La recta en el aprendizaje de los números negativos

Alicia Bruno
Antonio Martinón

Introducción

El papel de la recta en el aprendizaje de los números ha sido estudiado por diferentes autores, entre ellos, ERNEST (1985) distingue tres usos principales que tiene la recta en la enseñanza primaria: como un modelo de enseñanza o ayuda para ordenar números, como un modelo para las cuatro operaciones básicas, y como contenido mismo del curriculum de matemáticas. En este trabajo nos centramos, principalmente, en el segundo uso de la recta citado por ERNEST.

Algunos trabajos de investigación con números positivos han estudiado la comprensión que tienen los alumnos de la recta al usarla como modelo para representar las operaciones básicas. Es el caso de los trabajos de CARR y KATTERNS (1984) y de DUFOUR-JANVIER et al. (1987), investigaciones en las que se ponen de manifiesto algunas dificultades que tienen los alumnos al utilizar este modelo.

CARR y KATTERNS realizaron un estudio sobre los errores que cometen los alumnos al representar e interpretar sumas y restas en la recta. Para ello, encuestaron a 531 alumnos de Nueva Zelanda, de 9 y 13 años de edad, con preguntas similares a las empleadas en el segundo National Assessment in Educational Progress in Mathematics (NAEP), en Estados Unidos, de modo que pudieron comparar los resultados de los dos países. La conclusión principal a la que llegaron es que los niños de ambos países no comprenden el principio en el que se apoya el modelo de la recta para las operaciones de suma y resta.

Otras investigaciones (JANVIER, 1983; LIEBECK, 1990) se han centrado en el uso de la recta con los números negativos. En ambos trabajos se discute la efectividad de este modelo como ayuda para comprender las operaciones, en especial para la sustracción.

En este trabajo analizamos algunos aspectos del uso de la recta por parte de alumnos de 12-13 años, a partir de los datos obtenidos en una experiencia realizada sobre la enseñanza de los números negativos, en la que la recta se utilizó como un apoyo, tanto para su introducción como para la resolución de problemas. Los aspectos sobre los que nos detendremos son, entre otros:

1) los errores que cometen los alumnos al representar números en la recta, antes y después de la experiencia;
2) si diferencian la representación de estados y variaciones;
3) cómo representan en la recta las operaciones de suma y resta;
4) qué situaciones utilizan para dar sentido a los números y a las operaciones en función de que los datos sean dados numéricamente o representados sobre la recta.

Experiencia

Para realizar la experiencia trabajamos con 76 alumnos, de 12-13 años, pertenecientes a tres grupos de séptimo nivel de Educación General Básica, de dos colegios diferentes de Tenerife. Los grupos los llamaremos G1, G2 y G3.

Elaboramos un material de trabajo que recoge diversas actividades, adecuadas para realizar la extensión de los números positivos a los negativos. El material fue seguido por los alumnos de los tres grupos durante aproximadamente dos meses (4 ó 5 horas semanales). En el grupo G1 la experiencia fue realizada por el primero de los autores de este trabajo y en los otros dos por el profesor Miguel Morales.

En las actividades que realizaron los alumnos, los números aparecían en situaciones concretas, con el fin de que enriquecieran el significado de los números. Estas situaciones representaban:

- *estados* (e):
  "debo 6 pesetas",
  "la temperatura es de 6 grados bajo cero";
- *comparaciones* (c):
  "tengo 6 pesetas menos que tú",
  "hay 6 grados menos en Madrid que en Londres";
- *variaciones* (v):
  "perdí 6 pesetas",
  "la temperatura bajó 6 grados".

Además, estas actividades se referían a *contextos* distintos:

- deudas,
- temperaturas,
- nivel del mar,
- carretera,
- tiempo,
- ascensor.

Por otro lado, la operatoria de los números negativos se estudió a través de la resolución de problemas. En el caso de la suma y la resta, los problemas respondían a distintos tipos de estructura, dependiendo de las situaciones que aparecían en su enunciado (estados, comparaciones y variaciones). Las estructuras que se trataron fueron:

– *suma o resta de dos estados* (e_1 y e_2) *con resultado el estado total* (e_t):

$$e_1 \pm e_2 = e_t.$$

Ejemplo: "Juan tiene 8 pesetas y debe 15 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?".

– *suma o resta de un estado inicial* (e_i) *y una variación* (v) *con resultado el estado final* (e_f):

$$e_i \pm v = e_f.$$

Ejemplo: "La temperatura por la mañana era de 8 grados sobre cero. A lo largo del día la temperatura bajó 10 grados. ¿Cuál era la temperatura por la noche?".

– *suma o resta de dos variaciones* (v_1 y v_2) *con resultado la variación total* (v_t):

$$v_1 \pm v_2 = v_t.$$

Ejemplo: "Un buzo bajó 8 metros y posteriormente subió 11 metros. ¿Cómo ha variado su posición con respecto a la que tenía antes de moverse?".

- *suma o resta de una estado* (e_1) *y una comparación* (c) *con resultado otro estado* (e_2):

$$e_1 \pm c = e_2.$$

Ejemplo: "Un hombre nació en el año 34 antes de Cristo y una mujer nació 16 años después que él. ¿En qué año nació la mujer?".

Los problemas trabajados en la experiencia variaban también según la posición que tuviera el dato desconocido, con esto queremos indicar que también se realizaron problemas de los tipos: e_t-e_1=e_2 , v_t-v_1=v_2 , e_1-e_2=c, e_f-e_i=v. En este trabajo, siempre supondremos que los datos que da el problema son los dos primeros términos y que el dato a buscar es el otro término de la igualdad.

Más detalles acerca de la estructura de los problemas puede encontrarse en VERGNAUD (1982) y BRUNO y MARTINON (1994a, 1994b).

Uno de los objetivos fundamentales de la experiencia fue conseguir que los alumnos comprendieran que, al introducir los números negativos, los conceptos de adición y sustracción quedan unificados; es decir, que en el conjunto de los números reales toda suma se puede transformar en una resta y que toda resta se puede transformar en una suma. Esto nos parece esencial, ya que es en la adición y en la sustracción donde está el punto fundamental. Antes de la experiencia, los alumnos tenían la idea de que la suma y la resta se utilizan en situaciones distintas: sumar es "añadir", "juntar", "reunir"..., y restar es "quitar", "separar",... Ahora se trata de presentar situaciones que pueden resolverse por igual con una suma que con una resta. Esto es, sumar es también "restar el opuesto" y restar es "sumar el opuesto", no sólo desde un punto de vista operativo, sino dándole significado dentro de las situaciones que los alumnos habían trabajado.

A través de las actividades fuimos introduciendo a los alumnos en la idea de que las situaciones pueden expresarse de dos formas, aunque con un mismo siginificado. Por ejemplo,

- "debo 5 pesetas" es lo mismo que "tengo -5 pesetas",
- "tengo 5 pesetas" es lo mismo que "debo -5 pesetas",
- "subir 2 pisos" es lo mismo que "bajar -2 pisos",
- "bajar 2 pisos" es lo mismo que "subir -2 pisos".

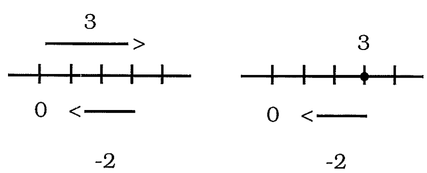
A partir de esto, un problema como "Juan tiene 6 pesetas y debe 10. ¿Cuál es su situación económica?", lo podían resolver por igual con el cálculo 6-10 que con el cálculo 6+(-10).

Por supuesto, conseguir este objetivo requiere un proceso de maduración que generalmente no se alcanza en los dos meses empleados para la experiencia, ya que se trata de modificar conocimientos fuertemente arraigados en los alumnos.

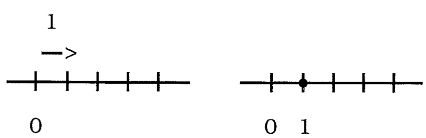
Se insistió en la representación de los números sobre la recta. Al principio se representaron situaciones numéricas correspondientes a los contextos antes mencionados (deudas, temperaturas, nivel del mar, carretera tiempo y ascensor) y más tarde se representaron los números en abstracto. Los alumnos aprendieron a representar los estados preferentemente con puntos y las variaciones y comparaciones preferentemente con flechas. Finalmente, la recta también fue utilizada como apoyo para resolver los problemas. Es importante resaltar que no se trabajó la representación en la recta de las operaciones de forma aislada o estrictamente numérica, sino que la recta siempre surgía como ayuda para la resolución de problemas.

JANVIER (1983) expone que la representación de la adición y de la sustracción con puntos y flechas en la recta puede ser ambigua para los alumnos, porque para una misma operación hay más de una representación, en algunos casos con puntos y en otros con flechas.

Por ejemplo, la suma 3+(-2) admite representaciones como



con respuestas



Efectivamente, estas representaciones pueden resultar ambiguas cuando no se dotan de significado concreto a los puntos y las flechas. Pensamos que con una aproximación de estas representaciones a través de la resolución de problemas, tal como hicimos en nuestra experiencia, puede conseguirse mejor comprensión del modelo.

Los alumnos realizaron pruebas en distintos momentos de la experiencia. Aquí nos referiremos a tres pruebas:

- Prueba Inicial: realizada antes de introducir los números negativos;
- Prueba Final 1: realizada al finalizar la experiencia;
- Prueba Final 2: realizada cinco meses después de terminar la experiencia;

Reproducimos en este trabajo las cuestiones de esas pruebas que tienen relación con la recta.

Los datos los hemos agrupado en dos apartados según el tipo de cuestiones: *representación en la recta* y *interpretación de números y operaciones*.

Representación en la recta

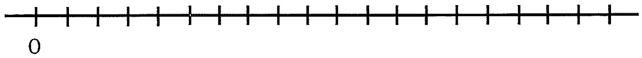
Debido a que las actividades que iban a realizar los alumnos estaban basadas en situaciones concretas, nos interesaba estudiar cómo representaban los alumnos los estados y las variaciones antes de la experiencia y cómo influyó la secuencia de aprendizaje en la forma de realizar las representaciones en la recta.

Las cuestiones que analizamos en este apartado están relacionadas con la representación en la recta y los enunciados aparecen en el cuadro 1. (Ver cuadro 1 en pág. siguiente).

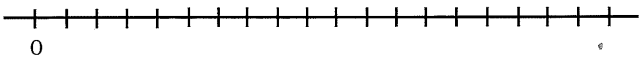
Por tanto, se pedía a los alumnos representar un estado (cuestión 1), una variación (cuestión 2), una situación que responde a la estructura $e_i \pm v = e_f$ (cuestión 3), una suma con

Cuadro 1. Enunciados de las cuestiones 1-5

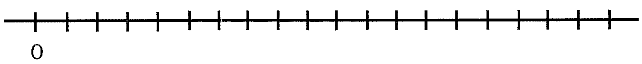
Cuestión 1. Representa en la recta la siguiente situación:
Estoy a 8 metros de altura



Cuestión 2. Representa en la recta siguiente situación:
Bajé 5 metros



Cuestión 3. Representa en la recta la siguiente situación:
Tenía 9 pesetas y perdí 5. ¿cuánto dinero me quedó?



Cuestión 4. Si tuvieras que utilizar la recta numérica o hacer un dibujo para explicar lo que significa la suma 4 + 3 = 7, ¿cómo lo harías?

Cuestión 5. Si tuvieras que utilizar la recta numérica o hacer un dibujo para explicar lo que significa la resta 6 - 2 = 4, ¿cómo lo harías?

números positivos (cuestión 4) y una resta con números positivos (cuestión 5). Las cuestiones 2, 3, 4 y 5 se les plantearon tanto en la Prueba Inicial como en la Prueba Final 2, con el fin de contrastar los errores que se cometían en ambas pruebas.

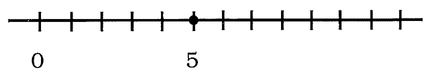
En el cuadro 2 damos los porcentajes de respuestas correctas e incorrecta de las cuestiones 1, 2 y 3. Hemos agrupado los datos de los tres grupos para facilitar la lectura.

Análisis de la Cuestión 1

Como puede observarse por los porcentajes de la Cuestión 1, en la que los alumnos tenían que representar "estoy a 8 metros de altura", las representaciones de estados las realizan con un alto grado de aciertos. La contestación más usual fue señalar un punto en la posición 8, y el error predominante fue empezar a contar las marcas de los números desde 0, y por lo tanto representar el 8 en la posición del 7.

Análisis de la Cuestión 2

Las representaciones que realizaron los alumnos de la situación "bajé 5 metros" en la Prueba Inicial demostraron que la enseñanza que habían recibido sobre los números positivos no les había llevado a diferenciar las representaciones de estados y variaciones, ya que la respuesta más frecuente fue similar a la dada para los estados, es decir



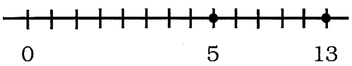
El error predominante fue similar al de la cuestión 1, es decir, en este caso colocar el número 5 en la posición del 4.

No se observan intentos de representar con segmentos, arcos o flechas el movimiento. La mayoría de los alumnos, entre el 100% y el 92% según los grupos, representan las variaciones con un punto en la recta.

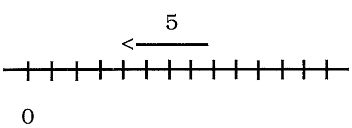
Cuadro 2. % en la Prueba Inicial y Final 2 de las cuestiones 1-3

	Cuestión 1		Cuestión 2		Cuestión 3	
	Correcto	Error	Correcto	Error	Correcto	Error
Prueba Inicial	93	7	74	26	28	72
Prueba Final 2			73	27	75	25

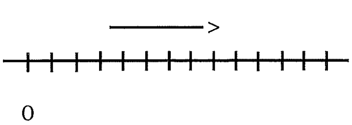
Hay muchos alumnos que muestran la necesidad de señalar una posición de partida para luego indicar la bajada, pero incluso en ese caso, el número 5 suele ser el punto final de la bajada y no la variación. De ahí que aparezcan algunos errores del tipo:



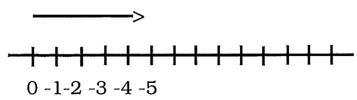
Los resultados son completamente distintos en la Prueba Final 2. Aunque el porcentaje de aciertos es similar en las dos pruebas, se produce un cambio en la forma de representar las variaciones y en el tipo de errores que se cometen. En esta prueba las representaciones de muchos alumnos son flechas o arcos orientados hacia la izquierda, indicando el movimiento (entre un 64% y un 100% según los grupos). También tienden a expresar el movimiento con el número -5. Los errores en esos casos consistieron en representar las flechas con cuatro unidades en lugar de cinco, es decir,



otro error fue orientar la flecha hacia la derecha:

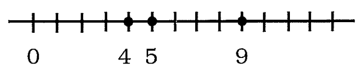


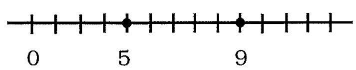
Una respuesta singular fue representar números negativos a la derecha del cero:



Análisis de la Cuestión 3

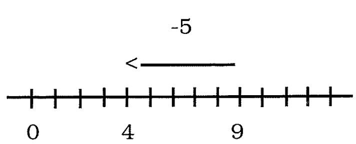
En esta cuestión sobre la representación en la recta de la situación "Tenía 9 pesetas y perdí 5, ¿cuánto dinero me quedó?", se produjo un cambio importante antes y después de la experiencia. El bajo índice de respuestas correctas de la Prueba Inicial para esta cuestión, nos indica que los alumnos tenían escasa experiencia en la representación de situación como la pedida. Los errores en este caso son muy diferentes, aunque los más frecuentes fueron los que aparecen a continuación:



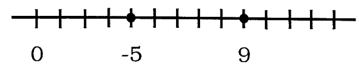


El primer error de los dos señalados indica una ausencia de significado concreto para la representación.

Esto cambia por completo en la Prueba Final 2. Se puede comprobar la mejora en todos los grupos, siendo la respuesta que más se repitió:



El error más frecuente en la prueba final 2 puede considerarse similar a uno de los de la prueba inicial, ya que fue:



Por lo tanto, podemos concluir que este tipo de enseñanza produjo una mejora significativa en las representaciones que realizan los alumnos de las situaciones estáticas y dinámicas. La experiencia realizada nos lleva a pensar que no es necesario retrasar este tipo de representaciones hasta la introducción de los números negativos. Pensamos que es posible hacerlo con anterioridad, ya que no observamos que los alumnos tuvieran excesivas dificultades en distinguir entre estados y variaciones. Por el contrario, sí observamos una falta de experiencia en el manejo de la recta, tanto en la representación de números como de situaciones concretas.

Análisis de las Cuestiones 4 y 5

Estas cuestiones sobre la representación de operaciones (suma y resta) son similares a las utilizadas en la investigación de CARR Y KATTERNS, con la diferencia que ellos no dieron la posibilidad de hacer un dibujo.

En los datos de estas cuestiones (cuadros 3 y 4) hemos distinguido los tres grupos, ya que a los grupos G2 y G3 no se les dió la opción de elegir entre hacer un dibujo o representar en la recta, sino que se les dijo que utilizaran la recta.

Cuadro 3. % de la cuestión 4

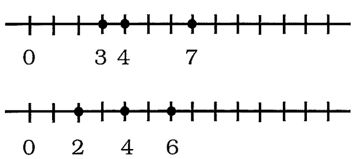
	% en la Prueba Inicial				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	9	9	61	4	17
G2	16	60	4	4	16
G3	18	78	–	–	4
	% en la Prueba Final 2				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	69	13	13	–	4
G2	68	23	–	–	9
G3	62	24	–	–	14

Cuadro 4. % de la cuestión 5

	% en la Prueba Inicial				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Error	Correcto	Error	
G1	9	9	56	4	22
G2	8	56	8	4	24
G3	15	81	–	–	4
	% en la Prueba Final 2				
	Eligieron la recta		Eligieron el dibujo		Blanco
	Correcto	Incorr.	Correcto	Incorr.	
G1	65	17	13	–	4
G2	67	24	9	–	–
G3	48	33	–	–	19

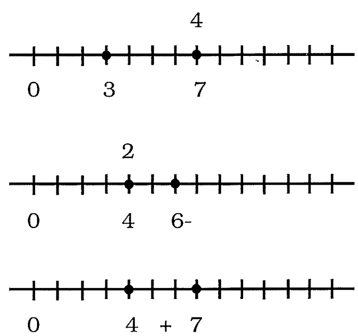
Por los resultados de la Prueba Inicial, puede comprobarse que en el grupo donde se les permitió elegir, (G1), los alumnos prefierieron hacer un dibujo antes que utilizar la recta, realizándolo con éxito en su mayoría. Mientras que en la prueba final tienden a emplear la recta. Esto es, por supuesto, una influencia de la instrucción recibida.

El error que cometen los alumnos en la Prueba Inicial, tanto en la suma como en la resta, es representar los números de forma aislada, es decir,



lo que denota, claramente, que los alumnos no daban significado a las operaciones en la recta. Este mismo error fue el encontrado con mayor frecuencia en la investigación de CARR y KATTERNS.

Incluso entre los alumnos que contestan correctamente, se observan otro tipo de errores, que podrían clasificarse como "errores de escritura", como los que exponemos a continuación:



Igual que ocurrió en la cuestión 3, los resultados de la Prueba Final 2 muestran una mejora considerable en las representaciones. Como puntualizamos en el apartado anterior, los alumnos no realizaron durante la experiencia, prácticas de representaciones de operaciones de forma aislada, sino que las representaciones siempre aparecían ligadas a problemas concretos. Entre las razones que CARR y KATTERNS dan a los errores que cometen los alumnos, está una insuficiente asociación de la recta con problemas verbales y un excesivo énfasis en actividades mecánicas. Los datos de nuestra experiencia demuestran que con una aproximación didáctica de las operaciones, dotándolas de significado concreto y apoyándolas en representaciones en la recta, se puede llegar a abstraer el sentido de las operaciones y puede conseguirse un buen uso del modelo.

Interpretación de números y operaciones

Como ya hemos indicado, estudiamos también las interpretaciones o significados que dan los alumnos de las operaciones suma y resta. En un trabajo anterior (BRUNO y MARTINON, 1994a; 1994b) dimos una primera aproximación a este tema, analizando los contextos y las estructuras empleadas por los alumnos al inventarse situaciones que puedan resolverse a través de operaciones dadas.

Para complementar aquel trabajo, hacemos ahora un estudio similar pero con algunas variantes metodológicas. Primero, el proceso de enseñanza que siguieron los alumnos fue distinto en las dos experiencias, ya que los alumnos en el presente caso, han recibido una enseñanza en la que los conceptos de suma y resta aparecen unificados. Segundo, hemos introducido un nuevo contexto, el ascensor. Tercero, se trabajó con más intensidad en los problemas del tipo $e_1 - e_2 = c$ y $e_f - e_i = v$, debido a la dificultad que encontraron los alumnos al trabajar con estos problemas. Y cuarto, contrastamos las interpretaciones cuando se les da una operación y cuando se les presentan los números representados en la recta.

Las cuestiones fueron respondidas en la Prueba Final 1. De ahí que los contextos empleados por los alumnos están influenciados por la enseñanza recibida en esos momentos y nos sirvió para comprobar cuáles eran los contextos más cercanos y empleados con más facilidad, lo cual no lo hemos interpretado como una ausencia de conocimiento de los otros contextos.

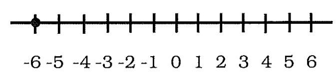
En el cuadro 5 aparece un primer grupo de cuestiones en las que se les pedía escribir situaciones concretas en donde utilizar los números dados o representados en la recta.

Cuadro 5. Enunciados de las cuestiones 6-9.

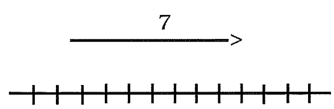
Cuestión 6. Escribe una situación en la que emplees el número 6.

Cuestión 7. Escribe una situación en la que emplees el número –8.

Cuestión 8. Escribe una situación en la que emplees el número representado en la recta:



Cuestión 9. Escribe una situación en la que emplees el número representado en la recta:



Los datos del cuadro 6 en las cuestiones 6 y 7 muestran la preferencia o inclinación de los alumnos a utilizar estados antes que variaciones, siendo la expresión más comúm "tengo 6....." o "debo 8....". Por otro lado, los resultados de las cuestiones 8 y 9 confirman que los alumnos distinguen por su representación los estados y las variaciones, ya que la representación de un número con una flecha les sugiere ejemplos de transformaciones (pérdidas, bajadas, etc.).

Cuadro 6. % de "estados" y "variaciones" en las cuestiones 6-9.

	Estados	Variaciones	Blanco
Cuestión 6	75	14	11
Cuestión 7	71	20	9
Cuestión 8	74	10	16
Cuestión 9	11	77	12

Desde el punto de vista de los contextos (cuadro 7), lo más significativo es comprobar como se amplían los contextos empleados en las cuestiones 8 y 9 frente a las cuestiones 6 y 7. Los números señalados en la recta sugieren a los alumnos situaciones distintas de las que les sugieren los números en abastrato. Por tanto la representación en la recta permite a los alumnos demostrar una mayor riqueza de conocimiento relativo a las utilidades de los números. Así, contextos como el ascensor o la carretera, aparecen en los ejemplos que dan los alumnos cuando tienen una imagen gráfica.

En un segundo grupo de cuestiones los alumnos debían inventar una situación o problema que se resolviese utilizando una operación dada (cuestiones 10, 11, 12 y 13) o utilizando los números representados en una recta que respondían a una posible representación de suma o resta (cuestiones 14 y 15). Los enunciados son los que aparecen en el cuadro 8. (Ver cuadros 7 y 8 en página siguiente).

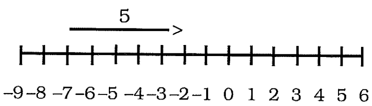
Cuadro 7. % de contextos en las cuestiones 6-9.

	Deber-tener	Temperatura	Nivel-mar	Carretera	Tiempo	Ascensor
Cuestión 6	71	5	4	3	–	6
Cuestión 7	64	9	14	3	–	–
Cuestión 8	35	19	10	9	3	14
Cuestión 9	9	16	9	24	–	32

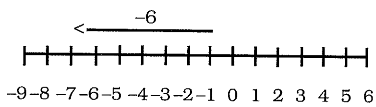
Cuadro 8. Enunciados de las cuestiones 10-15

Escribe una situación que se resuelva utilizando los siguientes operaciones:

Cuestión 10. $-10 - 5$.
Cuestión 11. $-4 + 13$.
Cuestión 13. $8 - (-6)$.
Cuestión 14.



Cuestión 15.



Cuadro 9. Enunciados de las cuestiones 10-15

	$e_1 \pm e_2 = e_t$	$e_i \pm v = e_f$	$v_1 \pm v_2 = v_t$	$e_1 \pm c = e_2$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	**Blanco**
Cuestión 10	50	23	13	1	–	3	10
Cuestión 11	29	46	11	3	–	4	7
Cuestión 12	50	6	17	7	–	2	18
Cuestión 13	34	29	8	1	1	9	7
Cuestión 14	2	66	3	1	14	6	8
Cuestión 15	11	59	8	5	9	9	–

Los datos del cuadro 9 confirman dos de los resultados de nuestra anterior investigación. Por un lado, el tipo de estructura que emplean los alumnos cambia dependiendo del tipo de operación dada. Así por ejemplo, para la operación **-10-5**, la estructura por la que más se inclinan es $\mathbf{e_1\text{-}e_2=e_t}$, mientras que para la operación **-4+13** la estructura más empleada es $e_i+v=e_f$.

Por otro lado, los problemas del tipo $\mathbf{e_f\text{-}e_i=v}$ **y** $\mathbf{e_1\text{-}e_2=c}$ están poco arraigados en el conocimiento de los alumnos, y aunque en esta experiencia se mejoró con respecto a la anterior, ya que hay más alumnos que muestran dominar estos tipos de problemas, encontramos que son estructuras difíciles de interiorizar por los alumnos. Una de las razones de este hecho es que son, efectivamente, estructuras más complejas que el resto. Pero también se une la falta de experiencia previa de estos tipos problemas con números positivos. De hecho para nuestros alumnos, antes de la experiencia, la suma con números positivos tenía un significado que respondía a las estructuras $\mathbf{e_1+e_2=e_t}$ y $\mathbf{e_i+v=e_f}$, mientras que la resta respondía a la estructura $\mathbf{e_i\text{-}v=e_f}$, es decir, sumar era "juntar" o "añadir" y restar era "quitar". Muy pocos alumnos mostraron utilizar la resta como "diferencia de dos estados", es decir, como $\mathbf{e_f\text{-}e_i=v}$ o como $\mathbf{e_1\text{-}e_2=c}$.

Llama también la atención el hecho de que al introducir los números negativos, la resta ya no siempre tiene un significado en la estructura $\mathbf{e_i\text{-}v=e_f}$, como ocurre con los positivos, sino que entre los ejemplos que escriben los alumnos se da con basatante frecuencia la estructura $\mathbf{e_1+e_2=e_f}$.

Observando ahora las situaciones utilizadas para las cuestiones 14 y 15, podemos ver una cambio en las estructuras elegidas, produciéndose un abandono de la estructura $\mathbf{e_1 \pm e_2 = e_f}$ e inclinándose hacia la estructura $\mathbf{e_i \pm v = e_f}$. Lo cual es razonable porque el tipo de representación es menos adecuada para la estructura $\mathbf{e_1 \pm e_2 = e_t}$, ya que se debería interpretar un estado con una flecha. También en estas preguntas aumentan ligeramente el empleo de las estructuras $\mathbf{e_f - e_i = v}$ y $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$, lo que demuestra la importancia de utilizar este tipo de representación gráfica para conseguir una comprensión de la misma.

Cuadro 10. % de contextos empleados en las cuestiones 10-15.

	Deber-Tener	Temperatura	Nivel-mar	Carretera	Tiempo	Ascensor
Cuestión 10	73	1	5	10	-	-
Cuestión 11	77	5	4	3	-	4
Cuestión 12	74	2	3	2	-	1
Cuestión 13	69	3	4	2	-	4
Cuestión 14	10	20	9	21	-	32
Cuestión 15	50	11	23	4	-	12

En el caso de los contextos, la diferencia no se producen entre las distintas operaciones, como ocurría con las estructuras, sino entre lo numérico y lo gráfico. Es curioso observar, como al presentarles los números en la recta, se deja el contexto deber-tener, surgiendo otros contextos escasamente empleados en las operaciones, como son la temperatura, el nivel del mar, la carretera y el ascensor. Al igual que ocurrió en nuestra anterior experiencia, el contexto tiempo no se utiliza, y sin embargo llamamos la atención del lector hacia el contexto "ascensor" que parece ser bastante cercano para los alumnos.

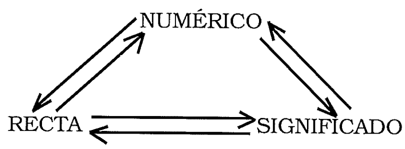
CONCLUSIONES

Como ya comentamos en el primer apartado, algunas investigaciones realizadas (LIEBECK, 1990; JANVIER, 1983) demuestran que la recta puede ser causa de muchas dificultades, en especial para dar sentido a la resta de números negativos. La experiencia que hemos realizado recoge, efectivamente, dichas dificultades en la resta. Sin embargo, pensamos que puede ser utilizada como modelo para las operaciones siempre que su uso se dote de significado concreto, empleando una variedad de situaciones y estructuras que den sentido a las representaciones y movimientos en la recta. Desde luego que este enfoque de la enseñanza de los números sería más efectivo si se sigue desde el aprendizaje de los números positivos.

Al analizar los errores que cometían los alumnos al representar en la recta la suma y resta de números positivos, encontramos una falta de experiencia, casi generalizada, del modelo de la recta. De hecho, al igual que ocurrió en la muestra de Nueva Zelanda (CARR and KATTERNS, 1984), nuestros alumnos representaron los números de forma aislada sin darle sentido operatorio. Sin embargo, pudimos comprobar que con una secuencia de aprendizaje, en la que la recta sirvió como apoyo para resolver problemas, nuestros alumnos llegaron a abstraer el sentido operatorio de las representaciones en la recta. Por tanto, no fue necesario hacer prácticas mecánicas de las representaciones en la recta, sino que llegaron a una comprensión de las mismas por medio la resolución de situaciones aditivas.

También encontramos en esta investigación, que las representaciones en la recta facilita a los alumnos el empleo de situaciones distintas y les sugieren o inducen al uso de contextos y estructuras diferentes, dándoles la posibilidad de tener mayor riqueza de conocimiento acerca de las utilidades de los números. Sin embargo, es necesario tener en cuenta a la hora de elaborar secuencias de aprendizaje, que al menos en lo referente a los números negativos, los alumnos tienden a emplear con más frecuencia las situaciones estáticas frente a las variaciones o comparaciones, y que el contexto deber-tener predomina sobre los otros, siendo un claro indicador de que es el que mejor entienden.

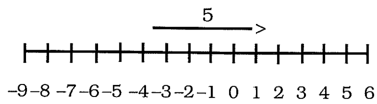
En nuestra investigación hemos contemplado tres aspectos sobre el aprendizaje del número, el estrictamente numérico, el gráfico (la recta) y el de significado. Estamos interesados en comprobar cómo entienden y se desenvuelven los alumnos en estas distintas facetas con los números negativosy cómo las relacionan entre sí:



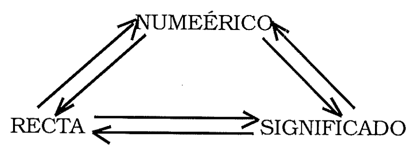
Las observaciones nos llevan a concluir, provisionalmente, que los alumnos no tienen un conocimiento homogéneo de la adición y de la sustracción, en el sentido de que no las utilizan con el mismo grado de efectividad en todos los casos. Así, para las situaciones $\mathbf{e_i \pm v = e_f}$, los tres aspectos anteriores están perfectamente interrelacionados para la mayoría de los alumnos, es decir, que pueden pasar de uno a otro sin ninguna dificultad. Por ejemplo, pueden comprender que un problema del tipo:

> "La temperatura por la mañana era de 7 grados bajo cero. A lo largo del día la temperatura subió 5 grados. ¿Cuál era la temperatura por la noche?

se resuelve con la operación -7+5, e incluso pueden llegar a representarlo en la recta:



O viceversa, si se les da la recta anterior pueden escribir la operación -7+5 o inventar una situación, como la citada sobre temperaturas, para describirla. Es decir, que el conocimiento va en las distintas direcciones:



Sin embargo, para otras estructuras, como $\mathbf{e_f\text{-}e_i=v}$ **o** $\mathbf{e_1\text{-}e_2=c}$, gran parte de los alumnos son incapaces de pasar de la recta a lo numérico, o de lo numérico al significado, o en las que para pasar del significado a lo numérico tiene que apoyarse necesariamente en la recta, etc.

Lo deseable sería que pudiesen integrar estos tres aspectos del uso de los números para todas las estructuras (incluyendo los cambios de posición de la incógnita).

Bibliografía

* BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994a): "Contexts and structures in the learning of negative numbers". **Proceedings of the XVIII Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Lisboa, 1, 32.

* BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994b): "Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos". **Suma** (pendiente de publicar).

* CARR,K. y KATTERNS, B.: 1984, "Does the number line help?". **Mathematics in School,** 13, 4, 30-34.

* DUFOUR-JANVIER, B., BEDNARZ, N. y BELANGER, M. (1987): "Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation". In Janvier, C. (ed), **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.** Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

* ERNEST, P.: 1985, "The number line as a teaching aid". **Educational Studies in Mathematics** 16, 411-424.

* JANVIER, C.: 1983, "The understanding of Directed Numbers". **Proceedings of the XV Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematicas Education,** Montreal, 295-301.

* LIEBECK, P.: 1990. "An intuitive model for integer arithmetic". **Educational Studies in Mathematics** 21, 221-239.

* VERGNAUD, G.: 1982, "A classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems". In Carpenter, T. Moser, J. and Romberg, T. (eds), **Addition and Subtraction: A cognitive pers-pective**. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Alicia Bruno. Antonio Martinón
Universidad de la Laguna