante aquí es que muchas de estas deficiencias son evitables con la calculadora, con ella la realización de operaciones ya no es un obstáculo insalvable para el desarrollo matemático de los estudiantes –aunque por supuesto seguirá siendo un complemento fundamental de ese desarrollo–. Dickson (1984) llega a afirmar en sus conclusiones: "para muchos alumnos, el único método realista de multiplicar o dividir números decimales es recurrir a la calculadora. Y esto ni siquiera será efectivo a menos que su comprensión de la naturaleza de los decimales y el efecto de multiplicar y dividir se encuentre suficientemente desarrollada".

Dos posibles conclusiones

De todo lo anterior podría seguirse que ha llegado la hora de abandonar todos los métodos tradicionales de las matemáticas, unos por escasamente aplicables, otros por fácilmente olvidables, etc. para ir a caer en los brazos de las calculadoras e intentar resolver a partir de ahora los problemas por tanteo.

Podríamos, por el contrario, justificar los métodos algebraicos de resolución de problemas. Generalmente estos métodos se apoyan unos en otros y contribuyen a que las reglas de manipulación algebraica sean asimiladas mediante la práctica repetida para conformar una estructura que será muy importante para estudios posteriores.

La calculadora es una herramienta suficientemente versátil como para llegar a armonizar dos planteamientos aparentemente contradictorios como los anteriores. Lo veremos con un ejemplo en el que se pone de manifiesto el papel de la calculadora como activadora de procesos. En un curso de séptimo de E.G.B. en el que hemos estado experimentando unos materiales didácticos centrados en la utilización de calculadora se planteó el siguiente problema:

"Un comerciante incrementa un 30% el precio de compra para calcular el precio de venta. ¿Cuál es el máximo porcentaje de descuento que puede realizar para no perder dinero en la venta de un determinado artículo?".

Cada estudiante toma una cantidad diferente como precio de compra para investigar el descuento que le puede hacer. A esas alturas del trabajo, la mayoría de la clase tiene claro que no se puede llegar al 30% de descuento y se deciden por un proceso de búsqueda basado en aproximaciones sucesivas. Para la puesta en común se toma un artículo que había costado 1800 ptas y que al aplicarle un incremento del 30%, se aumenta en 540 con lo que dará un precio de venta de 2340 ptas. El problema se reduce a obtener qué porcentaje de 2340 será igual a las 540 ptas. que se han añadido. Los intentos:

20% de 2340 es 468 < 540
25% de 2340 es 585 > 540
22% de 2340 es 514,8 < 540
23% de 2340 es 538,2 < 540
23.1% de 2340 es 540,54 > 540
23.08% de 2340 es 540,072 > 540
23.075% de 2340 es 540,0018

Cada estudiante con una cantidad inicial distinta había llegado a la misma solución mediante este procedimiento iterativo. La cuestión estaba a punto de ser zanjada cundo una estudiante planteó: "*"¿No podríamos haber calculado ese porcentaje de una manera más sencilla"*. Es aquí la calculadora ha jugado su doble papel:

* Por una parte ha servido para resolver un problema real que hubiera debido esperar tiempo para ser planteado de no haber estado disponible.
* Aquí la secuencia de trabajo sirvió como detonante de procesos para la búsqueda de un método mejor (más sencillo, más directo) y más adecuado a la situación planteada.

Una posible traducción numérica es:

El ❑ % de 2340 es 540,

o su transformación en una expresión del tipo:

$$\frac{\square \, . \, 2340}{100} = 540$$

Estos estudiantes de 7º no habían aprendido todavía a resolver ecuaciones con lo que se nos abren aquí dos posibilidades, una es comenzar en este momento una secuencia de trabajo encaminada al tratamiento de las ecuaciones, la otra consiste en realizar una secuencia de transformaciones que pueda ser comprendida en este momento y que sirva más tarde para el aprendizaje de las ecuaciones. Esto se podría hacer con argumentos del tipo "si dos cantidades son iguales, lo seguirán siendo aunque las multipliquemos por 100" y tendremos:

❑ . 2340 = 54000

y ahora no tenemos más que buscar un número que multiplicado por 2340 nos dé 54000 que es lo mismo que obtener el resultado de dividir 54000 entre 2340 para obtener 23,07692308%.

En esta situación la calculadora no sólo ha sido compatible con la resolución de problemas mediante expresiones literales sino que lo ha provocado como una necesidad.

Otra forma de llegar a la solución que sólo toma en cuenta las relaciones entre operaciones consiste en analizar que en la obtención del precio de venta (2340), he de multiplicar el precio de compra (1800) por 1,30. Si ahora quiero deshacer el cambio, buscaré un número que multiplicado por 2340 dé por resultado 1800 y ese número no es otro que el inverso de 1,30, es decir 1/1.30

Nuevas calculadoras. Nuevos métodos para la matemática

A los argumentos apuntados en el apartado anterior: restricción, ámbito, persistencia, dependencia, productividad y rentabilidad, podemos añadir un nuevo producto de la introducción de las calculadoras gráficas en la enseñanza: la apertura.

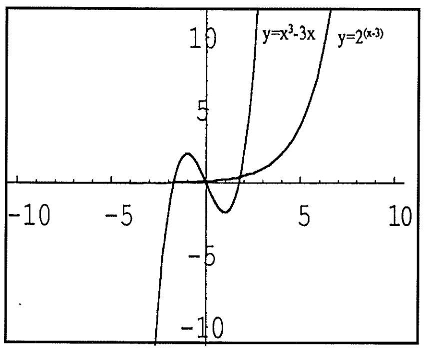
Apertura: las calculadoras abren el espectro de las matemáticas escolares, posibilitan el tratamiento de problemas impensables sin ella. El abanico de ecuaciones que podemos resolver mediante métodos algebraicos es muy limitado, mientras que la calculadora permite que se puedan abordar muchas otras.

Cuando queremos resolver la ecuación:

$$2^{(x-3)}=x^3-3x$$

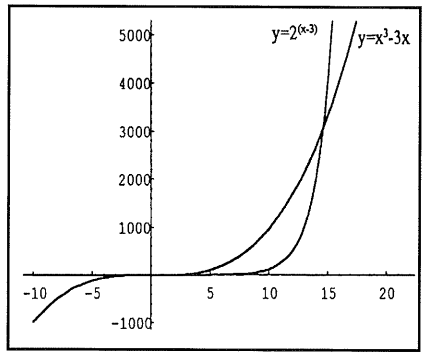
un método gráfico con calculadora pueden consistir en la introducción de las funciones $y=2^{(x-3)}$ e $y=x^3-3x$ y obtendremos los puntos de corte con una aproximación considerable en poco tiempo (el argumento de la rapidez se tambalea).

Si observamos las gráficas que ofrece la calculadora:



parece que estamos ante un problema casi resuelto. Tres puntos de corte que podemos encontrar por aproximaciones sucesivas o con el zoom de la máquina o con la opción de intersección si la calculadora dispone de ella. Pero hay algunos detalles que han escapado a la calculadora: no nos ha ofrecido más que la pantalla estándar ($-10<x<10$, $-10<y<10$). La gráfica de $y=2^{(x-3)}$ queda por debajo de $y=x^3-3x$ a partir del tercer punto de corte. Si aportamos ahora conocimientos sobre funciones exponenciales y polinómicas, podemos estar seguros de que esa situación se invertirá para valores mayores del exponente.

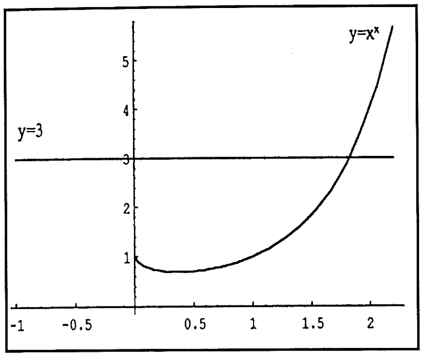
Dibujamos ahora la gráfica para $-10<x<20$, $-1000<y<5000$ nos encontramos con la confirmación de lo anterior, el cuarto punto de corte:



Tenemos otro ejemplo en una de las ecuaciones planteadas anteriormente, $x^x=3$, para la que es difícil (¿será posible?) encontrar un método algebraico de resolución. Los primeros cambios, como xlogx=log3 no aportan nueva información. La resolución gráfica comienza por la evaluación de la función $y=x^x$. Algunos datos relevantes son:

* no existe la función para $x<0$,
* crece cada vez con mayor rapidez a partir de $x=1$, incluso puede que antes,
* como $1^1=1$ y $2^2=4$, el punto de corte con $y=3$ se encontrará entre 1 y 2, más próximo a 2 que a 1.

Con todo esto ya tenemos el intervalo en el que representar las funciones:



En cuanto a la comprensión de las matemáticas no hay más que fijarse en la cantidad de conceptos matemáticos traídos a cuenta de la resolución de una ecuación: funciones, gráfica, crecimiento, tasa de crecimiento, punto de corte, dominio, etc., todos ellos se han de entrelazar para dar respuesta a la situación planteada. No se puede invocar aquí el predominio de los métodos intuitivos, muy al contrario son las consideraciones cualitativas las que han prevalecido para salir adelante.

Las calculadoras modifican el centro de atención de las matemáticas escolares con un desplazamiento hacia una comprensión más cualitativa de las matemáticas. Como se han puesto de manifiesto en el ejemplo anterior, ha sido la comprensión de los distintos tipos de crecimiento de las funciones lo que nos ha orientado sobre la solución a las situaciones planteadas.

La calculadora como recurso didáctico

Estas útlimas reflexiones nos llevan a estudiar la forma en que interviene la calculadora como un recurso más que se suma al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Este análisis no es tan fácil como el que se puede realizar en Geometría con el estudio de los poliedros, donde un mismo objeto de estudio admite diversidad de enfoqes dependiendo del recurso didáctico empleado para el estudio:

* La cartulina troquelada pone el énfasis en las caras y en la forma de unirlas mediante artistas, los conceptos que surgen son los que se pueden percibir desde el exterior: ángulos diedros, concavidad y convexidad, se aprecian mejor los planos de simetría. El paso del espacio al plano vendría dado por el desarrollo.

* Con varillas es la estructura la que resalta, las aristas y la forma de unirlas en un punto para formar un vértice. Aparecen conceptos como la rigidez. Permite ver mejor el interior: los ejes de rotación del sólido. El paso al plano se hará por el diagrama de Schlegel y las redes planas.

* El estyropor permite la comunicación entre el exterior y el interior mediante los cortes en secciones planas. El paso al plano viene dado por las tomografías.

* Las retículas espaciales centran la atención en las uniones de unos poliedros con otros para compactar el espacio.

Los conceptos introducidos con cada uno de estos recursos pueden ser revisados con otros materiales al tratar temas diferentes al de poliedros: la rigidez con el mecano, los desarrollos planos con las tramas, la regularidad con los mosaicos, la simetría con los espejos, etc...

En este sentido se podría afirmar que cada recurso didáctico es “transparente” hacia determinados conceptos o destrezas, es decir, por el hecho de ser utilizado en el estudio de un tema, es más fácil que surjan ciertas preguntas que requieran una reelaboración de determinados conceptos.

La calculadora, como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, no favorece un análisis como el anterior, no es tan fácil descubrir cuáles son los conceptos y las destrezas que se “transparentan” de su uso. En una primera aproximación ha aparecido que, por su rapidez de cálculo, los métodos “sugeridos” por la calculadora son los que se basan en aproximaciones sucesivas para llegar al objetivo marcdo. Pero un análisis más detallado nos desvela otros muchos aspectos de las matemáticas que adquieren mayor relevancia cuando se utiliza la calculadora:

* Las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes.
* El sentido común y la estimación como control de las operaciones realizadas.
* La relación entre las operaciones.
* La generalización a partir de la obtención de pautas y regularidades.

* La construcción de tablas y/o gráficas. Dominio de una función.

* La comprensión cualitativa del crecimiento de una función.

* Los métodos iterativos.

El principio de un debate

No podemos olvidar argumentos de otro tipo, algunos económicos "no todos los estudiantes pueden disponer de una calculadora gráfica". Para analizarlo, no hay más que recordar lo que se decía hace diez años de la calculadora científica, hace 25 de la calculadora de cuatro operaciones, y el mismo que hace 500 años se hacía del cálculo con cifras, y el mismo que hace miles de años sin duda se haría del ábaco, y el mismo que...

La historia se repite y parece claro que no harán falta siglos para que todos los estudiantes de Secundaria lleven su calculadora gráfica en la cartera, será entonces cuando habrán entrado en las clases, nuestros estudiantes sabrán más matemáticas de lo que sabíamos nosotros –aunque nos cueste reconocerlo–, y el profesorado estará preparado para utilizarlas.

Puede que las calculadoras no sean más que la punta visible de cambios muchos más profundos en la actividad matemática. Lo que ocurre es que se perciben mejor por su fuerte implantación en la sociedad que las empuja hacia la escuela. Quizás el problema más amplio pase por considerar las nuevas tecnologías de una forma más global. En matemáticas tendría su traducción en la pugna entre las matemáticas continuas y las discretas que han llevado a la aparición y/o auge de temas como el estudio de grafos, fractales, etc.

Los debates acerca de cuestiones como la forma en que habrá que reformular los objetivos-contenidos-evaluación con la presencia de los nuevos avances tecnológicos, no serán indispensables para que las calculadoras entren en las clases de matemáticas, pero su planteamiento nos servirá para analizar tanto los aspectos positivos como los negativos de su introducción, y para encontrar la mejor forma de utilizarlas en el aprendizaje de las matemáticas.

Bibliografía

* DICKSON, L. BROWN, M. y GIBSON, O. (1984). **El aprendizaje de las matemáticas**. (Labor-M.E.C.: Barcelona).

* HART, K. (1981). **Children understanding of mathematics** 11-16. (John Murray: London).

* HOFSTADTER, D.R. (1982). **Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle**. (Tusquets: Barcelona).

José A. Mora Sánchez
C.E.P. d'Alacant