El uso de cambio de variables en la resolución de derivadas "complejas"

Emilio M. Pina Coronado

Los problemas que presentan los alumnos/as a la hora de abordar la resolución de derivadas con un cierto grado de complejidad, que proviene fundamentalmente de su distanciamiento de la forma correspondiente a las derivadas inmediatas se pone de manifiesto, esencialmente, en dos aspectos:

- Dificultades a la hora de distinguir la función a derivar entre el conjunto que configura la propuesta.
- Dificultades en el cálculo y manejo de estructuras derivadas de una mala conceptualización de las operaciones y falta de perspectiva de transformaciones tendentes a un fin.

Ante esta situación, la utilización de cambios de variables, entendida como una generalización de la regla de la cadena puede contribuir a superar las mencionadas dificultades, ya que el objetivo final de las transformaciones consiste en llevar la situación problemática a modelos próximos a las inmediatas, fácilmente resolubles por los alumnos. Al mismo tiempo, y al presentar una gradación en la estructura de las operaciones facilita el proceso de resolución y simplificación, ya que las entidades con las que trabaja el alumno/a son menores en estructura y complejidad que las provenientes de un desarrollo directo. Por otra parte, al favorecer la búsqueda de vías alternativas fomenta el pensamiento divergente y la creatividad en los alumnos.

Así por ejemplo, ante una propuesta de la derivada de la función

$$y(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

el primer intento de los alumnos/as va dirigido a la aplicación de los esquemas de resolución de la derivada inmediata del logaritmo neperiano de x, y sólo en algunos casos la estrategia de resolución va dirigida, entre los alumnos/as, al logaritmo neperiano de f(x), donde suele tropezar con dificultades provenientes de la estructura interna de f(x).

La propuesta de trabajo mediante la utilización de cambio de variables se puede estructurar como sigue:

Dada la función:

$$u(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

propongo el cambio:

$$u(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

con lo que la función y su derivada quedarían como:

$$y(x) = \mathrm{Ln}\, u(x)\ ;\quad y'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Veamos ahora un segundo cambio:

$$t(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

y la función u(x) y su derivada u'(x) quedarían como:

$$u(x) = \sqrt{t(x)}\ ;\quad u'(x) = \frac{t'(x)}{2\sqrt{t(x)}}$$

Con lo que la derivada de la función original **y** se puede escribir como:

$$y'(x) = \frac{\dfrac{t'(x)}{2\sqrt{t(x)}}}{\sqrt{t(x)}} = \frac{t'(x)}{2\,t(x)}$$

queda sólo derivar **t(x):**

$$t'(x) = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)\,(\operatorname{sen} x + \cos x) \;-\; (\cos x - \operatorname{sen} x)\,(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$t'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \;+\; (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

Introduciendo **t'(x)** en la derivada de la función original y simplificando obtenemos el resultado final:

$$y'(x) = \frac{\dfrac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}}{2\,\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}} = \frac{-1}{\cos 2x}$$

Esta estrategia de trabajo ha sido probada con un grupo muestra compuesto por quince alumnos/as de tercero de BUP del I.B. "J. Martínez Ruiz" de Yecla, de distintos grupos, durante el pasado curso 92/93, quienes han presentado una efectividad media, entendida como la razón percentual entre situaciones problemáticas propuestas y resueltas satisfactoriamente, del 97.6% frente al 82.4% de sus compañeros. Sin embargo, lo realmente resaltable es la rapidez y seguridad que alcanzan los alumnos/as las mencionadas puntuaciones en la resolución, al mismo tiempo la claridad con la que accedían a la resolución de integrales por cambio de variables y por partes.

Emilio M. Pina Coronado
Asesor de Matemáticas CEP
Yeda (Murcia).