Una introducción a $\sqrt{2}$ como número que representa ciertas distancias

Joaquín Fernández Gajo
Emilio J. Muñoz Velasco

El presente artículo expone una introducción al número $\sqrt{2}$ basada en las ideas que nos sugieren algunos aspectos de la matemática griega, y en concreto el Libro V de los Elementos de Euclides. Con él pretendemos que el alumno "haga ciencia" en el sentido de que imponga hipótesis para que haya (o no haya) números que representen ciertas distancias o proporciones.

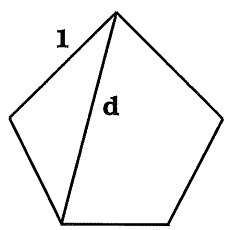
Introducción histórica

Para los pitagóricos todo era número. Su hipótesis de que un segmento continuo está constituido por un número natural de átomos les permitía comparar dos segmentos cualesquiera, siendo siempre conmensurables –es decir, existe siempre un segmento que es la menor medida común de ambos, que hoy día llamamos máximo común divisor–. En otras palabras, comparaban dos segmentos como si fuesen dos números naturales– hay que decir que la idea de proporción entre números naturales ya la tenían los pitagóricos–

$$(AB, CD) \approx (m, n)$$

El método que ellos tenían para obtener esa mayor medida común era el algoritmo de antiphairesis, análogo al algoritmo de Euclides pero para segmentos.

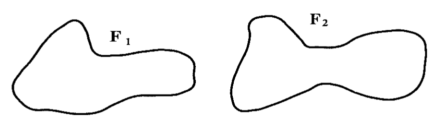
Su teoría de que todo era número no se contradecía si siempre que se aplicara el algoritmo de antiphairesis, éste tuviera un número finito de pasos, es decir, acababa. Sin embargo, esto no ocurriría siempre así: al aplicarlo a la comparación de la diagonal de un pentágono regular con su lado descubrieron que este proceso no acababa.



Esto era una catástrofe, echando por tierra su teoría de que todo era número. A partir de ahora la geometría no podría considerarse aritmética, sino que se tratarían por separado los segmentos y los números.

No obstante, y aunque Euclides trata por separado la proporción entre magnitudes y números, en la proporción 5 del Libro X afirma que "las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón que un número guarda con otro número" es decir, que los números hasta cierto punto se comportan de la misma forma que la magnitudes.

Si se quería usar ciertas proporciones y obtener resultados sobre ellas había que extender el concepto de proporción primero a áreas. Si, pero ¿Cómo comparar estas áreas?



Como las figuras cuyo borde son rectas se pueden comparar, si buscamos una figura C de igual área que F y otra figura D de igual área que G, el problema consistiría ahora en comparar C y D. Puntualizar que la equivalencia entre dos figuras planas lleva implícito el concepto de área desde un punto de vista más cualitativo que cuantitativo, seguramente porque los griegos no estaban muy interesados en la matemática aplicada. Su demostración de que dos figuras planas son equivalentes, se basan en resultados de congruencia de triángulos (proposición 4 del Libro I, que curiosamente es la única de este libro en la que se usan movimientos). Por ejemplo en la proposición 35 del Libro I se demuestra que "los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí".

Euclides usa este métodos en los Libros I, II y III, hasta que al parecer se le agota. Por eso se decide a tratar el tema de las proporciones en el Libro V que, según parece es obra de Eudoxo, aunque se considera que su organización y algunas variantes se deben al propio Euclides.

El libro V o libro de las proporciones

Este libro consta de 18 definiciones y 25 proposiciones. Como ya hemos dicho tratará de las proporciones entre magnitudes. Aunque Euclides no define lo que es una magnitud, suponemos que para él eran abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos: longitud en el caso de líneas, área en el caso de figuras planas, y volumen en el caso de sólidos.

Comienza este libro con las definiciones 1 y 2 de divisor –que llama parte–, y múltiplos.

A continuación –definición 3– define una razón como una especie de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de una misma clase. En esa definición no se define nada, al menos hasta que no se aclare el significado de la palabra relación. En este sentido, hay autores que afirman que razón es un concepto que se deja sentir más fácilmente que definir. Ha habido a lo largo de la historia diversas interpretaciones del significado de la palabra "relación" como cantidad o cuantiplicidad, es decir, número de veces que hay una cantidad en otra de la misma magnitud. Al parecer la más apropiada, según Heath, es la de magnitud relativa que no presenta dificultades de definición para magnitudes conmensurables (basta asociarlas a comparación entre números). Sin embargo, ¿qué sentido tiene la palabra relación entre magnitudes inconmensurables? La generalización de la idea de magnitud relativa para inconmensurables se basará en aproximaciones sucesivas. Pongamos el ejemplo del lado del cuadrado S y su diagonal D. S y D están en razón porque dado cualquier múltiplo de D, podremos encontrar dos múltiplos de los lados, de forma que uno de ellos sea menor y el otro sea mayor que el múltiplo de la diagonal.

$$1414213.S < 1000000.D < 1414214.S$$

La definición 4 es el postulado de Eudoxo-Arquimedes: "Se dice que tienen una razón entre sí dos magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra". Esta definición es equivalente a la proposición 1 del Libro X, que es fundamental en el cálculo infinitesimal.

La definición 5, que es la base de todo el Libro V, introduce la igualdad entre dos razones: "dícese que la razón de una magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas; o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales, o al mismo tiempo son inferiores, que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas". ¡Vaya muerto de definición! –habrá pensado el lector–. Para aclararla la presentamos con el lenguaje actual:

"X es a Y como Z es a W si, y sólo si para todo m,n se da lo siguiente:

Si $mX > nY$, entonces $mZ > nW$; o si $mX = nY$ entonces $mZ = nW$; o si $mX < nY$ entonces $mZ < nW$".

Esta definición, original de Eudoxo, es el verdadero embrión de la definición de número real de Dedekind; de hecho se basó en ella para la suya de "cortaduras":

"un número irracional x quedará definido por dos conjuntos A y B, tales que:

(I) A cada número racional se le asigna un elemento y sólo uno, de A o B.

(II) Cada número de A es menor que cada número en B".

(III) No existe último número en A ni primer número en B".

Esta construcción de los números reales implica que el orden y la topología de R no se pueden disociar, ya que un simple cambio del orden, en R, alteraría la topología de la recta.

Obsérvese que mientras en los Elementos no se tratan los incomensurables como números –véase proposición 11 del Libro V–.

Dedekind quiere construir un conjunto de números para expresar estas proporciones. Además, nótese que Dedekind no "inventa" el concepto de irracional, sino que crea una estructura abstracta en la que no haya contradicciones. Se trata de un cambio de modelo: el modelo geométrico de los griegos se sustituye por el modelo de conjuntos numéricos.

Puesta en práctica en el aula. Introducción de $\sqrt{2}$

Una observación se deduce de lo anterior, que implicará nuestra propuesta en el aula: las aproximaciones se usan para fundamentar o definir un número irracional, siendo la necesidad de fundamentación rigurosa esencial en el contexto de la matemática griega. Sin embargo esta fundamentación, a través de aproximaciones, carece de sentido para un alumno de 14 o 15 años ("tanto rigor ¿para qué?"). Creemos que el alumno logrará verle mas significado a las irracionales como número que representan distancias.

> **NOTA:** *no criticamos aquí el hecho d que el alumno busque aproximaciones decimales de irracionales, sino que use éstas como definición o fundamento para su introducción. Por ejemplo en algunos libros de texto se le da al alumno una sucesión de racionales que converge por la izquierda a $\sqrt{2}$ y otra análoga por la derecha, presentándole $\sqrt{2}$ como el número que queda en medio de las dos sucesiones. De este modo el alumno puede pensar que no ha sido lo suficientemente hábil como para descubrir nuestro número, cuando de lo que se trata es que lo invente él.*

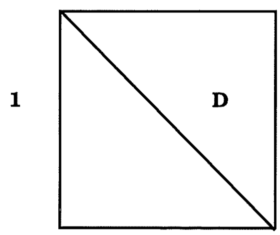
Suponemos conocidos por nuestros alumnos los números naturales, enteros y racionales.

Planteamos la siguiente cuestión: ¿Habrá un número que relacione la diagonal de un cuadrado con su lado?

Daremos los siguientes pasos:

a) Aunque los pitagóricos pensaron que ese "número" D venía dado por una fracción, se puede demostrar que esto no es cierto. (Creemos que para un curso de 1º de BUP esta demostración se debe omitir, aunque podría intentarse explicando previamente el algoritmo de antiphairesis y viendo que en este caso no acababa).

b) Si nos fijamos en el cuadrado de lado 1, por el teorema de Pitágoras:



$D^2 = 1^2 + 1^2$
$D^2 = 2$

c) Por tanto, si queremos que D sea un número tendremos que crearlo de forma que cumpla las propiedades de D, es decir que su cuadrado 2, y lo llamaremos raíz cuadrada de 2, escribiendo $D = \sqrt{2}$.

Obsérvese que esta idea nos vale no sólo para construir $\sqrt{2}$, sino para obtener el conjunto de los números irracionales y, en general cualquier conjunto numérico, o cualquier concepto que venga dado por propiedades, por ejemplo:

– Si queremos expresar la característica común entre distintos grupos con la misma cantidad de cosas, inventamos los números naturales.

– Si queremos expresar numéricamente la diferencia entre dos números naturales, creamos los números enteros.

– Si queremos que existan unos números que expresen la relación entre dos enteros, los creamos y tendremos los racionales.

– Si queremos que todas las ecuaciones de 2º grado tengan solución, creamos unos números que representen estas soluciones y tendremos los números complejos.

– Si queremos que todos los vectores del mismo módulo, dirección y sentido sean iguales, inventaremos el concepto de vector libre, etc.

Así conseguiremos que el alumno "invente" en Matemáticas, creando ciertos entes abstractos para los que cobren sentido algunas propiedades intuitivas o que interesa que sean ciertas.

Bibliografía

* BOYER, CARL B., 1968. **Historia de la Matemática**. (Alianza-Universidad).
* DEDEKIND, RICHARD. Essay of the theory of numbers. I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers. "Dover Publications, INC. New York".

HEATH, SIR THOMAS L. **A History of Greek Mathematics**. (Dover).

HEATH, SIR THOMAS L. **The thirteen books of The Elements**. (Dover).

KHUN, TH S., 1981. **La estructura de las revoluciones científicas**. (Fondo de Cultura Económica, México).

Joaquín Fernández Gajo
Emilio J. Muñoz Velasco
I.E.S. Coin (Málaga)
I.E.S. Alozaina