

# Algunos referentes para analizar tareas matemáticas

M. García Blanco – S. Llinares Ciscar

**En este artículo se presenta (i) una forma de utilizar los sistemas de representación instruccionales como variables para el análisis de tareas en el caso del concepto función (12-16) y, (ii) el sistema de categorías obtenido. La consideración de las diferentes perspectivas (proceso y objeto) de la noción función permite realizar algunas reflexiones sobre la relación entre la presentación textual de la tarea y las características de la actividad que presumiblemente demanda del resolutor.**

## Introducción

Las tareas matemáticas son un instrumento que utilizamos habitualmente en el desarrollo de la labor docente. Su diseño, análisis, evaluación o elección es una de las primeras decisiones que tenemos que tomar al pensar en la enseñanza y, en particular, en la elaboración de Unidades Didácticas. Aspectos tales como secuenciación de contenidos, presentación, forma de plantear las tareas en la clase, etc., son tenidos en cuenta en esta decisión.

En este trabajo una fuente potencial desde la que extraer tareas para desarrollar el contenido en las Unidades Didácticas lo constituyen documentos ya elaborados. Los libros de texto son uno de estos tipos de documentos potenciales desde lo que elegir tareas y actividades a proponer en el aula. Sin embargo, un reciente análisis que hemos realizado nos ha indicado que todo texto

puede llevar tras de sí una determinada filosofía, una forma de “ver” el contenido matemático escolar. Esto condiciona la clase de actividades y tareas que se plantean en ellos.

El análisis y evaluación de libros de texto en general, y en particular el que se centra primordialmente en el tipo de tareas presentadas, ha sido una preocupación constante en el campo de la Educación Matemática. La hipótesis que subyace en este planteamiento subraya el papel determinante que sobre el proceso de aprendizaje desempeña la forma en que las Matemáticas son presentadas por los textos o unidades didácticas a través de las tareas.

En este sentido, las características del proceso de generación del conocimiento matemático, es decir, la naturaleza del aprendizaje producido y la forma en que este se produce, viene definido, en parte, por el tipo de tareas que los estudiantes deben realizar. La relación

entre las tareas y la actividad que el estudiante debe desarrollar al intentar resolverla (o la misma forma en que el profesor la plantea) puede llegar a caracterizar una determinada comprensión de las nociones matemáticas. Además, esta relación entre la tarea y lo que el estudiante debe hacer con ella hace que se genere por parte de éste unas creencias implícitas sobre lo que son las matemáticas escolares (contenido matemático) y lo que significa aprender algo en Matemáticas. En este sentido, la “imagen”<sup>1</sup> que un estudiante puede construir de un concepto matemático viene determinado, en parte, por esta doble perspectiva dada por:

<sup>1</sup> Vinner y sus colaboradores (Vinner y Dreyfus, 1989) denominan concepto imagen asociado a un concepto matemático como el conjunto de todas las ‘representaciones’ mentales y propiedades características que el estudiante asocia a este concepto.

- las características textuales de las tareas que tiene que realizar, y  
 - la naturaleza de la actividad que genera con dicha tarea.

Dentro de este marco general, tratamos de buscar instrumentos generales y fundamentos teóricos para el análisis libros de textos y de tareas matemáticas. Los trabajos de van Dormolen (1986), Otte (1986), Kang y Kilpatrick (1992), Kuchemann (1987), Leinhardt et al. (1992) y Sanz (1990) proporcionan algunas perspectivas diferentes adoptadas en el campo de la Educación Matemática para este análisis con diversas aproximaciones epistemológicas.

Otte y Dormolen aportan una perspectiva analítica general para el análisis del contenido en los libros de texto de Matemáticas, considerando algunos principios que deben tenerse en cuenta (libre de errores, naturaleza del aprendizaje pretendido,...). Por otra parte, Kang y Kilpatrick utilizan la teoría de la transposición didáctica para un análisis de algunos libros de Álgebra examinando la utilidad de los conceptos vinculados a esta teoría para el análisis de textos matemáticos. El uso de las investigaciones cognitivas sobre cómo los aprendices resuelven tareas vinculadas a un tópico concreto o cómo diferentes textos reflejaban un determinado aspecto de un contenido matemático escolar particular fue realizado por Kuchemann (1987) y en los trabajos recogidos en Leinhardt et al. (1992). Finalmente Sanz incide en la necesidad de considerar los modos de representación

utilizados para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten. Esta diversidad de enfoques nos llevó a intentar recoger aquellos aspectos relevantes descritos en la literatura para el propósito de nuestro trabajo e intentar generar nuestro esquema analítico. Este proceso es el que describiremos en la próxima sección.

El objetivo final en nuestro trabajo era intentar obtener un esquema analítico que, de alguna manera, nos permitiera identificar características generales que pudieran llegar a definir un conjunto de tareas en relación a un tópico concreto. Para ello elegimos un concepto central en la enseñanza de las Matemáticas en diferentes niveles, como es el concepto de función.

El propósito de este artículo es detallar los criterios seguidos y describir el sistema de categorías obtenido. Pretendemos con ello aportar información que pueda ser útil a la hora de fundamentar nuestras decisiones ante la labor de analizar, evaluar, diseñar o elegir tareas matemáticas que desarrollen el curriculum matemático de la Educación Secundaria Obligatoria.

### **El proceso seguido: delimitando un marco conceptual**

Tomando como referencia la cognición situada (Brown, Collins y Duguid, 1989), se puede asumir que el conocimiento es producto tanto de la tarea, como de la situación en que se da (características de la actividad

generada; es decir, interacciones tarea-alumno, entre los propios alumnos, profesor-alumno). Por otra parte, estas relaciones son las que definen un aspecto de la cultura matemática escolar en la que se desarrolla y utiliza el conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva podemos subrayar dos cosas que tienen una influencia potencial en las características del conocimiento matemático generado en el aula,

- (i) la presentación textual de la tarea (tipo de contenido, representación instruccional empleada, etc), y
- (ii) la naturaleza de la actividad que el propio contexto en el que se presenta la tarea demanda del estudiante.

Estos dos aspectos fueron los que nos inclinaron a tener que buscar esquemas analíticos que los pudieran contemplar. Así, con esta perspectiva, y en un nivel más concreto tuvimos en cuenta

- el uso y características de la representación matemática utilizada, y
- el punto de vista que explicita la necesidad de considerar diversas perspectivas para llegar a comprender el concepto de función.

El análisis del papel desempeñado por las representaciones, en el proceso de aprendizaje de los alumnos de distintos tópicos matemáticos, ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Janvier, 1987; Kaput, 1991). Una de las ideas

que, en estos momentos, se defiende con más intensidad es que la traslación entre diferentes representaciones, y las transformaciones dentro de un mismo sistema, contribuyen a que los alumnos adquieran una mayor comprensión de las nociones.

Por otra parte, las investigaciones centradas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función (Breindenbach, et al. 1992; Dubinsky y Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpiska, 1992; Vinner y Dreyfus, 1989) han caracterizado dos perspectivas para analizar lo que significa comprender la noción de función:

- la perspectiva proceso, y
- la perspectiva objeto.

Desde la **perspectiva proceso**, se considera que las funciones conectan los valores de  $x$  e  $y$ , es decir, para cada valor de  $x$  le corresponde un valor de  $y$ . Desde la **perspectiva objeto**, la función, se contempla de forma global, como un todo.

Llegar a comprender un dominio de contenido matemático complejo, como puede ser el definido por la noción de función, significa, para

algunos autores (Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993), ser flexible en los procesos de resolución de tareas, es decir,

- trasladarse entre diferentes sistemas de representación, y
- diferentes perspectivas del concepto.

Como consecuencia, un medio de determinar como la "forma" de las tareas favorece, o no, la comprensión de un concepto es analizar cómo la presentación del contenido, y el tipo de tareas/actividades propuestas, refleja los diferentes aspectos de lo que significa comprender un dominio complejo como en este caso específico, las funciones. Representaciones y perspectivas pasan así a ser las referencias a considerar.

### Los textos utilizados como fuente de las tareas analizadas

Para realizar nuestro estudio utilizamos, como fuente desde las que obtener las tareas, textos publicados en nueve editoriales, no distribuidas cronológicamente de forma uniforme. Adoptamos una perspectiva temporal, examinando libros de texto publicados desde 1975 hasta 1991, del nivel 11-16.

Dado que nuestro objetivo no era establecer comparaciones, sino analizar características de las tareas propuestas en los temas relativos al concepto de función, elegimos aquellos libros que pensamos habían tenido (o tienen) una difusión más amplia en la provincia de Sevilla en los años considerados. El objetivo era intentar explicitar suposiciones epistemológicas implícitas sobre las que se apoyaban las tareas consideradas globalmente, e identificar características particulares de las tareas. En el cuadro 1 recogemos la distribución seguida en relación a niveles y años de publicación.

Por otra parte, y con objeto de apreciar lo mejor posible el cambio que se está observando en los últimas décadas en la enseñanza en general, y en la de las Matemáticas en particular, se decidió hacer dos bloques con los textos de 1º y 2º de BUP (14-16 años), atendiendo a su fecha de publicación. Así, el bloque A abarcaba el período comprendido entre 1975 y 1981, y el bloque C los años comprendidos entre 1987 y 1991. La laguna que parece existir entre ambos bloques se debe a que en esos años no hubo las suficientes

**Cuadro 1. Distribución temporal y por cursos de los tres bloques en los que se han agrupado los textos utilizados**

Año de publicación	1974	1975	1976	1979	1981	1983	1984	1986	1987	1988	1990	1991
Curso/nivel						BLOQUE B						
7º (12-13)						BLOQUE B						
8º (13-14)						BLOQUE B						
1º (14-15)		BLOQUE A							BLOQUE C			
2º (15-16)		BLOQUE A							BLOQUE C			

innovaciones como para que las editoriales, en general, editasen nuevos textos, utilizándose los del período anterior.

En cuanto a los libros revisados de 7º y 8º de EGB (12-14 años), desde la perspectiva adoptada en nuestro análisis, no hemos apreciado de forma clara cambios, por lo que hemos incluido todos ellos en un sólo bloque. Pensamos que esto es debido a que la reforma en el segundo ciclo de la Educación General Básica se realizó en 1980. Por otro lado, debemos aclarar que la elección del período 1983 a 1988 es debida a que los libros editados en estos años siguen vigentes en la actualidad.

### Generación del sistema analítico y categorías obtenidas

La unidad de análisis utilizada fueron las tareas y problemas presentados en el libro de texto. Como información adicional, se recogían también las definiciones dadas por los diferentes libros al concepto de función. En este apartado inicialmente trataremos los dos aspectos que hemos considerado durante el proceso de análisis y en el mismo orden en el que se han empleado:

- sistemas de representación utilizado y las traslaciones dentro y entre ellos, y
- diferentes perspectivas (proceso, objeto) para el concepto función.

Posteriormente, describiremos el proceso de análisis seguido que nos ha permitido obtener un conjunto de categorías para las diferentes tareas

relativas a las funciones desde el punto de vista de las representaciones utilizadas y de las traslaciones entre ellas (o dentro de ellas) que demanda la tarea.

El análisis de casos problemáticos permitió, por una parte, ir refinando paulatinamente el conjunto de categorías inicialmente obtenido y, por otra, incorporar en el proceso de análisis el punto de vista derivado de considerar los aspectos proceso y objeto relativos al concepto función. La forma en que hemos incorporado esta última consideración será el contenido de otro apartado.

#### a) Representaciones y las traslaciones entre ellas

Las tareas, actividades y ejercicios fueron analizados desde el punto de vista del tipo de representación utilizado y de la traslación que el

proceso de resolución demandaba. Las primeras referencias para la generación de nuestro sistema de categorías nos la proporcionó la literatura relativa al tema (Janvier, 1987).

Por otra parte, el mismo ejercicio de análisis de las tareas permitió ir refinando el sistema inicial de categorías para poder recoger todos los matices que se iban originando. Desde este punto de vista, podemos considerar que se ha seguido un proceso inductivo en la tarea de ir generando y refinando paulatinamente las categorías consideradas inicialmente.

Como hemos indicado, utilizamos el trabajo de Janvier (1987 a) como una referencia teórica inicial relativa a diferentes formas de representar el concepto de función (objeto matemático) y a los procesos de traslación derivados. El cuadro 2 recoge esta propuesta inicial.

**Cuadro 2. Modos de representación y procesos de traslación en el análisis del concepto función (Janvier, 1987 a).**

PROCESO DE TRASLACIÓN				
a de	situación, descripción verbal	tablas	gráficas	fórmula, expresión algebraica
situación, descripción verbal				
tablas				
gráficas				
fórmula, expresión algebraica				

Hay que tener en cuenta que el proceso de traslación entre representaciones implica trasladar los significados adscritos a diferentes aspectos del concepto de función (traducción).

### b) Las perspectivas proceso y objeto relativas al concepto función

Desde el segundo punto de vista adoptado en el marco conceptual se consideraban dos perspectivas para el concepto función,

- la perspectiva proceso, y
- la perspectiva objeto.

Dubinsky y Harel (1992) caracterizan estas dos perspectivas de la siguiente manera:

*“Una concepción **proceso** de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a algunos medios repetibles que, dada la misma cantidad original, siempre producirán la misma cantidad transformada. El sujeto es capaz de pensar en la transformación como una actividad completa empezando con objetos de algún tipo, haciendo alguna cosa con estos objetos, y obteniendo nuevos objetos como resultado de lo que ha sido hecho... Una función es concebida como un **objeto** si es posible desarrollar acciones sobre ella, en general acciones que la transforman (globalmente)” (Dubinski y Harel, 1992; pp. 85).*

### c) Perfilando el análisis: obtención de un sistema de categorías

La consideración inicial de la propuesta de Janvier (1987 a) en el

esquema analítico adoptado (representaciones y traslaciones) nos aportó información válida, para realizar las primeras inferencias sobre la forma en que el tratamiento del contenido (concepto de función, a través de las distintas tareas), desarrolla el concepto y promueve su comprensión por parte de los estudiantes.

Por otra parte, como decíamos anteriormente, según se procedía al análisis de las tareas, las categorías inicialmente consideradas fueron modificándose, para recoger lo más fielmente posible la información que se iba obteniendo. El sistema de categorías final que se obtuvo consta de ocho apartados, existiendo, dentro de cada uno de ellos, diferentes subcategorías. En el próximo apartado presentaremos algunos ejemplos concretos, que pensamos pueden ser representativos del proceso que nos llevó a situar determinadas tareas o actividades en una categoría específica. El sistema de categorías obtenido fue el siguiente:

#### Sistema de categorías

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación.
  - 1.1. Expresión algebraica. Formulación.
    - A. Características del objeto matemático función.
    - B. Cálculo y análisis de características.
  - 1.2. Modo gráfico.
  - 1.3. Situación.
2. Traslaciones entre modos de representación.
  - 2.1. Expresión algebraica a tabla/gráfica (y viceversa).
  - 2.2. Situación a gráfica (y viceversa).
  - 2.3. Situación a expresión algebraica (y viceversa).
3. Tareas de varios pasos.
  - 3.1. Traslación entre dos modos de representación para trabajar en el segundo de ellos.
  - 3.2. Traslación más traslación y trabajo dentro del último modo de representación utilizado.
  - 3.3. Traslación seguida de otra traslación.
  - 3.4. Trabajo dentro de un modo de representación más trabajo dentro de otro.
  - 3.5. Traslación seguido de trabajo dentro del primer modo utilizado.
4. Tareas en las que se plantea el análisis de una situación.
5. La tarea pide explícitamente utilizar un modo de representación diferente para resolver la cuestión planteada.
  - 5.1. Presentación: modo algebraico; resolución: modo gráfico.

- 5.2. Presentación: situación; resolución: formulación.
6. Emparejar gráficas con expresiones algebraicas (o viceversa).
7. Estudio de rasgos propios del modo de representación "independientemente" de las características del objeto matemático función.
8. Otras.

### Concretando el proceso

En este apartado comentaremos la asignación realizada para algunas de las tareas a determinadas categorías. En primer lugar describiremos algunos casos en los que la asignación tarea-categoría es relativamente clara, y luego comentaremos algunos aspectos que hemos derivado del análisis en casos dudosos, o cuya asignación no era tan directa.

Por ejemplo, si analizamos las tareas siguientes:

#### TAREA 1.

Dibuja en unos mismos ejes coordenadas las parábolas

$$y = (x - 2)^2; y = 2(x - 2)^2;$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$$

¿En qué punto tienen el vértice? ¿Cuál es el eje? ¿Cómo son?

#### TAREA 2.

Di en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas de las funciones siguientes:

$$y = x^2; y = 3x^2;$$

$$y = \frac{1}{3}x^2;$$

$$y = \frac{-4}{3}x^2; y = \frac{3}{4}x^2$$

Observamos que su resolución demanda los siguientes pasos:

- traslación de expresión algebraica a gráfica,
- estudio de la gráfica; es decir, trabajar dentro del modo gráfico.

Por lo que han sido consideradas como tareas en la categoría 3.1. "traslación expresión algebraica a gráfica y estudio de la gráfica dentro del modo gráfico". La característica de este tipo de tareas es que la relación-función está dada en un modo de representación y la actividad que demanda es 'mostrar' esta relación en otro modo de representación.

De igual forma la tarea

#### TAREA 3.

Piensa en todos los rectángulos con perímetro 20 cm. Cuando la base se alarga, la altura debe disminuir. Busca la función que relaciona la base  $x$  con la altura  $y$ . Representala gráficamente. ¿Es una recta?

la incluimos dentro de la categoría 3.3. ya que resolver la tarea implica realizar las siguientes traslaciones entre modos de representación:

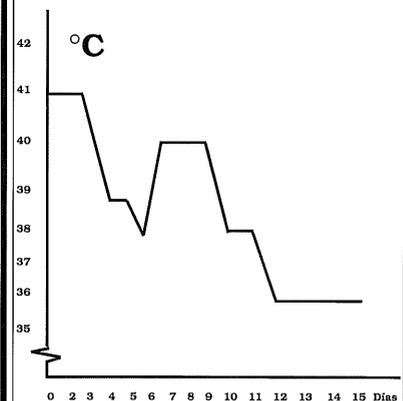
- situación a formulación,
- formulación a gráfica.

Es decir, el texto de la tarea está en un modo de representación dado, y se demanda que se realice una actividad que consiste en obtener esta relación-función en otro modo de representación.

Sin embargo, existen tareas cuyas características hacían inicialmente difícil su asignación atendiendo únicamente a su presentación textual. Consideremos, por ejemplo, la siguiente tarea:

#### TAREA 4.

La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un paciente con el paso del tiempo:



- ¿Qué variables se relacionan? ¿Qué unidades tomamos para cada variable?
- ¿Cuántos días ha estado enfermo el paciente? (Se considera normal una temperatura de 36.5 grados).
- ¿Qué ocurre entre los días 2 y 5? ¿Qué ocurre el 6º día?
- ¿Cuándo es máxima la temperatura? ¿Cuándo es mínima?
- ¿En qué periodos su temperatura ha sido estable?

En este tipo de tareas toda la información que hay que procesar proviene del significado dado a la gráfica por el conocimiento del estudiante de este tipo de contextos. Las cuestiones están centradas en enfatizar el aspecto de **relación** entre dos magnitudes, puesta de manifiesto por la gráfica, y los cambios de esta relación. En esta tarea el "significado" proviene de la familiaridad del estudiante con el contexto (la tarea consiste en mostrar que la gráfica es un buen descriptor de la situación -relación).

En este caso, la forma textual de esta tarea es solo el modo gráfico, ya que el contexto que le dota de significado es tan cercano al estudiante que no es necesario realizar una descripción de esta situación (toda la información la proporciona la gráfica). Teniendo en cuenta, pues, la forma textual de la tarea la hemos asignado a la categoría 1.2 "Trabajo dentro de un mismo modo de representación. Modo gráfico".

En esta tarea, por ejemplo, el contexto (la situación) está muy próximo a la experiencia del estudiante, y por tanto no se hace necesaria la inclusión de ningún texto aclaratorio. La actividad que demanda esta tarea es doble:

i) que el estudiante identifique una situación de la que la gráfica es una representación, y

ii) las cuestiones planteadas intentan poner de manifiesto si la identificación anterior (situación-gráfica) es comprendida por el estu-

diente. Es decir, si el estudiante puede "leer" en la gráfica información relativa a la situación (traslación de significado).

Como consecuencia de este análisis, centrado en la naturaleza de la actividad que la tarea demanda, esta tarea puede ser considerada como "traslación entre modos de representación (gráfica-situación y viceversa)".

Considerando sólo la forma de presentación es por lo que se ha colocado en la categoría 1.2. ("trabajo dentro de un mismo modo de representación, modo gráfico"). A diferencia de esto, en las tareas que implican traslación entre modos de representación las características relevantes es que se presenta la relación-función en un modo de representación, por ejemplo descripción de una situación y piden dibujar una gráfica que represente las relaciones entre los cambios de las variables descritas. Así, desde el punto de vista del análisis realizado podemos considerar dos niveles: (i) la presentación textual de la tarea, y (ii) la presumible actividad cognitiva que la tarea demanda. En algunos casos, la propia presentación textual de la tarea es paralela a la actividad cognitiva que presumiblemente se genera (como en los ejemplos 1,2,3). Pero en otros casos no existe este paralelismo tan aparente entre la forma de presentación (incluida el tipo de cuestiones planteadas) y la actividad, como probablemente ocurre en el ejemplo 4. En estos casos hemos optado por considerar solo la forma de presentación.

Sin embargo, existe otro tipo de tareas en las que las preguntas están dirigidas a la lectura de la información que proporciona la gráfica, como en el caso anterior; pero, esta actividad (la lectura) se apoya, inicialmente, en la capacidad de relacionar una situación a la gráfica (ver tarea 5). Es decir, en la capacidad de relacionar una sucesión de "cambios" (sucesos) descritos en la situación con la gráfica. Por lo tanto, aunque esta tarea puede parecer idéntica a la anterior (una gráfica describe una situación, y unas cuestiones que indagan información sobre la situación apoyándose en la información que proporciona la gráfica) plantea una dificultad adicional puesta de manifiesto por la identificación gráfica-situación que en la tarea anterior se soslayaba por ser el contexto-situación de la relación próximo a la experiencia del estudiante.

En este caso por tanto la actividad que se pretende generar es doble:

- dotar de significado a la gráfica en función de la situación descrita, y
- obtener información de la situación "leyendo" en la gráfica.

Como consecuencia de este análisis podemos decir que en esta tarea, aunque haya una descripción de la situación y una gráfica, podemos considerar que tiene dos apartados diferenciados.

El emparejamiento entre la situación y la gráfica (interpretación, actividad necesaria para dotarla de significado) puede ser considerada

como una actividad consistente en una "traslación entre modos de representación" (de situación a gráfica y viceversa) desde el punto de vista de que lo que se traslada es el 'significado'. Es decir este proceso de traslación es un paso necesario para dotar de significado a la gráfica. En segundo lugar, la lectura de esta que demanda las cuestiones planteadas, podemos considerarla una actividad entre modos de representación desde la perspectiva de que la información gráfica proporcionada por la gráfica se le dota de significado desde la situación. En este caso la gráfica desempeña un papel de instrumento (un medio a través del cuál) para obtener información de la situación. Este análisis pone de relieve que en determinados tipos de tareas, el contexto introduce 'demandas cognitivas' diferentes para tareas aparentemente iguales.

Desde el punto de vista textual de la presentación de la tarea, en este caso están presentes dos modos de representación (descripción de la situación y el modo gráfico), y la actividad que demanda consiste en:

- dotar de significado a la gráfica a partir de la situación (traslación), y
- obtener información de la situación a partir de la lectura de la gráfica (forma idéntica a la tarea 4),

Inicialmente podemos considerarla como una tarea dentro del modo gráfico (por semejanza a la tarea 4), pero atendiendo a las características del modo de presentación (en particular, la no familiaridad del estudiante con la relación situación-gráfica) podemos considerarla trasla-

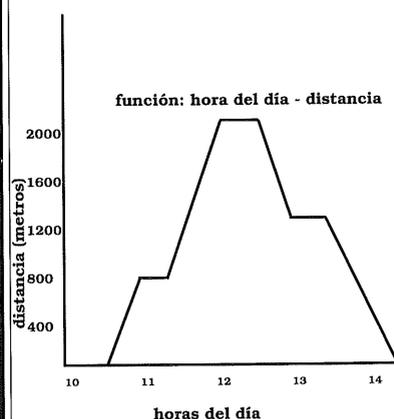
ción entre modos de representación, de situación a gráfica y viceversa.

Este análisis permite mostrarnos como tareas aparentemente iguales, en las que el modo gráfico se presenta como una descripción de una situación (como en la tarea 4 y 5) el contexto que proporciona el significado puede introducir matices en relación a la actividad que demanda su realización.

#### TAREA 5.

Juan y Ana han quedado para salir. Juan sale de su casa y tiene que esperar a Ana delante de su casa; después dan un paseo y deciden tomar un refresco en una cafetería. Al salir de la cafetería, y de vuelta a su casa, se encuentran con Jorge y Carmen y están un buen rato parados charlando; después continúan de regreso hacia su casa.

Ésta es la gráfica de la función "hora del día-distancia a casa de Juan".



- a) ¿A qué distancia está la casa de Ana de la de Juan?
- b) ¿Cuánto tiempo están en la cafetería?
- c) ¿Cuánta distancia hay desde la casa de Ana a la cafetería?
- d) ¿Durante cuánto tiempo han estado hablando con sus amigos?

Por lo tanto, la idea de traslación entre modos de representación puede llegar a tener varios significados como ha sido puesto de manifiesto en el análisis de las tareas utilizadas como ejemplo en esta sección.

#### Algunas reflexiones finales

El diseño, análisis o evaluación de tareas matemáticas para su utilización en las situaciones de enseñanza-aprendizaje son tareas fundamentales en la labor del profesor. Esta ocupación del profesor se puede hacer de forma implícita o de manera consciente. Tanto cuando se decide utilizar las tareas o actividades que aparecen en documentos ya elaborados (libros de texto, materiales de otros compañeros, etc) como cuando se piensa en la elaboración del propio material, la elección de las tareas a proponer a los alumnos en la clase viene determinado por lo que se quiere conseguir. Es decir, por lo que se pretende obtener como consecuencia de la actividad del alumno o alumnos al realizar la tarea.

Es, desde esta perspectiva, a través de la cual podemos pensar que la tarea que el profesor piensa proponer a sus alumnos (tanto si proviene del libro de texto como si forma parte del diseño de su propia unidad didáctica) debe llegar a ser el objeto de la actividad del estudiante. La actividad del estudiante con la tarea es un medio por el cual se consigue que se genere el aprendizaje matemático.

La elección de tareas a utilizar en clase viene determinada, desde

nuestra perspectiva, por la idea de que la generación del conocimiento matemático en el aula está vinculada a la naturaleza de la relación que se origina entre el estudiante-la tarea y el mismo profesor con el propósito de conseguir un objetivo educativo predeterminado.

Colocar el énfasis en la relación entre la tarea y la presumible actividad generada por el alumno para resolverla, viene justificado por la necesidad de equilibrar, en la enseñanza de las matemáticas, el aspecto proceso y producto. En este contexto, las concepciones del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, etc. forman unos referentes psicológicos que determinan no sólo el tipo de tareas a presentar a los alumnos, sino también las características de la actividad que se genera con la tarea propuesta.

Con este transfondo pensamos que es interesante determinar algunos aspectos que permitan empezar a pensar en una aproximación sistemática a este trabajo del profesor. En el análisis presentado aquí elegimos la noción de función por ser una de los conceptos matemáticos más importantes que se desarrollan en el nivel de la Educación Secundaria Obligatoria. El objetivo fue identificar una posible tipología de tareas relativas a las funciones desde el punto de vista de las representaciones instruccionales empleadas y las traslaciones entre ellas (o dentro de ellas) que la tarea demanda.

En este sentido, el proceso seguido en la determinación de diferentes tipos de tareas pensamos que puede llegar a servir como un referente en el trabajo del profesor de secundaria al pensar en el diseño, análisis y evaluación de tareas relativas a las funciones. Como hemos descrito en otra ocasión (García y Llinares, 1993 a) la elección de tareas que van a constituir el núcleo del trabajo del estudiante en relación a las funciones no es un trabajo que esté exento de suposiciones epistemológicas implícitas.

La elección por parte del profesor de un determinado tipo de tareas, la presencia equilibrada entre unas u otras en el diseño de las unidades didácticas, la naturaleza de la actividad que los estudiantes tienen que realizar en las situaciones de enseñanza aprendizaje generadas en las aulas, etc. son aspectos que de alguna forma ayudan a caracterizar el concepto imagen de función que los estudiantes construyen como consecuencia de sus actividades generadas con las tareas propuestas.

El seleccionar libros de texto publicados en un amplio intervalo temporal, como fuente de las tareas analizadas, nos ha permitido considerar, en el sistema de categorías obtenido, un amplio conjunto de características. Colocar el énfasis sobre un determinado tipo de tareas puede subrayar un posicionamiento epistemológico determinado (García y Llinares, 1993). Esta aproximación cronológica ha permitido enriquecer el sistema de categorías globalmente

obtenido. El producto final ha sido una tipología de tareas con funciones que pone de manifiesto el papel de las representaciones y sus conexiones entre sí en el proceso de aprendizaje de esta noción en el nivel 12-16.

Por otra parte, el análisis del proceso de aprendizaje del concepto función ha introducido recientemente la necesidad de considerar las diferentes perspectivas a través de las cuales se caracteriza la actividad que se genera con las tareas con funciones. Así por ejemplo, tener en cuenta el modo de representación utilizado (situación, gráfica, expresión algebraica, tablas) y lo que se pide que se haga (por ejemplo traslación entre los modos de representación) constituye un aspecto a considerar. Pero además, las características de la actividad potencial que el alumno puede generar con la tarea conlleva perspectivas diferentes para el concepto de función.

La actividad vinculada a las tareas en las que la función se contempla como una regla (un proceso en la que dada una cantidad, se realiza un proceso de cambio, y se obtiene otra cantidad de salida, se identifican claramente con la secuencia entrada-acción-salida) pueden ser diferentes a las características de la actividad vinculada a aquellas tareas en las que las funciones se ven como objetos, como entidades en sí mismas. Por ejemplo, una actividad generada para resolver una tarea que adopte una perspectiva objeto para la idea de función sería la desarrollada con familias

paramétricas de funciones desde la forma algebraica o el análisis de familia de gráficas de funciones de segundo grado para determinar el efecto de diferentes parámetros sobre la forma de la gráfica. De forma particular podemos ver como las tareas que aparecen como ejemplos en este trabajo pueden demandar diferentes perspectivas (proceso, objeto). De esta forma podemos ver que dentro de un mismo tipo de tareas, desde el punto de vista del sistema de representación utilizado, la actividad que se genera puede adoptar una perspectiva proceso u objeto.

Esta relación entre la tarea, desde el punto de vista del sistema de representación utilizado, y la actividad vinculada es lo que hemos querido poner de relieve en la adopción de las dos dimensiones que consideramos se pueden tener en cuenta en el análisis de las tareas con funciones: representaciones instruccionales empleadas (y sus relaciones) y la perspectiva objeto o proceso desde la que se contempla la actividad potencial que se genera.

Por tanto, mientras el uso de representaciones o traslaciones entre ella puede estar más vinculado al aspecto de presentación de la tarea (o incluso de la pregunta que se plantea cuando la tarea consiste en realizar una traslación entre modos de representación), la perspectiva proceso u objeto esta más vinculada a la naturaleza de la actividad que se origina al intentar resolver la tarea por parte del estudiante. De todas formas no hay que olvidar que determinado tipo de tareas puede favore-

cer en sí mismo la adopción, por parte del estudiante, de una de las dos perspectivas para resolverla, o incluso determinarla unívocamente como solía pasar con las tareas sobre funciones centradas en el modo algebraico que enfatizan la idea de función como una cadena entrada-acción-salida y que predominaron al principio de los años ochenta (García y Llinares, 1993).

Muchas son las voces que últimamente se han alzado señalando la importancia del nuevo papel que, en el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje, se asigna al profesor. Sin embargo, no hay que olvidar que ese nuevo papel implica nuevas responsabilidades, que hasta ahora no estaban presentes. El paso de considerar al profesor como un mero usuario de contenidos preestablecidos a creador del curriculum implica una serie de toma de decisiones, entre ellas, el diseño, análisis y selección de tareas que se van a utilizar. Esas decisiones deben estar fundamentadas teóricamente desde el punto de vista del aprendizaje (relación tarea-actividad), más allá de aspectos externos o de simple secuenciación. El tomar esas decisiones de manera consciente pasa a ser algo intrínseco a su labor profesional. Es en relación a este aspecto en el que pensamos que nuestro trabajo puede en algo contribuir.

## Bibliografía

- \* BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., NICHOLS, D. y HAWKS, J. (1992): "Development of the process conception of function". **Educational Studies in Mathematics**, 23, 247-285.
- \* BROWN, J.S., COLLINS, A. y DUGUID, P. (1989): "Situated Cognition and the Culture of Learning", **Educational Researcher**, January-February, 32-42.
- \* DORMOLEN, VAN J. (1987): "Textual Analysis". En B. Christiansen et al. (Eds.) **Perspectives on Mathematics Education**. Reidel Pb. Co.: Dordrecht.
- \* DUBINSKY, E. y HAREL, G. (1992): "The nature of the process conception of function". En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) **The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy**. Mathematical Association of America: Washington, DC.
- \* GARCÍA, M. y LLINARES S. (1993): **El concepto función matemática: Un análisis de algunos libros de texto**. Documento no publicado del Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas), Universidad de Sevilla.
- \* GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1993 a): **El concepto de función a través de los textos escolares. Reflexión sobre una evolución**. Documento no publicado del Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas), Universidad de Sevilla.
- \* JANVIER, Cl. (Ed.) (1987): **Problems of the Representation in the Teaching and Learning of Mathematics**. Lawrence Erlbaum: Hildale: NJ.
- \* JANVIER, C. (1987 a): "Traslation processes in Mathematics Education". En

- Janvier, Cl. (Ed.) (1987): **Problems of the Representation in the Teaching and Learning of Mathematics**. Lawrence Erlbaum: Hilldale: NJ.
- \* KANG, W. y KILPATRICK, J. (1992): "Didactic Transposition in Mathematics Textbooks". **For the Learning of Mathematics**, 12(1), 2-7.
- \* KAPUT, J. (1991): "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes". En E. von Glasersfeld (Ed.) **Radical Constructivism in Mathematics Education**. Kluwer Academic Press: Dordrecht.
- \* KUCHEMANN, D. (1987): "Learning and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks". En P. Ernest (Ed.) **Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34**. School of Education. University of Exeter.
- \* LEINHARDT, G., PUTMAN R. y HATTRUP, R. (Eds.) (1992): **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching**. Lawrence Erlbaum Ass., Pbs.: Hilldale, NJ.
- \* MOSCHKOVICH, J., ARCAVI, A. y SCHOENFELD, A. (1993): "What does it Mean to Understand a Domain?. A study of Multiple Perspectives and Representations of Linear Functions, and the connections Among Them". En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.) **Integration Research on the Graphical Representation of Functions**. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ.
- \* OTTE, M. (1987): "What is a text?". En B. Christiansen et al. (Eds.) **Perspectives on Mathematics Education**. Reidel Pb. Co.: Dordrecht.
- \* SANZ, I. (1990): "Comunicación, Lenguaje y Matemáticas". En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) **Teoría y Práctica en Educación Matemática**. Alfar: Sevilla.
- \* SFARD, A. (1992): "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin". **Educational Studies in Mathematics**, 22(1), 1-36.
- \* SHELL CENTER FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990): **El lenguaje de funciones y gráficas**. MEC. Centro de publicaciones.
- \* SIERPINSKA, A. (1992): "On understanding the notion of function". En G. Harel y E. Dubinski (Eds.) **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- \* VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989): "Images and definitions for the concept of function" **Journal for Research in Mathematics Education**, 20, 356-366.

---

**Mercedes García Blanco**  
**Salvador Llinares Ciscar**

*Departamento de Didáctica de las  
Ciencias (Matemáticas)  
Facultad de Educación  
Universidad de Sevilla*