El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación

María Candelaria Espinel Febles

Introducción

La rapidez con que se producen los cambios en nuestra sociedad ocasiona que modelos matemáticos diseñados para resolver ciertos problemas resulten poco efectivos para dar solución a las necesidades de las siguientes generaciones.

Por ejemplo, en sentido amplio, se puede considerar que el Sistema Métrico Decimal surgió por las necesidades del hombre para pesar sus cosechas o medir sus tierras. Luego precisó medir grandes distancias a otros planetas, o pequeñas dimensiones como el átomo, y por ello se aportó la Notación Científica. Aunque estos modelos, evidentemente siguen siendo válidos, no tienen la misma proyección en la sociedad actual. La rapidez de los medios de transporte, como el «AVE» o el avión, ha determinado que las distancias tengan una importancia sólo relativa. Normalmente en la práctica, primero preguntamos en nuestra agencia de viajes si existe alguna línea aérea o terrestre que una dos ciudades determinadas y, después, nos interesamos por saber la distancia entre esas ciudades.

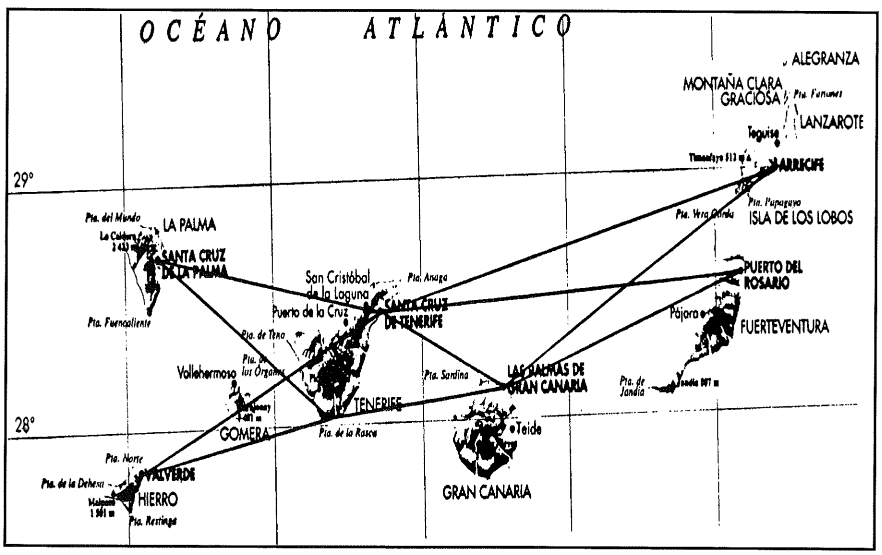
La humanidad tardó mucho tiempo en diseñar y unificar unas reglas de medida como el Sistema Métrico Decimal que hoy enseñamos en nuestras aulas. Sin embargo, serán muy pocos los alumnos que tendrán que pesar sus cosechas, o que utilicen una balanza. Sin embargo, muchos conducirán un coche y tendrán que elegir trayectorias donde los atascos sean menores o necesitarán consultar información de grandes redes de bases de datos.

En este trabajo expondremos algunos conceptos relacionados con teoría de grafos que pensamos deben incorporarse al curriculum de la enseñanza no univeritaria. Para nuestro desarrollo utilizaremos ejemplos de redes de transporte y comunicación del entorno, simulando el trabajo que también se podría desarrollar con los alumnos.

Análisis de redes. Ejemplificaciones

Algunas medidas fáciles de calcular y que aportan información sobre una red son los conceptos de:

- Conectividad,
- Accesibilidad y
- Centralización.



A continuación explicamos cada una de estos ejemplos ayudandonos de un ejemplo.

Conectividad

Ejemplo 1: Líneas maritimas y aéreas entre las Islas Canarias.

El anterior mapa muestra las líneas aéreas, entre las Islas Canarias, de la Compañia Binter según la revista «Ronda», 1994.

Un análisis de la red nos permite conocer el grado de comunicación o conexión aérea que hay entre las islas. La medida más simple del grado de conectividad de una red de transportes se puede obtener con el índice Beta. Este índice relaciona entre sí el número de líneas y el número de aeropuertos. En este caso el valor de esta medida es 10/7 = 1.43, es decir, este valor indica el índice de conectividad de las rutas de Binter en el mapa anterior.

Pero el grado de comunicación entre las islas no siempre ha sido tan rico como el que se muestra en el mapa anterior. No hace tanto años las comunicaciones usuales entre las islas eran a través de las líneas marítimas.

En la figura 1 se comparan distintas líneas marítimas mediante el índice Beta donde el número de islas permanece siempre igual a siete, mientras que el número de líneas que las une va aumentando.

Fuenteventura	F
Gran Canaria	GC
Lanzarote	L
Gomera	Go
Hierro	H
Palma	P
Tenerife	T

Líneas marítimas:

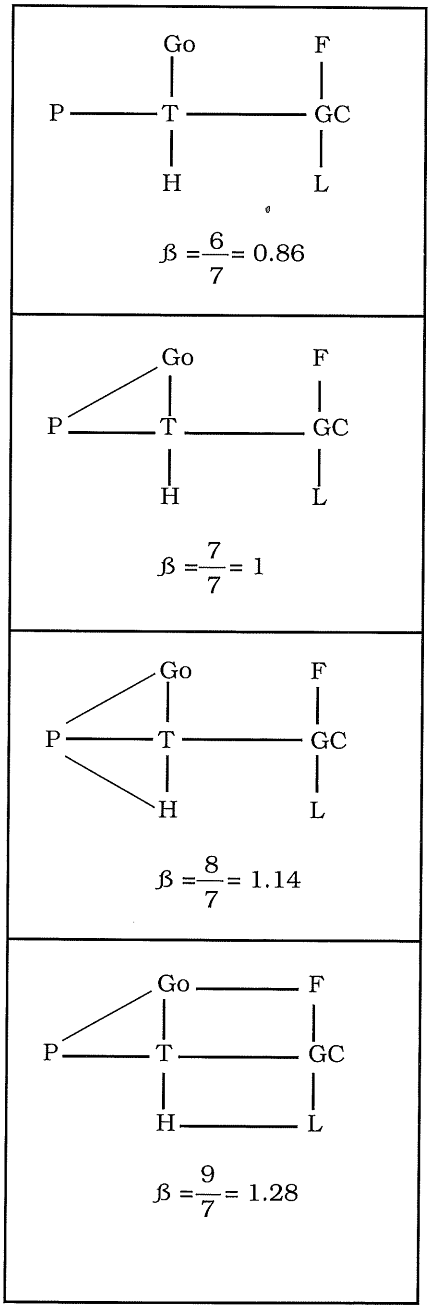


Figura 1

Líneas aéreas antes del aeropuerto Tenerife - Sur:

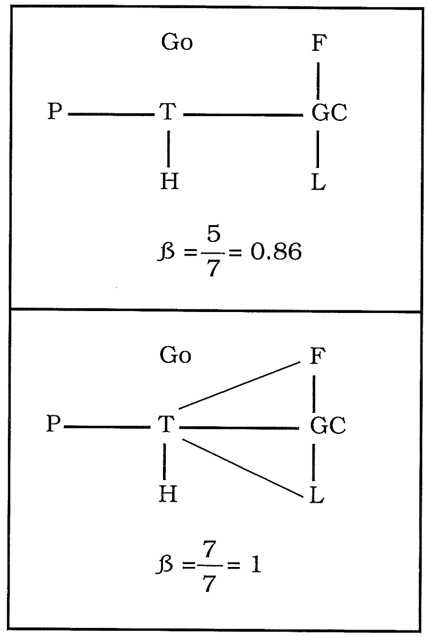


Figura 2

Consideremos un grafo G(V,A), donde V indica los vértices o nudos y A las aristas o rutas y sea $|V| = n$ y $|A| = k$. Se define el indice Beta como:

$$\beta = \frac{k}{n}.$$

Si $\beta < 1$ tenemos un árbol o un grafo no conexo.

Si el grafo es conexo:

$\beta = 1$	un único circuito,
$1 < \beta < 3$	red compleja con más de un circuito
$\beta = 3$	grafo completo.

Los valores de este índice varían entre 0 y 3. Los valores inferiores a 1 indican árboles, el valor 1 indica un sólo circuito y valores superiores a 1 indican la presencia de más de un circuito. El valor 3 se alcanza cuando el grafo es completo, es decir, que entre dos vértices cualquiera hay una arista.

Otra forma de medir la conectividad de una red se obtiene al comparar el número real de aristas presentes con el máximo número posible. La relación se le conoce como índice gamma y se suele dar en porcentaje de forma que cuanto más se aproxime este valor a 100 más se acercará a la conectividad máxima.

$$\text{Grado de conectividad} = \frac{\text{(cantidad de conexiones existentes)}}{\text{(cantidad máxima de conexiones)}} \times 100$$

Hay que distinguir entre los grafos planares, que pueden representarse gráficamente en un plano único sin que las aristas se crucen excepto en los vértices, y los grafos no planares, en los que dicha representación es imposible.

El índice gamma para un grafo planar es

$$\gamma = \frac{k}{\binom{n}{2}} \times 100$$

y el índice gamma para un grafo no planar es

$$\gamma = \frac{k}{3(n-2)} \times 100$$

Las líneas aéreas suelen dar lugar a grafos no planares. En el caso de las líneas de Binter aunque el mapa se muestra como no planar, en la figura 3 se puede observar como realmente es un grafo planar. El índice gamma de este grafo es 47.6 y los índices gamma de las líneas marítimas representadas en la figura 1 son, respectivamente, 28.6, 33.3, 38.1 y 42.8.

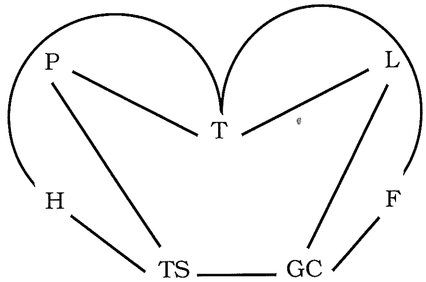


Figura 3

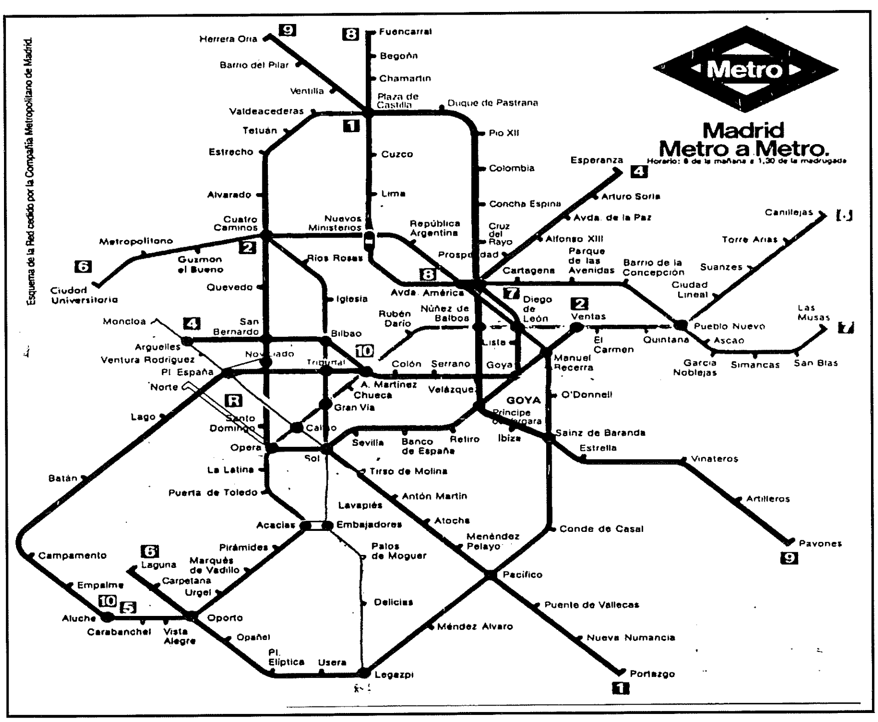
Accesibilidad

Ejemplo 2: Metro de Madrid.

Imaginemos que de las 10 líneas que forman el Metro de Madrid, dos están en obras, por ejemplo, las líneas 4 y 6. Sin estas dos líneas se puede llegar a todas las estaciones, excepto a las estaciones terminales de estas líneas. La red mantiene el número de vértices pero disminuye el número de aristas, es decir, la red es menos conexa.

La eficacia de una red de transporte depende del grado de conectividad y accesibilidad. Las medidas de conectividad y accesibilidad de una red se apoyan en la densidad o espesor de la red.

En geografía urbana y de transportes, se entiende por accesibilidad la mayor o menor facilidad de traslado de personas o mercancías entre el centro de una ciudad y su periferia y entre una ciudad y su región.



Para medir la accesibilidad de una red se utiliza el índice alfa.

El índice alfa para redes planares es

$$\alpha = \frac{k - n + 1}{2n - 5} \times 100$$

y el índice alfa para redes no planares es

$$\alpha = \frac{k - n + 1}{\binom{n-1}{2}} \times 100$$

Utilizando este último índice alfa para un grafo no planar, el Metro de Madrid arroja un índice de accesibilidad de 5.98 para 28 aristas y 28 vértices, mientras que si las líneas 4 y 6 están fuera de servicio el índice se reduciría a 1.14.

Teóricamente el índice alfa, tanto para redes planares como no planares, surge del estudio de los circuitos que componen un grafo. De modo general, si G denota un grafo conexo con n vértices y k aristas, cualquier árbol de expansión del grafo G, entendido éste como el árbol que llega a los n vértices, ha de tener n-1 aristas. Mientras que las aristas restantes, esto es, k - (n-1) conforman lo que se llama coárbol o esqueleto del grafo G. A este valor, k-n-1 se le conoce como **número ciclomático** de G o primer número Betti. El número ciclomático de un árbol es 0 y el de un grafo circuito es 1.

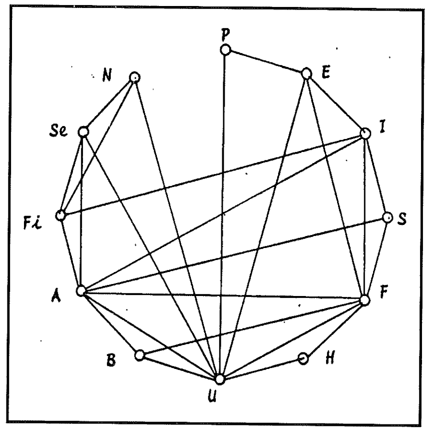
El índice alfa se obtiene de la relación entre el número de circuitos fundamentales dados por el número ciclomático y el máximo número de circuitos que vale 2n - 5 si el grafo es planar y $\binom{n-1}{2}$, o bien $\binom{n}{2}$ - (n-1), si el grafo es no planar. Cuando el índice alfa vale cero indica que la red es un árbol y según el valor de alfa aumenta hasta 100 se puede interpretar como un porcentaje de redundancia de aristas en la red.

Muchas veces interesa conocer la accesibilidad de cada vértice de la red en lugar de la red en conjunto. Para ello resulta muy adecuado el algebra de matrices. Dado la complejidad de la red del Metro necesitariamos métodos automatizados para el cálculo matricial. Tomaremos la siguiente red que tiene menos vértices.

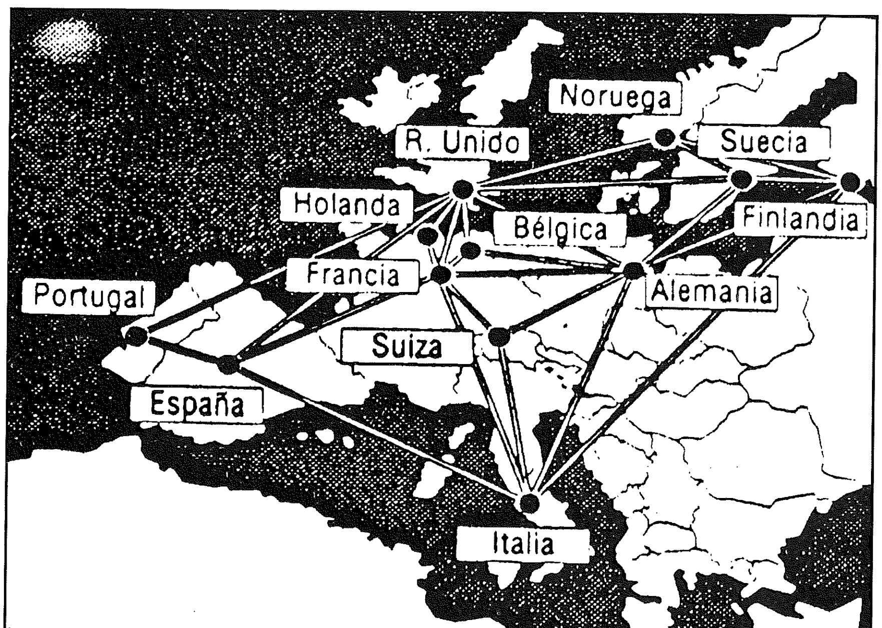
Ejemplo 3: Red Europea.

La siguiente información se ha tomado del periódico «El País» del 5 de abril de 1993, y muestra una red de telecomunicaciones entre 12 países de la CEE.

La red consta de 26 líneas de las 66 = $\binom{12}{2}$ posibles. Para indagar en la red utilizaremos el siguiente grafo y su codificación mediante diversas matrices.



Consideraremos las matrices como tablas de doble entrada donde se guarda información codificada. Una forma de codificar la red mediante matrices es asignar un 1 si alguna relación o condición es verdadera y 0 si es falsa.



La siguiente es una matriz de adyacencia entre países, que se construye poniendo un 1 si existe una línea entre dos países y un 0 si no existe tal línea, la llamaremos Σ.

	P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
P	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
I	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
S	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
H	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
U	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
B	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
A	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
Fi	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
Se	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
N	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Al sumar por filas o por columnas en la matriz Σ se obtiene el número de líneas de cada país, esto es:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
2	4	5	3	7	2	8	3	7	4	4	3

El Reino Unido es el país con el mayor número de líneas directas, con 8 líneas, seguido de Francia y Alemania con 7.

A partir del grafo o de la matriz Σ, se puede observar que hay muchos países que no tienen línea directa entre sí. Para estos países resulta fundamental disponer de varias conexiones aunque sean indirectas con otros países. La siguiente matriz Σ x Σ da el número de formas distintas de conectar utilizando dos líneas, esto es utilizando un país como intermediario.

	P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
P	2	1	1	0	2	1	1	1	1	0	1	1
E	1	4	1	2	2	2	2	2	3	1	1	1
I	1	2	5	2	3	1	3	2	3	1	2	1
S	0	2	2	3	2	1	2	2	2	2	1	0
F	2	2	3	2	7	1	3	2	4	2	2	1
H	1	2	1	1	1	2	1	2	2	0	1	1
U	1	2	3	2	4	1	8	2	3	3	2	1
B	1	2	2	2	2	2	2	3	2	1	2	1
A	1	3	3	2	4	2	3	2	7	2	2	3
Fi	0	1	1	2	2	0	3	1	2	4	2	1
Se	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	4	2
N	1	1	1	0	1	1	1	1	3	1	2	3

Observamos que, por ejemplo, Portugal no tiene línea directa con Francia pero puede conectar con este país de dos formas distintas esto es vía España o via Reino Unido, así en la casilla (P,F) de la matriz anterior aparece un 2. España tampoco tiene línea directa con Alemania pero dispone de tres formas distintas utilizando dos líneas, a saber: E-I-A, E-F-A y E-U-A, por esto la matriz Σ^2 presenta un 3 en la casilla (A,E).

Por tanto la matriz de adyacencia Σ, resulta apropiada para analizar la accesibilidad de cada vértice, ya que al sumar las filas o columnas de la matriz se obtiene el grado de cada vértice. Además, puede utilizarse para encontrar las matrices: Σ^2 , Σ^3 , ... , Σ^n , donde los valores de las respectivas casillas (i,j) dan el número de formas distintas de ir del vértice i al vértice j en n pasos.

Centralización

Continuando con el ejemplo 3 de la red europea, la siguiente matriz recoge las trayectorias más cortas entre países. Los números de la tabla dan el mínimo de líneas necesarias para conectar dos países cualquiera.

	P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
P	0	1	2	3	2	2	1	2	2	3	2	2
E	1	0	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2
I	2	1	0	1	1	2	2	2	1	1	2	2
S	3	2	1	0	1	2	2	2	1	2	2	3
F	2	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	2
H	2	2	2	2	1	0	1	2	2	3	2	2
U	1	1	2	2	1	1	0	1	1	2	1	1
B	2	2	2	2	1	2	1	0	1	2	2	2
A	2	2	1	1	1	2	1	1	0	1	1	2
Fi	3	2	1	2	2	3	2	2	1	0	1	1
Se	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	0	1
N	2	2	2	3	2	2	1	2	2	1	1	0

Desde el punto de vista de la teoría de grafos, la información de la matriz anterior recoge la distancia más corta d_{ij} entre el vértice i y el vértice j. El **radio** de un grafo se define como la distancia mínima del grafo. El **diámetro** de un grafo es la distancia máxima que puede encontrarse en un grafo.

Para determinar el diámetro, se elige el máximo valor de cada fila o columna de la matriz distancia. A partir de la matriz se ve como Portugal, Suiza, Holanda, Finlandia y Noruega necesitan un mínimo de tres líneas para conectar con algunos países, por tanto el diámetro de esta red europea es 3.

El centro de un grafo es el vértice con la propiedad de que la distancia máxima entre ese vértice y los otros es la menor posible. No necesariamente el centro será un sólo punto.

Para hallar el centro sumamos los elementos de la matriz anterior por filas o por columnas y obtenemos:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
22	18	17	21	15	21	14	19	15	20	18	20

Resulta evidente que el Reino Unido es el centro de la red pues cumple que la distancia máxima entre él y los otros países es la menor posible.

A veces, para cuantificar la influencia de cada vértice se utiliza el índice de centralización que se obtiene del cociente entre la suma de los elementos de la matriz y la suma de las distancias del vértice i a los otros vértices.

Índice de centralización de cada vértice:

$$c_i = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij}}{\sum_j d_{ij}}$$

Los valores del índice de centralización de cada país se recogen en la siguiente tabla:

P	E	I	S	F	H	U	B	A	Fi	Se	N
10	12.2	12.9	10.5	14.7	10.5	15.7	11.6	14.7	11	12.2	11

Como se observa, el índice de centralización más alto lo sigue presentando el Reino Unido. Otros países bien comunicados son Francia y Alemania. Mientras que los peores comunicados son Portugal, Suiza, Holanda, Finlandia y Noruega. Resulta curioso que una isla sea el centro.

Sería interesante estudiar qué pasaría cuando se incorporen a «la banda de los 12» otros países como Grecia o bien los países del Este.

Reflexión final

Los modelos de la matemática tradicional resultan insuficientes para analizar y comprender las complejas redes de comunicaciones de la sociedad moderna.

Al mismo tiempo, el mundo en que vivimos es un espacio cada vez más pequeño por la facilidad de los desplazamientos y el volumen de información disponible. El avión y el tren de alta velocidad han determinado que en la práctica la distancia tenga una importancia secundaria siendo prioritaria la existencia de la línea de comunicación. Las «autopistas informáticas» estan imponiendo la ley del JUST IN TIME.

Algunos autores de libros de texto de segundo de BUP, como los dos que se citan en la bibliografia, para ayudar a sus alumnos a comprender las compleja redes de transporte de un país o las comunicaciones entre diversas naciones, utilizan los términos de conectividad, accesibilidad y lugar central.

Como hemos visto, los conceptos considerados, casi no requieren de otros conocimientos matemáticos, por otro lado dotan de significado a las matrices y dan la oportunidad de comenzar a enseñar la matemática de la utilidad.

Bibliografía

* CATTERMOLE, K.W. (1979) **Graph Theory and Communications Networks.** WILSON, R.J. AND BEINEKE, L.W. (Ed. by) Applications of Graph Theory. Academic Press.
* CLIFF,A. - HAGGETT, D. - ORD, K. (1979) **Graph Theory and Geography**. WILSON, R.J. AND BEINEKE, L.W. (Ed. by) Applications of Graph Theory. Academic Press.
* EDETANIA Grupo (1993). **Geografia** 2 BUP. ECIR.
* HAGGET, P.- CHORLEY, R.J. (1969). **Network Analysis in Geography**. Edward Arnold.
* HAGGET, P. (1988) **Geografía. Una sístesis moderna**. Omega.
* SÁNCHEZ, J. - ZÁRATE, A. (1989) **El mundo en que vivimos Geografía**. 2 BUP. SM.
* SMP 7-13 (1977). **The School Mathematics Project**. Further Matrices and Transformations. Cambridge University Press.
* WILSON, R.J. (1983) **Introducción a la teoría de grafos**. Alianza Universidad.

María Candelaria Espinel Febles
E.U.F.P.
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas