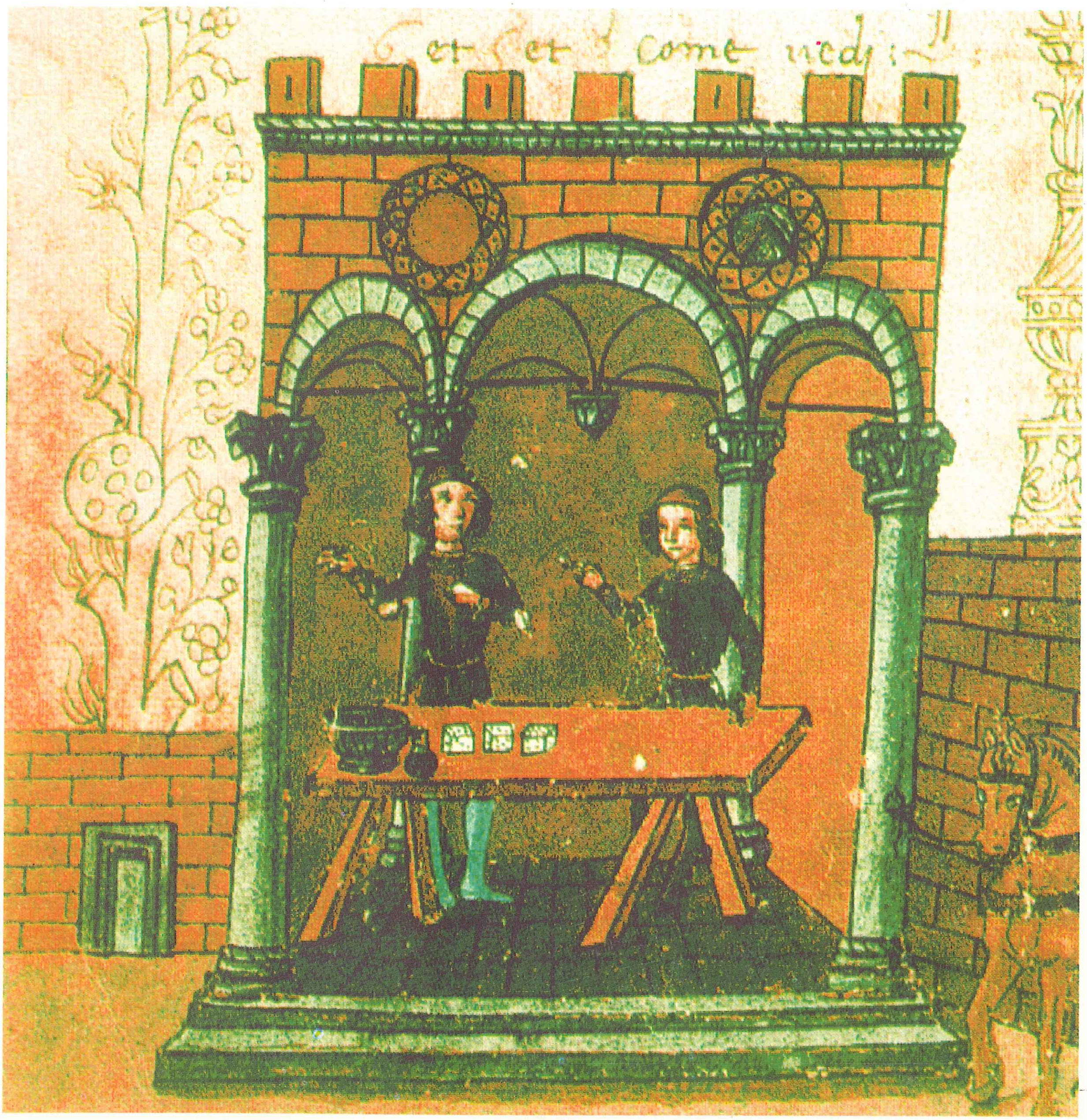
SUMA

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Número 17 - 1994



EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines ADEMGI
Presidenta: María Antonia Canals
Apartat de Correus 835. 17080-Girona

Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals
Presidente: Angel Xifré i Arroyo
Apartat 1306-43200-Reus

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Prof. de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Luis Alvarez García
Sede: Instituto de Educación Secundaria nº 5. 33400-Avilés

Sociedad Canaria de Prof. de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Prof. de Matemáticas.
I.B. Comuneros de Castilla.
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
C/ Batalla Villalar, s/n. 09006-Burgos

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartado 22045. 46071-Valencia

Sociedad Extremeña de Educ. Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia I.B. de Ribadavia. Coordinador: Andrés Marcos García
C/ Rodríguez Valcárcel. Ribadavia. 32400-Orense

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado 9479. 28080-Madrid

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

PAPEL 100% ECOLÓGICO

***Depósito legal:* Gr. 752 - 1988**
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Tlf. (958) 550381
ARMILLA (Granada)

RIO

ARTÍCULOS

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

MISCELÁNEA

Suplemento "Para Coleccionar"

3ª Parte de los Calendarios Matemáticos del Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"

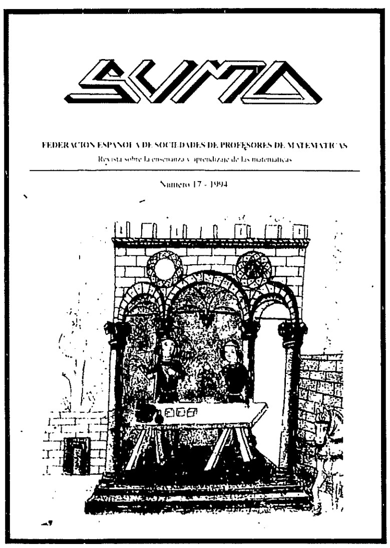
EDITORIAL

"El estudio de las Matemáticas ha de incluir muchas oportunidades de comunicación, de forma que los alumnos puedan:
... darse cuenta de que una parte fundamental para el aprendizaje y uso de las matemáticas conlleva el hecho de que éstas se representen, se discutan, se lean, se escriban y se escuchen... ".

National Council of Teachers of Mathematics.

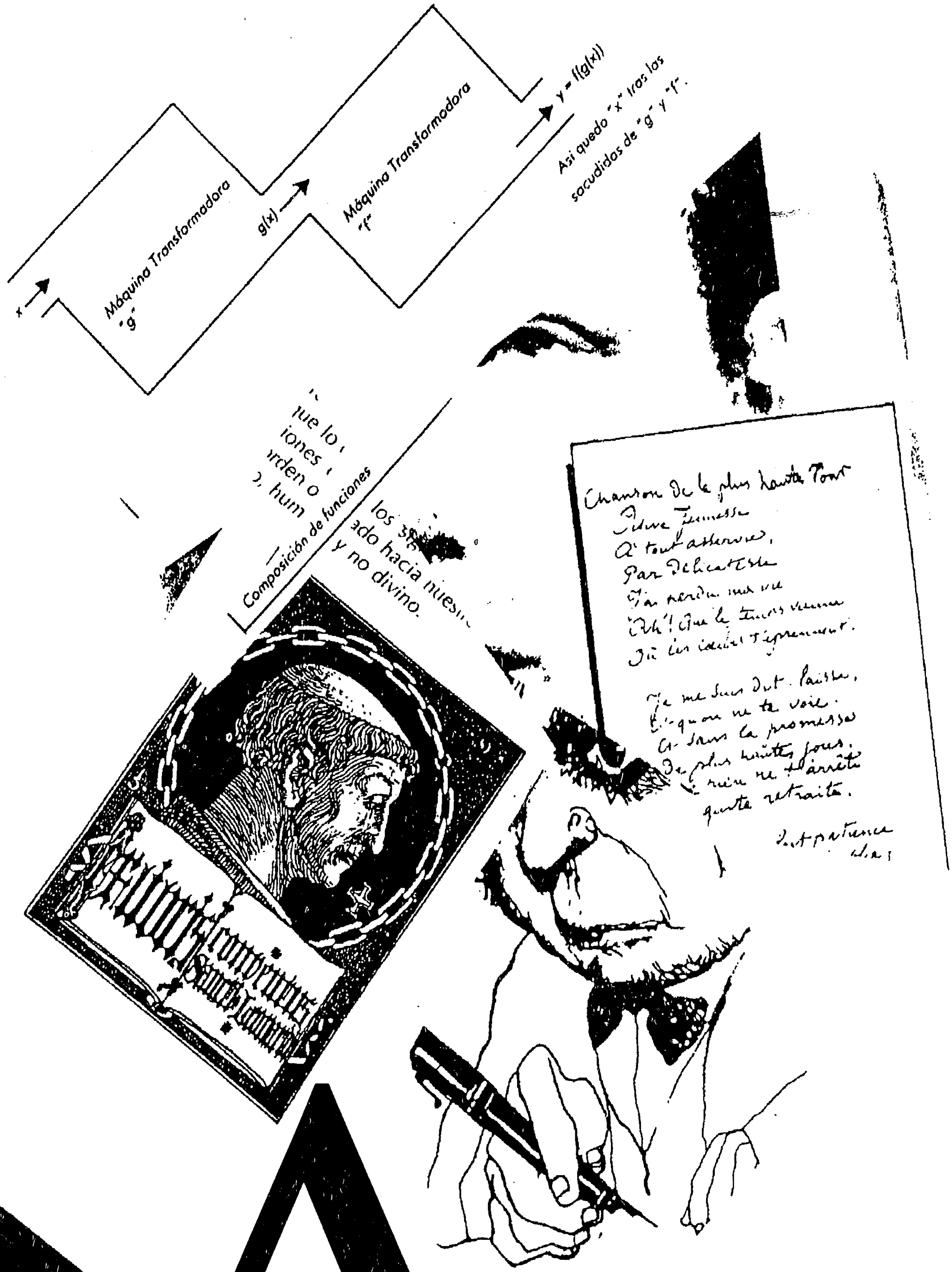
En la línea marcada por números anteriores, el lector en esta ocasión puede encontrar un "ramillete" interesante de artículos en los que experiencias de compañeros en el aula e ideas aportadas para la clase completan el número diecisiete.

Habría que destacar que una parte considerable de él aborda la historia de las matemáticas como recurso didáctico, usando textos y situaciones de la historia; así mismo se analiza la enseñanza de la historia de las matemáticas.



A riesgo de caer en la monotonía, tampoco, en esta ocasión, queremos dejar de recordarles: ICME'8. Les anunciamos que en el próximo número presentaremos un amplio informe sobre el organigrama de funcionamiento del ICME'8, un repaso a los anteriores eventos, así como a sus contenidos desde que en el año 1969 comenzara el primero en LYON (Francia), para completarlo con el contenido del Programa Científico.

Desde la propia Federación y tomando estas páginas como vehículo de difusión, les animamos a la colaboración: El ICME'8 no es sólo responsabilidad de la Federación.


x
Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedo "x" tras los sacudidos de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.

ARTICULOS

Una breve panorámica sobre algunas investigaciones en curso

Bruno D'Amore*

El Núcleo de Investigación en la Didáctica de las Matemáticas de Bolonia (Italia) actualmente tiene en curso una vasta red de investigaciones que, así como diferencias, tiene sin embargo, muchos aspectos en común y por consiguiente están fuertemente interrelacionados entre ellos. Haré aquí un breve relato sobre algunos de estos aspectos, declarándome a disposición de los lectores que quisieran saber cualquier cosa más profundamente.

Los "Ejercicios Anticipados"

Dada la obvia diferencia entre "problema" y "ejercicio", aún reconociendo en el primero una mayor potencialidad educativa y en el segundo una fuente de entrenamiento necesario, hemos elaborado la idea de "ejercicio anticipado"; se trata de un ejercicio que viene propuesto en una categoría para la que un texto no es ejercicio. Por ejemplo, dada una circunferencia diseñada sobre un folio, se pide su medida; si este texto viene propuesto en un nivel III medio (alumnos de 13-14 años), se trata de un ejercicio vulgar, pero si viene propuesto en un nivel III elemental (alumnos de 8 años), ahora se tiene un hecho nuevo, porque estos niños quizás han oído usar ya el término circunferencia aunque, en resumen es para ellos un hecho nuevo.

La ejecución de un ejercicio pone la reflexión en la zona de desarrollo verdadero, en cuanto, a lo más, confirma el nivel allí alcanzado. La propuesta de un texto sobre las competencias aleja del todo la atención sobre la zona de desarrollo próximo, llendo a la investigación de la línea de desarrollo potencial: términos nuevos, nuevas formas de inventar, nuevas estrategias..., no pueden avivar "los ímpetus" a través de la zona de desarrollo próximo.

Se registran de hecho resultados de gran interés, o de motivación al "hacer matemáticas", o de curiosidad y estímulo; pero, sobre todo, de perenne atención al contenido real del texto.

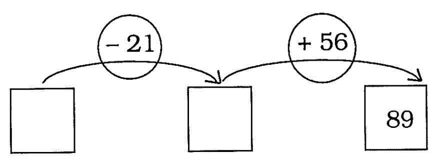
Por un mejoramiento en el resultado Einstellung

Hemos dado a niños de niveles III, IV, V elemental los dos textos siguientes (sobre cuya formulación se verá más adelante).

A. Michele tiene una cesta de caramelos.
Su madre le quita 12 caramelos para dárselos a una señora.
Su padre le trae 9 caramelos.
Ahora Michele tiene 63 caramelos en total.
¿Cuántos tenía al principio?

B. Giovanni recoge figurillas de barro.
Su hermana Andrea, sin querer, le pierde 21.

Ahora el padre le compra otras 56 figurillas.
Así, Giovanni tiene ahora 89 figurillas en total.
¿Cuántas figurillas tenía al principio?



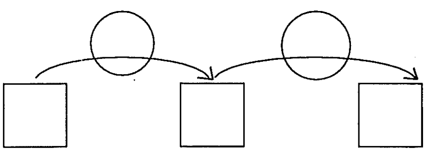
Un cruce vulgar entre las órdenes (primero A, luego B) (primero B, luego A) muestra que la capacidad de resoluciones de los problemas de este tipo aumenta notablemente con la ayuda constituida por la presencia del gráfico:

a) En el caso primero A luego B, se registra un aumento neto.

b) En el caso primero B luego A, se registra una permanencia del modelo gráfico que viene explotado en la resolución de A.

Termina aquí todo de manera obvia: había que esperar un comportamiento de este tipo. Pero hemos dado a todos un problema C (que no reproduzco para abreviar) de cualquier género, nulo para ver ni con A ni con B.

Entonces, se ha notado una clase de efecto Einstellung, en el comportamiento: muchos niños han diseñado para el primer argumento un gráfico del tipo:



que, habiendo tenido éxito en los dos casos precedentes, parecía que podía tener éxito siempre... Para advertir, después que sabían qué valores numéricos colocar en los espacios vacíos. Para reflejar: ¿Qué juego tiene fijeza, en la praxis de *problem solving*? ¿No se genera quizás un modelo mortífero en la repetición estereotipada? Si antes 2 problemas constituyen fijeza, ¿No es mejor variar continuamente el género de problemas propuestos?

(El texto de los dos problemas está inspirado en G. Verguand).

De una inmersión gradual, a una total.

El problema didáctico siguiente es muy discutido: ¿Afirmar o no una jerarquía de conceptos? Si la respuesta es positiva, tiene sentido estudiar una "escuela de dificultad en los problemas", de la más simple a la más compleja, y seguir ésta desde un punto de vista didáctico. Pero, no todos están de acuerdo: hay quien prefiere una "inmersión total"; esta crearía un ahondamiento motivante muy fuerte y constituiría un "ambiente" de trabajo múltiple.

Llamaría a la primera:
— Didáctica *gradual absoluta.*
y a la segunda.
— Didáctica *de las inmersiones totales.*

Si, suponemos, se ha establecido o tiene sentido admitir que allí hay una sucesión de conceptos del 1 al 10, cada uno por tanto lo llamará natural en lo sucesivo, en la didáctica gradual absoluta se podría optar por una exploración ordenada de 1 a 10, paso a paso; mientras en una didáctica de las inmersiones totales se afronta un problema que complica el concepto 10 y de ahí, por meditación y con una serie de reflexiones, llegar, después (pero no necesariamente en un orden inverso preciso) claramente hasta el 1.

Estamos estudiando una tercera solución que se podría llamar:
— Didáctica *sobre profundidad mixta:*
En nuestra escala, el proceso podría ser sintetizado: 1; 2; salto al 5, verificar un retraso de 4 y 3; 6; salto al 8; un retraso al 7; salto al 10; un retraso al 9; y así sucesivamente.

Se ha dicho a menudo que una didáctica gradual absoluta premia a los estudiantes menos notables pero castiga a los otros; mientras en la didáctica de las inmersiones totales se tiene un resultado contrario; me parece que saltos mínimos deberían permitir salvaguardar entre ambos y la fuerte estructuración didáctica podría ocurrir en aquellas situaciones difíciles en las que los niños más débiles irían ciertamente en contra de la dificultad. Los ejemplos están en estudio.

Contrato didáctico, motivación para aprender

Análisis sobre modalidad particular según la cual se presenta el "contrato didáctico" en situación no de aula escolástica, han sido repetidamente hechos, sobre todo en el ambiente "laboratorio de matemáticas". Se trata de un ambiente del todo separado del aula escolástica, con personal propio distinto del maestro ordinario, que hemos logrado alcanzar en 13 colegios de Emilia-Romagna (provincia de Bolonia y Ravena). Los niños son relativamente libres de reagruparse o individualmente o en un grupo pequeño programado; en los laboratorios, bajo la vigilancia de un "técnico" de laboratorio (preparado en un curso apropiado), los niños realizan objetos matemáticos que refuerzan competencias más o menos abstractos adquirido en clase. La motivación de aprender crece enormemente y el contrato didáctico sufre deformaciones muy interesantes que hemos estudiado ampliamente y que estamos estudiando ahora. Se registran, sin embargo, algunos casos negativos, por diversos factores.

De la postura de los profesores a las obligaciones parásitas

Las condiciones óptimas de información entre estudiantes e investigadores (por ejemplo, grupos de 10 estudiantes acompañados de 4 investigadores), hemos estudiado el comportamiento de los profesores durante la fase de resolución de los problemas-test por parte de los alumnos.

La situación es bastante compleja y muy interesante, imposible de resumir aquí, pero muy indicativa sobre:

— Aquello que sucede en clase durante la resolución del problema en condiciones normales (es decir, en la rutina normal de clase, sin los investigadores).
— Sugerencia de comportamien-tos que terminan con crear o bien aquellos resultados *Einstellung* mencionados anteriormente, o bien el surgir de "obligaciones parásitas".

Muy interesante es el sucesivo análisis hecho con los profesores (generalmente no dispuestos a admitir algunas fases evidentes en sus comportamientos). Por ejemplo, con lenguajes mímico-facial, gestual, con varios lenguajes no verbales, sustancialmente los profesores guían la resolución de un problema y el niño depende literalmente de aquellas indicaciones. Tenemos el caso de un niño iraní, desde hace poco incluido, que, no habiendo tenido condicionamientos precedentes estaba resolviendo muy bien el problema propuesto; el profesor, que no había comprendido bien el sentido de la pregunta, ha intervenido al principio con varias expresiones mímicas, y después, viendo que eso no surtía ningún efecto sobre el ignorante niño, lo ha bloqueado literalmente; sólo que, mientras imponía a los otros niños "su" interpretación (siempre sin hablar), el niño iraní, era trasladado fuera de la carencia de referencias a otra situación problemática precedente. Para ejemplificar mejor esto, el problema era el siguiente: (Ver **Figura 1** en pág. siguiente).

Se trataba, pues, sólo de una "traducción" de una situación concreta en un gráfico; pero el profesor había desarrollado un curso sobre recorridos eulerianos y por eso ha interpretado el problema en términos de "recorribilidad" (absolutamente no pedida).

En las "obligaciones parásitas", pondría además ciertos esquemas mentales que llegan a ser fijos (y forman por tanto siempre parte de una especie de efecto *Einstellung*). Por ejemplo:

Un autobús parte de la estación con 4 pasajeros.

En la primera parada desciende un pasajero y suben 6. En la parada siguiente bajan 2 pasajeros y suben 4. En la siguiente bajan 3 y suben 9. En la siguiente bajan 4 y suben 3.

La pregunta es:

¿Cuántas paradas ha hecho el autobús?

Se observan comportamientos bastante similares si el problema es propuesto oralmente, de total asombro, ¡como si la pregunta: "¿cuántos pasajeros hay ahora en el autobús?" fuese obligada y automática! Si la pregunta fuese: "Invéntate una pregunta", todos los alumnos tienden a idear preguntas del último tipo, estereotipados fuera de regla.

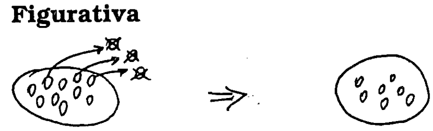
La autocámara lógica de la solución: La "traducción"

Se han hecho muchísimos estudios sobre el fenómeno de la "representación" interna y externa que el lector se hace de una situación problemática; si se pide una representación espontánea (no sólo a niños pequeños, sino también a profesores) de un clásico problema de resta:

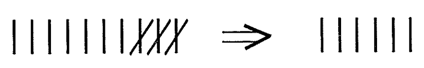
Pierino va al mercado y compra 10 huevos pero al volver a casa rompe 3; ¿cuántos huevos dará a la madre?

Se pueden tener respuestas de 3 tipos:

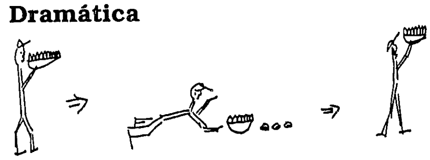
Figurativa



Esquemática



Dramática



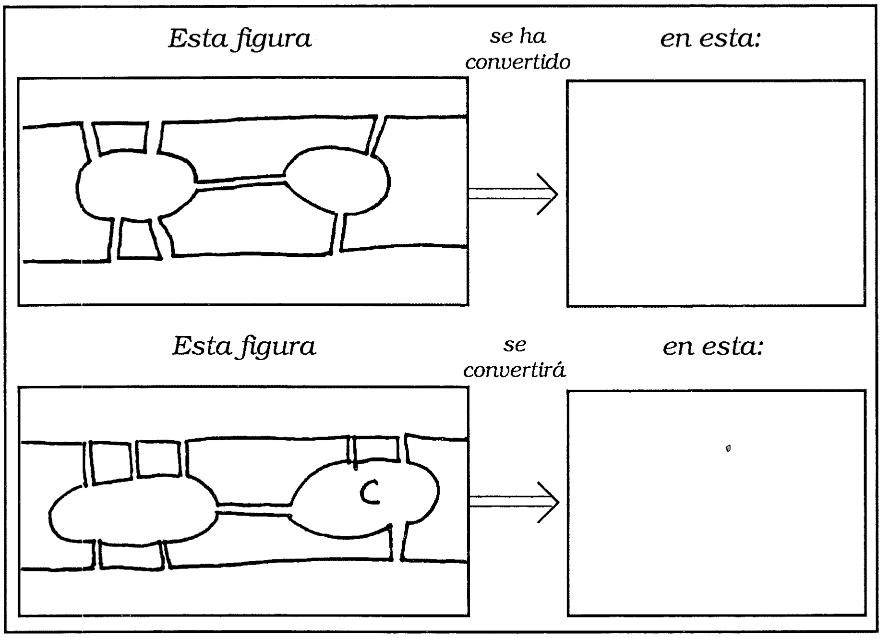


Figura 1

Aquí ha sucedido una verdadera y apropiada "traducción" de un lenguaje a otro, cuya punta de diamante está en la comprensión del lenguaje natural; en nuestro núcleo activo de reflexión sobre la lengua materna natural están quizás aquellas principales y las más sugeridas como conducción didáctica en los profesores (fin de la escuela materna, alumnos de 3-6 años, todavía en la escuela superior, alumnos de 14-19 años). Reflexionar sobre el "funcionamiento" de una lengua natural de seguridad sobre los aspectos morfológicos (que realizamos de modo explícito claro) semánticos, sintácticos.

No doy aquí indicaciones bibliográficas que son inútiles, vista la difusa atención internacional sobre este tema. Me limito a observar nuestro expediente de reflexión sobre el uso lingüístico de los términos: contenido/división que precede de una gran introducción... oficial de la división.

Consideramos los dos problemas:

— Tengo 18 botes que dividir en 3 cajas, de modo que haya el mismo número de botes en cada caja. ¿Cuántos botes debo meter en cada caja?

— Tengo 18 botes que dividir en cajas haciendo que en cada una haya 6 botes. ¿Cuántas cajas necesito?

Una interpretación gráfica oportuna muestra que los dos problemas son distintos, por tanto diré, por segunda de las direcciones que destacamos para interpretar la situación problemática, en el primer caso "vertical", en el segundo caso "horizontal".

Pero esto no impide el hecho que se trate de dos operaciones distintas sobre el plano intuitivo ingenuo. (Ver **Figura 2** en pág. siguiente).

Un estudio cerrado con los maestros muestra una mayor tranquilidad al afrontar, después, el problema de la división.

Un análisis razonado con los niños de los dos problemas contemporáneamente parece tomar todas las ansiedades en los maestros.

El texto de los problemas

Varias experiencias muestran, y el fenómeno es bien conocido en todo el mundo, que los niños tienen dificultad por varias razones, al entender el texto de los problemas. Hemos tenido experiencias sobre el tema que intentaré resumir aquí.

— Dado un texto lacónico (me gusta decir: braquilógico) lo hago leer (como texto, no como problema a resolver) y lo hago transcribir a los niños. Para obtener este resultado NO hacemos la pregunta explícita; suponemos que el problema sea resolver, pero permitimos a los niños discutir entre ellos en voz alta en la clase; registramos con extrema seguridad las observaciones de los niños sobre el texto y sus discusiones con atención; reescribimos el texto prácticamente con las mismas frases emergidas por parte de los niños. Proponemos de nuevo el texto, así logrado, a otros alumnos (de semejante edad y de la misma zona), ¡el resultado es mágico! La comprensión es total. El texto de los problemas del párrafo 2 han sido obtenidos así; se nota la sintaxis particular de esos, el gusto por las particularidades, etc. Esto debe hacer reflexionar. Otras veces hemos exigido sintetizar textos de problemas; sobre éste tenemos diferentes materiales, pero me limito a un flash: los niños tienden a no hacer uso de textos lacónicos o braquilógicos, sino a conservar cualquier cosa que recuerde una dramatización.

— Hacer construir la pregunta de un texto a los niños es hoy una práctica didáctica muy seguida, pero no lo bastante y reserva siempre sorpresas muy interesantes. Se ve como, a la idea adulta "lógica" ligada a la estructura misma del problema, el niño tiende a oponer una idea menos lógica, más cercana a los apropiados campos de experiencia. A propósito de esto, en el texto:

Antonio trabaja desde las 21 horas del martes a las 4 del miércoles. ¿Cuántas horas trabaja? Giovanni estudia desde las 21 horas del martes a las 4 del jueves. ¿Cuántas horas estudia? ¿Qué diferencia hay entre ambos problemas?

La diferencia que emerge entre los dos problemas no es aquella "lógica" expectación de los profesores, sino experimental: "Que Antonio trabaja y que Giovanni estudia" (respuesta típica de los niños, hasta 12-13 años).

La didáctica del tiempo

Parece que sobre el tiempo no se desarrollan bastante, de modo explícito, didácticas particulares, casi se aplaza de alguna manera de la experiencia extra-escolástica.

Basta decir que, todavía en nivel V elemental, muchos niños dan, en los dos problemas con los que se acaba el párrafo 7, estas 4 respuestas:

I: 7 horas - 17 horas.
II: 7 horas - 14 horas.
III: 8 horas - 18 horas.
IV: 8 horas - 16 horas.

En el caso II y en el caso IV, la presencia del miércoles es más que en el segundo problema, hace redoblar el número de horas. En los casos I, III, por el contrario, viene sumado 10 horas. En los casos III y IV, la respuesta 8 horas depende del hecho que los niños cuentan 4 horas entre las 21 y las 24, confundiendo la hora como "lapso de tiempo", la hora como "indicación horaria". Esto debe hacer reflexionar. Parece que la escuela sea el lugar apropiado para... construir una imagen racional conocedora del tiempo.

"Aparentar ser..."

Como el lector habrá notado, aquí nos interesa mucho aquello que llamamos "estrategia ingenua" en la resolución de los problemas, aunque tengamos que hacerlo con niños mayores. Obtener sin embargo un extrañamiento y una decontestualización, de modo que emerjan los verdaderos pensamientos "profundos" sobre matemáticas, no es fácil.

Hemos ideado (para el nivel medio II, alumnos de 12-13 años; para el III, alumnos de 13-14 años; para el nivel I superior, alumnos de 14-15 años), varias preguntas de este tipo. He aquí algunos ejemplos:

1. *Aparenta ser un comerciante...*

Una señora ha comprado varias cosas y ha gastado 3.700 liras; te ha dado 5.000 liras y tú le has dado el resto justo. Ella, sin embargo, protesta y dice que le tiene que devolver 1.700 liras. Tú, con calma, le explicas que tienes razón.

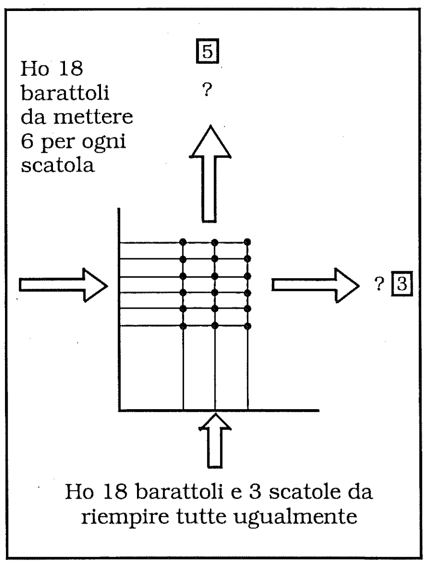


Figura 2

2. *Aparentar ser un maestro de elemental...*

Quieres explicar a tus alumnos de tercero (8 años) que el área del rectángulo se halla haciendo base por altura.

3. *Aparentar ser un geómetra...*

Esto es el plano de un pequeño apartamento que has diseñado; pero el comprador no entiende cómo hará para vivir en un apartamento tan pequeño que cabe en un folio.

Tú le explicas que esto sólo es un diseño a escala.

4. *Aparentar ser un ferroviario*

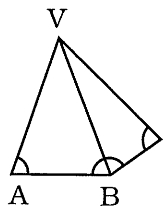
Una señora te pregunta a qué velocidad viaja cierto tren interurbano de Bolonia a Milán (220 kms.), dado que dura una hora y media. Tú le das la respuesta exacta, pero ella dice que es imposible y quiere que tú le expliques cómo has hecho las cuentas.

5. *Aparentar ser un padre...*

Tu hijo, que tiene 7 años, ha oído decir que todos los triángulos tienen 3 alturas y te pregunta: "¿Qué quiere decir?". Nada hay peor que eludir la pregunta de un niño pequeño; por lo tanto, decides responderle.

Si el muchacho está suficientemente motivado (lo que sucede bastante frecuente, contrariamente a las expectativas de algunos profesores) sus respuestas son muy significativas. De esto salen "modelos" mentales ricos e ingenuos, a menudo en puro contraste con las expectativas de los profesores, los cuales esperan establecer conceptos sobre sus profundas competencias, que... no son del todo semejantes.

Me parece que este es el punto en el que destacar otro ejemplo; al final del III nivel medio casi todos los niños saben calcular el volumen de una pirámide con estos datos:



$\overline{AB} = 6$ cm.

$\overline{AV} = 21$ cm.

Recurriendo al teorema de Pitágoras para calcular la altura. Hemos dado a los alumnos inteligentes de III nivel medio una pirámide verdadera de madera y una regla pidiéndoles que midan el volumen, buscando las medidas lineales necesarias. Entonces, casi todos los muchachos han medido el vértice de la base (se trataba de una pirámide recta regular de base cuadrada) y el vértice de los lados. ¿Fijeza funcional? *¿Einstellung?* Creo que sólo un sano extrañamiento acompañado de una sana descontextualización ayudan a crear modelos matemáticos pertinentes y significativos.

Bibliografía:

* L.S. VYGOTSKIJ. **El proceso cognitivo,** I ed. original inglesa 1978.

* L.B. RESNICK-W. W. Ford. **La sicología de las Matemáticas para la Instrucción.** L. Erlbaum Inc., Hillsdale (N.J.) 1981, capítulo 2.

* B. D'AMORE, **Estrategias ingenuas en las resoluciones de problemas como medio para la construcción de conceptos.** Garda-Verona (Italia), 11-13 abril 1991.

* P. SANDRI. **Atracción Fatal,** sobre: "La Vida Scolástica". Roma Firenze. 1 octubre 1991. Nº 3, pp. 13-17.

* Autores varios, **Progreso Ma.S.E.,** Franco Angeli ed. Milán los primeros siete volúmenes están publicados entre 1986 y 1987, los otros 3 volúmenes están previstos sobre el 1992-1993.

* D'AMORE, **El laboratorio de Matemáticas como forja de ideas y pensamientos productivos.** Cagliari, IX vol. 3 1988.

* D'AMORE, **Aprender en laboratorio** sobre: "Reforma del colegio". Roma. 11 noviembre 1990. pp. 42-43 (1ª parte).

* M.L. CALDELLI-B. D'AMORE, ***Ideas para un laboratorio de Matemáticas en la escuela obligatoria.*** La Nueva Italia, ed., Firenze 1986.

* B. D'AMORE, **Eureka!**, sobre: "La vida Escolástica". Roma-Firenze, 1 octubre 1991, nº 3. pp. 8-12.

* B. D'AMORE, **Didáctica de las matemáticas en la escuela media obligatoria.**

* B. D'AMORE-P. SANDRI, **Problemas geométricos en la práctica educativa.**

* B. D'AMORE, **Problemas**, título provisional, de próxima publicación.

* B. D'AMORE, **Estilos diferentes de aprender por la educación matemática.**

Bruno D'Amore
Profesor de Lógica Matemática, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bolonia.

Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas

Vicenç Font

En la primera parte de este artículo se reflexiona sobre la importancia de la falta de motivación como una de las causas más importantes para explicar las dificultades de aprendizaje en matemáticas, así como sobre los diferentes factores (atribuciones, autoconcepto, metas, etc.) que están relacionados con el patrón motivacional de los alumnos. En la segunda parte se remarca la importancia de actuar preventivamente para evitar el patrón motivacional que presentan algunos alumnos de 12 años que justifican sus fracasos a partir de explicaciones del tipo: «no sirvo para las matemáticas, etc.». Por último se comenta un instrumento para evaluar el problema: las escalas de actitudes.

El constructivismo acepta que el objetivo de la intervención escolar es la modificación de los esquemas de conocimiento del alumno de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget. O sea, considera que el primer paso para conseguir que el alumno realice un aprendizaje significativo consiste en que el nuevo contenido de aprendizaje rompa el equilibrio inicial de sus esquemas. (Coll 1989, pp. 20-21). La explicación que da esta concepción a las dificultades de aprendizaje es la siguiente: frente a una tarea que provoca una situación de desequilibrio básicamente puede suceder:

a) Que la situación propuesta sea confusa o poco coherente y que, por tanto, no sea potencialmente significativa. En este caso es el profesor el que tiene la posibilidad de resolver la dificultad presentando la situación de una manera que sea más clara y coherente.
b) Que el alumno no tenga los conocimientos necesarios para volver a la situación de equilibrio. La solución en este caso pasa por fijar la distancia óptima entre lo que sabe el alumno y el nuevo contenido; es decir, se ha de hacer una adaptación del nuevo contenido a lo que ya sabe el alumno.
c) Que el alumno no esté motivado para realizar la actividad propuesta, con lo que puede pasar que ni siquiera se produzca la situación de desequilibrio porque la tarea que le proponemos le resulte ajena o bien no le encuentre sentido. En este caso lo que el profesor ha de procurar es motivar al alumno.
d) Que las concepciones intuitivas sobre el nuevo contenido y las estrategias desarrolladas no permitan volver a la situación de equilibrio. En este caso será necesaria la ayuda del profesor para que el alumno vaya variando sus estrategias.

Motivación

De las causas anteriores cada vez más se va considerando la motivación como una de las más importantes, y cualquier análisis de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas ha de tener muy en cuenta esta causa.

El constructivismo, de acuerdo con Ausubel, considera que una de las condiciones indispensables para que sea posible el aprendizaje significativo es que el alumno manifieste una disposición para aprender el nuevo contenido y que dicha disposición, de acuerdo con Entwistle[1] (1988), se manifieste en una manera profunda de encarar la tarea. Es decir: que la intención del alumno sea fundamentalmente comprender aquello que estudia, y que para conseguir este objetivo busque relacionar el nuevo contenido con aquello que sabe, perseverando en este intento hasta conseguir un determinado tipo de comprensión. Esta manera de encarar la tarea se contrapone al enfoque superficial en que la intención básica es cumplir lo que nos piden para poder contestar las preguntas del profesor.

Una de las cuestiones importantes es saber qué tipo de organización (de centro, de área, de aula), qué tipo de contenidos, qué tipo de metodología y qué tipo de evaluación hacen que los alumnos apliquen un tipo de enfoque u otro. Ahora bien, aunque las condiciones objetivas en que se realicen la enseñanza-aprendizaje faciliten un enfoque profundo, nos podemos encontrar con que el alumno adopte un enfoque superficial porque su motivación no sea intrínseca sino extrínseca. La motivación, es decir, la intención con que el alumno se enfrenta a la tarea propuesta determina, tanto o más que las condiciones objetivas, el tipo de enfoque que se utilizará.

La aportación que haga el alumno al acto de aprender dependerá del sentido que encuentre a la situación de aprendizaje-enseñanza propuesta. Para que una situación tenga sentido se han de cumplir como mínimo tres condiciones: 1) que el alumno tenga claro el objetivo que se quiere conseguir con la actividad propuesta y las condiciones en que se ha de realizar, 2) no basta que los alumnos conozcan los objetivos y las condiciones de realización, sino que es necesario que los hagan suyos, que participen activamente en su planificación, etc. y 3) que el alumno se considere con los recursos suficientes para que el esfuerzo que ha de realizar sea provechoso. Dicho de otra manera, la actitud frente a un nuevo aprendizaje vendría determinada por unas variables que dependen de la personalidad del alumno -que están determinadas por el entorno familiar, la edad, el sexo, las experiencias escolares anteriores, etc. –y unas variables que dependen de la situación propuesta– tipo de organización (de centro, de área, de aula), tipo de contenidos, tipo de metodología, tipo de evaluación, etc.

El abanico de posibilidades en la manera de hacer frente a las actividades de aprendizaje irían desde el alumno que se enfrenta a las actividades de aprendizaje con un enfoque profundo, hasta el alumno para el cual la escuela es una carga de la que quiere librarse, pasando por los que se enfrentan a les tareas con un enfoque superficial.

Motivación, atribuciones y autoconcepto

Las explicaciones que una persona se da a si misma de sus éxitos y de sus fracasos escolares influyen en la actitud que tendrá ante nuevas situaciones de aprendizaje. En efecto, frente a resultados inesperados, negativos o de gran importancia para nosotros, solemos preguntarnos cuáles son las causas que los explican. Las causas a las cuales atribuimos los resultados tienen mucha influencia en el momento de afrontar nuevas situaciones, por ejemplo, si atribuimos a la suerte el aprobado en un examen, o bien consideramos que hemos aprobado gracias al esfuerzo que hemos realizado, es evidente que esta atribución influirá en la manera de afrontar un nuevo examen.

Las causas a las cuales atribuimos los resultados pueden ser internas (habilidad, esfuerzo, cansancio, etc.) o bien externas (suerte, tiempo, profesor, etc.). Pueden ser percibidas como estables (habilidad) o variables (esfuerzo), controlables o incontrolables; por ejemplo, el factor suerte es incontrolable, mientras que el esfuerzo se puede controlar. El tipo de atribuciones más perjudicial es aquel en que los éxitos se atribuyen a causas externas, variables y no controlables, mientras que los fracasos se atribuyen a causas internas estables no controlables. Este patrón de atribuciones es muy normal en matemáticas porque la explicación que dan muchos alumnos a sus resultados a partir de los 11-12 años es el siguiente: «es que yo no sirvo para las matemáticas». Más importante que la explicación de los resultados obtenidos son las causas que el alumno considera que influirán en los resultados de los nuevos aprendizajes. El tipo de causas que considere, influirán en la manera de afrontar la nueva situación y en el esfuerzo que le dedicará.

El patrón de atribuciones influye sobre el autoconcepto[2], y a la vez es su consecuencia. En efecto, un alumno que esté acostumbrado a obtener resultados positivos tiene más tendencia a atribuirlos a su capacidad y esfuerzo, lo cual refuerza su autoestima y le genera unas expectativas positivas en el momento de hacer nuevos aprendizajes; y si éstos son negativos, antes de dudar de su capacidad, tenderá a considerar que la causa del resultado negativo es un esfuerzo insuficiente. Por otra parte, un alumno que tenga una experiencia repetida de resultados negativos, acabará atribuyendo este hecho a su falta de capacidad, lo cual refuerza una autoestima negativa y genera unas expectativas de fracaso ante nuevos aprendizajes, y si éstos son positivos tenderá a atribuir el éxito a causas externas no controlables como la suerte, benevolencia del profesor, etc.

Motivación y tipo de metas

Una de las causas que influyen en la manera de afrontar las situaciones escolares es el tipo de meta que el alumno persiga en su actividad escolar. Hay una importante tradición psicológica que interpreta la conducta motivada como una actividad orientada hacia una meta; desde este punto de vista, cualquier tipo específico de motivación viene definido por la presencia de una actividad orientada hacia una clase particular de metas. En (Tapia 1992) podemos encontrar la siguiente clasificación de estas metas:

> «*A) Metas relacionadas con la tarea*
> *...a) Experimentar que se ha aprendido algo o que se va consiguiendo mejorar y consolidar destrezas previas, esto es, el deseo de incrementar la propia competencia. Se supone que cuando el sujeto aprende algo –nuevos conocimientos, nuevas destrezas–, se produce una respuesta emocional de carácter gratificante ligada a la percepción de competencia.*
> *b) Experimentarse absorbido por la naturaleza de la tarea, superando el aburrimiento y la ansiedad, por lo que aquélla tiene de novedoso y revelador sobre algún aspecto de la realidad o sobre uno mismo...*
>
> *B) Metas relacionadas con la libertad de elección*
> *...un factor que determina en gran medida la implicación de los alumnos en una tarea es la experiencia de que se está haciendo la tarea que se desea hacer; de que se hace algo no porque otro lo quiera, para su interés, sino porque uno lo ha elegido. Esto es, la experiencia de que la tarea es «mi tarea». La experiencia emocional que produce la percepción más o menos consciente de este hecho es gratificante, así como es aversiva la que produce el hecho de hacer algo obligado.*
>
> *C) Metas relacionadas con el «yo»*
> *...a) Experimentar que se es mejor que otros o, al menos, que no se es peor que los demás. Equivale,..., a experimentar el orgullo que sigue al éxito, tanto en situaciones competitivas como no competitivas.*
> *b) No experimentar que se es peor que otros. Equivale, paralelamente, a evitar la experiencia de vergüenza o humillación que acompaña al fracaso...*
>
> *D) Metas relacionadas con la valoración social*
> *...a) La experiencia de aprobación de los padres, profesores u otros adultos importantes para el alumno y la evitación de la experiencia opuesta de rechazo.*
> *b) La experiencia de aprobación de los propios compañeros y la evitación de la correspondiente experiencia de rechazo...*
>
> *E) Metas relacionadas con consecución de recompensas externas*
> *...–ganar dinero, conseguir premios, etc..–...* (Tapia 1992, pp. 19-20).

Según Tapia, las metas características de los adolescentes serían: «*las metas relacionadas con la autovaloración -el deseo de éxito y el deseo de evitar el fracaso-, a la búsqueda de autonomía y control de la propia vida y a la búsqueda de ciertas metas externas- afiliación, empleo, pareja, dinero, etc.*

Además de estas metas, hay otras que, aunque no son típicas de esta edad, se hallan claramente presentes: la búsqueda de la aceptación de los compañeros y, al menos en un grupo importante de adolescentes, conseguir incrementar la propia competencia, motivo que suele ir unido al deseo de experimentar la propia competencia en la tarea, deseo que caracteriza la motivación intrínseca.

El resto de metas descritas, aunque pueden darse a esta edad, no son especialmente relevantes» (Tapia 1992, p.44).

Sobre la repercusión que tienen estas metas sobre la actividad escolar de los alumnos, este autor (Tapia 1992, p. 45) considera que las que parecen influir más positivamente son aquellas relacionadas con el aprendizaje de la tarea propuesta (aumentar la propia competencia, etc.), más que las relacionadas con la autovaloración.

Prevención del problema

El objetivo de este artículo no es tratar exhaustivamente todos los factores que inciden sobre la motivación de los alumnos. Lo que se pretende aquí, es considerar algunos aspectos que permitan dar elementos para analizar las dificultades de aprendizaje de contenidos matemáticos debidas a la falta de motivación de los alumnos. La primera conclusión es que, si se quiere romper el círculo vicioso: «falta de motivación implica fracaso escolar, y a la vez, la sensación repetida de fracaso escolar lleva a una falta de motivación», lo que hemos de hacer es actuar ya desde la educación infantil para evitar que aparezca este patrón de falta de motivación. Dicha actuación debe ser enfocada en dos direcciones: a) asegurar que el alumno realice un aprendizaje significativo y adquiera los conocimientos previos necesarios para afrontar los nuevos conocimientos (informaciones, procedimientos, habilidades, etc.) con el fin de que no sea el problema cognitivo la causa del problema motivacional b) incorporar como contenidos curriculares contenidos de actitudes, valores y normas, con el objetivo de que el alumno tenga una actitud frente a los nuevos contenidos que le permita adoptar un enfoque profundo.

Es conveniente, ya desde la educación infantil, proponerse una acción preventiva que pase por trabajar, entre otros, los siguientes contenidos referidos a actitudes: *«1) Interés en la utilización del lenguaje y de los procedimientos matemáticos. 2) Descubrimiento y valoración del propio esfuerzo para llegar a resolver una situación matemática. 3) Valoración del propio trabajo»*; con los siguientes objetivos referenciales para estos contenidos de actitud:

1) *– Descubrir las aplicaciones de la matemática en la realidad cotidiana...*

   – Participar de forma activa en las experiencias.

2) *– Ser conscientes de las dificultades que a veces plantea la resolución matemática.*

   – Deleitarse con las propias conquistas en la captación de soluciones matemáticas.

3) *– Iniciar una valoración adecuada del resultado del propio trabajo»* (Currículum Educación Infantil p. 157).

Si además continuamos trabajando en la misma dirección durante la primaria, podemos orientar a los alumnos hacia metas de aprendizaje más que hacia metas de autovaloración, y así conseguir que muchos alumnos de 12 años empiecen la secundaria obligatoria con la actitud de atribuir sus éxitos y fracasos a causas internas, modificables y controlables. Ésta seria la manera de evitar el patrón motivacional negativo que adquieren algunos alumnos que comienzan a tener dificultades con la resta en segundo de primaria y llegan a los 11-12 años con la siguiente explicación sobre los resultados que obtienen: «es que yo no sirvo para las matemáticas». De hecho, el objetivo de evitar la falta de motivación ya sería suficiente argumento para justificar la incorporación de las actitudes como contenido curricular.

El hecho de actuar preventivamente para evitar que la causa de la falta de motivación de muchos alumnos no sea un déficit de contenidos que se ha gestado en los cursos anteriores, no nos ha de hacer creer que la falta de motivación sólo esta relacionada con cuestiones cognitivas, porque, en muchos casos, la falta de motivación tiene relación directa con cuestiones afectivas e inconscientes.

Creencias relacionadas con las matemáticas

Muchas veces la manera de enseñar las matemáticas es la causa principal de que muchos alumnos de 11-12 años justifiquen sus fracasos en matemáticas con frases como: «no sirvo, soy inútil, etc.». En efecto, si se enseña matemáticas asignando una importancia fundamental a la memorización de conceptos y técnicas, sin preocuparse de que el alumno comprenda las estructuras que justifican estas reglas, se fomenta una visión de las matemáticas de tipo mecánico; es decir, el alumno considera que aquello que es esencial en las matemáticas es la utilización mecánica de una serie de procedimientos algorítmicos, ejecutados con una cierta rapidez. Esta visión de las matemáticas puede producir entre otras las siguientes creencias:

– La incapacidad para aprender datos o procedimientos con rapidez es señal de inferioridad en cuanto a inteligencia y carácter.

– La incapacidad para responder con rapidez o emplear un procedimiento con eficacia indica «lentitud».

– La incapacidad para responder correctamente indica una deficiencia mental.

– Una incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta.

– Todos los problemas deben tener una respuesta correcta.
– Sólo hay una manera (correcta) de resolver un problema.
– Las respuestas inexactas (por ejemplo las estimaciones) y los procedimientos inexactos (por ejemplo, resolver problemas por ensayo y error) son inadecuados.
– Comprender las matemáticas es algo que sólo está al alcance de los genios.
– Las matemáticas no tienen por qué tener sentido. (Barody 1988, pp. 77-78).

En función de si el alumno tinene un patrón motivacional positivo o negativo, su actitud hacia las actividades matemáticas será diferente. Si el patrón es positivo, el alumno, frente a una dificultad reaccionará analizándola, buscará una nueva estrategia, preguntará al profesor, etc.; es decir, vivirá la dificultad sin demasiada ansiedad ni angustia y se centrará en la manera de resolver la dificultad pidiendo la ayuda que considere necesaria. Si el alumno presenta un patrón motivacional negativo, frente a una dificultad, aumentará su ansiedad y hasta se angustiará pensando que la causa de la dificultad es su incapacidad y, por tanto, adoptará una actitud defensiva, como por ejemplo: no hacer nada, no preguntar porque solamente preguntan los tontos, intentará copiar la respuesta, etc. Las actitudes defensivas presentan la ventaja inmediata de disminuir la ansiedad, pero a la larga resultan muy perjudiciales porque evitan la posibilidad de efectuar un aprendizaje significativo. Por ejemplo, en Barody (1988) podemos encontrar las ventajas inmediatas y las desventajas a medio plazo de las siguientes estrategias de protección relacionadas con la creencia de que los alumnos listos siempre responden correctamente, mientras que hacerlo incorrectamente es de tontos:

– ***No comprobar:*** *La ilusión de perfección puede mantenerse, pero las imperfecciones no se descubren ni se corrigen.*
– ***Indecisión:*** *La verdadera capacidad no puede evaluarse adecuadamente si el trabajo se hace a toda prisa y en el último minuto y se resiente la calidad del trabajo.*
– ***Disimular (por ejemplo: murmurar):*** *Hace ver que se sabe mucho para mantener las apariencias externas, por se sigue necesitando ayuda.*
– ***No hacer nada:*** *Puede mantenerse la ilusión de la aptitud ya que esta nunca se comprueba, pero el fracaso está garantizado»*

Este autor comenta también las ventajas inmediatas y las desventajas a medio plazo de las siguientes estrategias de protección relacionadas con la creencia de que los alumnos listos responden con rapidez:

– ***Responder impulsivamente:*** *Dar la primera respuesta que viene al pensamiento ayuda a mantener las apariencias pero casi siempre es errónea.*
– ***Disimular*** *(por ejemplo: aun cuando no se conozca la respuesta, levantar la mano cuando pregunta el maestro)».* (Barody 1988, p. 80).

El patrón motivacional puede llegar a ser tan negativo que, en algunos casos, puede provocar una situación de angustia tal que los alumnos ni tan siqquiera intenten hacer nada frente a un nuevo aprendizaje. O sea, su nivel de ansiedad es tan grande que la única estrategia defensiva que pueden utilizar es no hacer nada, porque están convencidos de que cualquier cosa que hagan estará mal. El hecho de darse por vencidos de entrada les provoca una nueva frustración que refuerza su patrón motivacional. En definitiva, este tipo de alumnos queda atrapado dentro de un círculo que se autoalimenta, es decir: el patrón motivacional negativo provoca ansiedad, dicha ansiedad es la causa de la conducta de protección, que a su vez le lleva a un nuevo fracaso que alimenta y refuerza su patrón motivacional, y así sucesivamente. En Barody (1988) hay un ejemplo de cómo un aprendizaje significativo puede ser la vía para solucionar los patrones motivacionales negativos, causados por una visión de las matemáticas que considera que lo esencial en las matemáticas es la utilización mecánica de una serie de procedimientos algorítmicos, ejecutados con una cierta rapidez. Se trata del caso de un chico de 12 años, de cuya historia reproducimos algunos párrafos, ya que pueden servir para ilustrar hasta dónde puede llegar el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de algunos padres y alumnos:

«Una mujer imploraba desesperadamente al otro lado del teléfono: «Tememos que nuestro hijo de doce años esté incapacitado para el aprendizaje, que tenga algo en el cerebro.

No puede aprender matemáticas. ¿Querría Vd. examinarlo para ver si se puede hacer algo?».

Después de que Mark entrara con mucha vergüenza en mi despacho, sus primeras palabras revelaron su temor: «¡Así que ahora va Vd. a descubrir lo tonto que soy!» Le expliqué que el propósito de la reunión era descubrir qué sabía y qué no sabía de las matemáticas para que sus padres y sus maestros pudieran ayudarle mejor.(..) (Barody 1988, pp. 75-76).

Instrumentos para detectar y evaluar las actitudes hacia las matemáticas: Las escalas de actitudes

Existen diferentes tipos de instrumentos de medida para evaluar las actitudes[3] de las personas hacia las matemáticas. Ahora bien, la mayoría no han sido fiabilizadas ni validadas con estudiantes del estado español, si exceptuamos la escala de actitudes hacia las matemáticas de J. Gairin y las escalas de actitudes hacia las matemáticas y hacia la estadística de E. Auzmendi. La escala de actitudes de J. Gairin (1987), son dos instrumentos, uno verbal y otro gráfico, que están pensados para evaluar las actitudes que tienen hacia las matemáticas los estudiantes del ciclo superior de EGB. En Gairin (1987) hay una explicación detallada sobre su elaboración y utilización. La escala de actitudes hacia las matemáticas de E. Auzmendi está pensada para evaluar las actitudes que presentan hacia las matemáticas los alumnos de secundaria y primeros cursos de universidad. Consta de 25 items que pretenden evaluar cinco factores: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza. En Auzmendi (1992) podemos encontrar una explicación detallada de su elaboración y utilización, así como otra escala de actitudes pensada para valorar las actitudes de los alumnos hacia la estadística.

Instrumentos para facilitar un cambio motivacional

Si bien la mejor solución es actuar preventivamente para evitar el problema de la falta de motivación, en muchos casos no ha sido posible y el problema ha aparecido. En este caso la solución es más difícil y pasa por adoptar estrategias que permitan conseguir un cambio motivacional. La extensión de este articulo no permite entrar en el tema de las estrategias que ayudan al cambio motivacional por lo que nos limitaremos a sugerir la lectura de la tercera parte del libro «Motivar en la Adolescencia: Teoría, Evaluación e Intervención» (Tapia 1992) dónde se analiza en profundidad el tema.

Vicenç Font Moll
Departament de Didáctica de las CCEE y de la Matemática de la Universidad de Barcelona.

Notas:

Entwistle resume las diferencias entre estos dos enfoques de la manera siguiente:

Enfoque profundo: *Intención de comprender, fuerte interacción con el contenido; relación de nuevas ideas con el conocimiento anterior; relación de conceptos con la experiencia cotidiana; relación de datos con conclusiones; examen de la lógica de los argumentos.*

Enfoque superficial: *Intención de cumplir los requisitos de la tarea; memoriza la información necesaria para pruebas o exámenes; encara la tarea como imposición externa; ausencia de reflexión acerca de propósitos o estrategia; foco en elementos sueltos sin integración: no distingue principios a partir de ejemplos.* (Entwistle, 1988, p.67).

2.- Por autoconcepto entenderemos, de acuerdo con I. Solé, lo siguiente: *«El autoconcepto (Fierro 1990) incluye un conjunto amplio de representaciones (imágenes, juicios, conceptos) que las personas tenemos acerca de nosotros mismas, y que engloban aspectos corporales, psicológicos, sociales, morales y otros. Puede referirse al individuo globalmente entendido o bien a alguna dimensión o aspecto concreto. El autoconcepto se refiere al conocimiento de uno mismo, e incluye juicios valorativos, lo que se denomina autoestima».* (Solé 1993, p.33).

3.- Por actitudes entenderemos sentimientos o creencias que tiene una persona sobre las matemáticas.

4.- Para ilustrar el tipo de items que se utilizan en las escalas de actitudes reproducimos a continuación los 25 items de la escala de actitudes hacia las matemáticas de E. Auzmendi. El alumno ha de contestar a cada uno de los items escogiendo una respuesta entre: 1) Totalmente en desacuerdo, 2) En desacuerdo, 3) Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo, 4) De acuerdo y 5) Totalmente de acuerdo:

«1. Considero las Matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.

2. La asignatura de Matemáticas se me da bastante mal.

3. Estudiar o trabajar con las Matemáticas no me asusta en absoluto.

4. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí.

5. La Matemática es demasiado teórica para que pueda servirme de algo.

6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las Matemáticas.

7. Las Matemáticas es una de las asignaturas que más temo.

8. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de Matemáticas.

9. Me divierte el hablar con otros de Matemáticas.

10. Las Matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de «ciencias», pero no para el resto de los estudiantes.

11. Tener buenos conocimientos de Matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.

12. Cuando me enfrento a un problema de Matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad.

13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de Matemáticas.

14. Las Matemáticas son agradables y estimulantes para mí.

15. Espero tener que utilizar poco las Matemáticas en mi vida profesional.

16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las Matemáticas para mi futura profesión.

17. Trabajar con las Matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a.

18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de Matemáticas.

19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las Matemáticas.

20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de Matemáticas.

21. Para mi futuro profesional la Matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.

22. Las Matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.

23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las Matemáticas.

24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de Matemáticas de los que son obligatorios.

25. La materia que se imparte en las clases de Matemáticas es ***muy poco*** *interesante».*

Bibliografía

* AUZMENDI, E., 1992. ***Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias.*** (Mensajero: Bilbao).

* BARODY, A.J., 1988. **El pensamiento matemático de los niños.** (Visor/ MEC: Madrid).

* COLL, C., 1989. **Marc curricular por a l'ensenyament obligatori.** (Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament: Barcelona).

* ENTWISTLE, N., 1988. **La comprensión del aprendizaje en el aula.** (Paidós/ MEC: Madrid).

* GAIRÍN, J., 1987. **Las actitudes en educación: un estudio sobre educación matemática.** (PPU: Barcelona).

* SERVEI D'ORDENACIÓ CURRICULAR, 1993. **Currículum Educació Infantil.** (Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament: Barcelona).

* SOLÉ, I., 1993. Disponibilidad para el aprendizaje y sentido del aprendizaje, en **El constructivismo en el aula**, Coll C., Martín T., Miras M., Onrubia J., Solé I., Zabala A., (eds.). (Graó: Barcelona).

* TAPIA, J.A., 1992. **Motivar en la Adolescencia: Teoría, Evaluación e Intervención.** (Universidad Autónoma de Madrid: Madrid).

Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis

Carlos Maza Gómez

Relacionar la enseñanza de las Matemáticas con la historia de esta ciencia requiere analizar los elementos de cada una, los factores intervinientes en esta relación. Este artículo propone un análisis de dichos elementos, desde lo que supone "historizar" la Matemática hasta enseñarla desde un enfoque histórico.

De manera esporádica pero continua surgen en revistas, congresos y cursos de reciclaje diversas intervenciones sobre la conveniencia para el matemático y, más particularmente, para el profesor de Matemáticas, de conocer la historia de esta ciencia y su aplicación en el aula.

Estas intervenciones, sin embargo, no suelen formar parte de un marco de trabajo que aporte unos fundamentos explícitos. Quiero decir con ello que aparecen diversas ideas sobre cómo aplicar algunos problemas históricos en clases de bachillerato, o una discusión sobre qué objetivos cumple la Historia de la Matemática en el currículum de esta materia según qué nivel de enseñanza, o bien se habla de los posibles enfoques de la Historia de la Matemática..., pero no se ve clara qué relación tiene una cosa con la otra, cuál es el problema que estamos tratando en cada momento, en qué medida una toma de postura en un aspecto condiciona las preguntas que podamos formular y las respuestas que les demos.

Por ello conviene ir avanzando un análisis de las relaciones entre la Historia de la Matemática y su enseñanza, a partir del cual podamos comentar con mayor detalle algunos de sus elementos.

Un análisis general

Los profesores de Matemáticas provienen de las licenciaturas de esta Ciencia. Durante su estancia en los estudios superiores, como alumnos de la Facultad correspondiente, hacen Matemáticas en sus variedades de reproducción y reconstrucción.

Algunos de estos profesores, sea por lecturas personales o asistencias a congresos y reuniones, deciden en determinado momento «historizar» la Matemática, estudiar la ciencia que conocen bajo un distinto enfoque: Como proceso histórico y no sólo como proceso lógico o como producto acabado.

Esta decisión no es inmediata ni explícita en la mayoría de los casos, sino que se produce un acercamiento a la historia de la Matemática marcado por la ignorancia siempre, el rechazo, la incomprensión o la curiosidad y el interés. El más serio obstáculo con el que se enfrenta es la ignorancia: Las facultades de Matemáticas no imparten tales conocimientos. ¿Por qué sucede esto?. Obviamente, porque a nivel académico no se considera un conocimiento de interés para el matemático. Como luego comentaremos, en la base de esta postura académica reside la propia concepción que tiene el matemático sobre la naturaleza de las Matemáticas. (Ver **Figura 1** en pág. siguiente).

La Historia de la Matemática sólo se puede hacer y entender incardinada en el desarrollo general de la ciencia que, a su vez, aparece inmersa en la historia de la cultura humana como uno de sus productos más refinados. El grado y la calidad que estas «inmersiones» puedan alcanzar dependen de las creencias y conocimientos previos que tenga el historiador de la Matemática.

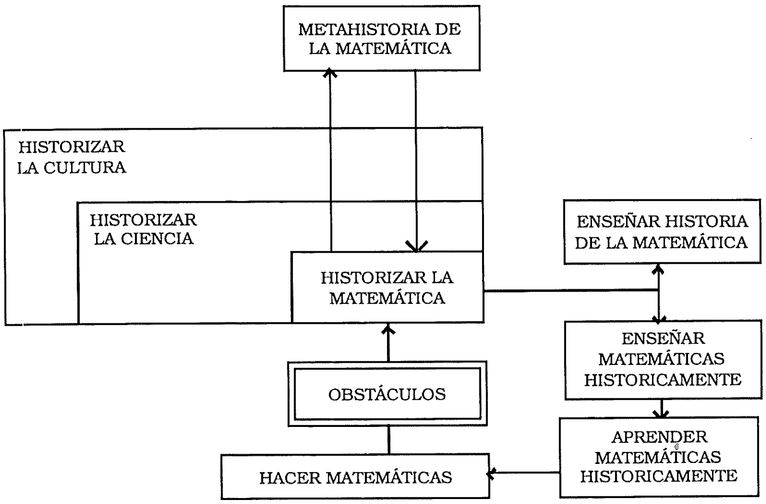


Figura 1

Si un estudioso pretende que la Matemática es la base de las demás ciencias y tiene un desarrollo autónomo tomará una postura radicalmente diferente de aquél que defiende que la Matemática es una ciencia dependiente de fuerzas económicas y sociales.

Todo ello es objeto, a su vez, de estudio por parte de la «metahistoria» de la Matemática, dedicada al examen de la propia historia de la Matemática e intentando responder a la pregunta: ¿Cómo hacer historia de la Matemática?

Hasta ahora nos hemos movido solamente en la relación entre el matemático (sea profesor o no) y la propia Matemática. A partir de este momento hay que abarcar otra relación muy distinta: La del matemático con la Matemática, con su historia y, simultáneamente, con los alumnos y el entorno escolar en forma de currículum.

El profesor puede ser considerado historiador o no. Puede hacer de la historia un objeto de estudio o puede tomar sus resultados para aplicarlos a la enseñanza sin más. Esta distinción no es de interés en nuestro análisis salvo por un motivo: Conviene distinguir lo que es enseñar Historia de la Matemática (y para ello ser historiador es imprescindible en el sentido arriba indicado) o enseñar Matemáticas históricamente (por ejemplo, lo que puede hacer un profesor en el bachillerato).

Si hay un proceso de transposición didáctica entre el saber matemático institucionalizado y el saber enseñado por el cual el profesor selecciona y transforma desde la Matemática aquello que quiere enseñar, lo mismo sucede en este caso. El profesor también ejerce sobre la historia de la Matemática una transposición que le permite seleccionar qué recursos históricos (en forma de biografías, anécdotas, planteamiento de problemas históricos o demás) va a utilizar con sus alumnos.

Por último habrá que considerar en este análisis preliminar que un paso distinto consiste en trasladar este saber enseñado a saber aprendido. En suma, se trata de responder a las preguntas: ¿cómo se aprenden las Matemáticas históricamente? ¿Supone una ventaja respecto al aprendizaje tradicional? ¿Tiene inconvenientes? ¿Qué aspectos diferenciales presenta?

Obstáculos para el conocimiento de la Historia de la Matemática

Hemos hablado de algunos obstáculos fundamentalmente académicos, como es el caso de la ausencia de la Historia de la Matemática en las aulas universitarias, la falta de cátedras e incluso del área de conocimiento como tal. En último término, todas estas manifestaciones de tipo académico y, por tanto, ausencias en la formación del futuro profesor, se cifran en una sola causa: La concepción que tiene el matemático sobre la naturaleza de su propio saber.

Se ha afirmado que: «Las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las Matemáticas sean, en un alto grado, negadoras de su propia historia» [1].

Una de las características básicas de la Matemática es su capacidad de generalización. Ello se puede apreciar en toda esta ciencia de la que vamos a escoger el tema de la numeración. Inicialmente, se construyeron y utilizaron los números naturales (en Mesopotamia y Egipto ya aparecen sus símbolos) y poco después las fracciones. Los números negativos se fueron formulando en los siglos del Renacimiento y si su admisión dentro de la Matemática encontró serios obstáculos conceptuales, el problema fue mucho mayor entre los complejos. La formalización de los números reales, como es sabido, data del siglo XIX, expresándose dentro del propio siglo a través del lenguaje de la Teoría de Conjuntos de Cantor.

Pues bien, estos distintos tipos de números aparecen hoy englobados en una sucesión encajada de conjuntos numéricos en un lenguaje que, históricamente, ha sido el último en producirse; en un orden que también trastorna el orden histórico de adquisición (los enteros son posteriores a las fracciones y, sin embargo, los números racionales se enseñan después de los enteros). En resumen, se impone la lógica de la generalización matemática y un estilo deductivista que oculta el proceso de construcción original de la Matemática.

«Las Matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario (...) El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada» [2].

Asociada a esta concepción de la Matemática se encuentra una imagen que los matemáticos tienen de su propia ciencia: Es un edificio, un templo, lo que conlleva en general una visión optimista sobre el futuro de la Matemática y la seguridad que implica. Así afirma hace casi doscientos años un importante historiador de la Matemática:

«Problemas rebeldes o extraños a los antiguos métodos se someten sin resistencia al nuevo análisis. La generalidad y uniformidad de los medios reúnen bajo un mismo punto de vista teorías que parecían aisladas e independientes unas de otras. Un edificio regular y magnífico se eleva sobre una base sólida, manteniendo todas las partes en una justa proporción y un perfecto equilibrio» [3].

O de forma más reciente:

«Las Matemáticas constituyen una construcción ciclópea, tan vasta y tan viva que espanta el solo pensamiento de abarcarla y tener que dominar esta arquitectura desmesurada. Es al esbozo, ya que no a la descripción, de este templo de las Matemáticas que hemos consagrado...» [4].

La actitud de admiración, la creencia en una obra vasta e inabarcable no es general puesto que otros matemáticos piensan también en el edificio matemático pero reconstruído constantemente lo que niega aún más, si cabe, la historia de su hacer:

«El desarrollo de la Matemática no es comparable a la formación de un montón de piedras, al que cada generación aporta la suya, sino que cada época reconstruye el edificio con arreglo a planos y cimientos nuevos. La nuestra, rica en nuevos materiales, edifica activamente...» [5].

La magnificencia de un edificio, de un templo, invita a la admiración o a la reverencia pero no a la comprensión del proceso por el que fue construído. Si a eso se añade que dicho edificio es reconstruído en cada época desde sus cimientos, el olvido de sus antecedentes históricos, los que hicieron el resultado así y no de otro modo, está asegurado. Sin embargo, esta imagen puede tener los cimientos sobre arena como nos revela una opinión muy diferente:

«El problema actual de las Matemáticas es que no hay una sino muchas matemáticas y que, por numerosas razones, cada una de ellas deja insatisfechos a los miembros de las escuelas opuestas. Es ahora evidente que la idea de un cuerpo de razonamiento infalible y universalmente aceptado –las majestuosas Matemáticas de 1800, orgullo del hombre– es una completa ilusión. La incertidumbre y la duda acerca del futuro de las Matemáticas han sustituído a la certeza y la complacencia del pasado» [6].

A partir de esta concepción sobre la naturaleza de la Matemática, surgen una creencia y una actitud determinadas:

* La creencia en una Matemática independiente de factores históricos (de algún modo, «ahistórica») como las ideologías, las necesidades sociales, económicas, actitudes religiosas en determinados períodos, etc.

En algunos casos se llega al extremo de defender su independencia respecto al desarrollo general de la Ciencia de forma que son otros conocimientos (como la Física, la Economía, Ingenierías, etc.) los que descansan sobre la construcción de la Matemática.

Esta creencia parte de una visión neoplatónica de la Matemática lo mismo que la contraria (el desarrollo de la Matemática depende del desarrollo económico, ideológico, etc) parte de un enfoque fundamentalmente marxista. Ambos son aspectos complementarios y tratan de forma polarizada la compleja relación entre Matemática y realidad, difícilmente reducible a ninguno de los dos enfoques.

* La actitud de los matemáticos que no sólo separan el hacer Matemáticas de su historia sino que consideran a ésta última un saber inútil y obstaculizador.

Matemáticas y realidad: Una compleja relación

Hay muchos datos históricos que avalarían una dependencia de la Matemática respecto de otras necesidades científicas y éstas, en último término, dependiendo de las necesidades económicas o sociales, culturales en sentido amplio. Basta recordar ejemplos como la interrelación entre Matemáticas y Astronomía a lo largo de los siglos XVII y XVIII, una de las fuentes del Cálculo. O la construcción de las evolutas por Huygens al objeto de construir un péndulo isócrono y, por ende, resolver el problema de la determinación de la longitud en el mar.

Existen muchos casos de Matemática aplicada como los anteriores que tienen la particularidad de dar paso a la construcción de conceptos y relaciones matemáticas que entran dentro de la especulación teórica. En esto consistiría el llamado proceso de matematización. (Ver **Figura 2**).

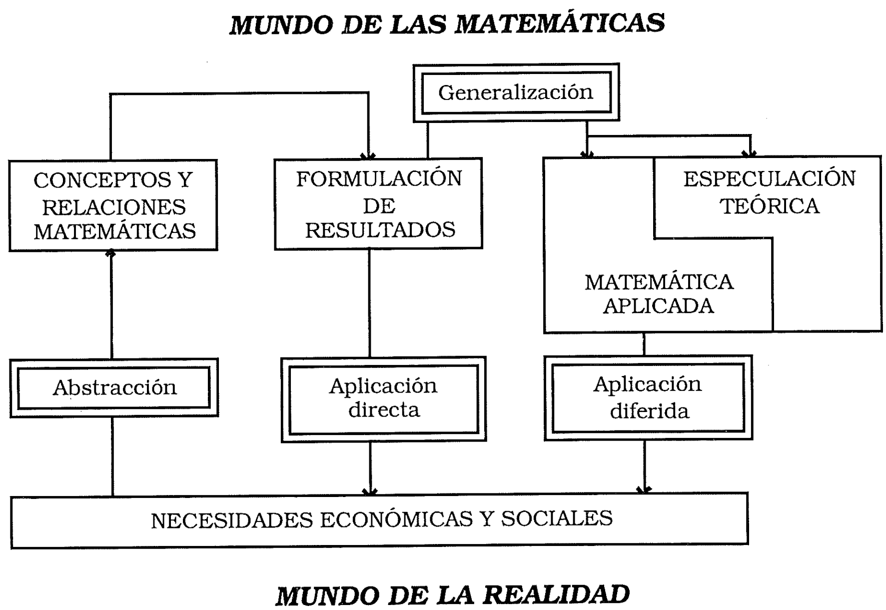


Figura 2

Ahora bien, en contra de la citada dependencia pueden aducirse otros casos. Por ejemplo, la elevada capacidad de la Grecia clásica para el tratamiento de la Geometría es imposible verla dependiendo de alguna necesidad cotidiana o científica de la época. Apolonio de Pérgamo, por ejemplo, tras anunciar unas proposiciones respecto a la distancia máxima y mínima de un punto a una cónica, comenta:

«Es tema es indispensable no sólo para quienes cultivan nuestra ciencia, sino también para el análisis y discusión de los problemas (...), aparte de ser uno de los dignos de estudio por su valor intrínseco» [7].

Muchos casos más se acumulan en la historia de la Matemática, particularmente a partir del siglo XIX, cuando la Matemática toma conciencia de sí misma y comienza su divorcio de la realidad. Se aducen casos en que la propia especulación teórica ha generado conceptos que, posteriormente, han encontrado aplicación (las geometrías no euclídeas en las teorías de Einstein, los cuaterniones, etc.). No son muchos casos pero sirven a determinados matemáticos (normalmente, ignorantes de su propia historia y de la existencia de tantos conceptos que no sirvieron posteriormente para nada) para defender la prevalencia de su ciencia respecto de la realidad y, de paso, justificar la multitud de investigaciones especulativas que caracteriza a la Matemática «pura» (como si el resto fuera «impura» por contaminarse con la realidad, otra descripción lingüística significativa).

Otro argumento contra la dependencia de la Matemática respecto de las necesidades económicas y sociales es el hecho constatado de que la Matemática no ha encontrado un impulso mayor en aquellos países más necesitados en dicho sentido (Africa, Asia, etc.).

En general, pues, se puede afirmar que:

«En términos de la motivación de los científicos o de su desarrollo histórico, la ciencia no puede ser considerada sencillamente como el resultado de necesidades económicas o tecnológicas (...) Sin embargo, puede sugerirse ahora que, dentro del contexto de una estructura social y económica racionalizada, las exigencias de la tecnología industrial que derivan del desarrollo económico ejercen una influencia poderosa sobre la dirección de la actividad científica (...) Aun los científicos puros que no caen bajo la tutela inmediata de tales organismos son, en cierto grado, influídos por ellos, pues su interés es propenso a ser atraído a esos ámbitos de la investigación a los que sus colegas dedican sus esfuerzos» [8].

En líneas generales y aún a riesgo de simplificar demasiado la situación, se puede defender la existencia de dos mundos: El de la Matemática y el de la realidad social que presenta unas necesidades económicas y sociales. El proceso de matematización comienza partiendo de estas últimas al objeto de formular conceptos y construir relaciones matemáticas que dan lugar a la formulación de resultados (y en la mayoría de los casos pero no siempre a su justificación deductiva).

Estos resultados se aplican directamente a las necesidades sociales a que hemos hecho referencia. Piénsese en el ejemplo de la Geometría. Surge por necesidades agrarias (delimitación de los campos tras las riadas) o de construcción de templos religiosos. Se descubre una relación entre los lados de un triángulo rectángulo (que luego generalizará Pitágoras) y ello se aplica directamente a la construcción de ángulos rectos al objeto de resolver las necesidades anteriores.

Pero los conceptos y relaciones matemáticas, así como los resultados formulados, plantean la posibilidad de una especulación teórica, parte de la cual podrá aplicarse de manera diferida posteriormente. El caso de la Geometría vuelve a ser relevante. Todos los resultados teóricos de Apolonio sobre las cónicas hubieran tenido que ser inventados de nuevo a finales de la Edad Media, de no haber existido, para su aplicación a la construcción de lentes y a la Optica en general. Sin embargo, permanece un núcleo de especulación teórica que no encuentra (ni desea en muchos casos) aplicación al mundo de la realidad sino tan sólo al propio mundo de la Matemática.

Metahistoria de la Matemática

La forma en que se debe historiar la Matemática no es un asunto sobre el que se puedan dar conclusiones definitivas. Algunas historias de la Matemática se centran en períodos históricos (Grecia, los árabes, el Renacimiento, etc.), otras en el desarrollo histórico de diversos conceptos y técnicas (Historia del Algebra, del Cálculo, etc.). Lo habitual es mezclar ambos enfoques en las historias generales de la Matemática dando mayor o menor importancia a uno u otro.

No hay unanimidad, como en el resto de la Historia de la Ciencia, sobre si se puede hablar del desarrollo de la Matemática, lo que implica una forma de evolución y eventualmente de progreso (que es cuestionable), o de revolución en la Matemática al modo de las teorías de Kuhn.

Por otro lado, reservaremos dos citas para otro problema relacionado con cómo hacer historia de la Matemática. Desde los trabajos de Colinwood resulta innegable que el historiador pretende entender la Matemática desde el enfoque de la propia época en la que se desarrolló. Este es el ideal diacrónico que puede defenderse así:

«Si se pretende que el objeto de la historia de la práctica teórica matemática estriba, como indica Morris Kline, en explicar las ideas centrales de ese hacer, poniendo especial énfasis sobre aquellas corrientes de actividad que más han durado e influído en la actividad matemática posterior, se estará haciendo una historia condicionada por la imagen de un continuo temporal lineal que explícitamente rechazo..., rechazando igualmente el apelar al «hecho histórico objetivo», porque éste es mera consecuencia de la previa toma de postura que adopte el historiador. Ejemplo de este tipo de historia interna se tiene en «Elementos de Historia de las Matemáticas», sin más unidad orgánica que el haber sido «notas» históricas a cada capítulo de los «Elementos» de Nicolás Bour-baki» [9].

Así pues, el historiador está condicionando y modificando los hechos históricos, con la sola elección de un tema, de unos conceptos a estudiar. Por ejemplo, desde una perspectiva actual es importante la distinción entre «indivisible» (una superficie está formada por un conjunto de segmentos, indivisibles al modo de Cavalieri) e «infinitésimo» (una superficie está formada por superficies tan pequeñas como se quiera o infinitésimos a la manera de Kepler, Fermat, etc.). Sabemos que es la última la que lleva al concepto de límite y no la primera y en dicho concepto se apoya el Cálculo tal como lo conocemos. Pero lo cierto es que en su época (el siglo XVII) los conceptos de indivisibles e infinitésimos fueron intercambiables. Sólo sabiendo este hecho se puede comprender, por ejemplo, el trabajo de Roberval y todos sus contemporáneos.

Una formulación anacrónica de la historia de la Matemática lleva a la elección de temas, a los guiños constantes al lector del estilo «que en lenguaje actual quiere decir que», lo que puede resultar engañoso. Por ejemplo, el método de cálculo de máximos y mínimos de Fermat es extremadamente parecido al proceso actual de igualar la derivada a cero. De hecho, Newton formuló el concepto de fluxión a partir de los trabajos de Barrow que, a su vez, había partido del método de Fermat. Eso ha conducido (en particular a algunos franceses) a afirmar que Fermat es el verdadero inventor del Cálculo. Pero entendiéndolo en su época, a partir de los estudios de Vieta que realizó, se puede observar que la admirable intuición de Fermat está basada en razonamientos finitos, no existe pues paso al límite ni ningún razonamiento infinito, lo que matiza mucho la asignación anacrónica del título de inventor del Cálculo.

Para De Lorenzo [9] la mejor posibilidad de hacer historia de la Matemática sería realizar «calas sincrónicas» que él concreta en el estudio de los entornos de determinadas fechas. El problema de este planteamiento es su inteligibilidad.

«Según la teoría anacrónica, debería estudiarse la ciencia del pasado a la luz de los conocimientos que hoy en dia tenemos, y además teniendo presente esa evolución posterior, especialmente la manera en la que llegó a convertirse en lo que es en la actualidad.

Hoy día, la historia anacrónica de la ciencia constituye rara vez una estrategia historiográfica consciente. Por el contrario, se está generalmente de acuerdo en alabar un ideal no anacrónico.

El ideal diacrónico es estudiar la ciencia del pasado a la luz de la situación y las teorías que existían realmente en el pasado; en otras palabras, despreciar todos los acontecimientos posteriores que no pudieron tener ninguna influencia sobre el período en cuestión.

¿Puede concluirse que todos los elementos anacrónicos deberían ser evitados y que la historia de la Ciencia debería tratarse desde un punto de vista diacrónico? La respuesta es no. Una historia de la Ciencia totalmente diacrónica no podría subvenir a todas las demandas que suelen hacérseles a las exposiciones históricas. Puede que diera una buena representación del pasado, pero sería también inaccesible para todos menos para unos cuantos especialistas» [10].

La cuestión, entonces, parece ser la de minimizar los elementos anacrónicos siendo conscientes en todo momento de que estos elementos falsean el pasado al objeto de hacérnoslo entender. Naturalmente, estos elementos anacrónicos serán distintos según el público al que queramos comunicar el conocimiento.

Esto nos lleva inmediatamente al tema de la transposición didáctica, es decir, el proceso mediante el cual el saber institucionalizado (la Matemática y su historia) se convierte en saber enseñado (la Matemática enseñada históricamente) que trataremos a continuación.

Enseñanza histórica de la Matemática

En la enseñanza los contenidos lógicos de la Matemática y los propios de la historia de esta ciencia sufren una serie de restricciones que implican una acomodación, una transformación a los objetivos de la enseñanza y a las posibilidades del aprendizaje. Este proceso de transformación por el que un saber institucionalizado (entendiendo por saber un conocimiento útil) se transforma en un saber a enseñar se llama transposición didáctica.

Esta transposición depende de cómo se entienda el proceso de enseñanza/aprendizaje de la Matemática, qué nivel de aprendizaje presenten los alumnos y qué objetivos curriculares tenga el curso. Así, por ejemplo, si este último proceso se entiende centrado en el profesor (tal es el caso de muchas lecciones en la Universidad a través de la clase magistral) la historia de la Matemática que se presente tomará una forma más narrativa, tipo «historias». Pero si el proceso de enseñanza/aprendizaje está más centrado en los alumnos y tiene por objetivo que aprendan a resolver problemas, la historia de la Matemática puede tomar la forma de un conjunto de problemas históricos que generen discusiones y trabajo en grupo.

La importancia que se le conceda a las formas de representación en Matemáticas (lenguaje, gráficas, etc.) implicará un gran respeto por la formulación original o, en caso contrario, una adaptación de los resultados históricos al lenguaje gráfico-simbólico actual.

El nivel de enseñanza será determinante ya que la acomodación de la historia de la Matemática será muy distinta entre alumnos de Primaria, Secundaria o en la Universidad.

En último extremo, la transposición didáctica efectuada dependerá de los objetivos que se pretendan al enseñar Matemáticas históricamente. Ello nos lleva a detallar la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué objetivos añade la historia de la Matemática a la enseñanza de esta Ciencia?

Objetivos didácticos

Entendemos por tales aquellos más relacionados con el aprendizaje de las Matemáticas en cuanto tal Ciencia. En orden de concreción se desarrolla cada uno a continuación.

1) Guardar un paralelismo entre la construcción del conocimiento infantil y la construcción del conocimiento científico.

El principio genético es el que está en la base de este objetivo.

«La hipótesis fundamental de la epistemología genética es que existe un paralelismo entre el progreso hecho en la organización lógica y racional del conocimiento (historia de la Ciencia) y los correspondientes procesos psicológicos formativos» [11].

El rastro de este principio se puede encontrar a finales del siglo XIX en formulación, por ejemplo, del enminente matemático Henri Poincaré en «La ciencia y el método»: «Los zoólogos pretenden que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológicos. Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de los espíritus. El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía» [12].

Desde luego, el paralelismo se debe entender en sentido laxo.

Datos hay suficientes para defender la validez, en líneas generales, de este principio pero hay también datos que no es posible adaptar a la realidad escolar. Y ello, inicialmente, por un motivo fundamental: La historia de las Matemáticas es un conjunto de conocimientos algunos de los cuales serán útiles (los saberes) en el aula y otros no.

Estos saberes son un componente más de la situación didáctica. Los alumnos, con sus características intelectuales determinarán unos límites en el aprendizaje en cuanto a cantidad y en cuanto a forma de aprender. Los objetivos curriculares partirán de un determinado modelo de escuela válido en la sociedad actual, lo que condicionará qué conocimientos serán considerados útiles y cuáles no. La personalidad y conocimientos del profesor, sus creencias e ideas previas, incidirán en qué historia de la Matemática se aplicará.

Por ejemplo, la Trigonometría surge históricamente por un interés en determinar la posición de los astros que, entre otras cosas, guiaban a los navegantes. El concepto de función está ligado en su origen al estudio del movimiento acelerado de caída de los cuerpos y éste, a su vez, en un deseo intelectual de romper los moldes de pensamiento creados por Aristóteles. Nada de esto es planteable hoy en día, lo que no quiere decir que no se enseñe Trigonometría y el concepto de función. La consecuencia es que, si para enseñar determinados conceptos y relaciones matemáticos debemos partir de problemas, estos no pueden ser siempre los históricos sino otros (medida de un terreno con aparatos, dibujo de dicho terreno a escala, relación entre el IPC y el transcurso del año, interpretación de gráficos periodísticos, etc.) más actuales.

2) Determinar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje matemático de los alumnos.

Quizá una de las principales aplicaciones del principio genético sea precisamente ésta. Uno de los temas fundamentales de la Didáctica de la Matemática en cuanto al aprendizaje es la determinación de los distintos obstáculos que se encuentra el escolar. Es sabido que hay errores que no están causados por olvidos, distracciones ni un mal aprendizaje, sino por lo contrario: Un buen aprendizaje. Iniciamos, por ejemplo, la división bajo la idea de reparto en que una cantidad de objetos se reparten en grupos más pequeños. Cuando, tras un serio trabajo en este sentido, se plantea la situación de dividir 3 entre 5 el alumno comete serias equivocaciones y tiende a interpretarlo como 5:3. Este es un obstáculo epistemológico. Según Brousseau [13]. resulta ser un conocimiento aplicable correctamente a unas situaciones pero no a otras y es un conocimiento resistente al cambio.

Un estudio de la historia de determinados conocimientos matemáticos permite observar la aparición de diversos obstáculos epistemológicos que presentan una gran similitud con los que atraviesan los escolares.

3) Trabajar sobre conceptos matemáticos como «objetos» de estudio, analizando su evolución y descubriendo las ambigüedades e insuficiencias de su formalismo matemático asociado [14]. La comparación de técnicas antiguas y modernas dota a estas últimas de mayor valor por cuanto se puede mostrar que son de mayor utilidad en la resolución de problemas.

4) Definir los contenidos de los cursos y su orden de introducción teniendo en cuenta los obstáculos epistemológicos presentes y la evolución de dichos contenidos.

5) Diseñar actividades en la enseñanza de la Matemática.

En este sentido existen diversas posibilidades que examinamos más adelante.

Objetivos culturales

Si se entiende la historia de la Matemática dentro de la historia más general de la Ciencia y la cultura, aún con su especificidad propia, se puede defender la posibilidad de que la enseñanza histórica de la Matemática cubra una serie de objetivos relacionados con lo cultural y social.

1) Recontextualizar los conceptos matemáticos interpretados como «instrumentos» de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad [15].

Ello quiere decir, entender la Matemática en su aspecto de ciencia aplicada, integrada en un proceso de matematización como el que hemos descrito en un apartado anterior.

2) Historizar la Matemática, comprobando su característica de ciencia mutable y cambiante, no exenta de errores matizando la imagen de «ciencia acabada» que en muchas ocasiones suele presentar.

3) Humanizar la materia a enseñar, mostrando que está hecha y construída por hombres que seguían un proceso de trabajo determinado, no muy alejado del que se pueda reproducir eventualmente en clase. Ello debería implicar una mayor retención por parte del alumno del conocimiento a aprender por cuanto puede personalizar más este conocimiento.

4) Desdogmatizar y enriquecer culturalmente el aprendizaje de las Matemáticas, como consecuencia de los objetivos anteriores.

5) Complementar la enseñanza de otras disciplinas como Historia, Geografía, Física, etc.).

Este aspecto vital es quizá uno de los que crean más desconcierto al profesor que comienza a estudiar la historia de la Matemática. Parte de la creencia previa de que la Matemática es una ciencia independiente en gran medida de la realidad (aunque aplicable) y, desde luego, con poca relación con otras ciencias (o, en todo caso, son las demás ciencias las que recurren a la Matemática). Encontrar que todos los conceptos matemáticos importantes están estrechamente imbricados con el conocimiento amplio de la Naturaleza, con la filosofía, la Física, la Astronomía, etc. supone un choque importante que es necesario superar.

Es interesante observar a este respecto que, aunque con una forma matemática actualizada de tipo simbólico, la mayoría de los conceptos explicados en Secundaria y todos los de Primaria, surgieron históricamente en estrecha dependencia de otras ciencias antes del siglo XIX.

6) Motivar a los alumnos en el aprendizaje de la Matemática, demostrando que resuelve problemas que han sido importantes en otros tiempos y cuya solución hoy disfrutamos, mostrando hombres y mujeres y otras culturas que fueron construyéndola y creándola a partir de necesidades prácticas o dejándose llevar por la especulación teórica.

La historia de la Matemática como instrumento didáctico

La historia de la Matemática es un recurso para la Didáctica de la Matemática pero es algo más que una simple herramienta: Implica una determinada concepción sobre la naturaleza de la Matemática, sobre lo que es conveniente presentar al alumno, sobre los objetivos curriculares que conviene destacar.

Aunque hayamos visto aspectos controvertidos (como es el fundamental de la metahistoria) los didactas de la Matemática consideran, en general, fijados los objetivos de la historia de la Matemática (en la línea del apartado anterior) y centran su atención en la forma en que estos objetivos deban alcanzarse en el aula. En otras palabras, se trata de responder a las preguntas:

¿De qué forma introduciremos la historia de la Matemática en el aula?

¿Cómo enseñar Matemáticas desde una perspectiva histórica?

Vamos a señalar seis formas de trabajo escolar donde la historia de la Matemática es fundamental:

1) Introducir anécdotas históricas dentro del trabajo cotidiano sobre Matemáticas. Estas anécdotas pueden tomar, eventualmente, la forma de breves biografías sobre un matemático y su tiempo.

La eficacia de esta técnica depende enteramente de la conexión entre lo narrado y el tema que se esté tratando. Algunos libros de texto (particularmente en Bachillerato) traen desde hace muchos años resúmenes biográficos al principio o final de la lección que, sin embargo, aparecen como apéndices que muchos profesores suelen saltar porque «no viene a cuento».

Las anécdotas, las biografías, deben iluminar el contenido matemático, el problema a resolver, deben, en suma, ser útiles. Lo contrario es privar de sentido a la historia de la Matemática.

2) Introducción histórica ante un nuevo concepto.

Esta forma se adaptaría, más que al terreno de las personas, de la cultura o de su tiempo, a los contenidos matemáticos a desarrollar. Si se va a introducir los números complejos se trataría de justificar la construcción de sus reglas por Bombelli a partir de la resolución de ecuaciones, las incomprensiones que generaron su uso, etc.

3) Resolución de problemas históricos.

Quizá la más importante aplicación de la historia de la Matemática sea la de plantear problemas que originaron en el pasado nuevos conceptos y relaciones matemáticas. Los problemas de maximizar el volumen de un barril en Kepler, definir la velocidad instantánea, la determinación de una tangente, la construcción dinámica de curvas, etc. pueden llevar a la consideración del concepto de derivada.

4) Construir «historias» en torno a problemas críticos del pasado que ilustren técnicas y métodos actuales.

Esta técnica completa la anterior. Se pueden plantear problemas pero el alcance de la enseñanza resulta ser mayor si se sitúa históricamente dicho problema, si se restringe el campo de actuación sobre él a las herramientas entonces existentes, se ve la necesidad de crear otras nuevas y se contrastan las limitaciones anteriores con las técnicas y métodos actuales.

5) Construcción de posters o trabajos sobre un tema histórico.

Como resumen de todo lo anterior se pueden diseñar posters que exiban un determinado conocimiento histórico (no de forma erudita sino primando un buen equilibrio entre lo visual y un aceptable contenido), hojas de trabajo o resumen de un determinado problema histórico, trabajos sobre matemáticos famosos, etc.

6) Análisis de textos históricos. La actividad más compleja y que requeriría una amplia formación o textos bastante sencillos. Sin duda, es la técnica más fiel con el pasado por cuanto se trataría de comprender a un autor con su lenguaje (muchas veces distinto del nuestro), con sus limitaciones matemáticas (por no haberse construído aún las herramientas adecuadas), etc. Sin embargo, repetimos que es la forma más fiel de comprender históricamente las Matemáticas.

Bibliografía

* HOUZEL, C. 1977. Cit. por González Urbaneja, P.M. 1991: **«Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza»**. Enseñanza de las Ciencias, 9, 3.

* LAKATOS, I. 1978: **«Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático»**. Alianza. Madrid.

* BOSSUT, Ch. 1802: **«Essai sur l'Histoire generale des Mathematiques»**. Tomo II. París.

* LE LIONNAIS, F. 1962: **«Las grandes corrientes del pensamiento matemático»**. Eudeba. Buenos Aires.

* LENTIN, A. y RIVAUD, J. 1965: **«Algebra moderna»**. Aguilar. Madrid.

* KLINE, M. 1980: **«Matemáticas. La pérdida de la certidumbre»**. Siglo XXI. México.

* APOLONIO DE PERGAMO: **«Las Cónicas. Prólogo del Libro V»**. Edición de Aguilar 1970: «Científicos griegos», vol. II. Madrid.

* MERTON, R.K. 1984: **«Ciencia, tecnología y sociedad en la Inglaterra del siglo XVII»**. Alianza. Madrid.

* DE LORENZO, J. 1977: **«La Matemática y el problema de su historia»**. Tecnos. Madrid.

* KRAGH, H. 1989: **«Introducción a la historia de la Ciencia»**. Crítica. Barcelona.

* PIAGET, J. 1979: **«L'épistémologie génétique»**. P.U.F. París.

* POINCARE, H. 1963. Cit. por González Urbaneja 1991. Op. cit.

* BROUSSEAU, G. 1983: **«Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques»**. Recherches en Didactique des Mathematiques, 4, 2.

* SANCHO, J. 1990: **«Posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas»**. En Fortuny, J.M. y otros: **«Aspectos didácticos de Matemáticas. 3»**. ICE de la Univ. de Zaragoza.

* BOERO, P. 1989: **«Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años»**. Suma, n. 2.

Carlos Maza Gómez

Facultad de Ciencias de la Educación de Sevilla.

Departamento de Didáctica de las

Inferencia estadística en los bachilleratos

Manuel Sobrino Reyes

Introducción

Los cambios introducidos en el Sistema Educativo español con la paulatina entrada en vigor de la LOGSE y las distintas disposiciones legales que la desarrollan son sustanciales.

De todas las importantes modificaciones voy a centrarme en una pequeña parcela del saber matemático, la Estadística, y más aún, en la Estadística Inductiva de los últimos cursos de la Enseñanza Secundaria que utiliza el Cálculo de Probabilidades como soporte y fundamentación.

Posiblemente sean la Estadística y la Geometría las partes de la Matemática más beneficiadas con su mayor presencia en los currículos futuros de toda la enseñanza obligatoria. No obstante, los motivos son diferentes.

En lo que a los contenidos se refiere, en Geometría se trata de volver a beber, aunque sea de manera metodológica distinta, de unas fuentes cerradas por la Ley General de Educación donde se apostaba por una Geometría Algebráica que posiblemente no tenga en los niveles obligatorios el valor formativo y de desarrollo de estrategias generales de pensamiento como el razonamiento, la intuición y la visión espacial que aporta la Geometría sintética.

Sin embargo, en Estadística se trata de incorporar a los curricula conocimientos cuya necesidad y utilidad son incuestionables en un mundo cuyo volumen de información suministrada va en aumento y en el que el progreso de casi todas las Ciencias va ligado a la aplicación y desarrollo de los potentes métodos estadísticos. Es imprescindible, por tanto, capacitar a los ciudadanos y dotarlos de unas herramientas básicas que, por una parte, les permitan asimilar, criticar y contrastar la información recibida y, por otra, les permitan aplicarlas a los campos del saber en que desarrollarán su trabajo.

La respuesta de la Escuela a una demanda social de este tipo no se debe demorar. Los profesores de Matemáticas además de actualizarnos en diversos aspectos de la didáctica también debemos adquirir conocimientos que posiblemente en algún caso no hayamos recibido en nuestra formación inicial ni en la permanente, como suele ser habitual en Estadística.

El carácter abierto y escueto de los curricula de Bachillerato obliga a los profesores de cualquier Centro a matizar y completar la propuesta atendiendo a las características del alumnado y al entorno en que se desenvuelve.

Tenemos en nuestras manos la posibilidad y la responsabilidad de marcar el rumbo de la nave y para ello es necesario tener muy claro cuál es el puerto de llegada o mejor, cuál es el puerto donde nuestros alumnos dispondrán de mayores y mejores comunicaciones con el exterior.

Seguidamente me limitaré a mencionar de manera lacónica algunos conceptos e ideas fundamentales ambientándolas o desarrollando en paralelo diversos ejemplos que no pretenden ser un modelo sino una excusa para empezar a preguntarnos qué podemos y debemos hacer en el aula. Es necesario, en cualquier caso, establecer el entramado conceptual necesario para que la aprehensión de la Estadística y sus métodos sea significativa para los alumnos. Los siguientes epígrafes de contenido no constituyen una secuencia ordenada y los ejemplos menos aún, máxime cuando ponen en marcha toda una serie de contenidos que es impensable puedan desarrollarse en un breve artículo.

Variable aleatoria

Existe diferencia entre variable estadística y variable aleatoria. El primer término, muy utilizado en Estadística descriptiva o elemental, es la característica en estudio de la población. La variable aleatoria -cuya denominación quizá no sea muy acertada- es una función del espacio muestral en el conjunto de los números reales; la variable independiente está formada por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (lanzamiento de tres monedas, estaturas de una muestra de cinco individuos,...).

Unas variables aleatorias especialmente interesantes en Inferencia son los estimadores cuya idea intuitiva es muy comprensible.

De manera natural por extensión de la idea de media y varianza de una variable estadística (estudio descriptivo) surge la definición de esperanza (valor medio o valor esperado) y varianza de una variable aleatoria donde los valores que toma la variable se ponderan por las probabilidades en vez de por las frecuencias.

Es importante conocer las propiedades básicas de la esperanza y varianza de la suma y diferencia de variables -independientes, al menos- de cara a utilizarlas por ejemplo para determinar la distribución del estadístico más usado en estos niveles que es la «media muestral».

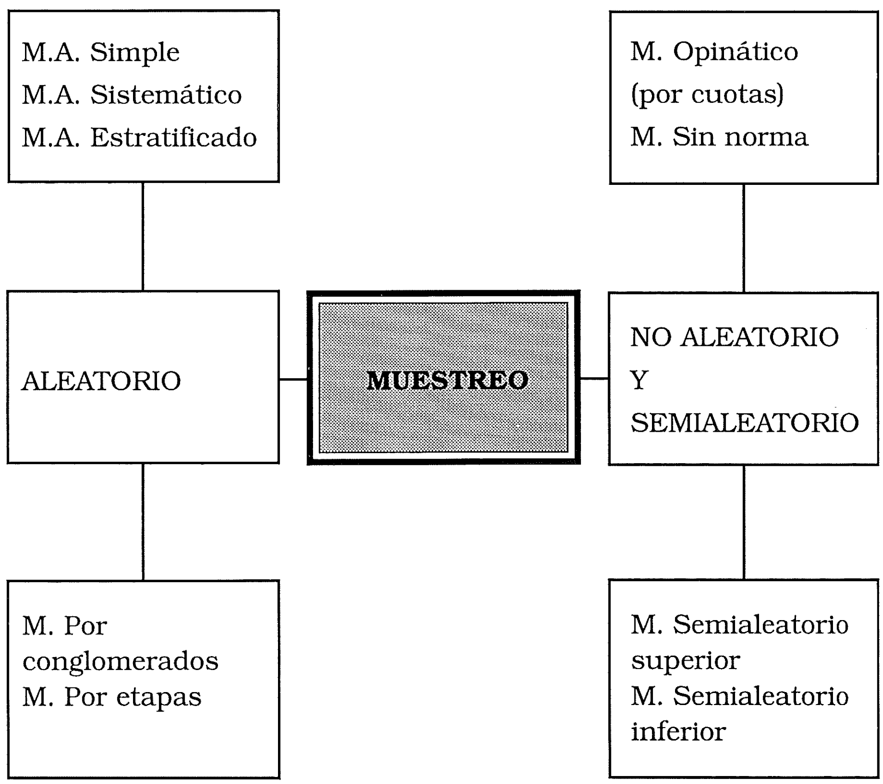
Población y muestra

Cuando el alumno llega a Bachillerato ya ha trabajado estos conceptos en la etapa obligatoria. Ahora debe notar paulatinamente que la información obtenida de una muestra representativa de la población aunque no es exacta -la Estadística no hace milagros- si es rigurosa desde el punto de vista científico (tendrá que dar sentido a conclusiones tales como «de la muestra deducimos que la duración media de las bombillas «Luce-bien» está comprendida entre 980 h y 1210 h con una probabilidad del 95%»).

Aunque sólo se trabaje con muestras aleatoria simples, se pueden mencionar otros tipos de muestreos.

Presentemos a continuación un ejemplo, quizá de los más difíciles que se pueden hacer en estos niveles pero no rehusemos a otros más sencillos de intervalos de confianza.

Ejemplo 1.
A un Centro de Salud están adscritos 100.000 niños y se quiere averiguar la proporción de vacunados pero sin hacer una observación exhaustiva[1].



1. Corresponde a una pregunta hecha por mi compañero y amigo Florencio Pascual. Se ha aumentado el tamaño de la población que en realidad era de 1200 para poder considerarla infinita y facilitar la tarea.

Mediante la elección de una muestra ganaremos tiempo y dinero, ¿qué estamos dispuestos a perder?

Fijaremos un grado de confianza, p_k=0.90, y un grado de precisión o error máximo admisible, e=2%. Esto quiere decir que el porcentaje de vacunados que obtengamos con la muestra no diferirá en más del 2% del verdadero porcentaje de la población con una probabilidad del 90%.

Sea **n** el tamaño de la muestra –nuestra incógnita– y sea **p** la verdadera proporción de vacunados –parámetro desconocido–.

La proporción de niños vacunados de cualquier muestra de tamaño n es una variable aleatoria –llamémosla $\overline{\mathbf{X}}$ ya que en realidad es la media de variables de Bernoulli– cuya distribución es aproximadamente

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

De acuerdo con las condiciones impuestas se debe cumplir:

$$p\left[\,|\overline{X}-p| \leq 0.02\,\right] \geq 0.90 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow p\left[\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right| \leq \frac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right] \geq 0.90$$

Como aproximadamente $\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N(0,1) \rightarrow \dfrac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq 1.64$

Sabiendo que p(1-p) es máximo cuando p=1/2, se deduce fácilmente que a partir de n=1681 se cumplen las condiciones impuestas y, por tanto, ese debe ser el tamaño de la muestra.

Idea de independencia

El alumno ya ha lanzado monedas y dados, ha extraído bolas de urnas, ... y, por tanto, tiene adquirida la idea intuitiva de experimentos o pruebas dependientes e independientes. Cuando se introduzca la definición de probabilidad condicional se formalizará de manera natural la noción de independencia de sucesos y ello se utilizará para saber cuándo las variables aleatorias son independientes.

La idea de independencia es muy importante, según Kolmogorov en ella estriba la diferencia entre el Cálculo de Probabilidades y la Teoría de la Medida.

Desearía haber introducido aquí un contraste no paramétrico para la independencia de dos variables de la población mediante el test de la χ^2 pero en el artículo, como en nuestras aulas, debemos establecer prioridades.

Distribuciones binomial y normal

La ley Binomial aparece siempre que una prueba alaetoria con sólo dos resultados posibles (éxito y fracaso) se repite varias veces de manera independiente. Veamos un nuevo ejemplo.

Ejemplo 2. *El 25% de los conejos contraen cierta enfermedad. Se quiere probar una vacuna para lo cual se inyecta a 24 animales sanos y se comprueba que, al cabo de un tiempo, 3 han enfermado. ¿Es efectivo el tratamiento?*

Una primera respuesta intuitiva nos lleva a pensar que la vacuna es efectiva -el número de animales enfermos es la mitad de la cuarta parte del total-. Planteemos un test y veamos lo que sucede.

La probabilidad de que un animal enferme es p=0.25 y supongamos que se mantiene aun cuando se le aplique la vacuna. Esta es nuestra hipótesis nula H_0: p=0.25.

La hipótesis alternativa será p<0.25, es decir, la vacuna es efectiva.

Llamemos X a la variable «número de animales que enferman» y observemos que supuesta cierta H_0, $X \rightarrow B(24, 0.25)$. Fijemos α=0.05 como nivel de significación o error de primera especie (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta) y hallemos la región de rechazo, [0, c], de modo que

$$p_{H_0}\ (\ X \in [\ 0,\ c\ ]\ )\ \leq\ 0.05.$$

$$p_{H_0}\ (\ X \leq 2\ ) = \binom{24}{0}\ 0.25^0\ 0.75^{24}\ +$$

$$+\binom{24}{1}\ 0.25^1\ 0.75^{23} + \binom{24}{2}\ 0.25^2\ 0.75^{22} =$$

$$= 0.0398\ \leq\ 0.05$$

Sin embargo,

$$p_{H_0}\ (\ X \leq 3\ ) = 0.115\ \nleq\ 0.05$$

con lo cual c=2 y la región de rechazo será el intervalo cerrado [0, 2]. Entonces, como son 3 los animales que han enfermado, no existe la evidencia suficiente como para rechazar la hipótesis nula y, por tanto, no podemos afirmar que la vacuna sea efectiva en contra de lo que a priori se pudiera pensar.

La distribución Normal es la más importante y su conocimiento y manejo son incuestionables.

Conocer las propiedades y aplicaciones no lleva implícito grandes desarrollos teóricos. ¿No podemos prescindir, incluso, de su función de densidad? Pero sí es necesario calcular probabilidades manejando las tablas, saber que la media y la varianza caracterizan totalmente la distribución y admiten una interpretación conjunta muy clara -extensible a gran cantidad de distribuciones-, conocer su forma y tipificar cualquier conjunto de datos.

Por último, la importancia de la Normal se manifestará de manera rotunda con el teorema Central del Límite y ello hará que en todos los casos de Inferencia Estadística estudiados con posterioridad sea «razonable» trabajar bajo la hipótesis de normalidad.

Del teorema Central del Límite los alumnos deben sacar una idea intuitiva: cuando los resultados de un experimento son debidos a un número *grande* de causas *independientes* que actúan *sumando* sus efectos -siendo cada efecto individual de poca importancia respecto al conjunto- es esperable que los resultados sigan una distribución Normal.

Podría a determinados alumnos introducírsele la distribución de Poisson aunque no es aconsejable cargar los programas de contenido en detrimento de otras partes que pudieran quedar incompletas. El siguiente cuadro representa las aproximaciones entre las distribuciones Binomial, de Poisson y Normal.

Desarrollemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. *En un Centro de Primaria*[2] *se han llevado a cabo sendos programas de intervención en alumnos del Ciclo Medio con dificultades en Lengua Castellana y Matemáticas. Para intentar medir la eficacia de los mismos se han pasado dos pruebas, una inicial y otra final, a los alumnos sobre los que se ha intervenido, siendo éstos los resultados:*

Lengua Castellana

Alumno	*P. Inicial: X*	*P. Final: Y*
1	*17*	*20*
2	*21*	*40*
3	*29*	*30*
4	*22*	*20*
5	*33*	*40*
6	*32*	*30*
7	*23*	*40*
8	*20*	*15*
9	*36*	*40*
10	*30*	*35*
11	*21*	*40*
12	*19*	*20*
13	*30*	*30*

APROXIMACIONES ENTRE DISTRIBUCIONES

BINOMIAL (n,p) — $1 < np = \lambda < 5$, $p < 0.1$, $n > 30$ — POISSON (λ)

$np > 5$ y $nq > 5$

$\lambda > 5$

NORMAL (μ, σ)

2. Los datos han sido facilitados por Mª Teresa García y corresponden a un programa de compensación educativa llevado a cabo en el curso 1992-93.

Matemáticas

Alumno	*P. Inicial: X*	*P. Final: Y*
1	*23*	*35*
2	*10*	*40*
3	*50*	*60*
4	*28*	*70*
5	*25*	*50*
6	*15*	*40*
7	*21*	*60*
8	*34*	*45*
9	*45*	*75*
10	*25*	*75*
11	*39*	*65*
12	*35*	*40*
13	*25*	*45*
14	*0*	*25*
15	*15*	*35*

Fijémonos en los resultados de Lengua ya que los de Matemáticas parecen contundentes a simple vista.

Supondremos que las variables son Normales[3] y que tienen la misma variabilidad.

En Lengua se aprecia progreso, pero ¿es lo suficientemente considerable -significativo- como para atribuirlo al programa y no simplemente a estos alumnos?

En principio se puede pensar en atacar la cuestión de dos maneras:

¿De manera global el rendimiento en la prueba final es superior al de la inicial?

O, si consideramos la diferencia entre las puntuaciones de todos y cada uno de los alumnos, ¿son positivas?

Estas dos formas a priori parecen similares pero no lo son. Plantear la primera pregunta supone ignorar el carácter dependiente entre las puntuaciones iniciales y finales. Debemos, pués, hallar en cada alumno la diferencia de sus puntuaciones obteniendo así una nueva variable, D, que con nuestros datos toma los valores: 3, 19, 1, -2, 7, -2, 17, -5, 4, 5, 19, 1, 0.

Como decíamos anteriormente estos datos mayoritariamente positivos parecen indicar la eficacia del programa, pero ¿no podría haber sido esta situación fruto del azar? Démosle al azar un margen del 5%.

Vamos a suponer mientras no se demuestre lo contrario que el programa no produce mejora; ésa será la hipótesis nula (H_0: $\mu=0$).

La hipótesis alternativa, H_1, será $\mu>0$.

Bajo H_0 la media muestral de D, $\bar{d}$ sigue aproximadamente[4] una distribución Normal de media 0 y varianza s_{n-1}^2/n.

Entonces el estadístico $\dfrac{\bar{d}}{\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ es aproximadamente N(0, 1), por tanto la región de rechazo será:

[1.64, +∞).

En el caso de nuestros datos, el valor de la variable $\dfrac{\bar{d}}{\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ es

$$\frac{5.1538}{\frac{8.1634}{\sqrt{13}}} = 2.187 \; \varepsilon \; [\, 1{,}64\, ,\, +\infty\,).$$

Se halla en la región de rechazo y, por ello, el programa es efectivo.

En el caso de Matemáticas el valor que toma la variable es 7.62, muy superior al valor crítico 1.64, luego el programa también se muestra eficaz.

Observar que s_{n-1} no es la desviación típica de la muestra, ya que ésta subestima a la de la población por término medio, sino la desviación típica corregida. Como los alumnos utilizarán la calculadora ya habrán apreciado dos teclas diferentes, s_n y s_{n-1}, y tal vez nos pregunten la diferencia entre ellas. El momento de aclarar la cuestión puede ser cuando trabajen la propiedad de insesgadez

3. La utilización del papel probabilístico Normal da una idea muy gráfica sobre la suposición de normalidad de los datos -véase el libro de Peña-.

4. En realidad es una distribución t de Student con 12 grados de libertad pero si ésta no se ha introducido se puede considerar como buena la aproximación Normal.

de los estimadores (la media del estimador es igual al parámetro que estima).

Números Aleatorios

Las tablas de números aleatorios se utilizan para hacer cualquier tipo de sorteo o juego o simular cualquier experimento. Con ellas podemos simular lanzamientos de monedas o dados, extracciones de naipes, determinar el número de monedas que esconderemos en la mano en cada partida de «chinos» para evitar que un hábil contrincante halle la tendencia involuntaria, o averiguar la distribución de los 100 primeros copos de nieve que caen en un patio embaldosado[5].

Es deseable que los niños en las etapas primaria y secundaria obligatoria utilicen e incluso construyan estas tablas. Si han adquirido soltura en el manejo tanto de esas -que corresponden a una distribución Uniforme- como de la Normal pueden generar por el método de Montecarlo una distribución χ^2 de Pearson. La tabla siguiente permite anotar de manera clara y ordenada los valores obtenidos artificialmente de una χ^2_4 (suma de los cuadrados de 4 distribuciones N(0, 1) independientes).

Otro ejercicio interesante consiste en comprobar la alaetoriedad de una tabla de números supuestamente aleatorios mediante el test de Poker[6]. Para ver la bondad del ajuste de las frecuencias observadas a las probabilidades teóricas se utiliza la prueba de la χ^2. Rechazar la hipótesis nula significaría que la tabla de números no era aleatoria.

A modo de final

Es difícil escribir el final de un artículo cuando éste se considera inconcluso, pero todo tiene un límite y seguro que éste ha sido pasado con creces.

Seguramente estáis pensando en muchas partes de la Estadística Inductiva unidimensional que podrían tratarse en el Bachillerato y aquí no se han mencionado ni siquiera de manera implícita; de hecho detrás de todos los ejemplos desarrollados tan solo están subyacentes la estimación puntual y por intervalos de confianza y el contraste de hipótesis paramétricos.

¡Ojalá sean esos vuestros pensamientos!

Ello querría decir que para vosotros la Estadística ha dejado de ser la parte de las Matemáticas relegada en vuestros programas o de tan tardía aparición en los mismos como lo ha hecho en la propia Historia.

Si no lo hemos hecho aún, entremos con cautela y decisión en un mundo más próximo a la realidad de lo que no hace mucho tiempo se pudiera pensar.

Bibliografía

* PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA, D.(1991): **Estadística. Modelos y métodos. 1. Fundamentos**. Madrid,Alianza.

* ENGEL, A.(1988): **Probabilidad y Estadística. Vol. 1 y 2.** Consorci d'Editors Valencians S.A., Valencia.

* AZORÍN F.y SÁNCHEZ-CRESPO J.L.(1986): **Métodos y aplicaciones del muestreo**. Alianza, Madrid.

* TURNER J.C.(1986): **Matemática moderna aplicada. Probabilidades, Estadística e Investigación Operativa**. Alianza, Madrid.

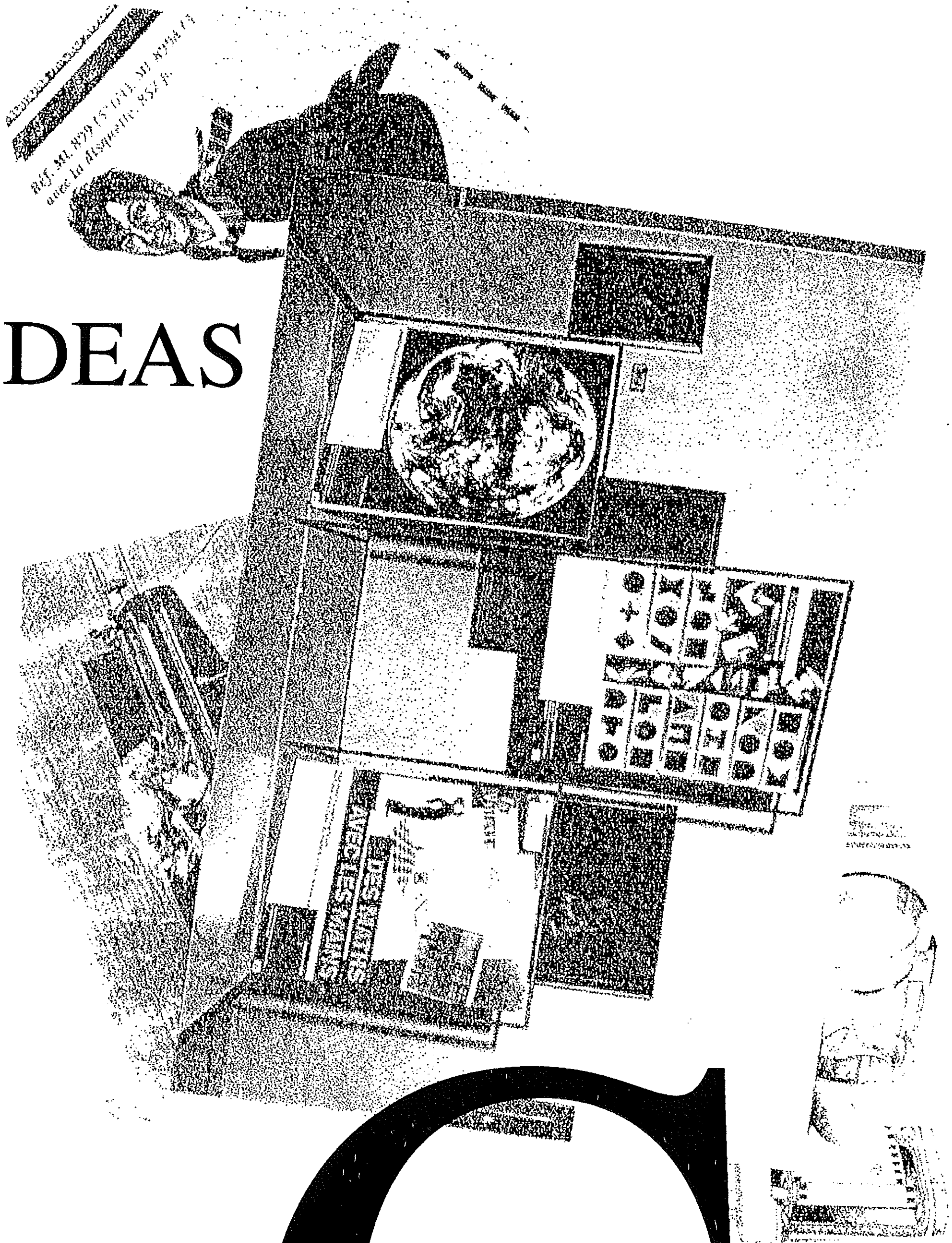
* FELLER W.(1975): **Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. Vol. I.** Limusa, Méjico.

Manuel Sobrino Reyes

M. a. s. U(0,1)				M. a. s. N(0,1)				χ_4^2
x_1	x_2	x_3	x_4	$z_1=\phi^{-1}(x_1)$	$z_2=\phi^{-1}(x_2)$	$z_3=\phi^{-1}(x_3)$	$z_4=\phi^{-1}(x_4)$	Σz_i^2

5. Un ejemplo menos ecológico que ese pero muy interesante sobre el bombardeo aéreo sobre Londres en la Segunda Guerra Mundial puede verse en los libros de Feller y Peña.
6. Ver los libros de Engel y de Azorín citados en la bibliografía.

IDEAS



PARA LA CLASE

Historia de las Matemáticas en el aula: Experiencia desde un Seminario Permanente

Mª Encarna Aznar Sánchez
Angeles López Hernández
Pedro Antonio Martínez Azor
Ginés Parra Ruiz
Ana Sastre García

En este artículo desarrollamos la experiencia de trabajo llevada a cabo por el Seminario Permanente «Historia de las Matemáticas», dependiente del CEP «Bajo Almanzora» de Cuevas del Almanzora (Almería), durante el curso 1993/94.

Dentro del área de Matemáticas hay una parte intrínseca que no podemos excluir: su historia (tanto la historia de la evolución de las ideas y teorías matemáticas, elaboradas por matemáticos profesionales, como la historia de las Matemáticas relacionadas con la cultura y la sociedad del momento, o la historia de la construcción de los conceptos matemáticos).

La idea de formar este Seminario ha surgido del interés por el estudio de esta Historia en el aula.

Para la Humanidad es importante conocer su historia: somos el producto de lo que han sido todas las personas anteriores a nosotras y nosotros.

Las Ciencias de la Naturaleza van sustituyendo unas teorías por otras. Sim embargo, en Matemáticas y Filosofía esto no ocurre: las teorías nuevas no descartan a las antiguas, se apoyan en ellas.

Es innegable la utilidad de la matemática en tecnología y ciencias, tanto humanas como de la naturaleza; pero los progresos matemáticos no han estado motivados por estas necesidades: han estado motivados por la propia lógica interna de la matemática, la utilidad ha venido después. Presentar las matemáticas como «algo» hecho y acabado, aparte de quitarles interés deja de lado el importante aspecto cultural de esta ciencia. Presentarlas desde el punto de vista histórico creemos que ayudará a verlas como «algo vivo», lo que facilitará su aprendizaje y lo hará más significativo.

Esta idea justifica la creación del Seminario Permanente como cauce de autoformación y de elaboración de actividades para el aula y como intento de dar al alumnado una visión de continuidad histórica en el desarrollo de los conceptos y conocimientos matemáticos.

Dada la amplitud del campo de estudio, decidimos centrarnos en los siguientes temas:

- Estadística y Probabilidad,
- Funciones y Gráficas,

justificando esta elección en la estructuración del curriculum de 3º y 4º de la ESO, cursos que impartimos durante este año académico los profesores y profesoras integrantes del grupo.

Metodología del trabajo

En primer lugar recopilamos la bibliografía disponible y seleccionamos los textos relativos a cada uno de los temas encauzando su estudio desde dos puntos de vista: uno de autoformación y otro de aplicación al aula.

Actividades desarrolladas dentro del aula

Dentro de las actividades propuestas, seleccionamos las siguientes:

1ª.- Introducción de problemas históricos en temas específicos. Por ejemplo, en el tema de Probabilidad se trabajaron:

- problema de la aguja de Buffon (anexo 1),
- problema de la partida interrumpida, propuesto por el Caballero De Meré a Pascal (anexo 2).

2ª.- Comentario de textos matemáticos adecuados al nivel del alumnado al que van dirigidos, y seleccionados de los textos relacionados en la bibliografía. (Referencias).

3ª.- Propuesta a los alumnos y alumnas de investigación sobre las biografías de los matemáticos que trabajaron los conceptos relacionados con los temas seleccionados, con posterior puesta en común.

4ª.- Como actividad puntual para conmemorar el Día de la Mujer Trabajadora, se propuso como actividad de grupo la investigación sobre mujeres que destacaron en el desarrollo de las matemáticas y las ciencias. Como resultado de estos trabajos y tras su exposición en clase, se elaboró un mural como resumen.

Paralelamente han ido surgiendo otras inquietudes que nos han llevado a abrir un archivo sobre la procedencia de la simbología y terminología matemática y otro sobre frases o dichos matemáticos.

Valoración

Personalmente valoramos de forma positiva el trabajo realizado, puesto que se han cumplido los objetivos propuestos. En particular, es notorio como los conocimientos adquiridos impregnan nuestro trabajo diario en el aula y repercuten en la motivación del alumnado.

Anexo 1: *El problema de la aguja de buffón.*

En el siglo XVIII el conde de Buffón (George Louis Leclerc) propone el siguiente problema con el que introduce una rama nueva conocida hoy en día como «PROBABILIDAD GEOMÉTRICA», y sobre la que has trabajado ya.

Aparte de buscar lo que sepas de este señor, ¿TE ATREVES CON EL PROBLEMA?

LA AGUJA DE BUFFON
«Al lanzar una aguja de 2 cm. de longitud sobre un papel con rayas paralelas separadas 4 cm. Debemos hallar la probabilidad de que la aguja quede tocando una de las rayas» .

Pregúntale a tu profesor o profesora, una vez experimentado el problema, a qué conclusión llegó Buffón.

Anexo 2: *Pascal. Problemas de las partidas propusto por el caballero de Meré.*

Dos jugadores A y B, apuestan uno contra otro la misma cantidad de dinero en un juego en el que el vencedor será aquél que primero gane tres partidas. Cuando el jugador A gana la primera partida, el juego se suspende por causas ajenas a los jugadores, y ante la imposibilidad de continuar se da por terminado. ¿Cómo se repartirá el total del dinero entre los dos jugadores?

Bibliografía

* GUZMÁN, M.; COLERA, J.; SALVADOR, A.- **Matemáticas. 1º de BUP**. Madrid, 1991.

* GUZMÁN, M.; COLERA, J.; SALVADOR, A.- **Matemáticas. 2º de BUP**. Madrid, 1992.

* GUZMÁN, M.; COLERA, J.; SALVADOR, A.- **Matemáticas, 3º de BUP**. Madrid, 1992.

* DE LA CRUZ, M.C.; GONZÁLEZ, C.; LLORENTE, J.- **Actividades sobre azar y probabilidad**, M.E.C. Narcea S.A. de Ediciones.

* BOYER, C.B.- **Historia de la Matemática**. Alianza Universidad, Madrid, 1986.

* COLETTE, J.P.- **Historia de las Matemáticas I y II**. Siglo XXI de España S.A., Madrid, 1985.

* ARGUELLES RODRÍGUEZ, J.- **Historia de la Matemática**. Akal, Madrid, 1989.

* GARETH ASHURST, F.- **Fundadores de las matemáticas modernas**. Alianza Editorial L.B., Madrid, 1985.

* ALIC,M.- **El legado de Hipatia**. Siglo XXI Editores.

* NEWMAN, J.R.- **Sigma. El mundo de las matemáticas**. Grijalbo, Barcelona, 1985.

* Revistas «SUMA» y «EPSILON».

Mª Encarna Aznar Sánchez
Angeles López Hernández
Pedro Antonio Martínez Azor
Ginés Parra Ruiz
Ana Sastre García
Seminario Permanente "Historia de las Matemáticas". CEP. Almanzora

A variabel sombra do sol

David Buján, Ana Otero, Antón Otero

Este traballo tén por obxetivo o dar resposta ás duas cuestións seguintes:

a) Por qué se produce o cámbio no *tipo de curvatura* das sombras dun obxeto nas distintas estacións do ano?

b) As curvas descritas polos extremos das sombras son cónicas?, de que tipo?

Como case sempre que se emprende unha busca como esta as preguntas anteriores dan pé, como se verá, a introducir outras cuestións derivadas delas. Compre facer, antes de empezar, unha pequena introducción ao tema que nos ocupa.

Introducción

Cun simples *gnomon* (un pao cravado verticalmente no chan) podese comprobar a variación na curvatura das sombras segundo as estacións:

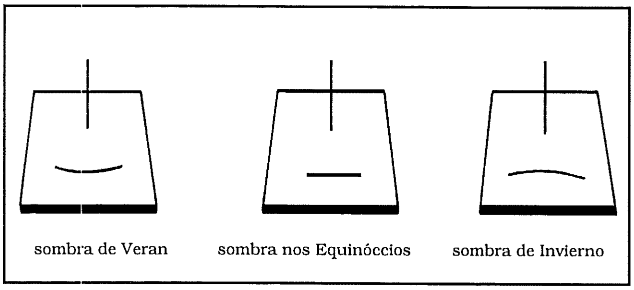


Figura 1. Válidas nas nosas latitudes

Este cámbio de curvatura só pode deber-se ás distintas alturas acadadas polo Sol ao longo do ano; mais, como pode por-se de manifesto este feito?

Ademais, estas curvas son as mesmas en todos os lugares da Terra?

Estas son algunhas das cuestións suscitadas pola práctica, pola observación experimental.

A variabel sombra do sol

E sabido que o Sol move-se polo Ecuador Celeste nos día de Equinóccio (aproximadamente os 21 de marzo e de setembro de cada ano), estando por riba do Ecuador en Primavera e Verán e sob del en Outono e Inverno.

Vexamos en primeiro lugar que sucede os días de Equinóccio. Neles o Sol describe un Círculo Máximo no ceo: o Ecuador Celeste e, por tanto, o plano da traxectória solar contén á Terra. O extremo da sombra está, xa que logo, no plano horizontal e no plano da traxectória solar. A intersección destes dous planos é *unha liña recta* que marca a dirección E-W ao ser intersección do Horizonte do Lugar e do Ecuador:

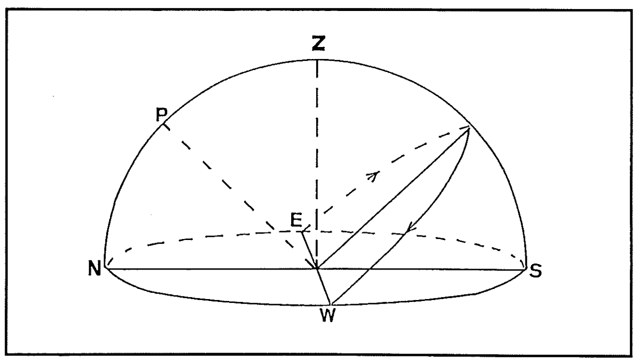


Figura 2. PN: Polo Norte Celeste. Z: Cenite. E: Este. W: Oeste. E-W: Liña de sombra.

Isto non depende para nada da *latitude do lugar* ou, dito con outras palabras: "A sombra nos días de Equinóccio segue unha liña recta en todos os lugares da Terra".

Experimentalmente podemos comprobar que hai unha distancia "d" entre esa recta e a base do *gnomon.*

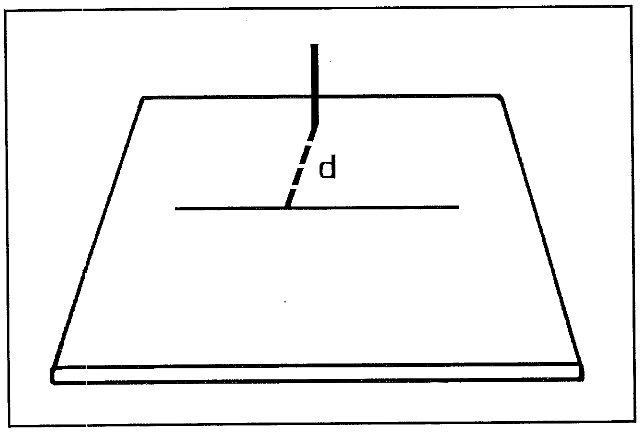


Figura 3

Parece natural preguntar-se se esa distáncia é a mesma en todos os lugares da Tera.

Tomemos en primeiro lugar como referéncia unha *latitude* de 90ºN. Como estamos no Polo Norte, nos días de Equinóccio o Sol está no Horizonte, así non hai sombras, ou falando en términos de Xeometría Proxectiva, a sombra percorre a Recta do Infinito.

No outro caso extremo (*latitude* 0º: Ecuador) nos días de Equinóccio ás 12 do mediodía o Sol pasa polo Cenite así que o extremo da sombra (inexistente nese instante) coincide coa base do *gnomon* e "d" pasa a ser 0. A situación aclarase na figura:

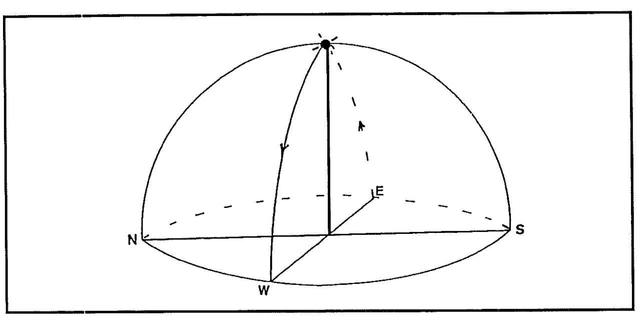


Figura 4

Agora ben, en latitudes intermedias canto maior sexa a Latitude máis baixo estará o Ecuador sobre o Horizonte. Deste xeito a recta que percorren os extremos das sombras estará máis afastada da base do *gnomon* canto maior sexa a *latitude do lugar.* A situación visualiza-se na figura:

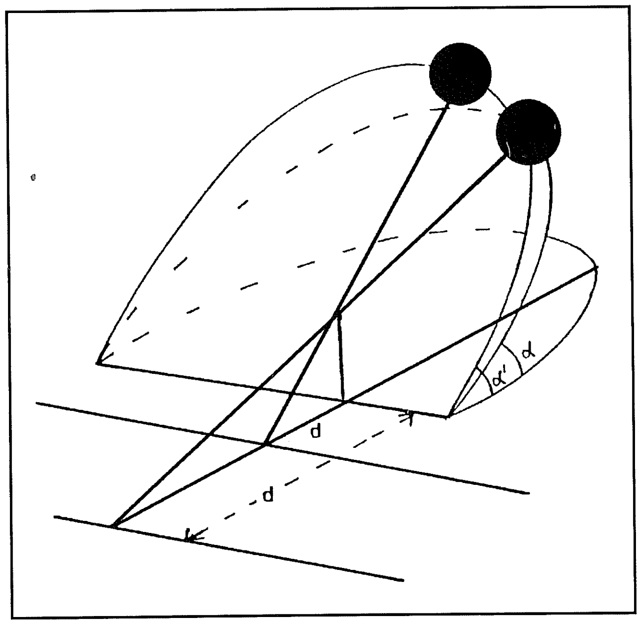


Figura 5

e son as *colatitudes do lugar.* Como > temos que *d'<d,* así a maior *latitude,* maior distáncia.

Por tanto e como conclusión deste apartado podemos sinalar:

"Os extremos da sombra do gnomon percorren unha recta nos días de Equinóccio con independéncia de latitude, mais canto maior sexa esta máis se afastará esa recta da base do gnomon".

E os demais dias?

Supoñamos agora o Sol movendose(*) nun Paralelo Celeste distinto do Ecuador. Vexamos que o extremo da sombra percorre traxectórias que dependen da *latitude* e da estación do ano.

Se a *latitude do lugar* e de 90ºN (Horizonte=Ecuador), cando o Sol está por debaixo do Horizonte (Outono e Inverno) non hai, evidentemente, nengún tipo de sombra. Na Primavera e Verán o Sol está sobre o Horizonte e movese nun círculo paralelo a el. Este círculo forma coa ponta do *gnomon* unha superficie cónica da que os ráios solares son as xeratrices, a intersección da prolongación dos mesmos co Horizonte produce un *novo círculo*, o formado polos exremos das sombras:

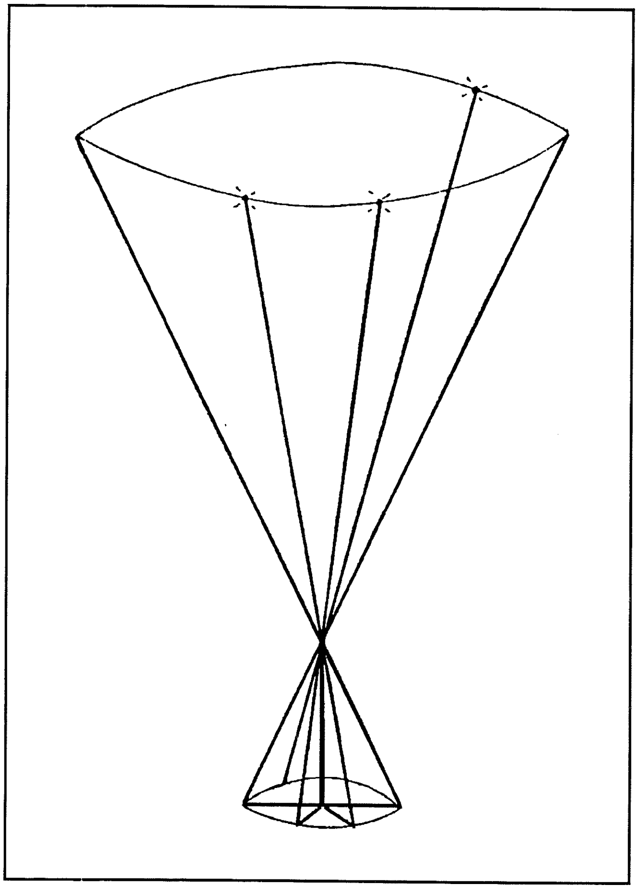


Figura 6

Situandonos por riba do Ecuador (0º< <90º) pode suceder duas cousas:

a) En Primavera e Verán o Sol está por riba do Ecuador. Supoñamos que o seu percorrido é o do Paralelo "FACD" da figura:

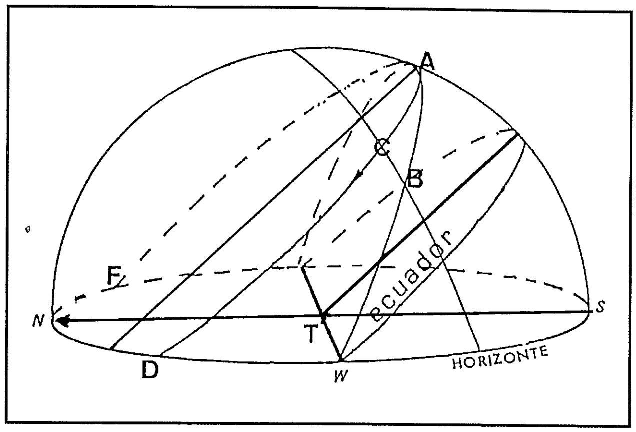


Figura 7

Sexa "EABW" o círculo máximo que interseca ao Paralelo citado en "A" (Figura 7). Se o Sol se movese por ese círculo máximo o extremo da sombra seguiría unha recta a unha determinada distáncia "d" da base do *gnomon* (Figura 8). Como a traxectória apaente do Sol está por riba do círculo máximo citado os extremos das sombras deben aproximar-se máis á base do *gnomon* que a antedita recta. Portanto a traxectória será a curva (mais próxima á base do *gnomon*) da anterior Figura ("B") que só coincide coa recta no ponto "A".

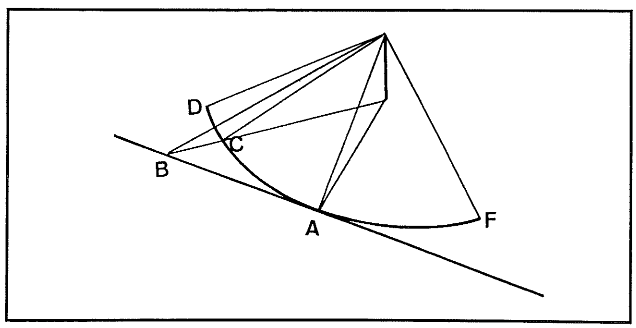


Figura 8

(*) En todo este traballo supon-se ao Sol xirando en circulos arredor da Terra.

b) No Outono e Inverno o Sol está por debaixo do Ecuador e o seu percorrido é como o do Paralelo "FACD" da figura:

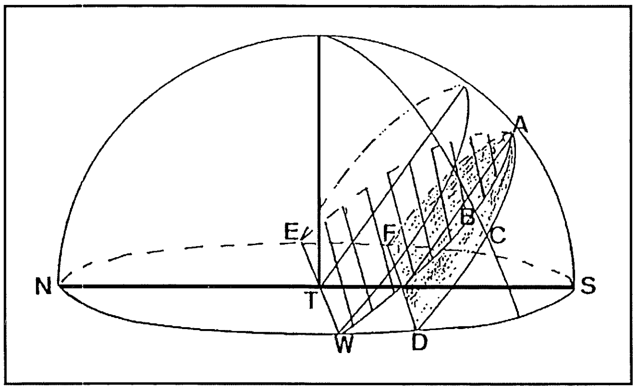


Figura 9

Se o Sol estive-se movendo-se no círculo máximo "EABW" que ten en común co anterior o ponto "A", o percorrido dos extremos das sombras sería unha liña recta. Como o Paralelo "FACD" está máis baixo que o citado círculo máximo a sombra debe estar *máis lonxana da base* do *gnomon* que esa recta, feito representado na seguinte figura:

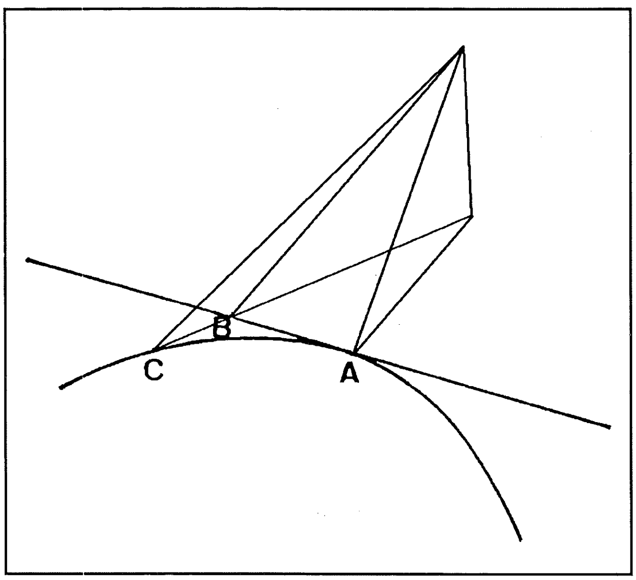


Figura 10

Como casos particulares podemos estudar o seguintes:

1) Nas nosas latitudes na Primavera e Verán a sombra corta á liña E-W dado que o Sol sae polo Nordeste e pon-se polo Noroeste.

No Outono e Inverno a sombra pola contra non chega cortar á liña E-W como se indica nas figuras:

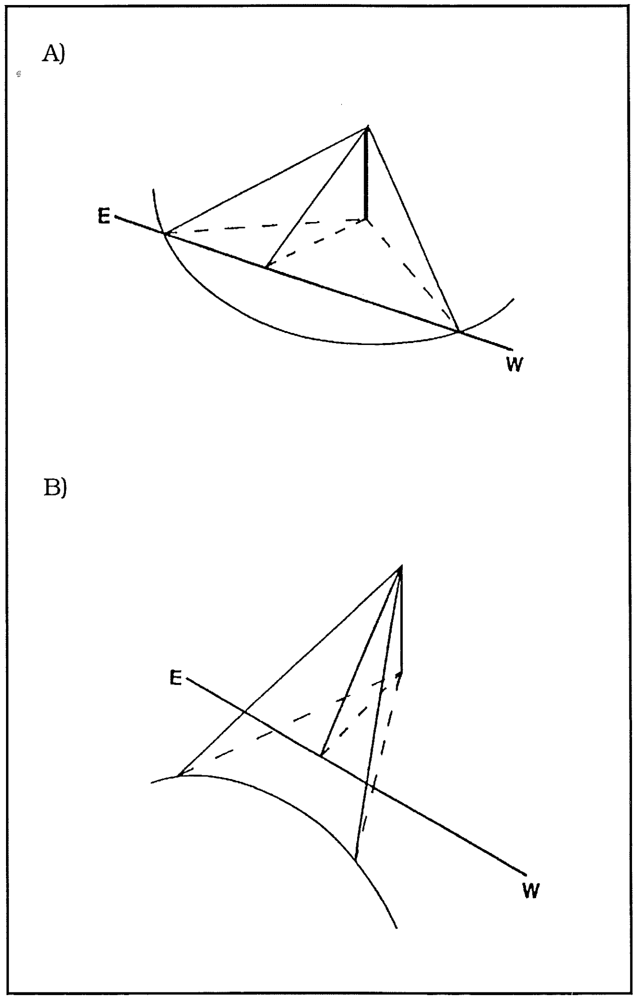


Figura 11

2) Se a *latitude* é de 23º 27'N (Trópico de Cáncer), o día do Solstício de Verán o Sol está no Cenite a mediodía e nese momento o *gnomon* non produce

sombra. Agás nese instante, como o Sol está na semiesfera definida polas direccións "ENW", a sombra está no semiplano horizontal "ESW".

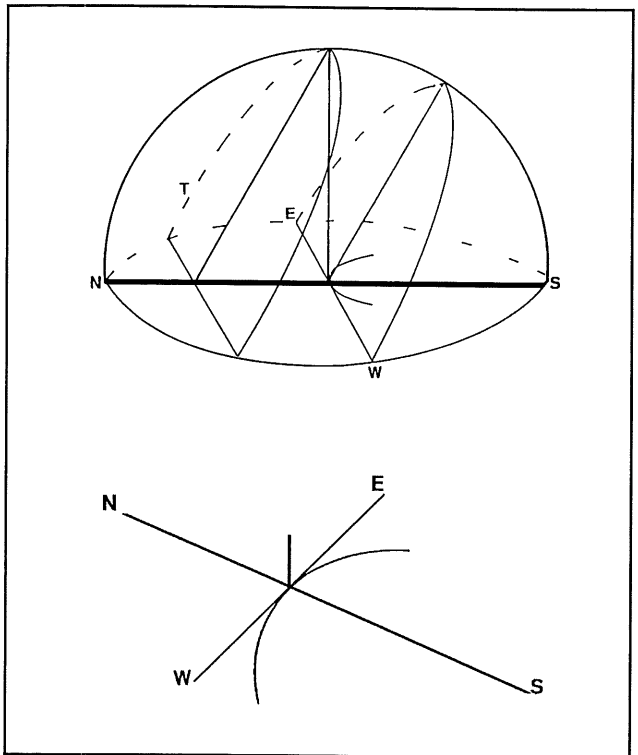


Figura 12

3) Na zona subtropical e segundo a Latitude durante a Primavera e Verán produce-se as sombras da figura:

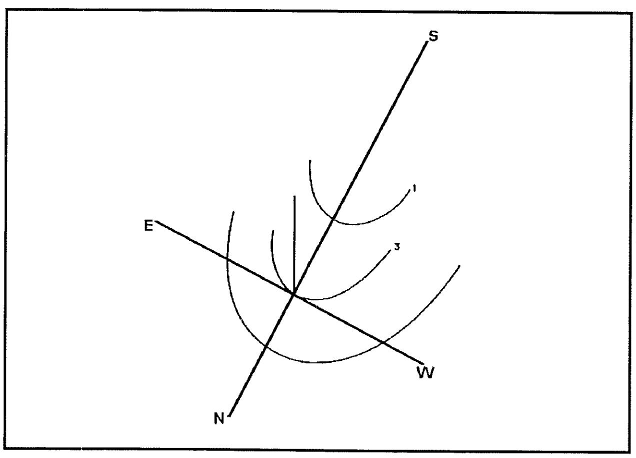


Figura 13

Sendo do tipo 1) os días próximos ao Solstício e do tipo 2) os días próximos ao Eqinóccio; do tipo 3) son o día que o Sol pasa polo Cenite.

Finalmente no Ecuador a sombra produce-se no semiplano "ENW" no Inverno e Outono eno semiplano "ESW' na Primavera e Verán sendo unha recta como xa vimos, os días de Equinóccio.

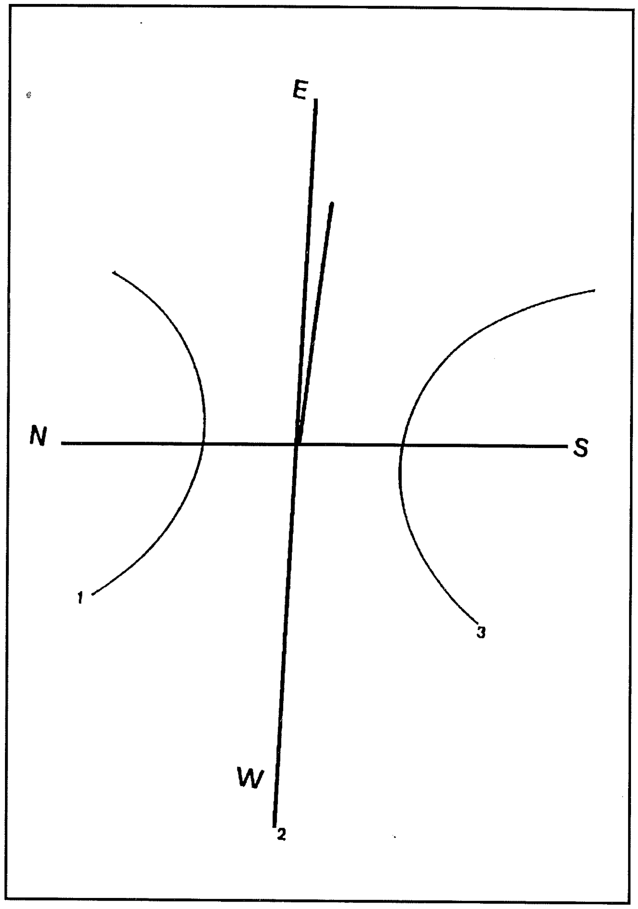


Figura 14

A respeito do tipo de curvas descrito polas sombras, no anterior vimos xa un caso. Nefeito, no Polo Norte na Primavera e Verán as sombras descreben *CIRCULOS*:

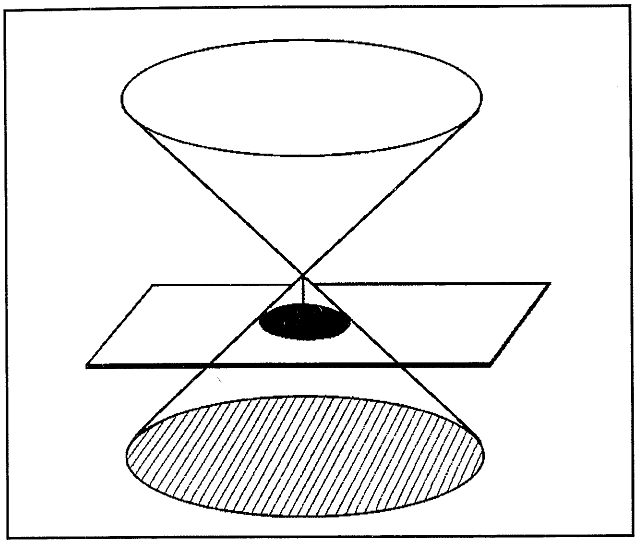


Figura 15

Mais o tipo de cónica varia como imos ver de seguido.

En lugares situados máis arriba do Círculo Polar Artico (66º 33'< <90º) cando o Sol está por riba do Horizonte as 24 horas do día, por exemplo no Solsticio de Verán, o Plano do Horizonte interseca á superficie cónica xerada polos ráios do Sol coa ponta do *gnomon* segundo un plano que corta a todas as xeratrices sen ser paralelo á base. Trata-se así dunha *ELIPSE* segundo mostra a seguinte figura:

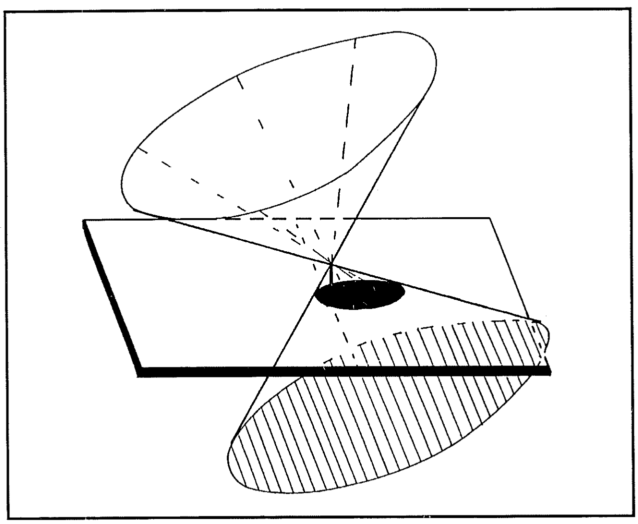


Figura 16

Válida para latitudes comprendidas entre 66º 33'e 90º.

Cando o Sol se move tanxencialmente ao Horizonte sendo visibel as 24 horas do día (por exemplo: no Círculo Polar Artico o día do Solstício de Verán) a cónica descrita polos extremos das sombras será unha *PARABOLA*:

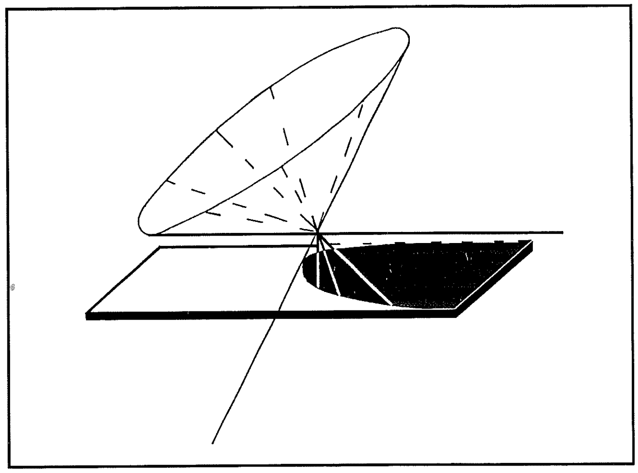


Figura 17

Finalmente en latitudes menores (0º< <66º 33') as sombras descreben cónicas do tipo *HIPERBOLA*. Neste caso a superficie cónica determinada polo extremo da ponta do *gnomon* e o camiño aparente do Sol, camiño que está parte del por riba do Horizonte e parte baixo este, corta ao Plano do Horizonte duas veces descrebendo nas catro estacións do ano as duas ramas dunha *HIPERBOLA*.

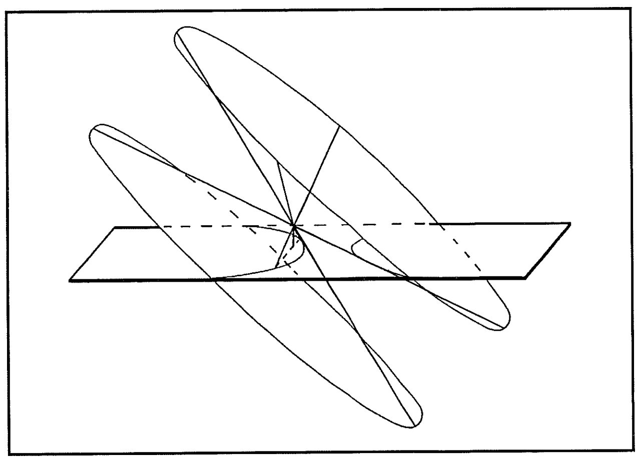


Figura 18

David Bujón/Ana Otero/Antón Otero
I.B. de Cambre/I.B. de Adormideras/I.B. de Monelas. A Coruña

Funciones Polinómicas

José Mª Menéndez Lobato

De todos son conocidas las dificultades que nuestros alumnos y alumnas experimentan con este bloque temático a pesar de haber iniciado su estudio al final de la etapa de E.G.B.

La experiencia constata que, lejos de ser solucionadas, dichas dificultades se presentan de nuevo en cursos posteriores, a pesar de ser ampliado y formalizado el concepto de función.

En el presente trabajo, se propone como una alternativa metodológica válida, frente a actividades de lectura e interpretación de gráficas, la utilización de la aplicación informática G.C.

Sus mínimos requerimientos de tipo hardware: una disquetera de 5 1/4 de doble densidad -360 K- y tarjeta gráfica CGA, y su facilidad de ser adaptada a las necesidades del profesor la posibilitan como una herramienta de amplio uso en el aula.

Presentación

De todos son conocidas las dificultades que nuestros alumnos y alumnas experimentan con este bloque temático a pesar de haber iniciado su estudio al final de la etapa de E.G.B. Si bien, en cursos posteriores, se amplia y formaliza el concepto de función dichas dificultades, lejos de ser solucionadas, se presentan de nuevo.

Estas se refieren a actividades de los tipos siguientes:

a) Lenguaje algebraico.
- Verificar, a partir de sus coordenadas, si un punto dado satisface una ecuación dada.
- Determinar, dada una ecuación, sus elementos característicos: pendiente, vértice, puntos de corte, etc.

b) Lenguaje gráfico.
- Verificar, a partir de las coordenadas de un punto dado, si pertenece a una gráfica dada.
- Determinar imágenes, antiimágenes y coordenadas de puntos a partir de una gráfica dada.
- Deducir elementos característicos en una situación gráfica dada: pendiente, ordenada en el origen, vértice, puntos de corte, etc.

y las consecuentes tareas de traducción de un lenguaje a otro. Así se pueden mencionar, entre otras, las siguientes:

- Deducir ecuaciones a partir de situaciones gráficas dadas.
- Verificar si una ecuación dada corresponde a una situación gráfica dada.

En el presente trabajo, se propone como una alternativa metodológica válida, frente a actividades de lectura e interpretación de gráficas, la utilización, basada en la metodología de ensayo-error, de la aplicación informática G.C.

Este programa nos proporciona un planteamiento gráfico de parte de los contenidos del actual Bachillerato (y de la E.S.O.), así como incursiones en niveles superiores. Así, entre otras, cabe mencionar las siguientes aplicaciones:

- Búsqueda de funciones cuya expresión corresponda con una situación gráfica dada.
- Representación gráfica de una función determinada, dada de manera explícita, con posibilidad de efectuar Zoom para un estudio más detallado.

- Construcción y cálculo, a partir de unos valores dados de la variable independiente y del incremento, de la tabla de valores, de incrementos, los valores de la derivada en los puntos correspondientes, y las respectivas secantes.
- Estudio de la variación, en un intervalo, de la función pendiente.
- Representación y cálculo aproximado del área delimitada, en un intervalo, por la gráfica de una función y el eje de abscisas, incluyendo los métodos de los trapecios y de Simpson.
- Estudio de la variación de la función superficie.
- Resolución de ecuaciones numéricas por los métodos de bisección, regula-falsi, Newton-Raphson y f(x)=x.
- Cálculo de los términos del polinomio de Taylor de una función.
- Representaciones paramétricas y en tres dimensiones.

Veamos seguidamente las facilidades de dicho programa que han sido objeto de uso en la experiencia llevada a cabo:

Opción 1 (*Buscar expresión de funciones*).

Permite deducir la expresión matemática correspondiente a la función cuya gráfica se nos muestra en pantalla. Se puede elegir entre dos niveles de dificultad (inicial y medio) y trabajar, según el nivel, con hasta 7 tipos distintos tanto algebraicas como trascendentes.

Elegido el nivel y tipo deseado de función se nos requiere para que introduzcamos el ordinal de la función a probar. Acto seguido se nos muestra, en pantalla, una gráfica a la espera de que se introduzca una expresión. Si la expresión introducida corresponde con la gráfica mostrada presenta el correspondiente mensaje mostrando su gráfica, junto con la de prueba. En caso contrario permite probar nuevamente limpiando, previamente si se desea, la pantalla. Si se elige la opción de no limpiar la pantalla podremos tener, simultáneamente, en pantalla cada uno de los sucesivos intentos lo cual es útil para realizar aproximaciones sucesivas.

Una vez acertado, si se pulsa retorno, nos pedirá un nuevo número para probar con otra función. Caso de no acertar y, si pulsamos ESC, nos pedirá nuevo nivel, tipo y número para probar con otra función.

Una característica muy interesante de este programa es que, en cada nivel, los tipos de funciones a probar, el número total de funciones y sus expresiones matemáticas están contenidos en uno de los ficheros del disco, funcion.txt. Este fichero es un fichero ASCII lo cual permite su fácil modificación por parte del profesor. Sin duda este será uno de los aspectos que mas valorará el profesorado que se anime a su utilización en el aula. Asimismo, el número de intentos también. Para ello solo habrá que especificarlo en la opción Opciones del menú principal.

Opción 2 (*Dibujar gráficas*).

Muestra en pantalla la gráfica de una función dada, en unos intervalos dados de las variables independiente y dependiente (que puede ser una ya analizada con otras opciones utilizada en la misma sesión).

Permite realizar, para una función dada, las siguientes actividades:

- Obtener, a partir de una abscisa dada, la ordenada del punto correspondiente de la gráfica.
- Obtener, a partir de un valor inicial y un incremento dados de la variable independiente, la tabla de valores.
- Efectuar Zoom para ampliar una zona determinada. Para ello se deberán marcar dos esquinas diametralmente opuestas con la tecla Retorno, utilizando para ello las teclas de movimiento del cursor para posicionarse en los lugares deseados. Puede seleccionarse movimientos más rápidos, activando la tecla BloqNum.
- Modificar el dominio de las variables independiente y dependiente.

Puede trabajar con hasta 20 funciones, visualizándose simultáneamente con diferentes colores según las capacidades de la tarjeta gráfica instalada. En todo caso, solo una es activa y es sobre esta sobre la que actuaran las distintas opciones elegidas. Evidentemente, se puede cambiar de función activa.

Opción 3 (*Ampliar*).

Permite representar gráficamente y efectuar un estudio detallado, en unos intervalos dados de las variables independiente y dependiente, de una función dada (que puede ser una ya analizada con otras opciones utilizada en la misma sesión).

Permite realizar las siguientes actividades:

- Mover un cursor situado sobre la gráfica, mostrando las coordenadas de dicho punto. La magnitud del desplazamiento del cursor puede ser fijada por el usuario, en el intervalo (10^{-10}, 10^{5}).
- Mostrar, simultáneamente con la gráfica, la ampliación de una zona determinada, centrada en dicho cursor.

  Si, previamente, se delimita la zona a ampliar (con las dos opciones de zoom, correspondientes a aproximación o alejamiento) el zoom se efectuará con relación a esta, en caso contrario se centrará con relación a la posición del cursor. Cuando se esta delimitando la zona deseada el programa calcula automáticamente el factor correspondiente (comprendido en el intervalo (10^{-18}, 5.10^{11}), por defecto es 2). A mayor aumento, evidentemente, menor zona ampliada. La zona marcada se puede desplazar sobre la gráfica.

- Introducir una función extra, que nos permitirá (al ir moviendo el cursor) comparar las ordenadas correspondientes en ambas funciones, para un valor de abscisa dado.
- Modificar el dominio de las variables independiente y dependiente.

Por ultimo es de destacar que si bien esta aplicación no tiene toda la calidad deseable, en cuestión de presentación en pantalla, sus requerimientos de tipo hardware son mínimos (una disquetera de 5 1/4 de doble densidad -360 K- y tarjeta gráfica CGA) y cumple satisfactoriamente con los objetivos propuestos.

Descripción de la experiencia

Objetivos

Como se ha comentado previamente, se pretendía incidir en la lectura e interpretación de gráficas, con el objeto de desarrollar las siguientes capacidades y procedimientos:

a) Dada una gráfica:
- Verificar, a partir de las coordenadas de un punto dado, si este pertenece a la gráfica.
- Determinar imágenes, antiimágenes y coordenadas de puntos de la misma.
- Deducir los elementos característicos de dicha representación: pendiente, ordenada en el origen, vértice, puntos de corte, etc.
- Deducir la ecuación correspondiente.

b) Dada una expresión matemática:
- Verificar, a partir de las coordenadas de un punto dado, si este satisface dicha ecuación.
- Determinar sus elementos característicos: pendiente, vértice, puntos de corte, etc.
- Verificar si dicha ecuación corresponde a una situación gráfica dada.

Metodología

Eminentemente práctica y motivadora debido al propio carácter del material utilizado. A partir del desarrollo de algunas cuestiones generales relativas al concepto de función, llevado a cabo en la propia clase con soporte papel y pizarra de una manera intuitiva y gráfica, se procedió en una sesión previa, desarrollada en el aula de Informática, a mostrar a los participantes (un grupo de 1º de B.U.P.) el programa a utilizar así como las opciones del mismo a utilizar posteriormente.

Por ultimo, a lo largo de diversas sesiones, se le fueron entregando a los participantes distintas hojas de actividades a realizar en el aula de Informática.

Contenidos desarrollados

- Generalidades sobre funciones: concepto, gráfica, simetría, crecimiento/decrecimiento.
- Funciones polinómicas.
- Función polinómica de 1er grado. Pendiente y ordenada en el origen. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Función polinómica 2º grado. Vértice de la parábola. Puntos de corte con los ejes de coordenadas. Tasa de variación.

Actividades desarrolladas

Se adjuntan las hojas entregadas a los participantes, relativas a la utilización del programa y a la fase de traducción entre los lenguajes algebraico y gráfico (sin el uso del programa).

En las hojas donde se hace uso de la facilidad del programa de preguntarnos por la expresión correspondiente a una gráfica dada, se prepararon secuencias de funciones de dificultad creciente y que hacían intervenir los distintos elementos paulatinamente.

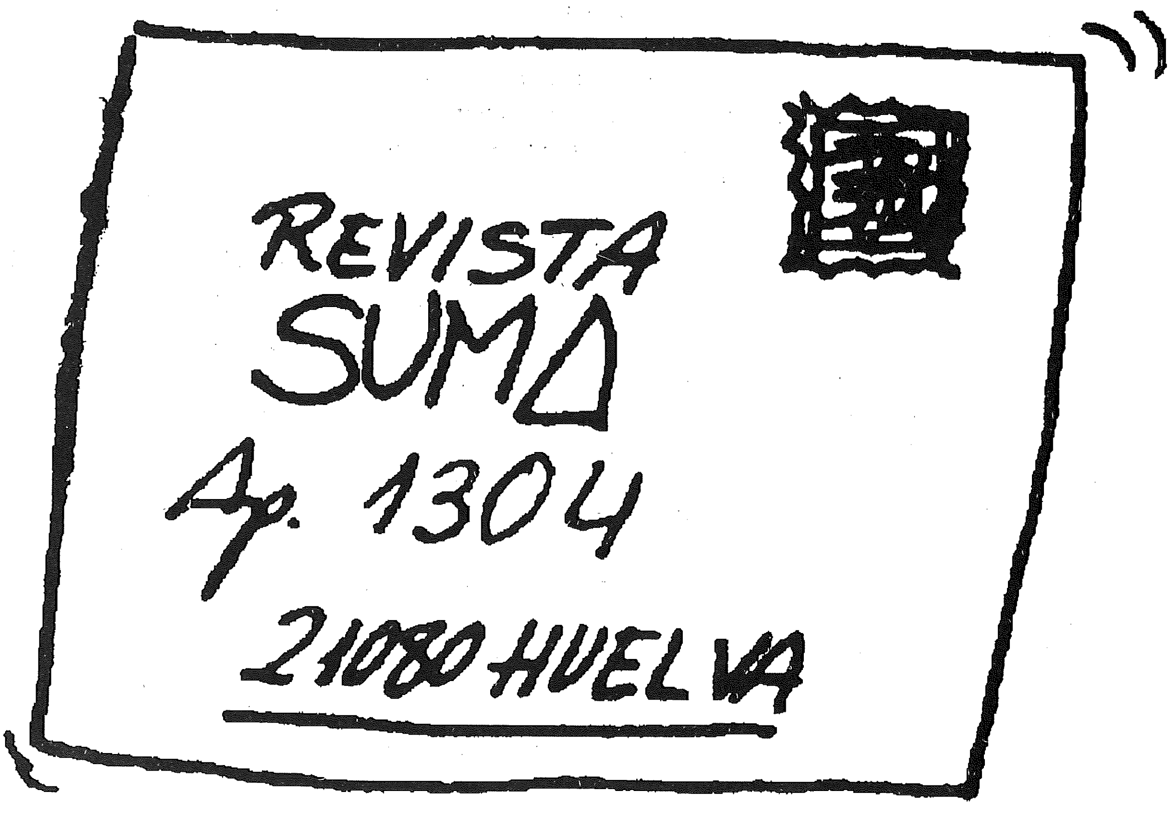
Evaluación de la experiencia

La metodología y material utilizado han permitido llevar a cabo un tratamiento eminentemente práctico, gráfico e intuitivo, de los contenidos desarrollados, potenciando el trabajo en equipo y «obligando» a alumnos y alumnas que en el desarrollo de una clase sin esta herramienta hubieran sido pasivos a actuar de una manera mas positiva.

Por otra parte, la figura del profesor como algo infalible ha quedado relegada a un segundo plano permitiendo que cada alumno, a partir del propio ritmo de aprendizaje, haya podido redescubrir por si mismo resultados que de otra manera hubiera tenido que asumir de manera mas dogmática (porque lo dice el profesor).

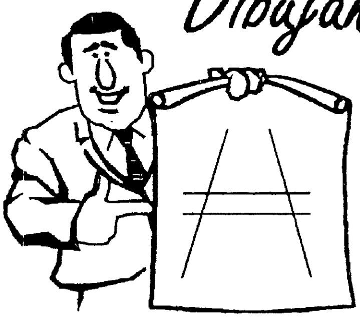
Por lo que, en definitiva, el resultado de la experiencia ha sido altamente satisfactorio para todos los implicados.

José Mª Menéndez Lobato
I.B. Azahar (Sevilla)



Dibujando líneas

Funciones Polinómicas-1



- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x$, para valores de x e y desde -3 hasta 4.

- Obtén, para dicha función, la siguiente tabla de valores: desde un primer valor de -3, de la variable independiente x, con incremento 1 y ocho en total.
  Compara cada pareja de valores de dicha tabla con los puntos de la gráfica.

- ¿Puedes decir el valor de la variable dependiente y que correspondería a $x = 5$?
  ¿Coincide con el valor que te proporciona el programa? Si no es así, razona dónde puede estar tu error.

- Considera, ahora, la función $f(x) = 2x$. Obtén su gráfica y su tabla de valores.

- Muevete por la gráfica y observa las coordenadas de los puntos por donde pasa (los valores mostrados son los mismos que en la tabla de valores).

- ¿Cuál sería la ordenada del punto correspondiente a la abscisa $x = 6$? ¿Coincide con el valor mostrado por el programa? En definitiva, tendrías que poner:

  $P\,(6,\quad)$

- ¿Cuál sería la abscisa del punto correspondiente a la ordenada $y = 20$? Te proporciona el programa el valor 20 como ordenada correspondiente a la abscisa que has calculado? En definitiva, completa $Q\,(\quad, 20)$.

- Considera la función $f(x) = -(1/4)x$. Determina un par de puntos de su gráfica:

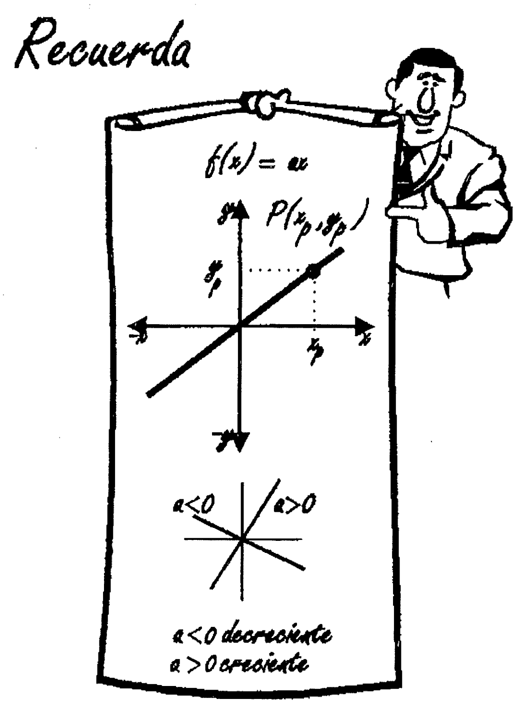
$$P(\ ,\ ),\ Q(\ ,\ )$$

- Dibuja las siguientes funciones:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = 3x \\ f(x) = (3/4)x \\ f(x) = -2x \\ f(x) = -3x \\ f(x) = -(2/3)x \end{array}\right.$$

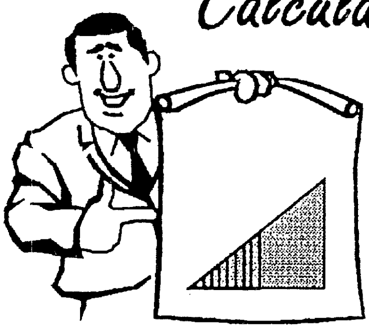
¿Cumplen alguna propiedad las tres primeras gráficas?
¿Y las tres últimas?
Es decir:

Pasan por el punto ______________________________
Si el coeficiente que acompaña a x es >0 las gráficas son: ______________
Si el coeficiente es <0 las gráficas son: ____________________

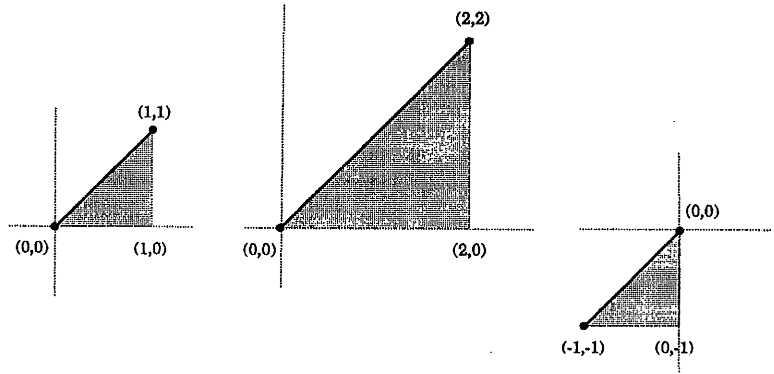


Funciones Polinómicas-2

Calculando pendientes



- Dibuja la gráfica de la función *f(x)* = *x*, para valores de *x* e *y* comprendidos entre -3 y 4. Observa que puedes considerar (imaginariamente) las siguientes figuras:



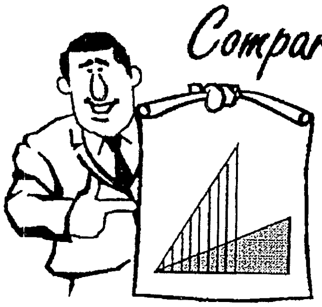
donde los puntos indican puntos respectivos de la gráfica de la función.
Comprueba que al dividir, en los tres triángulos rectángulos, la medida del cateto vertical por la del cateto horizontal se obtiene una cantidad constante.

☞ Medida del cateto vertical: diferencia de ordenadas.
Medida del cateto horizontal: diferencia de abscisas.
Caso en que un extremo de la hipotenusa sea el origen: coordenadas del otro extremo.

Compara el valor obtenido anteriormente con el coeficiente de *x* , en la expresión de dicha función.

- Considera, ahora, la función *f(x)* = -2*x*. Haz un estudio similar. ¿Cuál es el valor obtenido en este caso?

Comparando pendientes

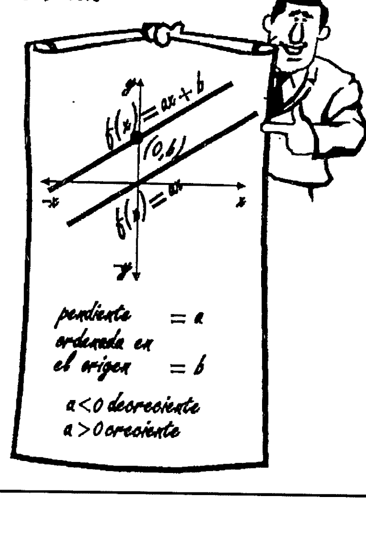


- Considera la función $f(x) = x$. Obtén su gráfica.
  Compara, ahora, la gráfica de la función $g(x) = 2x$ con la anterior.
  Considera los puntos, en ambas gráficas, correspondientes a la abscisa $x = 1$.
  ¿Qué pasa con el valor de la ordenada en el 2º caso, con relación al primero?
  ¿Qué pasa con las correspondientes pendientes?
  ¿Y con las gráficas de las funciones?
  Haz lo mismo para $x = 2$ y para $x = -3$.
  Repite el proceso para $h(x) = 3x$.

- Considera la función $f(x) = 2x$. Obtén su gráfica.
  Compara la gráfica de la función $g(x) = 2x + 3$ con la anterior.
  ¿Qué pasa con las correspondientes pendientes? ¿Y con las gráficas de las fuciones?
  ¿Qué punto corresponde en la gráfica de la 2ª función al valor $x = 0$?

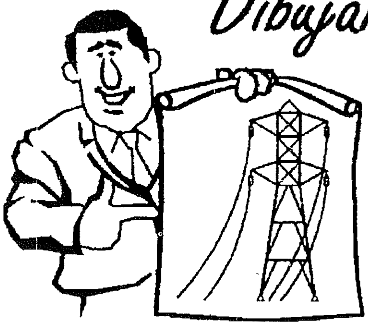
- Pide al programa que te muestre gráficas de funciones y busa la expresión matemática que corresponda a cada caso.

Recuerda



Funciones Polinómicas-3

Dibujando líneas



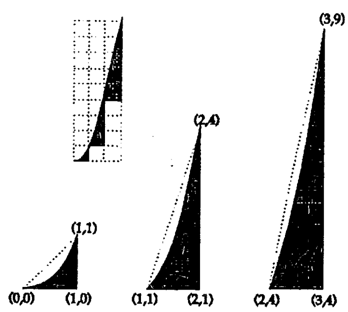
- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2$, para valores de x e y desde -3 hasta 4.

- Obtén, para dicha función, la siguiente tabla de valores: desde un primer valor de -2, de la variable independiente x, con incremento 1 y cinco en total.
  Compara cada pareja de valores de dicha tabla con los puntos de la gráfica.

- Muevete por la gráfica y observa las coordenadas de los puntos por donde pasa (los valores mostrados son los mismos que en la tabla de valores).

- ¿Puedes decir el valor de la variable dependiente $f(x)$ que correspondería a $x = -4$?
  ¿Coincide con el valor que te proporciona el programa? Si no es así, razona dónde puede estar tu error.

- Comprueba que la *tasa de variación* es, a partir de $x = 0$, mayor (crece) tanto más deprisa cuanto más a la derecha estemos. Para ello considera las siguientes figuras:

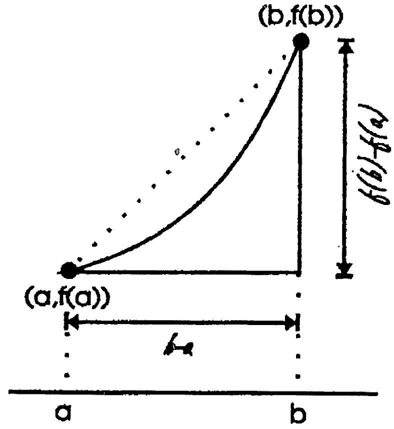


y calcula las pendientes de los segmentos de recta punteados.

☞ En general, definimos la tasa de variación, de la función, en el intervalo [a,b] como el valor del siguiente cociente:

$$TV_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

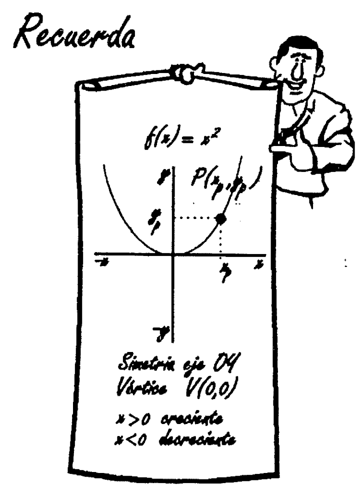
cuya interpretación gráfica es:



teniendo el mismo valor que la pendiente del segmento de recta punteado que une los dos puntos de la gráfica *(a, f(a)), (b, f(b))*.

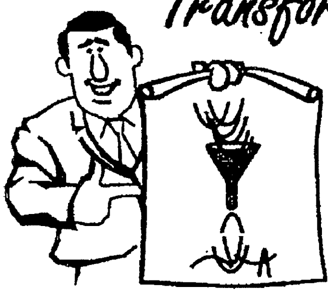
- Compara los valores de la ordenada correspondientes a las abscisas $x = -2$ y $x = 2$.
  ¿Ocurre lo mismo para otros valores de la abscisa?
  ¿Cumple alguna propiedad especial dicha gráfica?

☞ Simétrica respecto del eje: ______________________
Vértice en el punto: ______________________



Funciones Polinómicas-4

Transformando gráficas



- Considera, ahora, la función $f(x) = (x-2)^2$. Obtén su gráfica y su tabla de valores.
  ¿Cuál sería la ordenada correspondiente a la abscisa 0? Por tanto, pasa por el punto P (0,   ).
  Comparala con la gráfica de la función $f(x) = x^2$.
  ¿Observas alguna propiedad destacable?
  Comparalas con la de la función $f(x) = x^2 - 2$. ¿Cuál sería la ordenada correspondiente a la abscisa 0 en este caso? ¿Por qué punto pasa?

- ¿Cuál de las funciones consideradas anteriormente tiene una gráfica que se obtenga a partir de la de $f(x) = x^2$ mediante una traslación vertical? Dicha traslación es ¿hacia arriba o hacia abajo?

- ¿Cuál de la funciones consideradas anteriormente tiene una gráfica que se obtnga a partir de la de $f(x) = x^2$ mediante una traslación horizontal? Dicha traslación es ¿ hacia la izquierda o hacia la derecha?

- Repite el proceso anterior para las funciones:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = (x+1)^2 \\ f(x) = (x-2)^2 - 3 \\ f(x) = (x+1)^2 + 3 \end{array}\right.$$

- Representa las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y aquellas, de las anteriores, que sean trasladadas horizontalmente de ellas. ¿Cuándo la traslación es hacia la derecha? ¿Cuándo hacia la izquierda? Haz los mismo con las trasladadas verticalmente. ¿Cuándo es hacia arriba? ¿Cuándo hacia abajo?

☞ El vértice de $f(x) = (x-u)^2 + v$ es $V(u, v)$.

- Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$. ¿Podrías haber localizado ahora el vértice tu mismo?

☞ Tendrás que convertir su expresión en una de las del tipo anterior:

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \cdot 2 \cdot x + 5 = [x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4] + 5 =$$
$$= [x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4] - 4 + 5 = (x - 2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

En todo caso, ten en cuenta lo siguiente:

$$(x - u)^2 + v = x^2 + u^2 - 2ux + v = x^2 - 2ux + u^2 + v$$

y, por tanto, si deseas poner $x^2 + px + q$ en dicha forma, lo que tendrás hacer es resolver:

$$\begin{cases} -2u = p \\ u^2 + v = q \end{cases}$$

de donde se pueden obtener u y v.

- Representa gráficamente la función $f(x) = 2x^2$. ¿Cómo es su gráfica en comparación con la de $f(x) = x^2$? En lugar de estrecharse, una gráfica podría abrirse. ¿Podrías decir que gráfica es más estrecha que la de $f(x) = x^2$ en un factor de (1/2)? Obtén su gráfica y compruébalo. ¿Y para un factor de -3?

- Representa gráficamente la función $f(x) = 3x^2 - 12x + 3$. ¿Es más ancha de lo "normal" o más estrecha? ¿Puedes decir cuál es su vértice?

☞ Tendrás que ponerla en la forma $a(x - u)^2 + v$, por lo cual:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 3 = 3[x^2 - 4x + 1] = 3[x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4 + 1] =$$
$$= 3[x^2 - 4x + 4 - 3] = 3[(x - 2)^2 - 3] = 3(x - 2)^2 - 9$$

o bien, como:

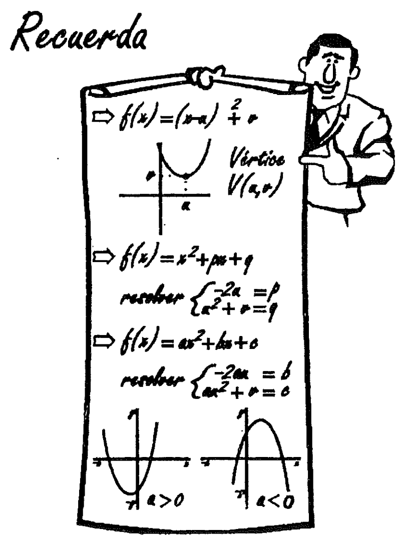
$$a(x - u)^2 + v = a(x^2 - 2ux + u^2) + v =$$
$$= ax^2 - 2aux + au^2 + v$$

si deseas poner $ax^2 + bx + c$ en la forma $a(x - u)^2 + v$ tendrás que resolver:

$$\begin{cases} -2au = b \\ au^2 + v = c \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \cdot 3 \cdot u = -12 \\ 3 \cdot u^2 + v = 3 \end{cases}$$

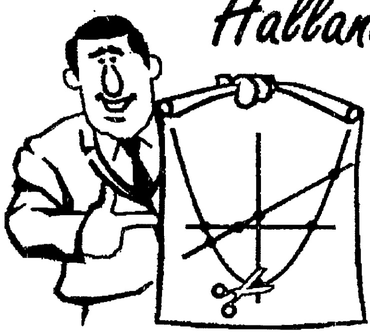
de donde obtendrías, igualmente, los valores -2 y 9.

- Pide al programa que te muestre distintas gráficas y busca la expresión matemática que corresponda a cada caso.



Funciones Polinómicas-5

Hallando cortes



- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 4x$ y di cuál es el punto de corte con el eje de ordenadas. ¿Y con el eje de abscisas?
  Haz lo mismo para la función $f(x) = - 3x + 2$. ¿Cuál sería la ordenada correspondiente a la abscisa ¿Podrías haber determinado las coordenadas de dichos puntos sin apoyarte en ninguna figura?

☞ f(x) = ax + b

Punto de corte con el eje de ordenada es *(0, f(0))*. Por tanto dale a *x* el valor *0* y obtén *f(0)*.
Punto de corte con el eje de abscisas es *(x,0)*. Por tanto dale a *f(x)* el valor *0* y despeja *x*.

- Representa la gráfica de la función $f(x) = 3x2$ y di cuáles son los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.
  Haz lo mismo con las funciones siguientes:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \\ f(x) = x^2 - 3x \\ f(x) = x^2 - x - 2 \\ f(x) = (4/3)x^2 + (4/3)x - (8/3) \end{cases}$$

¿Podrías haber calculado sus coordenadas sin apoyarte en ninguna figura?

☞ El procedimiento anterior sigue siendo válido pero, además, observa que, para hallar dichas raíces, puedes hacer operaciones transformando la expresión inicial:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x^2 - 3x = x(x - 3)$$

o factorzar el polinomio correspondiente:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$
$$(4/3)x^2 + (4/3)x - (8/3) = (4/3)(x + 2)(x - 1)$$

obteniendo expresiones de donde se deducen rápidamente las abscisas correspondientes a los puntos buscados. Luego basta calcular las ordenadas respectivas.

- Obtén las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = (x + 1)^2 - 3$ y determina las coordenadas de los puntos de corte.

- Haz lo mismo para las funciones siguientes:

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ g(x) = x^2 - 2 \end{cases}$$

☞ Estos dos últimos ejemplos te proporcionan un procedimiento gráfico para la resolución de cualquier ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ de 2º grado:

divides por a todos los términos de la ecuación obteniendo $x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$ que se puede escribir poniendo $(b/a) = -p$; $(c/a) = -q$, en la forma $x^2 - px - q = 0$, o bien $x^2 = px + q$.
Los valores de x que tienen la misma ordenada en ambas funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = px + q$ verifican la ecuación $x^2 = px + q$ verifican la ecuación $x^2 = px + q$, o sea que son soluciones de la ecuación propuesta.

- Resuelve gráficamente la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Funciones Polinómicas-6

Haciendo traducciones

- Dada la función polinómica $f(x) = -3x + 2$, se pide:

a) ¿Pertenece el punto $P\,(1,4)$ a la gráfica de dicha función?

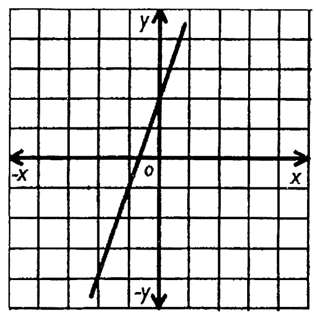
b) Determínese el punto de su gráfica que tenga de ordenada -1.

c) ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen?

d) ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen?

e) Calcular los puntos de corte con los ejes.

f) ¿Coincide su gráfica con la de la figura?



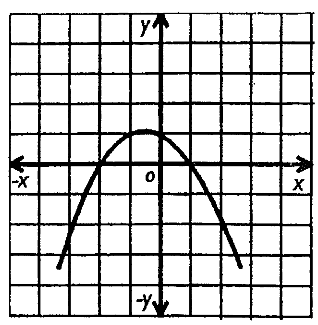
- Dada la función polinómica $f(x) = x^2 - 3x - 4$, se pide:

a) Determínese el punto de su gráfica que tenga de abscisa 1.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?

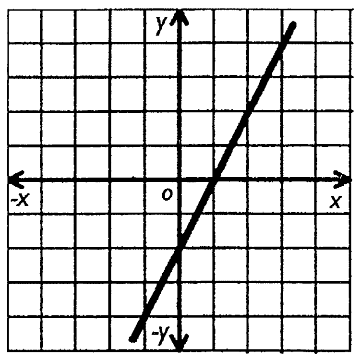
c) Calcular los puntos de corte con los ejes.

d) ¿Coincide su gráfica con la de la figura?



- Se considera la función polinómica cuya gráfica es la de la figura:

Se pide:



a) ¿Qué grado tiene?

b) ¿Cómo es su gráfica? ¿Creciente o decreciente?

c) Determínense un par de puntos de dicha gráfica:

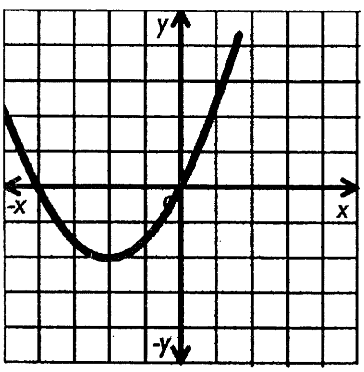
d) Determínense los puntos de corte con los ejes:

e) ¿Cuál es la ordenada en el origen?

f) ¿Cuál es el valor de su pendiente?

g) ¿Es su expresión matemática $f(x) = 3x + 2$?

- Se considera la función polinómica cuya gráfica es la de la figura:



Se pide:

a) ¿Qué grado tiene?

b) Determínense un par de puntos de dicha gráfica:

c) Determínense los puntos de corte con los ejes:

d) Determínense las coordenadas de su vértice:

e) ¿Es su expresión matemática $y = 3x^2 - 5x + 2$?

RECURSOS PARA EL AULA

A patadas con los botes

José Lorenzo Blanco

Presentamos a continuación una actividad desarrollada con alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, en la materia optativa: Taller de Resolución de Problemas.
Auna el enfrentamiento a una actividad real, cotidiana, con la utilización de procedimientos y conceptos fundamentales en la formación básica en Matemáticas.

Uno de los imperativos de las nuevas propuestas curriculares y metodológicas en Matemáticas es la integración de los distintos contenidos del área. La doctrina del M.E.C. subraya expresamente que la secuenciación de dichos contenidos debe tener una «estructura helicoidal», que casi todos sean retomados varias veces y de modo que puedan relacionarse entre sí.

Dicha pretensión no es, bajo mi punto de vista, meramente formal o «estética», si no altamente trascendente, pues su consecución por parte del alumno permite comprobar de manera efectiva no sólo que hay aprendizaje, si no que éste es significativo y vinculado a sus modos de hacer cotidianos.

A lo largo de mi experiencia personal, contrastada con la de muchos compañeros, he venido observando graves deficiencias en muchos alumnos de 14-16 años sobre conceptos fundamentales como el volumen, la superficie, el Sistema Métrico Decimal, etc.

Asimismo, he constatado que algunos procedimientos como transformación de unidades, construcción y utilización de gráficas, empleo de las fórmulas elementales de la geometría, quedaban aislados en el restrictivo ámbito del tema concreto, y no se empleaban correctamente en problemas más abiertos y más ligados al entorno cotidiano.

La actividad objeto de este artículo se ha desarrollado con alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Pocas veces una sola investigación ha concitado aspectos tan diversos; a lo largo de su desarrollo, una amplia gama de conceptos y procedimientos tuvo que ponerse en juego desde una nueva perspectiva para el alumno. Ya no se trataba de aplicar conocimientos previos, si no, recurrir a procedimientos y conceptos que permitieran abordar las dificultades que encontraban, en los términos precisos en que habían aparecido.

Por orden vamos a presentar ahora la **Propuesta a los alumnos**, seguida de una **Breve reflexión sobre los resultados**, revisar después los **Principales hitos en el trabajo desarrollado por los alumnos** y finalizar con **Algunos comentarios**.

Propuesta a los alumnos.

BOTES DE PINTURA

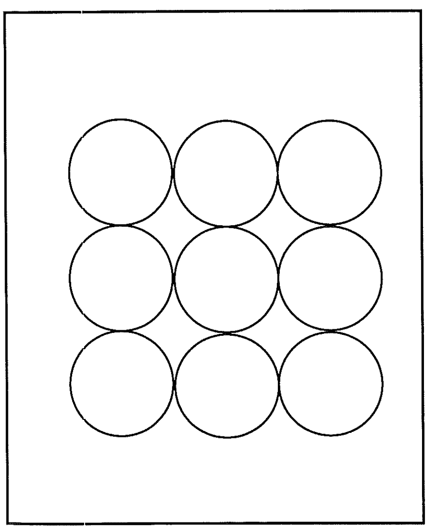
En la fábrica de pinturas «La Charra» andan muy preocupados con la «competitividad», así que están estudiando todos sus procesos de producción, al objeto de reducir costes.

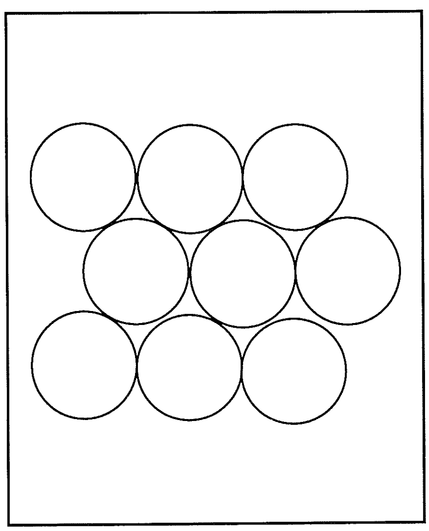
Tradicionalmente han venido envasando sus pinturas en botes cilíndricos, pero ahora desean ahorrar la mayor cantidad de lata que puedan. Desean seguir produciendo botes de 1 litro y de 0,375 litros, pero quieren saber cuáles deben ser las dimensiones idóneas del bote para ahorrar en su construcción el máximo posible. Ayúdales tú.

(Sugerencia: Quizás te venga bien realizar una gráfica, colocando en el eje de abscisas el radio de la base y en el de ordenadas, la superficie de latón empleada. Ten cuidado con las unidades de volumen y las de capacidad)

Además suelen emplear un camión para el transporte que tiene una caja de dimensiones interiores: 2m x 2m x 6.5m.

Se les ocurren dos formas de cargar los botes. Las siguientes figuras sugieren el dibujo de la base de la caja y la colocación de los botes según las dos posibilidades. ¿Cuál de los dos procedimientos permite transportar más carga? ¿Cuánto hueco queda en el camión? ¿Qué porcentaje de la caja del camión queda vacía en cada caso?





Breve reflexión sobre resultados.

Se trata, como se verá, de una actividad totalmente abordable para alumnos de 4º de E.S.O., pero es obvio que no disponen de las herramientas del cálculo infinitesimal con las que se obtiene una solución más exacta.

Siendo el volumen y la superficie total del cilindro:

$$V = \pi\, r^2\, h \qquad S = 2\,\pi\, r + 2\,\pi\, r\, h$$

Si despejamos la altura en la primera y sutituimos en la segunda, obtenemos la superficie como función del radio:

$$S = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\,(V/\pi\, r^2)$$

Tras ser derivada e igualada a cero descubriremos que tiene un mínimo para el valor del radio:

$$r = \sqrt[3]{V/2\,\pi}$$

Nótese que la altura del cilindro será entonces:

$$h = \frac{V}{\pi\,\sqrt[3]{(V/2\pi)^2}} = 2 \text{ x } \sqrt[3]{(V/2\pi)}$$

Y por tanto el diámetro y la altura tienen el mismo valor.

Además, el valor mínimo de la superficie es:

$$S = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h =$$
$$2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\;\; 2r = 6\,\pi\, r^2$$

Lo que puede leerse como que la superficie es mínima cuando el área lateral coincide con el área de la base.

Para nuestros dos casos se obtienen los resultados:

	Bote de 1 litro	Bote de 0.375 litros
Radio =	5.4192607 cm	3.9079632 cm
Altura =	10.838521 cm	7.8159264 cm
Superficie =	553.581052 cm²	287.873747 cm²

El resto de los cálculos puede seguirse en el trabajo que desarrollaron los alumnos. Cabe hacer la salvedad de que dado que sus cálculos son aproximados, los resultados que obtuvieron difieren levemente de los exactos.

Principales hitos en el trabajo desarrolado por los alumnos.

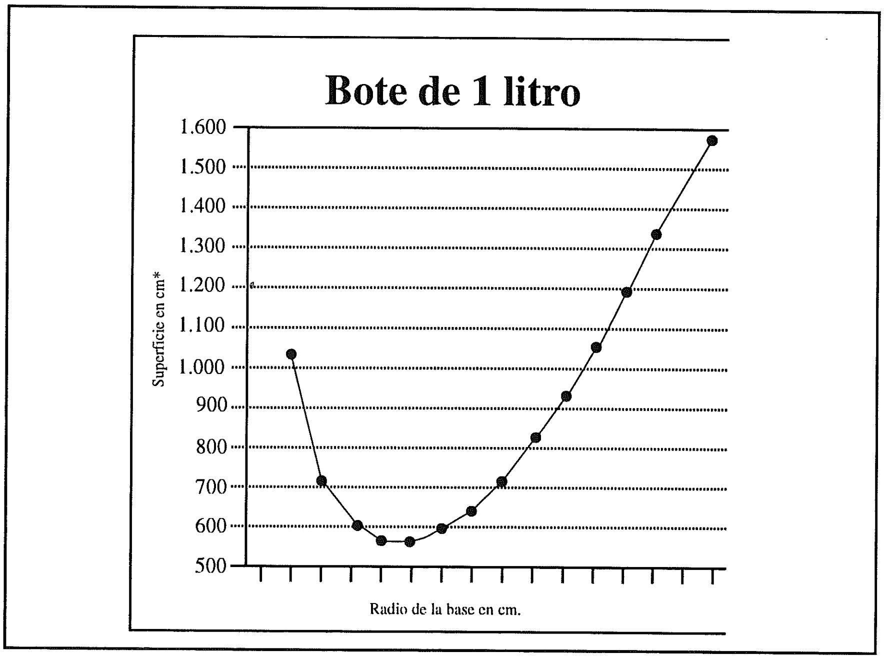
A continuación seguiremos las estrategias que desarrollaron los alumnos en esta investigación. Hemos señalado en ***cursiva*** algunos de los conceptos y procedimientos de los que hicieron uso, para destacar de este modo la gran cantidad de elementos de los que se hace uso.

Primera afirmación: «Si los botes tienen 1 litro, el gasto de latón es el mismo sean del tamaño que sean».

Esta idea es desgraciadamente frecuente entre los alumnos, evidencia confusión entre los conceptos de ***Volumen y Superficie***. Tras unas observaciones preliminares, los estudiantes decidieron hacer una serie de pruebas. Hubieron de dilucidar las relaciones entre ***Volumen y Capacidad*** y algunas cuestiones relativas al ***Sistema Métrico Decimal***. Asimismo fue preciso recuperar las ***fórmulas de la Superficie y del Volumen de un Cilindro***. Después de unas cuantas pruebas erráticas, ***sistematizaron*** su trabajo y lo reflejaron en la siguiente ***tabla:***

Con estas tablas realizaron sendas ***gráficas***. Veamos una de ellas:

Segunda afirmación: «Para que el bote tenga la menor superficie el radio debe estar comprendido entre 4.5 y 6 cm».



Dibujo de superficie de un bote de pintura de 1 litro

Bote de 1000 centímetros cúbicos			Bote de 375 centímetros cúbicos		
Radio cm.	Altura cm.	Superfice cm²	Radio cm.	Altura cm.	Superfice cm²
1	318.3099	2006.283	1	119.3662	756.2831
2	79.57747	1025.133	2	29.84155	400.1327
3	35.36776	723.2153	3	13.26291	306.5487
4	19.89437	600.5309	4	7.460388	288.031
5	12.7324	557.0797	5	4.774648	307.0796
6	8.841941	559.528	6	3.315728	351.1947
7	6.49612	593.5904	7	2.436045	415.019
8	4.973592	652.1238	8	1.865097	495.8739
9	3.929752	731.1602	9	1.473657	592.2714
10	3.183099	828.3185	10	1.193662	703.3185

Enseguida unos cuantos alumnos propusieron hacer una tabla recorriendo ese intervalo décima a décima. Esa propuesta tuvo inicialmente mala acogida, debido a que temían algunos que el poceso fuera interminable; de décimas a centésimas, de centésimas a milésimas, etc. Se aceptó finalmente que a efectos industriales, una ***precisión*** de una décima era suficiente. Todos asumieron que el resultado que obtuviéramos acarreaba cierto ***error***, aunque no fuera relevante a efectos prácticos.

Se obtuvieron las tablas:

Bote de 1 litro			Bote de 375 centímetros cúbicos		
Radio	Altura cm.	Superfice cm²	Radio	Altura cm.	Superfice cm²
4.5	15.719 01	571.679	3.5	9.744183	291.2547
4.6	15.043	567.7349	3.6	9.210359	289.7634
4.7	14.409 69	564.3275	3.7	8.71923	288.7195
4.8	13.815 54	561.4313	3.8	8.266361	288.0976
4.9	13.257 39	559.0226	3.9	7.84788	287.8749
5	12.732 4	557.0797	4	7.460392	288.031
5.1	12.23799	555.5825	4.1	7.100908	288.5472
5.2	11.77182	554.5127	4.2	6.766795	289.4068
5.3	11.33179	553.8531	4.3	6.45572	290.5947
5.4	10.91598	553.5881	4.4	6.165614	292.097
5.5	10.52265	553.7027	4.5	5.894631	293.9012
5.6	10.15019	554.1835	4.6	5.641129	295.9956
5.7	9.797171	555.0179	4.7	5.403635	298.37
5.8	9.46225	556.1939	4.8	5.180829	301.0146
5.9	9.144214	557.7007	4.9	4.971524	303.9204
6	8.841947	559.528	5	4.774652	307.0796

Tercera afirmación: «Los resultados aproximados son:

	Bote de 1 litro	Bote de 0.375 litros
Radio =	5.4 cm	3.9 cm
Altura =	10.915977 cm	7.8478769 cm
Superficie =	553.5881 cm²	287.8749 cm²

Inmediatamente algunos chicos se apercibieron de que la altura de los cilindros y el diámetro de sus bases eran prácticamente idénticos.

A continuación se enfrentaron al problema de la colocación en la caja del camión:

Cuarta afirmación: «Siguiendo cualquiera de los dos procedimientos el número de botes de altura es el mismo».

Además ese número se obtiene dividiendo la altura de la caja entre la de cada bote:

200 : 10.915977 =
18.321768 ... **18 botes de altura**

Quinta afirmación: «En la modalidad I, el número de botes colocados a lo largo y a lo ancho se hace del mismo modo».

Largo = 650 cm Ancho = 200 cm
Diámetro = d = 10.8 cm

650 : 10.8 =
60.185185 .... **60 botes a lo largo**
200 : 10.8 =
18.518519 .... **18 botes a lo ancho**

Sexta afirmación: «En la modalidad II al encajarse las filas, éstas ocupan menos espacio, ¿cuánto?».

La solución de este problema resultó ser muy dificultosa para los alumnos, rápidamente se percataron que esa distancia, que llamaremos h', es la que hay entre las dos rectas paralelas que se obtienen trazando las tangentes a las circunferencias de dos filas consecutivas. Al fin, uno se dio cuenta de que esa distancia era la misma que la que separaba las dos rectas que se obtienen uniendo los centros de las circunferencias de dos filas consecutivas. Así se puede construir un ***triángulo equilátero***, y aplicar el ***teorema de Pitágoras*** para obtener:

$$h' = r\sqrt{3} = 9\ .\ 3530744$$

Obviamente, para colocar la última fila debe caber un diámetro entero. d = 10.8 y no sólo h' = 9.35

Séptima afirmación: «Dentro de la modalidad II, hay dos formas de colocar los botes. Podemos situar la primera fila al fondo del camión (la llamaremos modalidad II.A) o colocar la primera fila en el lateral (modalidad II.B)».

Curiosamente, cuando se diseñó esta actividad, no se habían previsto estas dos posibilidades. Este sucedido, muy frecuente cuando se diseñan actividades, es muy enriquecedor; para los alumnos porque perciben que se trata de un problema «vivo», que no se trata de un «ejercicio mecánico» mil veces resuelto. Y para el profesor, porque por una parte sirve para plantearse el problema desde una nueva perspectiva, y por otra, ese elemento de incertidumbre sirve de acicate a su atención.

Octava afirmación: «En estas modalidades, todas las filas tienen tienen el mismo número de botes, si colocada la primera aún sobra una distancia mayor de un radio».

Así pues en la modalidad II.A:
Primera fila:

200 : 10.8 = 18.518519 .... 18 botes, y sobran: 200 - 18 x 10.8 = 5.6 cm (o sea más que un radio).

Por tanto, en todas las filas caben **18 botes de ancho**

Determinaron entonces los botes colocados a lo largo:

650 : h' = 650 : 9.3530744 = 69.495865

y como 650 - 69 x 9.3530744 = 4.6378664

sobran más de d - h' = 1.44469256, luego caben todos, y por tanto tenemos **69 botes a lo largo.**

Y en la modalidad II.B:

Primera fila:

650 : 10.8 = 60.185185 .... 60 botes, y sobran: 650 - 60 x 10.8 = 2 cm (o sea menos que un radio).

Por tanto, en las filas impares caben **60 botes**
y en las pares solamente: **59 botes**

Determinaron entonces los botes colocados a lo ancho:

200 : h' = 200 : 9.3530744 = 21.383343

y como 200 - 21 x 9.3530744 = 3.5854376

sobran más de d - h' = 1.44469256, luego caben todos y por tanto tenemos **21 botes a lo ancho.**

Y resumimos en la tabla siguiente los resultados:

Modalidad	Alto	Ancho	Largo	Total
I	18	18	60	19440
II.A	18	18	69	22356
II.B	18	21	11 de 60 y 10 de 59	22500

Determinaron a continuación el ***volumen del ortoedro*** que es la caja del camión, y establecieron los ***porcentajes de ocupación***

Volumen de la caja: 2 x 2 x 6.5 = 26 m^3 = 26000 dm^3

Modalidad	Nº Botes	Volumen ocupado	Porcentaje ocupación	Porcentaje de hueco
I	19440	19440 dm^3	74.769	25.231
II.A	22356	22356 dm^3	85.985	14.015
II.B	22500	22500 dm^3	86.538	13.462

Última afirmación: «Hemos resuelto el problema. Los botes deben tener 5.4 cm de radio y 10.915977 cm de altura. Además la modalidad más interesante es la II.B, pues caben 22.500 botes, lo que supone una pérdida de sólo el 13.462% del espacio».

Algunos comentarios.

Es preciso destacar la positiva actitud de los alumnos durante el desarrollo del trabajo. Se mostraron altamente interesados y se implicaron en él.

El hecho de que lo asumieran como suyo les permitió acudir a las herramientas matemáticas, no con el temor tradicional hacia ese lenguaje tan abstruso, si no con la certeza de que eran de los utensilios más idóneos para resolver «sus» dificultades.

Ese factor de identificación, de apropiación, es, a nuestro parecer, un elemento fundamental en el éxito de cualquier actividad matemática.

José Lorenzo Blanco
Profesor de Matemáticas del I.E.S. «Venancio Blanco». Salamanca

Ilustración de las diferentes fases en la resolución de problemas

Seminario "Ramón Aller"

El artículo que se acompaña es parte del último trabajo, de más amplitud, realizado por el Seminario «Ramón Aller». Su pretensión es la de poner de manifiesto, con ejemplificaciones concretas, la incidencia de las diferentes fases, no siempre consecutivas, en la resolución de problemas.

La Resolución de Problemas es, desde hace algún tiempo, uno de los temas «estrella» en cuanto a las nuevas tendencias metodológicas referidas a la realización de actividades de aprendizaje de las matemáticas. Autorizados informes[1] hacen hincapié en la resolución de situaciones problemáticas, a su vez objeto constante de numerosas ponencias en congresos de profesores o de artículos en las revistas especializadas y, además, motivo de la aparición de nuevos libros o de la reimpresión de otros que ahora parecen recobrar valor.

Las líneas que siguen, dedicadas al citado tema, pretenden ilustrar, mediante ejemplificaciones, las diferentes fases en el proceso de resolución de situaciones problemáticas.

Las distintas fases

La atención que requiere cada una de las fases puede reflejarse mediante la presentación de problemas apropiados en cuya resolución tenga mayor incidencia alguna de ellas. Debido a la naturaleza particular del problema, una etapa concreta puede llegar a ser definitiva en la obtención de la solución correspondiente.

Así, para significar la importancia de **entender el problema**, pueden servir ejemplos como el que sigue, caracterizados por presentar **dificultades de enunciado**, donde la correcta comprensión del mismo proporciona de inmediato la respuesta adecuada a la situación planteada.

Muerte repentina

Hace muchos años, en una aldea gallega, el cura daba su sermón dominical. El sacristán, que ya era viejo, se quedó dormido mientras tanto. Soñó que estaba en la revuelta de los "irmandiños" y que iba a ser ajusticiado en el mismo momento en el que el cura terminaba su sermón. Al verlo dormido, le dio un pescozón. El sacristán, de la impresión, se murió en el acto.

¿Parece verosímil el relato anterior?

La correcta interpretación del enunciado anterior resultará clave para contestar a la pregunta que formula.

En ocasiones, aunque el problema no las enuncie, se consideran **hipótesis añadidas** que dificultan el alcanzar el objetivo. Las hipótesis no formuladas llegan a producir cierto bloqueo mental que impide desprendernos de ellas.

Como caso particular de problema sobre suposiciones adicionales, puede plantearse el siguiente:

[1] Cockroft, Kuwait

Las copas alineadas

> Tenemos seis copas alineadas sobre una mesa que, alternativamente, están una llena y otra vacía. Se pregunta de qué manera, moviendo solamente una copa, podemos dejar nuevamente alineadas las copas de modo que las vacías aparezcan en lugares consecutivos.

Resulta frecuente hacer la hipótesis adicional no enunciada de que si movemos una copa llena, no podamos vaciarla en otra. Tal suposición bloquea nuestra mente y nos puede conducir a la falsa conclusión de que el problema planteado no tiene solución.

Para «hacerse con el problema» en algunos casos, por la naturaleza de los mismos, se requiere algún tipo de **manipulación o tanteo**. Los problemas con cerillas o monedas resultan paradigmáticos de lo decisiva que puede resultar la fase manipulativa.

Se presenta a continuación un viejo problema con cerillas.

Cuatro triángulos equiláteros

> Retirar cuatro cerillas de la figura 1, de forma que queden exactamente 4 triángulos equiláteros.

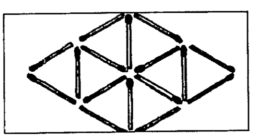


Figura 1

Una fase posterior corresponde a la **formulación de conjeturas**. Habituales de por sí en la actividad matemática requieren bien el contraejemplo para quedar refutadas, bien la demostración para quedar consolidadas. La teoría de números resulta particularmente rica en cuanto a la presencia de conjeturas que siguen, desde siglos, esperando ser confirmadas o descartadas. Por este motivo el ejemplo que se presenta pertenece al mundo de los números.

Divisores

> Encontrar los números que tienen un número impar de divisores.

Al observar que ocurre con los primeros números buscando regularidades, encontramos la situación de la tabla:

Números	Divisores	Nº de divisores
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2

De los resultados obtenidos se puede hacer una primera conjetura: «Solo tienen un número par de divisores los números primos». Pero esta conjetura queda descartada al avanzar un lugar más en la tabla anterior. El **6** rompe la pauta que siguen los cinco primeros números.

Números	Divisores	Nº de divisores
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	**1, 2, 3, 6**	**4**
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
...	...	...

Pero al ampliar la serie, se ponen de manifiesto los números que tienen un número impar de divisores:

1, 4, 9, 16, 25, ...

De inmediato se puede formular una nueva conjetura: «Tienen un número impar de divisores los **cuadrados perfectos**».

Esta conjetura se prueba a través del recuento de divisores de un número natural a partir de su descomposición en factores primos.

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

Si la descomposición en factores primos del número N es la anterior, el número de sus divisores es el producto:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1)$$

Para que N tenga un número impar de divisores, cada uno de los factores tendría que ser impar. Por lo tanto, los exponentes de la descomposición de N en factores primos serían todos pares, con lo que N habría de ser un cuadrado perfecto.

La fase de la **revisión** comporta el análisis de la solución obtenida. No ya sólo en cuanto a su validez, sino también en relación a la posibilidad de otras estrategias diferentes de la seguida para llegar a ella. Esta fase supone asimismo la generalización del problema o la formulación de otros nuevos a partir de aquél.

El problema que sigue resulta útil para poner de manifiesto, de manera natural, cómo, a partir de un problema concreto, se pueden plantear nuevos problemas inspirados en él.

Los cuadrados del tablero de ajedrez

> ¿Cuántos cuadrados contiene el tablero de ajedrez?

La estrategia de reducir inicialmente el número de casillas facilita el recuento de cuadrados y conduce a la obtención de la ley por la que se rige su número en las sucesivas ampliaciones del tablero. La generalización proporciona el resultado final de **204 cuadrados** para el tablero 8x8.

Dos posibles problemas que se plantean, casi de forma natural, podrían ser:

- ¿Cuántos rectángulos contiene el tablero del ajedrez?
- ¿Cuántos cuadrados contiene un tablero mxn?

El otro aspecto referido en cuanto a la fase de revisión es el análisis de otras estrategias diferentes de la seguida para solucionar la situación problemática.

La mosca y los trenes

> La distancia por ferrocarril entre Ferrol y Santiago es de 100 km. Un tren sale de Ferrol hacia Santiago con velocidad de 100 km/h. Simultáneamente otro tren sale de Santiago con destino a Ferrol a 50 km/h. Una mosca situada en la locomotora del primer tren comienzo a volar, siguiendo la vía del tren, a 150 km/h hasta chocar con el tren procedente de Santiago. En ese instante la mosca invierte el sentido del movimiento y se dirige al encuentro del tren que partiera de Ferrol. Cuando lo encuentra, vuelve a invertir su sentido, repitiendo estos movimientos hasta el cruce de ambos trenes. ¿Cuál fue la distancia total recorrida por la mosca?

Si seguimos los sucesivos movimientos de la mosca tal y como describe el enunciado, calculando en cada uno la distancia recorrida hasta alcanzar el tren que viene en sentido contrario, nos encontramos los resultados siguientes:

Trayecto	1º	2º	3º	4º	...
Distancia (Km)	75	15	7,5	1,5	...

Obtenidos los resultados parciales, la distancia recorrida por la mosca será la suma de todas ellas:

$$75 + 15 + 7{,}5 + 1{,}5 + 0{,}75 + 0{,}15 + \ldots$$

La suma de sus términos impares -distancia recorrida cuando la mosca va al encuentro del tren que parte de Santiago- es la de una progresión geométrica de razón 1/10, al igual que la suma de sus términos pares.

Realizadas las consideraciones anteriores, resulta finalmente que la distancia total recorrida por la mosca es de **100 km**.

La solución así obtenida es correcta, sin embargo el camino seguido, sugerido por el propio enunciado del problema, cabe calificarlo de «tortuoso» y, por lo tanto, parece conveniente analizar la posibilidad de otra estrategia de resolución.

La simple consideración de que la mosca está en movimiento durante el tiempo que tardan los trenes en cruzarse, indica que permanece volando durante 40 minutos. Puesto que la velocidad de la misma es de 150 Km/h, el resultado se obtiene de inmediato.

La reflexión sobre la forma de resolver el problema, sin aferrarse exclusivamente al enunciado del mismo, facilita en un caso como el señalado la consecución de la correspondiente solución.

Bibliografía

BALBUENA, L. y COBA, Mª. D. (1992). **La matemática recreativa vista por los alumnos**, Granada: Proyecto Sur, S.A.L.

BOLT, B. (1988). **Actividades matemáticas**, Barcelona: Labor, S.A.

MASON, J. y BURTON, L. (1989). **Pensar matemáticamente**, Barcelona: MEC-Labor S.A.

MATAIX, M. (1993). **Cajón de sastre matemático**, Barcelona: Marcombo.

Santiago Gallego Saavedra
Jorge Mejuto Couce
Luis Puig Mosquera
Concepción Ulloa Fdez. de Sanmamed
Jesús Castro López
Seminario «Ramón Aller»
I.B. «Sofía Casanova». Ferrol

La medida del tiempo con la Hoja de Cálculo

Vicente Trigo Aranda
Alberto Camacho Montero

En este artículo presentamos un ejemplo que pretende ilustrar algunas de las amplias posibilidades didácticas que ofrece la utilización de la hoja de cálculo en el aula. Para ello, hemos seleccionado un tema (la medida del tiempo) que nuestra experiencia docente nos ha demostrado que suele resultar interesante y entretenido para la mayoría de nuestros alumnos.

Descripción del trabajo

En el modelo de hoja de cálculo que presentamos seguidamente se desarrolla una aplicación en la que los alumnos trabajan midiendo intervalos temporales, tomando como unidad de medida el día. Los alumnos construirán una tabla en la que introducirán los nombres de una serie de personajes (científicos, artistas, deportistas, etc) y las fechas de su nacimiento y fallecimiento. De esta forma, aprovechando las funciones de fecha que lleva incorporadas el Lotus 1-2-3, se calculará el número de días que han vivido dichos personajes[1].

Con el modelo adjunto también se realizará un sencillo estudio estadístico de las tablas temporales que se hayan introducido en él[2]. Además se utilizarán las posibilidades gráficas de LOTUS para construir diagramas que muestren la frecuencia de defunciones en intervalos regulares de edad.

El modelo puede ser seguido perfectamente por alumnos de Secundaria obligatoria sin necesidad de conocimientos previos específicos, aunque es conveniente que sepan cuando un año es bisiesto y también posean una noción de lo que es la media aritmética. Debe quedar claro que no es imprescindible el dominio del software, pero si se posee es evidente que se obtendrán mayores prestaciones.

En cuanto a los objetivos que nos hemos planteado al realizar este trabajo, básicamente se reducen a que nuestros alumnos:

- utilicen el día, como unidad de medida más «fina» que el año, para describir intervalos temporales,
- se introduzcan de una manera natural e intuitiva al concepto de media aritmética y otras medidas estadísticas,
- consigan extraer información y conclusiones tanto de una tabla numérica como de gráficas,

[1] Hemos elegido la hoja de cálculo Lotus por ser una de las más populares y difundidas; sin embargo, el modelo puede adaptarse fácilmente a cualquier otra hoja de cálculo (QPro, Open Access, etc.) ya todas ellas suelen incorporar funciones de fecha.

[2] Lógicamente, para poder extraer alguna conclusión estadística válida de las tablas es conveniente que los alumnos incluyan los datos de bastantes personas, aunque en el modelo que se presenta seguidamente sólo se han incluido 14 para facilitar la comprensión y seguimiento de su construcción.

- se inicien en la historia de la ciencia y de la técnica, ya que al trabajar con científicos suele darse pie a comentar la importancia de sus trabajos e investigaciones,
- se acostumbren a realizar investigaciones bibliográficas, resultando un buen ejercicio introductorio la recogida de datos sobre personajes históricos,
- pongan en cuestión y debatan las conclusiones a las que lleguen sus compañeros y busquen tanto razones como razonamientos.

Modelización del trabajo

Lógicamente, el primer paso en la elaboración del modelo consiste en la recogida de datos por parte de los alumnos, para lo cual consultarán enciclopedias, anuarios, periódicos, etc. Los alumnos se dividen en grupos, de manera que cada uno de éstos busque datos de personas con un mismo común denominador: científicos, técnicos, músicos, cantantes, pintores, deportistas, políticos, etc.

Es conveniente también, de cara a posteriores estudios y análisis, que además de las fechas de nacimiento y defunción anoten otros posibles datos de interés: causa del fallecimiento, sexo, etc. Por otro lado, es aconsejable que la muestra sea amplia para que las estadísticas sean significativas.

En lo referente al aspecto técnico-informático del trabajo, en primer lugar hay que cargar el programa de hoja de cálculo. Para ello, una vez conectado el ordenador, hay que hacer del directorio de LOTUS el directorio activo (CD LOTUS, por ejemplo) y después activar el programa tecleando 123 e <INTRO>.

Una vez que la hoja de cálculo esté en pantalla, se empieza por definir el ancho de algunas columnas. En este caso es aconsejable incrementar el ancho de la columna que debe contener los nombres de los personajes hasta por lo menos 15 caracteres. Para conseguirlo, debe activarse el menú de mandatos de LOTUS, pulsando la barra de fracción /; cuando el menú de mandatos aparezca en pantalla, seleccionaremos el mandato *Hoja Columna Ancho-columna* y asignaremos un ancho suficiente a la columna A, que va a contener los nombres (15 caracteres como mínimo). Después se regresa a la modalidad de ACTIVO pulsando <ESC> tantas veces como sea necesario.

Se colocan a continuación los títulos y se empieza a introducir los datos en la hoja de cálculo. A la hora de poner las fechas de nacimiento y defunción, es preciso tener en cuenta que el formato correcto es dd/mm/aa[3] y deben ir precedidas de comillas, para que sean tomadas como cadenas de caracteres y alineadas a la derecha. Así, el 12 de Marzo de 1920 deberá escribirse en la forma "12/3/20.

Una vez que se haya llenado la tabla con los nombres y fechas de nacimiento y defunción, la hoja de cálculo se verá como en la figura:

	A	B	C	D
1				
2	VIDA DE ACTORES DE CINE NACIDOS EN EL SIGLO XX			
3				
4	NOMBRE	NACIMIENTO	DEFUNCIÓN	DÍAS VIVIDOS
5	RITA HAYWORTH	17/11/18	14/5/87	
6	GARY COOPER	7/5/01	13/5/61	
7	ROCK HUDSON	17/11/25	2/11/85	
8	CLARK GABLE	1/7/01	16/11/60	
9	VIVIEN LEIGH	5/11/13	8/7/67	
10	ERROL FLYNN	20/6/09	14/10/59	
11	MARILYN MONROE	1/6/26	5/8/62	
12	JANE MANSFIELD	19/4/33	29/6/67	
13	CAROL LOMBARD	6/10/08	16/1/42	
14	JAMES DEAN	8/2/31	30/9/55	
15	BETTE DAVIS	5/4/08	6/10/89	
16	JUDY GARLAND	10/6/22	22/6/69	
17	JOHN WAYNE	26/5/07	11/6/79	
18	SPENCER TRACY	5/4/00	11/6/67	
19				
20				

Se pasa ahora a calcular el número de días vividos por los personajes de la tabla. Para ello se sitúa el cursor en la celda D5 y se teclea la fórmula:

@VALFECHA(C5)-@VALFECHA(B5)

En la celda D5 aparecerá el número de días vividos por el personaje colocado en la primera fila de la tabla.

[3] Las funciones de fecha de LOTUS, solo se ajustan a los siglos XX y XXI. Cuando la fecha es del segundo siglo, el año se escribirá, poniendo un 1 delante de los dos últimos dígitos; así, por ejemplo, el 23 de Noviembre de 2075 se introduciría en la forma "23/11/175. También puede utilizarse el modelo, de forma análoga, para cualquier fecha posterior a la reforma del calendario (1582); en este caso hay que tener en cuenta que los años 1600 y 2000 son bisiestos, mientras que no lo fueron los años 1700, 1800 y 1900 y, por tanto, podrá haber errores de un día si esto no se tiene en cuenta.

Para completar la tabla sólo falta copiar la fórmula en toda la columna DÍAS VIVIDOS.

Para copiar esta expresión, se deben seguir los siguientes pasos:

1- Activar el menú de mandatos, pulsando la barra de fracción (/).
2- Seleccionar el mandato *COPIAR* (basta pulsar la letra C).
3- Escribir D5 e <INTRO> como rango a copiar.
4- Teclear D6..D18 (o la ultima celda activa de la tabla) e <INTRO> como rango en el que copiar.

Con esto se calcularán e imprimirán los días vividos por los personajes de la tabla; para completarla, se calcula la vida media utilizando la función @MEDIA de LOTUS. Tras poner el rótulo adecuado en la celda A20, se escribe en la D20 la fórmula que calcula el valor medio de los datos contenidos en el rango indicado:

@MEDIA(D5..D18)

Después de todo esto, el modelo debe tener el aspecto mostrado en la figura siguiente.

Para completar el modelo se contabilizará el número de personas que han vivido un número de días en un intervalo determinado. La primera tarea será decidir que intervalos se han de considerar; en el modelo presentado aquí se han elegido intervalos de 3000 días, que corresponden a algo más de 8 años. El cálculo puede hacerse manualmente pero es más cómodo aprovechar las posibilidades de la hoja de cálculo para que se realice este cálculo automáticamente. Hay que seguir los pasos indicados a continuación:

VIDA DE ACTORES DE CINE NACIDOS EN EL SIGLO XX

NOMBRE	NACIMIENTO	DEFUNCIÓN	DÍAS VIVIDOS
RITA HAYWORTH	17/11/18	14/5/87	25.015
GARY COOPER	7/5/01	13/5/61	21.921
ROCK HUDSON	17/11/25	2/11/85	21.900
CLARK GABLE	1/7/01	16/11/60	21.838
VIVIEN LEIGH	5/11/13	8/7/67	19.603
ERROL FLYNN	20/6/09	14/10/59	18.378
MARILYN MONROE	1/6/26	5/8/62	13.214
JANE MANSFIELD	19/4/33	29/6/67	12.489
CAROL LOMBARD	6/10/08	16/1/42	12.155
JAMES DEAN	8/2/31	30/9/55	9.000
BETTE DAVIS	5/4/08	6/10/89	29.769
JUDY GARLAND	10/6/22	22/6/69	17.179
JOHN WAYNE	26/5/07	11/6/79	26.314
SPENCER TRACY	5/4/00	11/6/67	24.538
VIDA MEDIA			19 522 35

1- En una zona no utilizada de la hoja de cálculo se escriben, en una misma columna los límites superiores del intervalo temporal. En este modelo, estos límites han sido 10000, 13000, 16000, 19000, 22000, 25000 y 28000. A la derecha de la columna que contiene estos límites deben quedar otras tantas celdas vacías, que utilizará LOTUS para escribir la frecuencia de cada intervalo.

2- Ordenar la tabla por orden creciente de días vividos:

i) Activar el menú de mandatos (con /)
ii) Seleccionar *Datos* y *Ordenar*
iii) Seleccionar *Datos-Rango* e introducir el área A5..D18
iv) Seleccionar *1ª-Clave*. El área es ahora D5..D18 y el *Orden de Clasificación* es A (ascendente) Seleccionar *Clasificar*
v) Seleccionar *Clasificar*

La tabla ahora ya ordenada presenta el siguiente aspecto:

VIDA DE ACTORES DE CINE NACIDOS EN EL SIGLO XX

NOMBRE	NACIMIENTO	DEFUNCIÓN	DÍAS VIVIDOS
JAMES DEAN	8/2/31	30/9/55	9.000
CAROL LOMBARD	6/10/08	16/1/42	12.155
JANE MANSFIELD	19/4/33	29/6/67	12.489
MARILYN MONROE	1/6/26	5/8/62	13.214
JUDY GARLAND	10/6/22	22/6/69	17.179
ERROL FLYNN	20/6/09	14/10/59	18.378
VIVIEN LEIGH	5/11/13	8/7/67	19.603
CLARK GABLE	1/7/01	16/11/60	21.838
ROCK HUDSON	17/11/25	2/11/85	21.900
GARY COOPER	7/5/01	13/5/61	21.921
SPENCER TRACY	5/4/00	11/6/67	24.538
RITA HAYWORTH	17/11/18	14/5/87	25.015
JOHN WAYNE	26/5/07	11/6/79	26.314
BETTE DAVIS	5/4/08	6/10/89	29.769
VIDA MEDIA			19 522 35

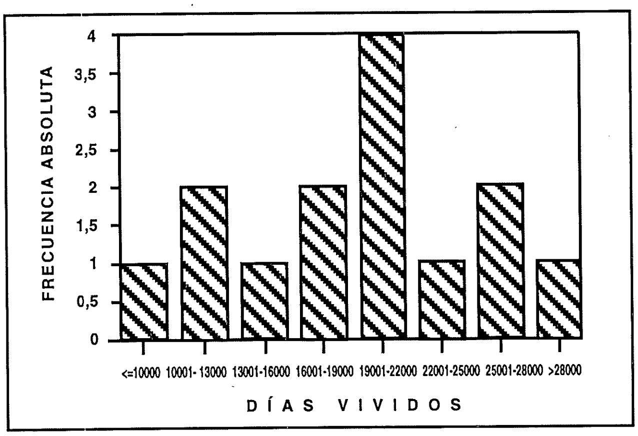
3- Por último, para construir la tabla de frecuencias, en primer lugar se teclean los rótulos (fila 22ª) y los datos (área A23..A30). A continuación se siguen los siguientes pasos:

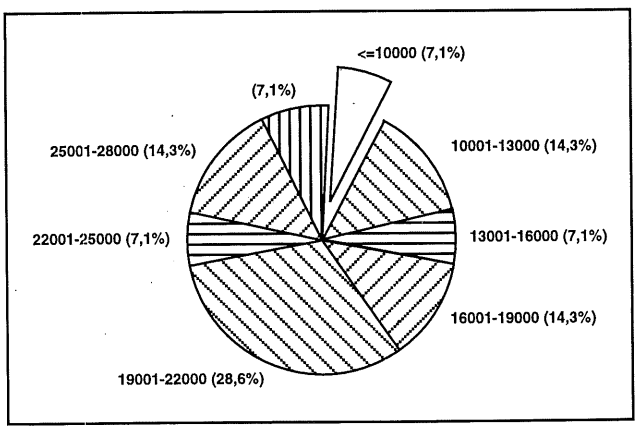
i) Pulsar /
ii) Seleccionar *Datos* y *Frecuencia*
iii) Seleccionar *Rango Valores* e introducir el área D5..D18
iv) Seleccionar *Rango Bin*. El área es ahora A23..A29

De esta manera el LOTUS ha calculado la frecuencia absoluta de las personas que han vivido un número de días comprendido entre dos valores consecutivos de la columna de la izquierda. La pantalla que se ofrece es la siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G
21	EXTREMO SUP.	FRECUENCIA	INTERVALO	COLOR			
22							
23	10.000	1	<=10.000	100			
24	13.000	2	10.001-13.000	1			
25	16.000	1	13.001-16.000	2			
26	19.000	2	16.001-19.000	3			
27	22.000	4	19.001-22.000	4			
28	25.000	1	22.001-25.000	5			
29	28.000	2	25.001-28.000	6			
30		1	>28.000	7			
31							
32							

Como es sabido, las hojas de cálculo ofrecen la posibilidad de ilustrar gráficamente los datos numéricos introducidos en los modelos. Presentamos, a modo de ejemplo, dos gráficos que hemos obtenido con la tabla de frecuencias:





Actividades a desarrollar con el modelo

1ª) *Análisis comparativo*

Los alumnos se dividirán por grupos, cada uno de los cuales buscará información sobre personas ya fallecidas que han pertenecido a una misma profesión (deportistas, científicos, políticos, artistas, etc.), a un mismo país, a una misma época, etc. A continuación, cada grupo elaborará su modelo de hoja de cálculo siguiendo las directrices dadas anteriormente.

El siguiente paso será una puesta en común de los datos de todos los grupos, haciendo un análisis comparativo de los resultados obtenidos. Entre los aspectos que consideramos de interés pueden citarse:

i) Estudiar la diferente esperanza de vida para hombres y mujeres.
ii) Comparar las distintas expectativas de vida.
iii) Analizar el aumento de la vida media en los últimos siglos.
iv) Discutir los datos relativos a diversos países.

2ª) *¡Algo sorprendente!*

En *EL LIBRO DE LOS SUCESOS* de Isaac Asimov puede leerse: «*Casi la mitad de nosotros muere dentro de los tres meses posteriores a su último cumpleaños, según un estudio realizado por un sociólogo de la Universidad Brigham Young, Phillip R. Kunz. Examinando 747 muestras aleatorias de obituarios publicados en Salt Lake City durante 1975, Kunz encontró que el 46% de las muertes ocurría dentro de los tres meses que seguían a un cumpleaños y el 77% durante los primeros 6 meses. Sólo el 8% ocurría durante los tres meses que precedían a un cumpleaños*».

Elaborar un modelo que permita determinar el trimestre (relativo al cumpleaños) en el que ha ocurrido la defunción de los personajes objeto de estudio y comparar los resultados con los indicados por Asimov. Observar que si la defunción fuese un suceso aleatorio, sería «normal» esperar que el 25% de las personas falleciera en el trimestre anterior a su cumpleaños, y otro 25% en el trimestre posterior a él. Si esto no es así, ¿cuáles pueden ser las causas?

3ª) *Una nueva unidad de medida: El KILODÍA*

Ya sabemos que el año (como 365,25 días) es una medida geocéntrica, ya que mide el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. Lógicamente el año en cualquier otro planeta es distinto; así, en Mercurio dura 87,9 días y en Plutón 91628,6 días.

Dejemos ahora volar la imaginación y entremos en el futuro, en el terreno de la ciencia ficción. El hombre ya domina el espacio sideral y se traslada de galaxia a galaxia... ¿Cómo medirá el tiempo entonces?

Si el sistema de medida cotidiano siguiese siendo el Sistema Métrico Decimal, ¿por qué emplear el complicado sistema temporal actual?. Parecería más lógico utilizar también el decimal para medir el tiempo; pero, si fuese así, ¿cuál podría ser la unidad base en el sistema decimal temporal?.

Como la raza humana ha nacido en la Tierra, muy bien podría seguir siendo el día la unidad básica de medida temporal. De esta forma, sus múltiplos y divisores serían:

Kilodía	1000 días	≈	2,7 años
Hectodía	100 días	≈	3,3 meses
Decadía	10 días	≈	1,4 semanas
Decidía	0,1 días	≈	2h 24 m
Centidía	0,01 días	≈	14m 24s
Milidia	0,001 días	≈	1m 26,4s

Comprobar manualmente, que estas nuevas medidas del tiempo, son más cómoda de manejar que las tradicionales. Por ejemplo, las fechas en este sistema de medida podrían escribirse con números como 630,213 Kdías. De este modo bastaría una simple resta para hallar el tiempo transcurrido entre dos fechas.

4ª) *El cumplekilodías*

Seguidamente vamos a juguetear un poco con el nuevo concepto de Kilodía. Se elaborará un modelo de hoja de cálculo para, dada la fecha de nacimiento de una persona, construir una tabla donde aparezca la fecha en que se cumplen sus 15 primeros Kilodías. Por ejemplo:

NACIMIENTO
27/6/90

Kdía nº	Día	Mes	Año
1	23	11	1992
2	20	8	1995
3	16	5	1998
4	9	2	2001
5	6	11	2003
6	2	8	2006
7	28	4	2009
8	23	1	2012
9	19	10	2014
10	15	7	2017
11	10	4	2020
12	5	1	2023
13	1	10	2025
14	27	6	2028
15	24	3	2031

En este modelo para calcular el día, mes y año correspondiente al primer cumplekilodía se introducen las siguientes expresiones:

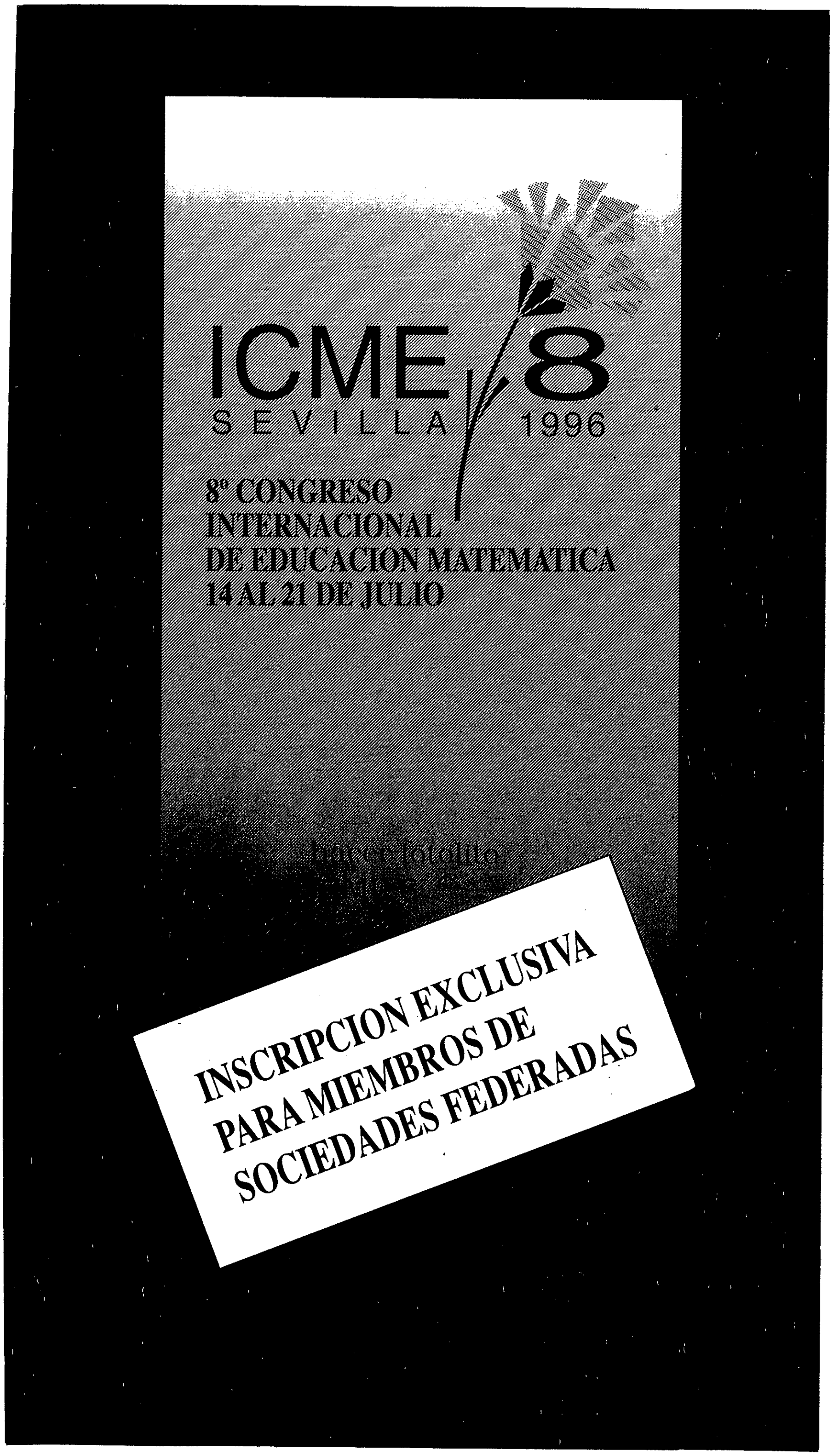
@DÍA(@VALFECHA(A2)+A6*1000)
@MES(@VALFECHA(A2)+A6*1000)
@AÑO(@VALFECHA(A2)+A6*1000)+1900

que, posteriormente, se copian para completar las columnas. Obsérvese que en la expresión correspondiente al año debe sumarse 1900 ya que la fecha inicial del Lotus es precisamente el primer día de 1900.

Con ayuda del modelo pueden resolverse una serie de problemas curiosos y entretenidos, como por ejemplo: ¿cuándo nació una persona si su 7º cumplekilodía será el 1/1/2000?. También puedes sorprender a tus amigos felicitándolos en la fecha en que cumplan su próximo Kilodía.

Vicente Trigo Aranda
Alberto Camacho Montero
I.B. «Félix de Azara». Zaragoza

INFORMACION



El Presidente del Comité Nacional del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), en representación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), tiene el placer de anunciar que dicho Congreso tendrá lugar en Sevilla, España, del 14 al 21 de julio de 1996. Los anteriores ICME'S tuvieron lugar en Lyon (Francia), Exeter (Reino Unido), Karlsruhe (Alemania), Berkeley (U.S.A.), Adelaide (Australia), Budapest (Hungría) y Québec (Canadá) bajo los auspicios de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), una subcomisión de la Unión Matemática Internacional (IMU).

El ICME-8 pretende continuar esta serie de Congresos con el objetivo de ampliar el desarrollo de la educación matemática para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Le invitamos a participar en el ICME-8 en cuyo programa se incluirá una amplia variedad de actividades científicas y un vasto programa cultural y social para los congresistas y acompañantes y donde tendrá la oportunidad de intercambiar opiniones y discutir nuevas ideas sobre las claves de la educación matemática, dentro de un marco internacional.

ICME 8
SEVILLA 1996

8° CONGRESO
INTERNACIONAL
DE EDUCACION MATEMATICA
14 AL 21 DE JULIO

EXCLUSIVO PARA
MIEMBROS DE
SOCIEDADES FEDERADAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

ROGAMOS CUMPLIMENTAR A MAQUINA O MAYUSCULAS. BOLETIN VALIDO PARA UN SOLO PARTICIPANTE

PARTICIPANTE / Datos personales

APELLIDOS			NOMBRE
DOMICILIO		D.N.I.	TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA	
NOMBRE SOCIEDAD FEDERADA			

PARTICIPANTE / Datos profesionales

CENTRO DE TRABAJO			N.R.P.
DOMICILIO			TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA	
NIVEL	☐ INFANTIL ☐ PRIMARIA ☐ SECUNDARIA ☐ ESCUELA UNIVERSITARIA ☐ UNIVERSIDAD		

CUOTA DE INSCRIPCION (válida solo hasta el 30 / 6 / 95)

☐ **PAGO UNICO** .... 30.000 pts. Antes del 30. 6. 95

☐ **PAGO APLAZADO**
primer plazo .... 10.000 pts. Antes del 31. 7. 94
segundo plazo.............. 20.000 pts. Antes del 30. 6. 95

MEDIO DE PAGO

Exclusivamente mediante transferencia bancaria a nombre de:
ICME 8

EL MONTE CAJA DE HUELVA Y SEVILLA
Oficina Principal Sevilla
c/c. n° 009/130471835
(Adjuntar comprobante de la transferencia)

IMPORTANTE:
Para esta inscripción no se considerará ningún otro medio de pago que no sea transferencia.

ANULACIONES

Hasta 31.12.95 devolución del 100% del importe.

Desde el 1.1.96 de acuerdo con la norma general de inscripción al Congreso.

USO EXCLUSIVO SECRETARIA TECNICA
FECHA DE RECEPCION: ----------------------
REGISTRO NUMERO: ------------------------

ROGAMOS REMITIR ESTE BOLETIN A:
ICME 8
Apartado de correos 4172
41080 Sevilla

FECHA: ------------------------

FIRMA: ------------------------

NOTA:
La inscripción no será considerada definitiva en tanto no reciba confirmación escrita desde la Secretaría Técnica.

SECRETARIA TECNICA: BOREAL S.A.

F. Sánchez Bedoya, 7-2° - Tlfnos: (95) 421 89 84 / 421 89 85 - Fax: (95) 421 83 34 - Télex: 72522 - 41001 SEVILLA

Convocatorias

Secretaría General de la Federación
Dirección de la Revista SUMA
Editor del Servicio de Publicaciones de la Federación

En marzo de 1995 se cumplen los cuatro años desde que fueron elegidos el Secretario General de la Federación y el Director de la Revista SUMA, por tanto, según señalan nuestros Estatutos y su Reglamento, llega la hora del relevo.

La Junta de Gobierno de la Federación, en su reunión de San Martín de Castañeda, decidió proceder a la convocatoria para cubrir estos cargos unipersonales. Reproducimos a continuación los artículos de los Estatutos y del Reglamento que rigen dicha elección:

Estatuto

Art. 14. El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años.

Art. 15. Son funciones del Secretario General:

a) Actuar como secretario en la Comisión Permanente y en la Junta de Gobierno, custodiando sus actas.
b) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno del Presidente.
c) Ordenar gastos.
d) Informar a los asociados de las actividades de la Federación.
e) La Coordinación general de las actividades de la Federación.
f) Organizar la elaboración de estudios y trabajos que redunden en beneficio de la Federación y que hayan sido aprobados en la Comisión Permanente o en la Junta de Gobierno.
g) Llevar la correspondencia de la Federación.

Reglamento

Art. 9. El Secretario General de la Federación será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años y rendirá cuenta de su gestión anualmente ante la Junta de Gobierno.

Art. 10. Podrá ser candidato cualquier socio de las Sociedades federadas. La solicitud, dirigida al Presidente de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste que es socio activo.
b) Una memoria de un máximo de tres folios, a doble espacio y por una cara, en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General, así como los contenidos de las tres vocalías previstas.

Art. 11. La Junta de Gobierno convocará el puesto de Secretario General mediante la comunicación a las Sociedades federadas, dos meses antes de finalizar su mandato o, en el caso de haber presentado su dimisión, dando un plazo mínimo de dos meses para la presentación de candidaturas.

Art. 12. El Presidente convocará una reunión de la Junta de Gobierno para proceder a la designación del Secretario General entre los candidatos presentados. Una vez decidida la designación lo comunicará a las Sociedades federadas.

Art. 13. Si no se presentara ningún candidato a Secretario General, o ninguno de los presentados recibiera la confianza de la Junta de Gobierno, ésta quedará facultada para designar a un socio que ocupará el cargo accidentalmente y por un plazo no superior a dos años dentro de los cuales realizará una nueva convocatoria.

Por lo que se refiere al Director de la Revista SUMA, el Reglamento dice lo siguiente:

Art. 14. La Revista SUMA la edita la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Su Director será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años y rendirá cuentas anualmente de su gestión ante la Junta de Gobierno.

Art. 15. Podrá ser candidato a Director de la Revista SUMA cualquier socio de cualquiera de las Sociedades Federadas. La solicitud, dirigida al Presidente de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste que es socio activo.

b) Un proyecto en el que se exponga su línea editorial, las características técnicas de la revista y un presupuesto económico de ingresos y gastos.
c) Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la Revista.

Art. 16. La Junta de Gobierno convocará el puesto de Director de la Revista mediante la comunicación a las Sociedades federadas dos meses antes de finalizar su mandato, o en caso de dimisión, dando un plazo mínimo de dos meses para la presentación de candidaturas.

Art. 17. La Junta de Gobierno nombrará un miembro del Consejo Editorial por cada una de las Sociedades federadas a propuesta de las mismas, mediante certificación de su correspondiente Junta Directiva. Los grupos de renovación, investigación y otras instituciones relacionadas con la Educación Matemática propondrán miembros de sus colectivos para cubrir cinco puestos en el Consejo Editorial; la Junta de Gobierno designará a cinco personas entre los candidatos presentados. La convocatoria para esta elección se realizará obligatoriamente junto con la del Director de la Revista.

Art. 18. El Presidente convocará una reunión de la Junta de Gobierno para proceder al nombramiento del Director de la Revista SUMA y a la elección de los miembros del Consejo Editorial entre los candidatos presentados. Una vez decidida la designación lo comunicará a las Sociedades federadas.

Art. 19. Si no se presentara ningún candidato a Director de la Revista SUMA, o a puestos del Consejo Editorial, o los presentados no recibieran la confianza de la Junta de Gobierno, ésta quedará facultada para designar a un socio que ocupará el cargo correspondiente accidentalmente y por un plazo no superior a dos años entro de los cuales realizará una nueva convocatoria.

El Servicio de Publicaciones fue creado por la Junta de Gobierno en septiembre de 1993. Las bases para la designación del Editor responsable de este Servicio son:

El Servicio de Publicaciones será coordinado por un Editor que deberá ser un socio propuesto por su Sociedad Federada. Será elegido por la Junta de Gobierno de la Federación, nombrado vocal ad hoc de la misma y será asesorado por un Comité Editorial.

Son funciones del Editor las siguientes:

a) Proponer a la Junta de Gobierno para su aprobación, la composición de un Consejo Editorial de no más de cuatro personas (excluido el Editor).
b) Elaborar su proyecto bianual de publicaciones que presentará a la Junta de Gobierno para su aprobación. Dicho proyecto deberá:

- Incluir las propuestas de publicaciones que reciba de las distintas Sociedades, debidamente informadas por el Comité Editorial.
- Contener publicaciones que a juicio del Comité Editorial puedan resultar convenientes.
- Especificar las características, interés y viabilidad económica de cada publicación, así como, los mecanismos de edición y distribución.

c) Colaborar con los Servicios de Publicaciones de las distintas Sociedades Federadas.
d) Establecer canales de colaboración con otras entidades públicas o privadas que puedan favorecer el desarrollo del Servicio de Publicaciones.

Plazos

Quienes deseen presentarse a alguno de esos puestos convocados, deberá enviar a la Secretaría General los documentos que se solicitan, antes del 30 de enero de 1995.

Designación

La Junta de Gobierno se reunirá entre los meses de febrero y marzo de 1995 para proceder a designar al responsable de cada puesto convocado entre quienes se hayan presentado, o en su defecto, actuar como indican los Estatutos.

2os Encuentros Extremeños de Profesores de Matemáticas

25-26 de Noviembre 1994
Don Benito - Villanueva de la Serena

Programa

Viernes, 25 de Noviembre
Lugar: FEVAL
Don Benito

17,00 h.: Entrega de documentación.
17,30 h.: Inauguración.
18,30 h.: Conferencia:
"La Estadística en la enseñanza de las Matemáticas".
A cargo de D. J. Ramón Vizmanos.

Sábado, 26 de Noviembre.
Lugar: I.E.S. "Pedro de Valdivia"
Villanueva de la Serena.

10,00 h.: Mesas de trabajo. Comunicaciones.
11,30 h.: Descanso.
12,00 h.: Conferencia:
"Aspectos didácticos de la Geometría"
A cargo de D. Rafael Carretero.
13,00 h.: Asamblea General de la Sociedad.
14,30 h.: Comida a cargo de la Sociedad.
17,00 h.: Mesas de trabajo. Comunicaciones.
18,00 h.: Conferencia:
"La historia de las Matemáticas como recurso didáctico"
A cargo de D. Mariano Martínez.
20,30 h.: Clausura.

Normas de presentación

Comunicaciones orales:

Guardarán relación con los temas de trabajo, y tendrán una extensión máxima de diez folios (DIN A4) por una cara y un resumen con una extensión máxima de un folio por una cara (acompañados, si es posible, del diskette correspondiente producido en Word Perfect, Word, Works o AmiPro para ordenadores PC). El Comité incluirá los resúmenes de las counicaciones a los participantes a su llegada a las Jornadas.

Las comunicaciones y resúmenes se enviarán por duplicado: impresos en DIN A4 y/o en soporte magnético. También deberán indicar a la organización el tiempo necesario de exposición y solicitar los medios adecuados. Las comunicaciones serán revisadas por un Comité de Selección y únicamente podrán ser expuestas mediante la presencia e intervención de sus autores.

Comunicaciones mediante cartel/póster:

A todos los interesados en realizar comunicaciones breves se les ofree la posibilidad de hacerlo mediante carteles/póster. Estarán expuestos durante el desarrollo de las Jornadas y sus autores serán invitados a organizar encuentros para intercambiar ideas con las personas interesadas.

Deberán tener una dimensión de 70x100 cm. diseñados en forma vertical, serán claros y legibles. Se enviará un resumen del mismo.

Materiales de trabajo en el aula:

Los autores de material didáctico, que deseen presentarlo en estas Jornadas, enviarán una breve descripción del mismo en la que se indiará su utiidad, conceptos implicados y nivel de aplicación. Estarán expuestos durante el desarrollo de las Jornadas y sus utores serán invitados a organizar encuentros para intercanbiar ideas con las personas interesadas.

Alojamiento. Información.

Don Benito:

- ❏ Hotel Vegas Altas. Tlf.: 810005
- ❏ Hotel Miriam. Tlf.: 811539
- ❏ Hotel Ortiz. Tlf.: 810445
- ❏ Hotel Vercruz. Tlf.: 801362

Villanueva de la Serena:

- ❏ Hotel J.M. El Emigrante. Tlf.: 845411.

Mesas de Trabajo. Comunicaciones.

Los temas prioritarios serían:

- ❏ Historia de las Matemáticas.
- ❏ Calculadoras.
- ❏ Materiales didácticos y recursos.
- ❏ Medios audiovisuales y nuevas tecnologías.
- ❏ Matemáticas en Secundaria.
- ❏ Optativas en E.S.O.
- ❏ Taller de Matemáticas.
- ❏ Alumnos con necesidades educativas especiales.
- ❏ Resolución de problemas.

(**Nota:** Las mesas de trabajo se formarán en función del número de participantes. Marca con una cruz las que más te interesen).

Información, Contacto y Sugerencias.

Eugenia López Cáceres
I.F.P. "José Manzano". Don Benito.
Teléfono: 924-810469

Para el envío de comunicaciones:
C.E.P. Don Benito - Villanueva.
Apartado de Correos 61.
06700 Villanueva de la Serena (Badajoz)

Comisión organizadora.

Coordinadora:	Eugenia López Cáceres.
Secretaria:	Emilia Rodríguez García.
Tesorero:	Arturo Mandly Manso.
Colaboradores:	María Teresa Díaz Gallego.
	Guadalupe Fuente Frías.
	José Miguel Gallardo de Tena.
	Carmen Hernández Martínez.
	José Antonio Jiménez García.
	José Luis Leal Cidoncha.

Convoca.

Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prosper".

Colaboradores.

Junta de Extremadura
Ayuntamiento de Don Benito
Ayuntamiento de Villanueva de la Serena
Librería "La Fontana"
Centro de Profesores Don Benito-Villanueva
I.E.S. "Pedro de Valdivia"
I.E.S. "Donoso Cortés"
I.F.P. "José Manzano"
I.E.S. "Cuatro Caminos"

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

Fecha tope de inscripción: 14 de Noviembre de 1994

Cuota: Socios de la S.E.E.M. "Ventura Reyes Prosper": Gratuito
No socios: 2.000 pts.

La cuota se debe satisfacer mediante ingreso en:
CAJA DE EXTREMADURA. Oficina Principal. C/ Pérez Galdós, 10. Don Benito.
Nº Cuenta: 045.07.002950.4
Junto a este boletín se enviará copia del resguardo bancario.

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE: ______________

DOCIMILIO: ______________________ TELÉFONO: ______________

LOCALIDAD: ____________ C.P.: ________ PROVINCIA: ______________

CENTRO DE TRABAJO: ________________________________

DIRECCIÓN: ______________________ TELÉFONO: ______________

LOCALIDAD: ______________________ PROVINCIA: ______________

Socio de la S.E.E.M. "V.R.P.": SI ☐ NO ☐

Presenta comunicación: SI ☐ NO ☐

TÍTULO DE LA COMUNICACIÓN: ________________________________

CIEAEM 47 Berlin - 45 Ans CIEAEM

Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education

Présidente: Lucia Grugnetti (Italie)
Editeur du Bulletin et Viceprésidente: Christine Keitel (Allemagne)
Viceprésidents: Paulo Abrantes (Portugal), Bernard Heraud (Canada).
Secrétaire: André Hardy (Belgique), Trésorier: Angelo Bertoletti (Suisse)

(Education) Mathematique et sens commun: le defi du changement social et du developpement technologique

Dates:

23-29 Juillet 1995

Lieu de la rencontre:
Faculté de Mathematiques, Technische Universität Berlin (TUB)
Bâtiment MA, Strabe des 17. Juni 136,
Berlin-Charlottenburg

Comité international de programme:
Christine Keitel, Berlin (présidente)
Rijkje Dckker, Amsterdam
Lucia Grugnetti, Parma
Paulo Abrantes, Lisbon
Sixto Romero Sánchez, Huelva

Organisateurs:
Freie Universität et Technische Universität Berlin, avec la coopération de l'Universität Potsdam, Humboldt-Universität Berlin et Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin

Comité local de l'organisation
Christine Keitel (présidente), Jürgen Zimmer, Uwe Gellert, Mirjam Müller, Udo Simon, Roland Stowasser, Eva Jablonka, Thomas Jahnke, Peter Damerow, Wolfgang Schulz, Ingmar Lehmann

But de la Rencontre

Le but principal de la rencontre est d'examiner, analyser et évaluer les théories et modèles actuels du curriculum et de l'enseignement des mathématiques -à tous les niveaux, de l'école primaire à l'université et à la formation professionnelle- en tenant compte des changements sociaux fondamentaux et des développements technologiques selon les divers points de vues et expériences des paticipants. La rencontre devra contribuer à une systématisation et une restructuration des approches de la recherche spécialisiée dans l'enseignement des mahématiques et à une intégration des recherches récentes dans les disciplines qui y sont liées. Afin de stimuler des formes pluridisciplinaires de coopération, la rencontre s'efforcera de pratiquer plusieurs formes de communication intensive entre mathématiciens, sociologues, psychologues, philosophes, informaticiens ainsi que pédagogues et enseignants de tous les degrés du système éducatif.

Le défi des changements politiques récents détermine plus particulièrement un aspect de notre rencontre: le sens ommun concernant une éducation mathématique fondamentale et généralisable pour tous, a été plus radicalement mis en doute par la transformation des systèmes politiques et économiques en Europe de l'Est que par nous-mêmes. Le problème n'est pas seulement d'envisager une vouvelle manière de concevoir des qualifications professionnelles des futurs mathématiciens, économistes ou ingénieurs, mais la nécessaire redéfinition des compétences démocratiques basées sur les mathématiques, en tenant compte de l'accroissement de la mathématisation. Comment déterminer un nouveau sens commun?

Sous-thèmes et questions

Le sens commun (bon sens) est d'une part une expression locale ou culturelle pour décrire les connaissances qui se réfèrent à la raison générale ou à l'intuition et d'autre part une combinaison des expériences sociales et culturelles communes à la plupart des gens. Le sens commun peut aussi être compris comme une expression politique pour décrire des perceptions ou des constructions socialement acceptées. La rencontre devrait explorer les relations entre les différentes idéologies des mathématiques, de la technologie et de l'éducation, en tenant compte du changement social et technologique. Les travaux récents sur l'influence des technologies en mathématiques, dans la régulation de la pratique sociale, et sur les objectifs de l'éducation mathématique dans un contexte social et technologique en mutation, devraient être d'un intérêt particulier.

1. Mathématique et sens commun:

Il y a des implications directes et indirectes des développements techonologiques et des changement sociaux sur les mathématiques, les applications mathématiques et les perceptions communes des mathématiques. Dans la recherche en mathématique les nouvelles approches et méthodes ont déjà été décrites comme un changement de paradigme, en opposition avec le sens commun de la communauté mathématique.

Qui décide des justifications et de l'acceptation des développements dans les mathématiques et dans les applications mathématiques? Le sens commun, offre-t-il une base de l'évaluation? Le sens commun contredit-il les mathématiques? La mathématisation influence-t-elle le sens commun?

2. L'aspect enseignement et apprentissage:

La classe, située dans le système didactique, crée des relations entre des réseaux individuels et collectifs/sociaux de communication, mais aussi entre une connaissance et une signification individuelle el sociale en mathématique. L'éducation mathématique est confrontée au sens commun des parents, des professeurs, des employeurs, de politiciens qui influencent l'éducation mathématique à tous les niveaux de l'institution et du système social. Des réponses simplistes telles que "l'éducation mathématique doit confirmer le sens commun" ou "l'éducation mathématique doit être au-dessus du sens commun" perçoivent seulement le sens ommun comme un sujet psychologique ou épistémologique et négligent sa fonction et sa base sociale.

Comment traiter avec sucès le problème des mathématiques et du sens commun? L'éducation mathématique peut-elle se baser sur le sens commun? Les mathématiques peuvent-elles être comprises comme sens commun? L'éducation mathématique doit-elle être au-dessus du sens commun? Comment considérer le sens commun comme une source importante de connaissance, et non pas comme une source de méprises ou d'idées fausses? L'éduation mathématique, considérée comme entreprise sociale, peut-elle construire ou créer un nouveau sens commun?

3. Les implications des changements sociaux:

Les changements sociaux et les transformaions des systèmes politiques à l'échelle mondiale sont accompagnés de nouvelles demandes pour l'éducation, en particulier en mathématiques et en sciences. Les études de l'OCDE, par exemple, font apparaître une tendence générale à remettre en question "l'empire des matières disciplinaires" et un fort mouvement vers une définition des "mathématiques et sciences pour tous". Des groupes de différents pays joignent leurs efforts pour développer une conception d'une "éducation mathématique critique" comme base de compétences démocratiques.

Comment évaluer ces développements et les intégrer dans des conceptions communes de l'enseignement des mathématiques? Jusqu'à quel point les "mathématiques et sciences pour tous" et "l'éducation mathématique critique" peuvent-elles devenir le sens commun?

4. Les implications des développements technologiques:

Les développements des dernières technologies de l'information dans les mathématiques et leurs applications, comme les systèmes d'algèbre symbolique et les "software packages" statistiques modifient radicalement la définition des qualifications mathématiques de base. Des formes plus élémentaires de la technologie de l'information ont influencé de manière significative les approches de l'enseignement et les contenus des programmes, en particulier les systèmes d'enseignement assisté, les logiciels de construction géométriques, les différents outils de calcul et d'informatique, aussi bien que les "micromondes" en mathématiques.

Le rôle et l'influence des technologies de l'information seront cruciaux dans le domaine de l'éducation mathématique, et il est temps d'effectuer un travail rigoureux d'analyse, d'évaluation et de synthèse des enseignements que l'on peut tirer des différent domaines où des développements se sont réalisés et installés petit à petit. La rencontre devrait prendre en compte les développements récents des technologies cognitives pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en identifiant et examinant les questions didactiques fondamentales de la conception et de l'utilisation de ces technologies, à la lumière des changements sociaux et exigences politiques décrits précédemment. Une telle entreprise demande une approhe pluridisiplinaire et l'interaction d'un gran nombre de perspectives provenant des technologies de l'information, des technologies de l'éducation, des mathématiques, de la didactique des mathématiques, de l'épistémologie, des sciences sociales et de la philosophie.

Quelles sont les implications directes des développements technologiques sur les perceptions communes de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques? Comment rendre explicites les fondements pour les jugements et décisions pédagogiques? Comment peut-on coordonner les apports théoriques et les modèles d'enseignement et d'apprentissage?

5. L'aspect cognitif et épistémologique:

Les technologies cognitives influencent les analyses des hypothèses psychologiques et épistémologiques, comme en témoignent des exemples d'intelligence artificielle, de systèmes tutoriels intelligents, de programmes d'apprentissage interactif, etc. Ce travail devrait se fonder sur des rapports de recherche récente portant sur les applications éducatives de formes variées de technologie de l'information.

Comment la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques est-elle modifiée par les moyens et les outils technologiques? Quelle est l'influence des "métaphores technologiques" sur la perception de l'apprentissage?

6. L'aspect innovateur:

La rencontre devrait examiner les certitudes que l'on peut avoir sur l'impact et l'efficacité des développements de programmes scolaires basés sur le social et le technologique et sur la dynamique du changement éducatif et pédagogique. Cet aspect des choses devrait être basé sur des expériences récentes relatives à des essais innovateurs à grande échelle, résultant aussi bien d'initiatives individuelles que d'une réforme systémique. Un champ de recherche large devrait être considéré, allant d'études de cas relatives à des innovations particulières dans des contenus spécifiques jusqu'à des études innovatrices plus globales, en vue d'une identification des facteurs clef aussi bien dans le jugement que dans l'explication du succès et de l'échec de l'innovation.

Les innovations sont-elles le résultat d'initiatives individuelles ou de réformes systémiques? Lesquelles peuvent être identifiées comme conséquences -justifiées et nécessaires - des changements sociaux et technologiques?

Organisation

Une définition du thème plus substantielle, acompagnée de références et de données bibliographiques, permettra aux participants de se préparer à la rencontre, bien à l'avance. Les travaux seront structurés selon une définition précise des *séances plénières* pour lesquelles on a choisi des conférenciers en mesure de présenter les différents aspects du thème principal. *Les présentations indiviuelles ou collectives* des participants ainsi que les travaux de *groupes* seront répartis en fonction des différents sous-thèmes et questions. Certaines présentations seront organisées sous forme d'*ateliers* afin de favoriser une participation plus active. Une *foire des idées* offrira un espace à la présentation de recherches récentes ainsi que de pratiques d'enseignement ou de matériels didactiques. Les versions définitives des présentations et les synthèses del travaux de groupes figureront dans les actes de la rencontre.

Conférenciers pressentis pour les séances plénières

Prof. Dr. Philip Davis (Etats Unis), Institute for Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI, bien connu non seulement pour son oeuvre exceptionelle de spécialiste des mathématiques appliquées, mais aussi pour son engagement dans la philosophie et les fondements des mathématiques, dans les théories sociales sur les connaissaces mathématiques, l'impat social des mathématiques appliquées et ses conséquences sur l'enseignement des mathématiques (auteur, entre autre, de "The Mathematical Experience" ("l'univers des mathématiques"), "Descartes' Dream", "Applied Mathematics as a Social Contract").

Prof. Dr. Alan Bishop (Australie), School for Graduate Studies, Monash University, Melbourne, auparavant Cambridge University, UK; comme rédacteur en chef de "Mathematics Education Library", et comme ancien rédacteur en chef de "Educational Studies in Mathematics", il a beaucoup influencé le développement international de l'enseignement des mathématiques. Ses récentes publications ont traité spécialement des aspects sociaux et culturels de l'enseignement des mathématiques (auteur, entre autre, de "Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education").

Prof. Dr. Juliana Szendrei (Hongrie), Faculté de Mathématiques, Directrice du IUFM, Budapest, bien connue pour ses publications sur la formation des maîtres en mathématiques, sur les problèmes d'évaluation et pour son travail dans le développement d'une colletion riche en matériaux pour les activités d'éléves en classe de mathématiques. Depuis longtemps, elle est membre active de la Commission et elle a été vice-présidente du comité exécutif de la CIEAEM pendant plusieurs années.

Dr. Rijkje Dekker (Pays-Bas), Université d'Amsterdam, "Graduate School of Teaching and Learning"; elle est membre active de la Commission depuis nombreuses années et ancienne secrétaire de la CIEAEM, disciple et collaboratrice de l'ancien président de la CIEAEM, le professeur Hans Freudenthal; ses publications traitent surtout de l'apprentissage des mathématiques dans les groupes hétérogènes.

Lieu de la rencontre

Toutes les activités scientifiques auront lieu à la Faculté de Mathématiques, Université Technique de Berlin (TUB), Strabe des 17. Juni 136, un beau bâtiment moderne avec toutes les facilités techniques dans le centre de Berlin: Metro (U-Bahn) U2 "Ernst-Reuter-Platz", Metro U9 and Main Station "Zoologischer Garten", City-Train (S-Bahn) S3, S4, S5, S6, S7, S9 "Zooolgischer Garten" or "Tiergarten", Bus 145 or 245.

Logement et repas:

Hôtel ECONTEL (hôtel ***, moderne, bien équipé), avec chambres individuelles, double et triple (toutes avec bain et WC, TV, téléphone, buffet pour le petit déjeuner); Sömmeringstr., Berlin-Charlottenburg, Metro U7 ("Richard-Wagner-Platz" or "Mierendorfplatz"), Bus 145 et 245;
Déjeuner (deux options à TUB): Cantine du personnel, au 9ème étage du bâtiment de la Faculté de Mathématiques, (repas complets, cuisine allemande) ou Café Campus dans le parc du campus (repas complets, spécialisés en nourriture végétarienne); Dîner: choix des participants parmi une variété de restaurants dans le district proche de Charlottenburg ou dans la cité de Berlin.

Activités annexes et programme social de la rencontre

Mercredi, 26 juillet, excursion d'un jour: tour en bus à Glienicke & Babelsberg (Palais Prussiens), Cecilienhof ("Traité de Potsdam"), réception à l'Université de Potsdam, Parc et Palais de Sanssouci, tour de ville à pieds à Potsdam (Quartier hollandais, Cathédrale de Nicolai, etc.), promenade en bateau sur le "Wannsee", le "Spree" et les Canaux jusqu'au Palais de Charlotteburg (près de l'hôtel Econtel).
Vendredi, 28 juillet: réception, buffet & musique au Musée de la Science, de la Technologie et des Transports ("Museum für Verkehr und Technik"), Trebbiner Str., Berlin-Kreuzberg.
Offres possibles et optionelles pour les soirs: 1. Concerts d'été classiques (Palais de Charlottenburg ou autre salles de concert et églises); 2. Promenade à pied "Berlin-Mitte" (Université de Humboldt, Ile des Musées, "Zeughaus", "Alexander Platz" etc.)), 3. "Forêts et lacs de Berlin" (Université Libre, Musées de Dahlem, "Krumme Lanke" & "Grunewaldsee") (choix des participants)
Une description d'une grande variété de visites, tours, lieux intéressants et restaurants sera fournie par un guide spécial de la rencontre!!!

Enregistrement et frais de la rencontre

Frais d'enregistrement: 150,-DM (délai 15 janvier, 1995, après cette date 200,-DM). Les frais de la rencontre comprenant l'hôtel, le buffet du petit déjeuner, le déjeuner, les actes, l'excursions de mercredi et la réception de vendredi soir seront d'environ 650,-DM par personne en chambre double (avec des réductions pour les personnes acompagnantes et un supplément pour chambre individuelle). De plus amples informations suivront en novembre 1994, dans la deuxième annonce.

REPLY FORM CIEAEM 47

To be sent back to the following address as soon as possible, preferable until October, 1, 1994

CIEAEM 47
Prof. Dr. Christine Keitel
Freie Universität Berlin
FB 12, WE 02
Habelschwerdter Allee 45
D-14195 Berlin
Germany

Tlf. +4930-838 5975
Fax +4930-838 5972
email: keitel@zedat.fu-berlin.de

Dear colleague!

September, 1, 1994

You are kindly invited to participate in the 47th International Conference of CIEAEM "Mathematics (Education) and Common Sense: The Challenge of Social Change and Tecnological Development" -and to visit the exciting Berlin! The Organising Committee is working very hard to make your stay in Berlin as much convenient and interesting as possible.

The IPC will meet on October, 7-10, 1994 in Berlin to discuss and work on the final version of our discussion paper and the scientific programme. In order to respect your interests and proposals the best, we would like to ask you to send back this reply form as soon as possible, preferable until October, 1, 1994. (The second announcement and the discussion-paper with references and bibliographical data - which should serve as a base for the working on the conference - will be sent out in November 1994, but only to those who complete and return this form!)

With kind regards,

Christine Keitel

❑ I am interested to participate in the International Conference CIEAEM 47, and want to receive the second announcement.

The languages of CIEAEM-Conferences are English and French. For my possible presentation and contributions to the discussion I prefer: ❑ English, ❑ French, ❑ I am fluent in both languages

❑ My activities (and my possible contribution) are related to the subtheme (s) 1 2 3 4 5 6

❑ I want to cooperate activly in the Working Group to subteme 1 2 3 4 5 6

❑ I want to propose the following aspects / subthemes to be dealt with on the conference:

❑ I am not sure to have the necessary financial resources for my participation in the conference.

Name:..

Completed / corrected address: ....
....

Tel.-No. Fax-No. Signature

Bulletin-Reponse CIEAEM 47

A renvoyer à l'adresse suivante, si possible avant le 1 octobre 1994

CIEAEM 47
Prof. Dr. Christine Keitel
Freie Universität Berlin
FB 12, WE 02
Habelschwerdter Allee 45
D-14195 Berlin
Allemagne

Tlf. +4930-838 5975
Fax +4930-838 5972
email: keitel@zedat.fu-berlin.de

Chers collègues,

1 septembre 1994

Vous êtes cordialement invités à participer à la 47ème rencontre internationale de la CIEAEM sur le thème "(Education) Mathématiques et sens commun: le défi du changement social et du développement technologique" et à visiter la passionante ville de Berlin! Le Comité Local d'Organisation a déja beaucoup travaillé, et continue à le faire, pour vous assurer un séjour à Berlin aussi agréable et intéressant que possible. Le Comité International de Programme (CIP) s'efforce de vous fournir les moyens de préparer et de profiter du programme scientifique de notre rencontre.

Le CIP se réunira du 7 au 10 octobre 1994 à Berlin pour élaborer la version finale des textes préparatoires et de l'organisation du programme scientifique. Afin de respecter au mieux vos intérêts et propositions, nous aimerions recevoir ce bulletin-reponse dans les meilleurs délais, si possible pour le 1 octobre 1994. (La seconde annonce, avec les textes de références et des données bibliographiques qui serviront de base pour les travaux de la rencontre, sera diffusée en novembre 1994, mais ces documents ne seront envoyés qu'à ceux qui auront retourné ce premier.

Recevez, chers collèges, nos meilleurs salutations!

Christine Keitel

❑ Je suis intéressé(e) à participer à la rencontre internationale CIEAM 47 et désire recevoir la deuxième annonce.

Les langues officielles des rencontres de la CIEAEM sont l'anglais et le français. Pour mes éventuelles présentations ou contributions aux discussions, je préfère m'exprimer:
❑ en anglais ❑ en français ❑ je parle les deux langues

❑ Mes activités (et mes contributions éventuelles) sont en rapport avec le(s) sous-thème(s) suivant(s) de la rencontre 1 2 3 4 5 6

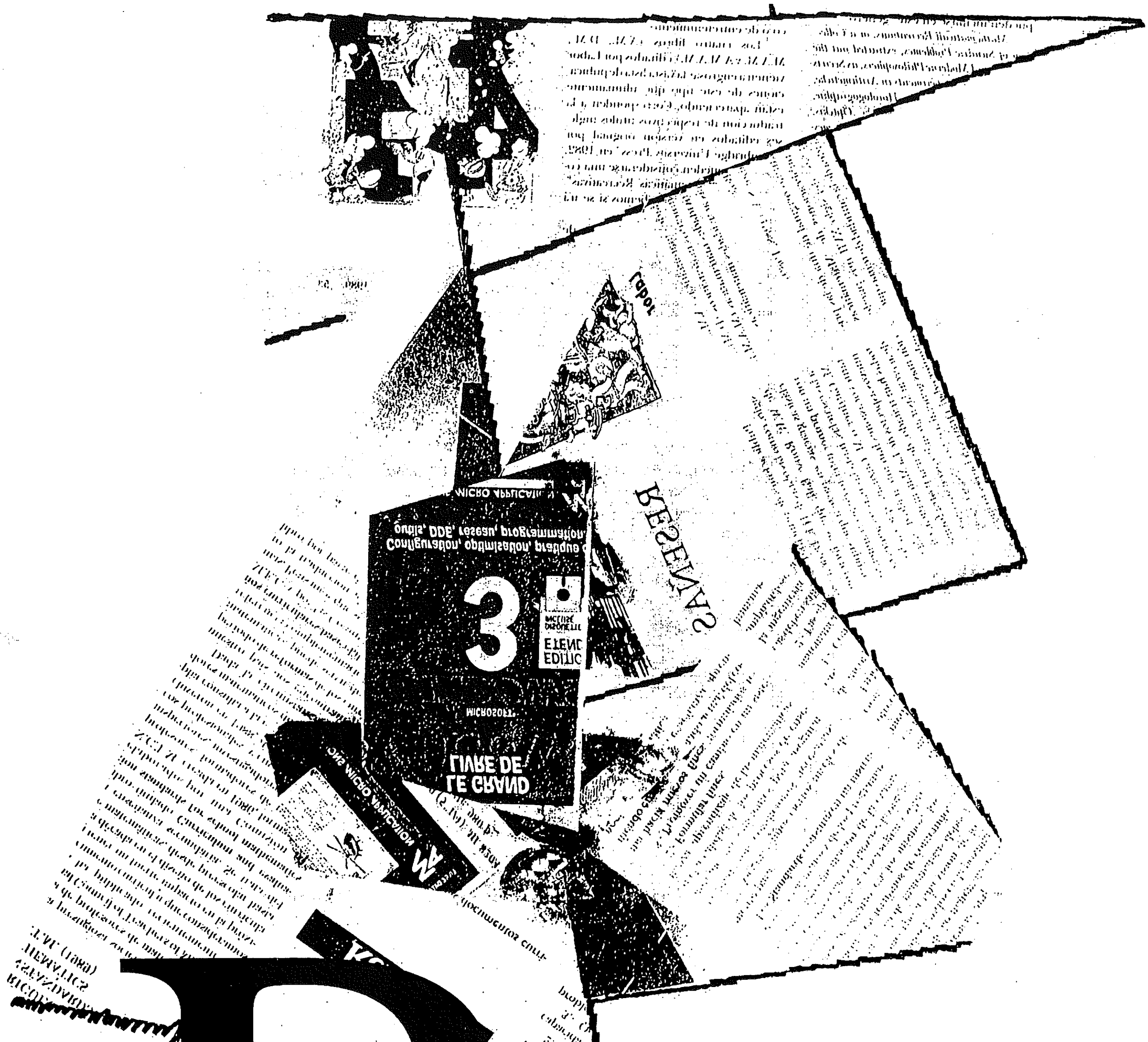
❑ Je souhaite coopérer activement aux travaux de groupe du sous-thème: 1 2 3 4 5 6

❑ Je propose que vous ajoutiez les aspects ou sous-thèmes suivants à la liste de ceux qui seront traités lors de la rencontre:

❑ Je ne suis pas certain(e) de trouver les ressources financières nécessaires à ma participation à la rencontre.

Nom: ....
Adresse complète: ....
....

Tél.: Fax: Signature

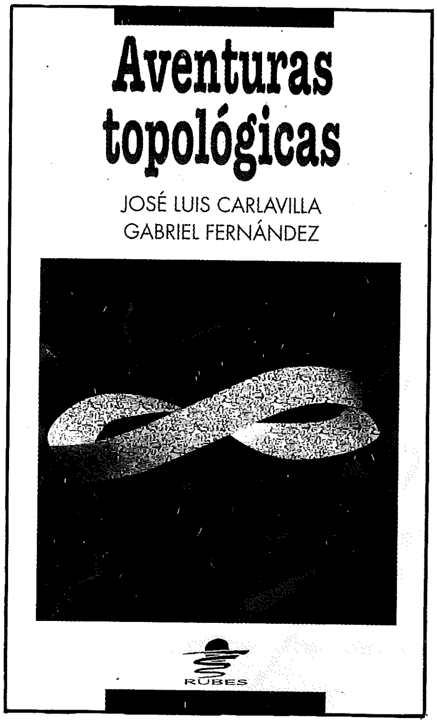


RESEÑAS

Aventuras Topológicas

José Luis Carlavilla.
Gabriel Fernández.

Barcelona: Editorial Rubes 1994.



Laberintos, jardines con senderos, puentes sobre ríos, colores, conexiones, esquemas, árboles, curvas.... y como no, cinta de Möbius constituyen parte del maravilloso y atractivo mundo de la Topología.

En la topología como campo de las matemáticas no sólo interesa el número sino el recorrido y la forma por el espacio.

Muchos de los conceptos topológicos más simples son utilizados hoy día por personas que no saben ni han oído hablar de topología. El aprendizaje de algunos conceptos topológicos llego al(a la) niño(a) mucho antes que conceptos de métrica e incluso relaciones de tipo proyectivo. Por tanto: ¿qué pretenden José Luis Carlavilla y Gabriel Fernández con este excelente trabajo?. Han conseguido dar a conocer, incluso con gracejo, aquellas partes de la topología que más cercanas pueden estar a nosotros; así por ejemplo, sin roturas se pueden conseguir cuerpos geométricos equivalentes. Estos cambios que son continuos en matemáticas se denominan transformaciones topológicas.

AVENTURAS TOPOLÓGICAS en sus primeros capítulos abordan los principales conceptos topológicos para entender el interesante mundo de los grafos. Con ello, en esta obra se puede encontrar diferentes caminos que nos puede hacer comprender mejor algunos aspectos no demasiado conocidos de la matemática.

Actualmente los que nos dedicamos al fascinante mundo de las matemáticas nos quejamos continuamente de la falta de acercamiento entre matemáticas y realidad; nos encontramos, y este trabajo así lo demuestra, ante una oportunidad para comprender que debemos cambiar de actitud ante la enseñanza de la topología. Con seguridad la obra de los profesores Carlavilla y Fernández será de gran utilidad también para nuestros estudiantes de primaria y secundaria desde el momento que esta presentación de forma lúdica de importantes conceptos topológicos las puede incentivar para «querer» un poco más a las matemáticas.

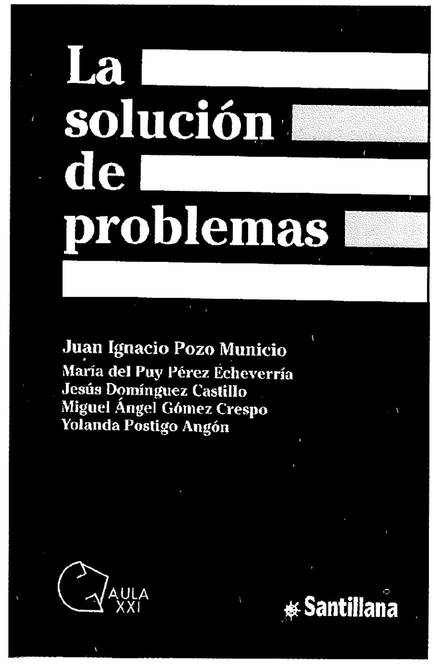
En definitiva con AVENTURAS TOPOLÓGICAS y como en cualquier aventura nos arriesgamos a recomendar su lectura con la seguridad de que van a encontrar numerosas ideas y material que rompa de una vez el sambenito de la inaccesibilidad de la matemática.

José Romero Sánchez
Sixto Romero Sánchez
SAEM «Thales» Huelva.

La solución de problemas

Juan Ignacio Pozo Municio.
María del Puy Pérez Echeverría.
Jesús Domínguez Castillo.
Miguel Ángel Gómez Crespo.
Yolanda Postigo Aragón.

Madrid: Aula XXI/ Santillana 1994



Desde principio de los 80 se puede considerar la resolución de problemas como una corriente en auge a nivel internacional. No obstante hay que tener en cuenta que bajo esa expresión podemos encontrar varias concepciones del verdadero «problema» a nivel escolar y cuáles son los «problemas» que se le pueden plantear al profesor: cuándo y cómo se puede enseñar a resolver problemas:

Numerosos autores centrándose, entre otros temas, en: el desarrollo de los procesos de pensamiento; la reflexión sobre dichos procesos; y la comunicación de ideas, han descrito metodologías que tratan de favorecer en los(as) alumnos(as) las predisposiciones mentales y hábitos intelectuales deseables para resolver problemas.

Aprender a aprender es la clave que se desprende en la actual reforma en la que nos encontramos inmersos. Para llevar a nuestros(as) alumnos(as) a ese estadio podemos utilizar la solución de problemas.

Los autores nos introducen en este campo no sólo como contenido educativo, sino sobre todo como una manera de concepción de las actividades educativas, basada en el planteamiento de situaciones abiertas que permita al(la) estudiante incentivarse en su tarea para, con su esfuerzo, llegar a encontrar sus propias respuestas.

La obra con cinco capítulos se inicia con un interesante «juego» de palabras APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS Y RESOLVER PROBLEMAS PARA APRENDER que constituye la primera parte donde se abordan:

* La solución de problemas como contenido de la Educación obligatoria.
* La solución de problemas como habilidades generales.
* La solución de problemas como un proceso específico: diferencias entre expertos y novatos.

María del Puy Pérez Echeverría es la autora del segundo capítulo. Comienza indicando que: «si hay un área del curriculo en la que no parece necesario realizar ninguna justificación acerca de la importancia que tiene la solución de problemas, ésta es sin duda el Área de Matemáticas».

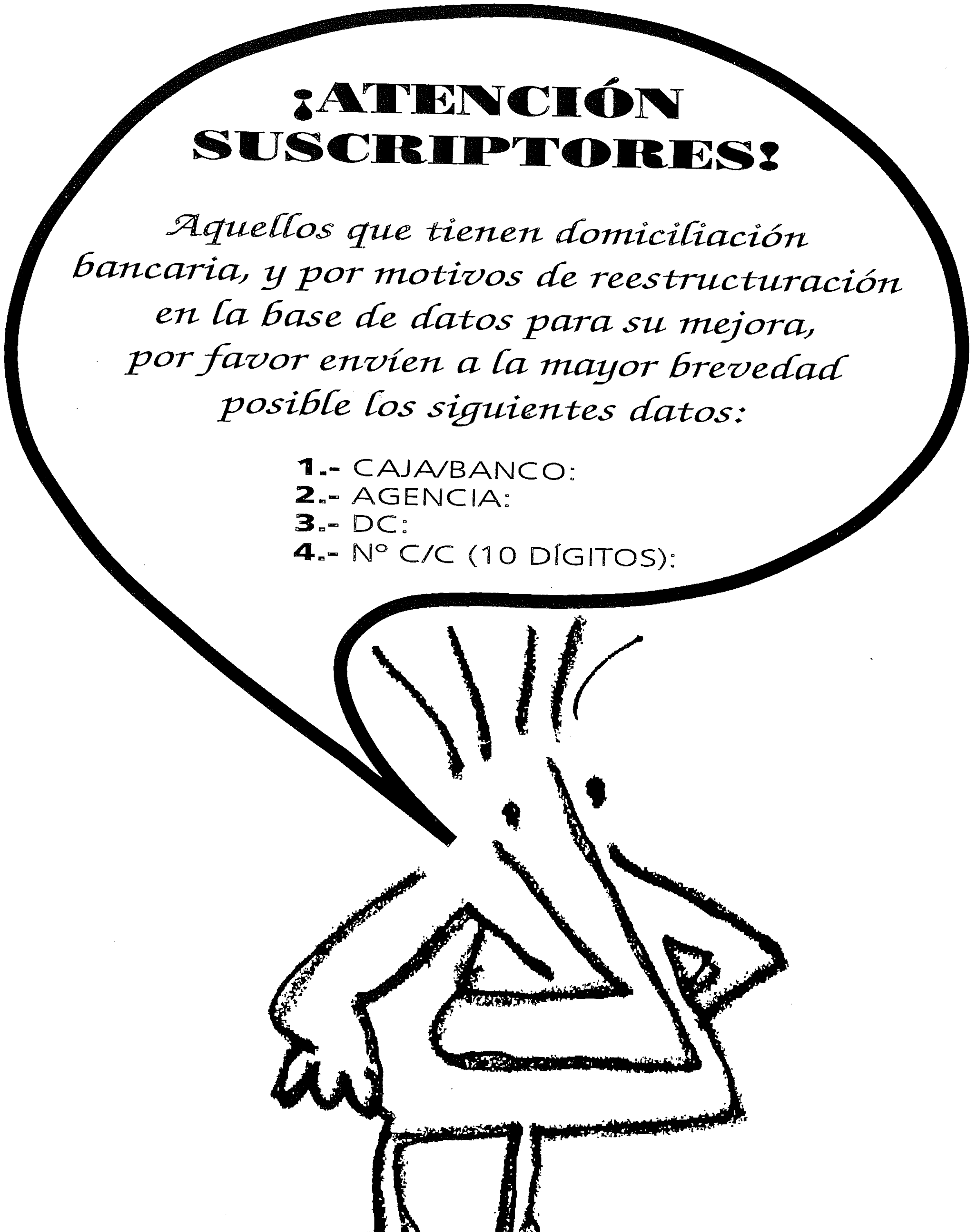
En él con una exquisitez extraordinaria estudia la solución de problemas en el curriculo de Matemáticas presentándonos: los múltiples significados de resolver un problema en matemáticas, tipos de problemas en la enseñanza de las Matemáticas así como la enseñanza y el aprendizaje del proceso de solución de un problema matemático. Culmina el capítulo acercándonos a la solución de problemas matemáticos constituyendo al mismo tiempo un método y un objetivo del aprendizaje.

La tercera parte, la solución de problemas en Ciencias de la Naturaleza junto a las dos primeras, forman parte del proyecto de investigación «Estrategias de aprendizaje y solución de problemas por sujetos expertos y novatos en diferentes dominios» dirigido por Juan Ignacio Pozo.

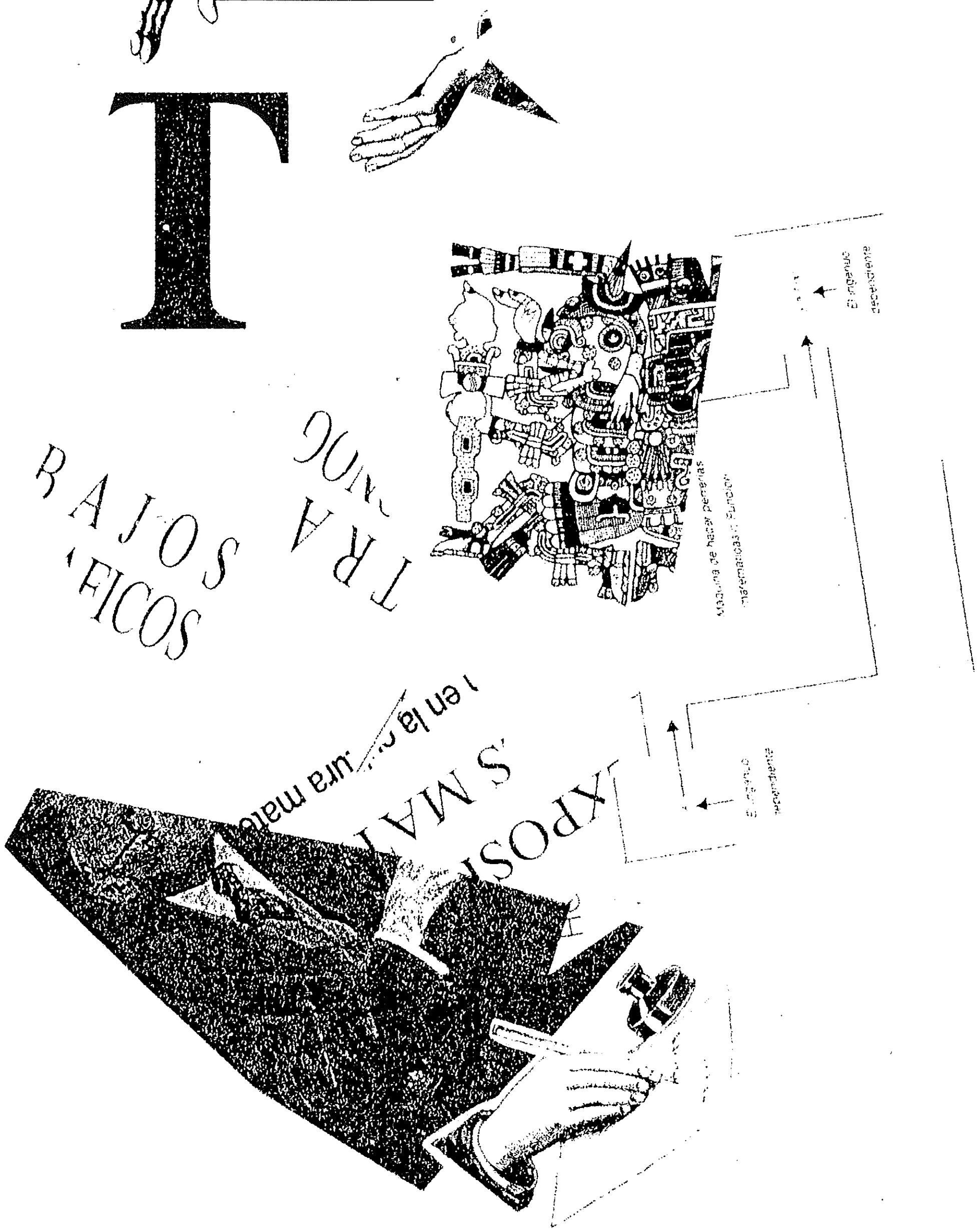
La solución de problemas en Ciencias Sociales y la solución de problemas como contenido procedimental de la Enseñanza obligatoria complementan los tres bloques anteriores de esta interesante obra.

Se trata de un excelente trabajo de gran utilidad a todos aquellos que somos responsables de la formación de nuestros estudiantes, en la que debemos poner nuestro gran empeño en la enseñanza de procedimientos sin olvidar que los conceptos y actitudes son dos elementos fundamentales para la solución de problemas. En definitiva una obra que da respuestas a la pregunta ¿Se puede enseñar a resolver problemas?.

Sixto Romero Sánchez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Huelva.


¡ATENCIÓN SUSCRIPTORES!
Aquellos que tienen domiciliación bancaria, y por motivos de reestructuración en la base de datos para su mejora, por favor envíen a la mayor brevedad posible los siguientes datos:
1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS):

MISCELANEA



El resurgir de las Matemáticas durante el siglo de Fray Luis de León

Concepción Romo Santos

Fray Luis de León llega a Salamanca el año 1543, que es una de las fechas tópicas de la ciencia moderna. Es el año en que Copérnico publica el De Revolutionibus que va a ser el texto al que todos los historiadores de las ciencias se refieren a la hora de hacer arrancar la ciencia moderna.

El objetivo de este trabajo va a ser el estudio de los avances científicos que tuvieron lugar durante el siglo de Fray Luis, uno de los mejores maestros de la Universidad de Salamanca.

El Revolutionibus de Copérnico

Nicolás Copérnico (Thorn 1473-Frauemburg 1543), estudia en Cracovia durante el curso 1491-92 pasando posteriormente por las Universidades italianas de Bolonia, Padua y Ferrara. Hombre de gran formación humanística, inicia su formación científica con los tratados dominantes en la época, tales como el Almagesto de Ptolomeo y sus versiones, las Tablas de Astronomía de Alfonso X o los Elementos de Euclides. Por otra parte, en Italia tiene noticia de la tesis heliocéntrica de Aristarco de Samos. Todo ello constituye el punto de partida de la obra de Copérnico.

Antes de la edición del De Revolutionibus, la tesis de Copérnico había alcanzado una cierta difusión a través de sus manuscritos y, especialmente, por medio de la Narratio Prima publicada en 1540 por Rhetius.

En lo referente a su recepción en España, se cita siempre la obra de Diego de Zúñiga "Los comentarios a Job", en los que se afirma que el heliocentrismo no se contradice con las Escrituras.

Por otra parte, la obra de Copérnico se incluye en los Estatutos de 1561 de la Universidad de Salamanca dentro de las lecturas de la cátedra de Astronomía.

Analicemos con cuidado los dos aspectos presentes en el texto de Copérnico, los cuales pueden servirnos como hilo conductor de lo que la ciencia ha sido en el siglo de fray Luis. En primer lugar está presente un aspecto matemático que aparece ya en las famosas palabras de Osiander del prólogo y se refiere a la interpretación misma de los contenidos del De Revolutionibus. ¿De qué trata el De Revolutionibus? ¿Trata de Cosmología y se refiere a cosas reales? ¿O simplemente trata de hipótesis matemáticas que pretenden "salvar" los fenómenos de la naturaleza; es decir, explicar matemáticamente lo que ocurre en los cielos, pero sin cuestionarse nada acerca de su realidad?

La segunda alternativa es la interpretación que Osiander da del De Revolutionibus adelantándose a los posibles ataques por parte de la teología. Este aspecto es el que está presente también en las tablas sobre los planetas que recoge el De Revolutionibus y que van a ser aplicadas por muchos obsevadores del cielo sin cuestionarse si aceptan o no las teorías contenidas en el libro. Ellos van a servirse de aquellas como simple instrumento de medición por la sencilla razón de que son más precisas que otras. Esto es lo que va a ocurrir en la Universidad de Salamanca, en la que alguno de sus profesores se sirven de las tablas de

Copérnico para llevar a cabo sus mediciones.

El otro aspecto es el de las teorías contenidas en el libro; siendo la más espectacular de todas ellas la que se refiere a la posición del Sol, que Copérnico sitúa en el centro del sistema planetario, y en torno al cual hace girar la tierra. Esa es la teoría que se sitúa en el origen de la llamada revolución copernicana y que se va a colocar como punto de partida de la moderna revolución científica.

La Cosmografía de Pedro Apiano

A pesar de la circulación de ideas científicas explicadas en el párrafo uno, la cosmovisión científica que dominaba era la vieja cosmovisión aristotélico-ptolemaica tal como la misma había cristalizado en el saber que la ciencia de la astrología sintetizaba y que está muy bien recogida en el siguiente texto: el Astronomicum Caesareum de Pedro Apiano.

Pedro Bienewitz, conocido como Pedro Apiano (1495-1554) fue uno de los más notables científicos de su época. Profesor de Matemáticas en Ingolstad, su campo de investigación lo constituyen la geografía y la astronomía. Su Astronomía del César es uno de los impresos más lujosos del siglo XVI, donde se conjugan investigación, tipografía e ilustración. La obra está dedicada a Carlos V, quien profundamente interesado por los conocimientos astronómicos y por los instrumentos que se utilizaban para efectuar mediciones, costeó la edición y premio la labor de Apiano y sus hermanos nombrándoles caballeros del Imperio y concediéndoles una elevada suma de piezas de oro.

El Astronomicum Caesarum apareció el año 1540, tres años antes del De Revolutionibus de Copérnico, y es la mejor síntesis de la ciencia astronómica precopernicana. En este texto cabe destacar los siguientes aspectos. En primer lugar que puede ser considerado como la síntesis más acabada dela vieja astrología o astronomía que en la misma década en la que el texto aparece comenzaba a ser sustituida por la nueva ciencia que como hemos visto tiene a Copérnico como su iniciador. En segundo lugar en este texto convergen dos aspectos de diversa procedencia que merece la pena destacar: el artístico y el científico. La impresión de este texto, que se encuentra en la Biblioteca Universitaria de Salamanca, es una verdadera obra de arte, siendo a la vez síntesis de la astrología y la astronomía que en ese momento está llegando a su fin.

La edición del Astronomicum Caesareum consta de dos partes. En la primera se trata de los planetas, de los eclipses, posiciones astrológicas, calendario y cómputo. En la segunda parte describe el meteoroscopium planum, cuadrante que sirve para resolver triángulos esféricos. Para el cálculo gráfico de las posiciones de los planetas, Apiano se sirvió de unos instrumentos denominados aquaetoria planetarum, constituidos por discos pivotantes con graduaciones e índices. En la obra aparecen treinta y tres discos de este tipo, caracterizados todos ellos por su magnífica decoración.

La Cosmografía de Pedro Apiano tuvo gran trascendencia. A su autor se debe la invención de la proyección estereográfica que se conoce también con el nombre de proyección Apiano. También Apiano contribuyó a que se aceptara el nombre de América al denominar así a la parte septentrional de ese continente y difundirlo a través de su obra.

Otro gran admirador de Pedro Apiano fue Alonso de Santa Cruz, el cual escribió una traducción comentada de la obra de Apiano.

Alonso de Santa Cruz fue un gran cosmógrafo y astrónomo del siglo XVI, actividades que en aquel momento estaban íntimamente ligadas; la actividad astronómica se cenraba especialmente en los estudios encaminados al perfeccionamiento del calendario, a las aplicaciones de tipo astrológico y las correspondientes al arte de navegar, necesidad que se vio acrecentada por el descubrimiento de América. Surgen nuevos centros de estudio de estas materias, como la Casa de Contratación, donde las clases son impartidas por el piloto mayor y el catedrático de navegación y cosmógrafo mayor, puesto que ocupó Santa Cruz. Como cosmógrafo mayor en el Consejo de Indias, Santa Cruz realizó para el monarca innumerables tareas de tipo náutico, geográfico y astronómico vinculadas directa o indirectamente con los nuevos territorios, este es el asunto de su texto "Astronómico Real". La obra, como él mismo hace notar en su prólogo, es una traducción comentada del Astronómico Real del cosmógrafo alemán Pedro Apiano. Este texto escrito con letra itálica cursiva se encuentra en la Biblioteca Universitaria de Salamanca.

Otro de los temas científicos destacados de ese momento es el de la reforma del calendario sobre el cual trabajó Pedro Sánchez Ciruelo, así como fray Luis de León que preparó un informe juntamente con el matemático Miguel Francés. El año de 1578 la Universidad de Salamanca envió al Papa León X un tratado sobre la reforma del calendario que está contenido en el MS97 de dicha Universidad.

Uno de los promotores del nuevo calendario (reforma gregoriana, 1582) fue el padre jesuita Cristoforus Clavius, nacido en Bamberg en 1537 y muerto en Roma en 1612. Fue denominado por algunos "El Euclides del siglo XVI" y se esforzó a partir de 1580 por promover las ciencias matemáticas en las instituciones pedagógicas de los jesuitas; defendiendo el valor científico de las "disciplinas matemáticas" y la implantación de las mismas en la enseñanza frente a "la filosofía natural" que era el saber científico dominante en las Universidades europeas del momento.

Otros avances científicos del siglo XVI

En el terreno de la ciencia renacentista también hay que mencionar a la generación de astrólogos de fines del siglo XV, con nombres como Abraham Zacuto (1452-1522) y Diego de Torres.

El judío Abraham Zacuto se educa en la aljama de Salamanca y, como estudiante, pasa por las aulas de esta Universidad. El decreto de expulsión de los judíos dado en 1492 le obliga a abandonar España. Muere en Damasco en 1522.

Su obra más importante es el Hibbur ha-gadal "El gran tratado". Un compendio de este libro da origen al Almanach Perpetuum, que se edita por primera vez en Leiria en 1496. La obra de Zacuto fue utilizada por los marinos portugueses. Igualmente Colón se sirvió de la traducción castellana del Almanach, de la que se conserva el ejemplar con anotaciones autógrafas.

El Almanach contiene todas las tablas astronómicas de la época e importantes contribuciones teóricas y gozará de gran autoridad en la Facultad de Astrología de la Universidad de Salamanca, especialmente a partir de la traducción al castellano realizada por su catedrático, Juan de Salaya. De esta traducción se conserva un manuscrito encuadernado conel incunable 176 de la Biblioteca Universiaria de Salamanca.

En esta historia de la ciencia renacentista citaremos también las ediciones críticas de textos científicos antiguos, realizadas por humanistas como Nebrija.

Tras estas, la generación de los nominalistas (Juan Martínez Silíceo, Fernán Pérez de Oliva, Pedro Margalho) que estudiaron las grandes aplicaciones de la Matemática a la Física.

En el terreno de la cartografía citaremos a Abraham Ortelius "El Ptolomeo de siglo XVI" y a Gerard Mercator.

Abraham Oertel, conocido con su nombre latinizado de Ortelius (1527-1598), era hijo de una acaudalada familia de Amberes, lo que le permitió dedicarse al estudio y práctica de su afición, la cartografía. El Theatrum Orbis Terrarum está considerado como el primer atlas moderno impreso. Alcanzó notable éxito y difusión, ya que de él se publicaron más de veinticinco ediciones en latín y diversos idiomas, perviviendo hasta 1612. Un ejemplar se encuentra en la Biblioteca Universitaria de Salamanca.

En 1575, por recomendación de Arias Montano, Ortelius fue nombrado geógrafo de Felipe II. Sus contemporáneos no dudaron en denominarle "El Ptolomeo del siglo XVI".

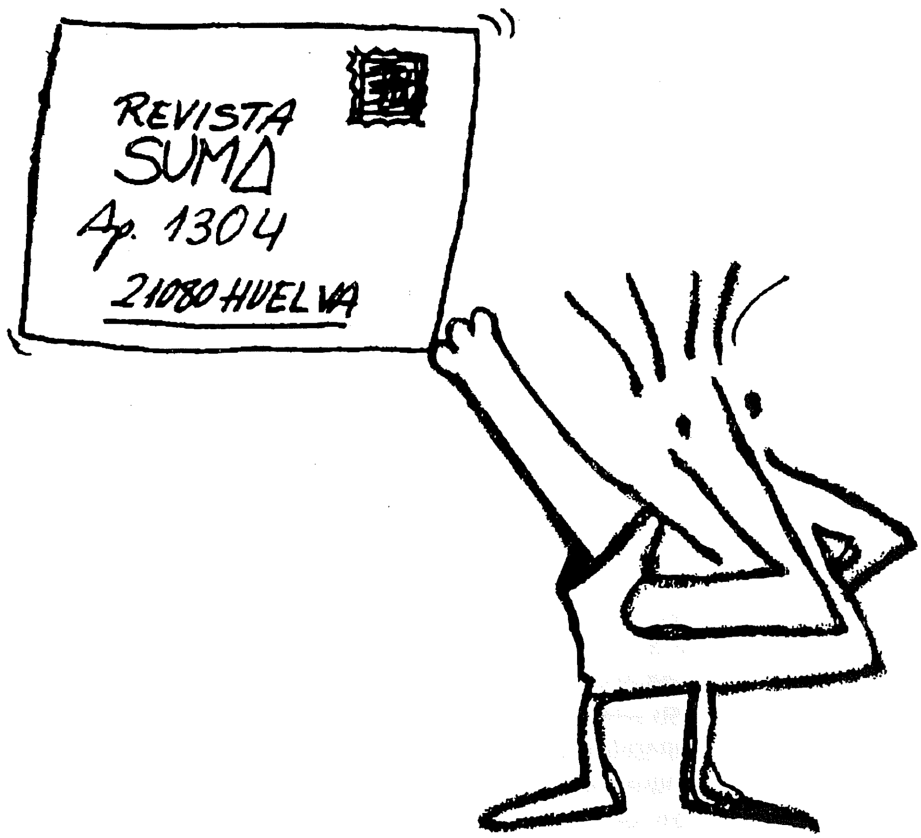
La figura de Gerard Kramer, más conocida como Mercator, constituye un hito dentro de la historia de la cartografía por sus múltiples aportaciones. Cursó sus estudios en la Universidad de Lovaina, donde fue uno de sus profesores el cosmógrafo y matemático Gemma Frisius. Posteriormente fundaría en esta ciudad uno de los establecimientos cartográficos más importantes del momento. Mercator, hombre de personalidad inquieta y preocupado por ofrecer una imagen correcta del mundo conocido, no dudó en revisar profundamente los datos y cartografía de Ptolomeo, para lo que consultó todas las fuentes posibles a su alcance: portulanos, mapas parciales, noticias de viajes y, junto a sus propias observaciones traza en 1554 un mapa de Europa que le dio forma rápidamente. En él, corrigió la longitud del Mediterráneo calculada por Ptolomeo, reduciéndola a 53 gramos que, aunque inexacta se acerca a la realidad.

En 1569 dibujó un mapa-mundi en una nueva proyección creada por él y que inmortalizaría su nombre. Es una proyección cilíndrica conforme, cuyo uso todavía está vigente en cartas náuticas y mapas de navegación aérea. En la Biblioteca Universitaria de Salamanca se encuentra su obra titulada "Atlas sive cosmographia de meditationes fabrica mundi".

Por último si nos centramos en el nacimiento del Álgebra, nos encontramos con los esfuerzos que están teniendo lugar en el campo de la Aritmética, que en la Salamanca del siglo XV tenemos muy bien representada por J. Martínez Silíceo, procedente de la Universidad de París va a inaugurar la línea de los modernos a principios del siglo XVI entre los cuales se encuentran sus discípulos Fernán Pérez de Oliva y Pedro Margalho.

Como modelo del estado dela Aritmética o Matemáticas en el siglo XVI podemos tomar el Tratado de Matemáticas que en 1573 publicara el bachiller Juan Pérez de Moya. Lo principal de este tratado es la dinstinción entre cantidad continua y cantidad discreta que va a permitir independizarse a la Aritmética de la Geometría y a su vez a permitir a aquella entrar por el camino del Álgebra.

Concepción Romo Santos
Dto. de Álgebra y Fundamentos
Univ. Complutense de Madrid



Insolidaridad del Aprendizaje en la Adolescencia

Lucía Contreras Caballero

He escrito este artículo después de observar la actitud de los alumnos en las clases impartidas por mí en la Universidad Autónoma de Madrid. Por ello no compaño Bibliografía al final.

El aprendizaje exige un ambiente de convivencia adecuado en la escuela o en la universidad, un ambiente de convivencia donde haya la mayor comunicación posible que permita la transmisión de conocimientos y técnicas y el intercambio de iniciativas y críticas. No sólo el talante autoritario del profesor puede ser un obstáculo a la realización de este ambiente, sino los problemas planteados por el desarrollo psicológico de los alumnos, que en el caso de la adolescencia comprende la formación sexual y la relación entre los alumnos y las alumnas.

Pero el aplazamiento de la relación hombre-mujer en esta edad o la relegación de esta relación a la privacidad separando la convivencia de la vida pública sería retrasar el desarrollo psicológico de la sociedad.

El primer aprendizaje necesario es el de la pluralidad en la igualdad, especialmente de sensibilidad e inquietudes.

Como es en la adolescencia cuando se desarrolla la emotividad, es muy importante cuidar un buen desarrollo de la sensibilidad corrientemente desviada por el machismo o el feminismo agresivo.

La sexualidad introduce en la cultura actual insolidaridad en lugar de las relaciones de amistad. Insolidaridad entre los hombres que sienten necesidad de competir por su "hembra", insolidaridad entre las mujeres que rivalizan por ser las más atractivas e insolidaridad hombre-mujer al pasar a ser las mujeres otros seres a conquistar por los hombres, objetos de posesión y sumisión, lo cual engendra rebeldía de la mujer respecto al hombre.

La cultura machista que se basa en el sometimiento sexual e intelectual de la mujer al hombre induce a la mujer a no afrontar sus propios problemas sino los de la pareja, convirtiéndolas en madres de nuevo, por lo que el matrimonio se convierte en una regresión a la infancia de los maridos que además desean tener hijos como compañeros infantiles, ya que en esta nueva situación se encuentran otra vez frustrados y la carga de las mujeres es cada vez mayor sin resolver sus propios problemas. Así la familia deja de ser una unidad de proyección hacia la sociedad y se convierte en un agujero negro.

Ellos en la Universidad empiezan a practicar el sometimiento intelectual no admitiendo los razonamientos ni puntos de vista de ellas procurando deslumbrarlas por todos los medios. Las alumnas que han llegado a la Universidad con expectativas de igualdad no encajan estas reacciones de competitividad en una aparente igualdad, en un desequilibrio entre el planteamiento oficial y el planteamiento real. El debate esperado se transforma para las mujeres en un combate enorme en el que tienen que escuchar otros planteamientos sin encontrarse escuchadas.

Es posible que las mujeres tengamos una naturaleza menos competitiva que los hombres y por eso nos adaptemos peor a la sociedad competitiva que ellos empiezan a desarrollar en ese momento, inducidos por la estructura dominante. Entonces surge el complejo de inferioridad en las mujeres que reprime los propios sentimientos y las empuja a someterse a las teorías elaboradas por los hombres sin mucho que aportar con el consiguiente desprecio de los hombres a pesar de no haber resuelto sus problemas con el agravante de no saber cuál es el origen de su frustración.

Las mujeres tenemos que desarrollar otra concepción más solidaria de la sociedad que incluya nuestras propias soluciones, no aceptadas por ellos. Por tanto no consiste en tratar de llevar a la práctica mejor las soluciones dadas por ellos sino en realizar el feminismo de la diferencia.

Una muestra de cómo se puede llegar a distintas conclusiones con distintos axiomas o puntos de vista son las paradojas matemáticas.

Es lo que puede ocurrir con los razonamientos masculino-femenino. Remachemos que en las paradojas no se puede demostrar que ninguno de los dos resultados es falso. Los axiomas se establecen intuitivamente y la mayoría de las veces son incomprobables pero se siente malestar o bienestar según las soluciones que se adopten.

Posiblemente, porque la cultura dominante impone la inhibición de la inteligencia de la mujer, la pasividad y la dependencia, lo mismo que no se afrontan los problemas psíquicos no se afrontan los problemas de Matemáticas lo que da lugar a que las mujeres no desarrollen sus ideas.

Cuando yo he desarrollado ideas independientes en Matemáticas he encontrado la rabia de los compañeros y la envidia de las compañeras, ambas cosas juntas les han empujado a intentar ocultarme lo máximo posible.

La mediocridad, en lugar de seguir la liberación propuesta por los pioneros intenta por todos los medios la esclavización y el retraso de éstos.

En la situación actual la mayoría de los profesores de Universidad son hombres, que premian comportamientos similares a los suyos por lo que las mujeres que se siguen colocando en los puestos importantes siguen conservando la actitud violenta del macho. Estas mujeres arruinan en muchos aspectos el desarrollo de "mujeres diferentes".

Por otra parte, está mal visto que los hombres desarollen una actitud sensible y comprensiva en la relación laboral que impide la promoción y desarrollo de otras mujeres.

En esta situación, algunas "promocionables" adoptan actitudes halagadoras hacia el poder masculino, creyendo que van a conseguir sus bjetivos infiltrándose en el poder establecido pero nunca consiguen la proyección social de sus anteriores ideales, sólo consiguen ser más opresoras que los hombres anteriores porque falsifican los ideales.

La identificación subjetiva de los representantes del poder hace confundir a profesores y padres. Entonces, los adolescentes confunden las obligaciones necesarias para el aprendizaje con la imposición autoritaria familiar. En lugar de integrarse en la nueva estructura, más amplia que la familiar, la rechazan, escapándose con el fantasma compañero salvador.

En cuanto a ellos, desintegran más que integran y se limitan a exhibir su inteligencia estúpidamente.

En cuanto a ellas, la dependencia afectiva dificulta la crítica y obstaculiza en extremo la independización individual e intelectual. Favorecen el narcisismo masculino.

Lucía Contreras Caballero
Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid.

SUMA

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________________ Tfno.: ( ) __________

CIF/NIF: ____________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ____________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº ______ Fecha __________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ____________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________________

Población: ____________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ____________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

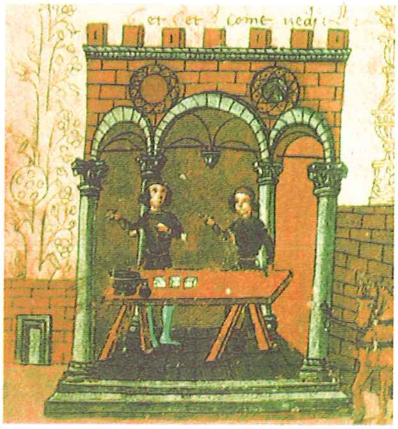
2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304. 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.



PARA COLECCIONAR Nº 8

El *Calendario Matemático* se realiza para proporcionar a los profesores un instrumento que sirva para animar a los estudiantes a la resolución de problemas matemáticos, plantear retos a sus capacidades, presentar curiosidades, proponerles que indaguen en la historia de los matemáticos, suscitar la curiosidad por las relaciones numéricas y las formas geométricas y relacionar las matemáticas con otras manifestaciones culturales.

La selección de las propuestas se realiza para que tengan cabida en las matemáticas de los últimos cursos de E.G.B. y los primeros de B.U.P. o F.P., los estudiantes que en un futuro próximo cursarán la etapa de Secundaria Obligatoria. Los problemas se pueden aprovechar para complementar, profundizar o reforzar la programación de la asignatura.

En lo referente a los contenidos hemos considerado interesante diversificar los contenidos del calendario en una serie de secciones que intentamos mantener fijas.

* La parte central la constituye una colección de problemas matemáticos: geométricos, numéricos, algebraicos, y probabilísticos, muchos de ellos sacados de los libros de matemática recreativa y otros de los libros de matemática escolar. El enunciado suele ser conciso e intenta atraer a los estudiantes hacia su resolución.
* Análisis geométrico de obras de arte: pintura, escultura, arquitectura, etc. Mosaicos y diseños tanto actuales como de la antigüedad.
* Diseños geométricos en la naturaleza y en objetos realizados por distintas culturas: simetría, crecimiento, etc.
* Figuras y objetos imposibles, ilusiones ópticas y figuras indecibles.
* Hechos históricos interesantes ocurridos a matemáticos célebres. Anécdotas, sucedidos, chistes o chascarrillos que tengan que ver con las matemáticas.

Actualmente se publica mensualmente en los suplementos de educación de los diarios Información de Alicante y Levante de Valencia.

Septiembre 94

Calendario Matemático - 18

CENTRES DE PROFESSORS

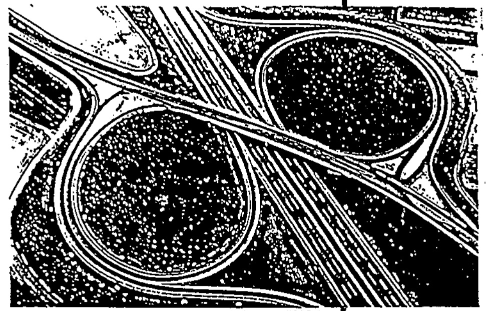
SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

الخوارزمي

AL KHWÂRIZMÎ

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 CARRETERAS



Enlace de carreteras con tangencias

2 GANANCIA.

Si tienes que elegir entre una ganancia segura del 30.000 ptas y una probabilidad del 90% de ganar 40.000 y un 10% de no ganar nada. ¿Qué opción elegirías?.

¿Cuál es más ventajosa?.

3 TRES VACAS

Tres vacas pueden comerse una determinada cantidad de hierba: la primera lo haría en una hora, la segunda en tres horas y la tercera en seis horas.

¿Cuánto tardarán las tres juntas en comerse la hierba?.

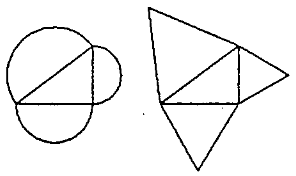
4 AMAZONAS.

Con el fin de aumentar la población femenina, la reina de las amazonas decreta que los matrimonios tendrán todos los hijos que puedan, hasta que nazca la primera niña, después ya no tendrán más.

¿Conseguirá su propósito?. ¿Crecerá o decrecerá la población?

5 PITÁGORAS. 6

Sin duda conoces el teorema de Pitágoras: Si en un triángulo rectángulo construimos un cuadrado sobre cada uno de sus tres lados, el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los otros dos. Investiga si este teorema funciona con otras figuras: con triángulos equiláteros, hexágonos regulares, semicírculos, etc.



7 SAN LUCAS.

Cuando iba a San Lucas
me encontré con un hombre que tenía 7 [mujeres
cada mujer tenía 7 sacos
cada saco tenía 7 gatos
i cada gato 7 gatitos
Gatitos, gatos, sacos y mujeres,
¿cuántos iban a San Lucas?

8 OCHO AMIGOS.

Juan tenía siete amigos. El primero lo visitaba cada tarde, el segundo cada dos tardes; el tercer cada tres tardes, y así sucesivamente hasta el séptimo.

¿Con cuánta frecuencia se encontraban los ocho juntos?.

9 MÁS AMIGOS.

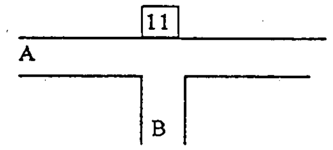
De los siete amigos de Juan que aparecen en el problema anterior, hay dos que se ven con más frecuencia en sus visitas a Juan, ¿cuáles son?. ¿Y los que se ven con menor frecuencia?.

¿Cada cuánto tiempo se ven en cada uno de estos casos?.

10 ESPIRAL Nautilo camerado.

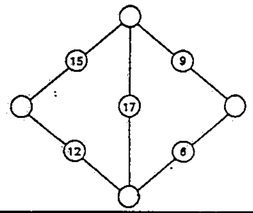
11 PORTALES I

Voy por B a buscar el número 25 de la calle A. Al llegar al cruce, ¿girarás a la izquierda o a la derecha?.

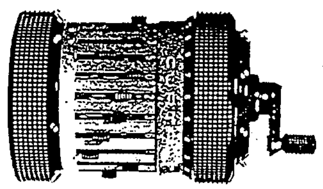


12 DIAMANTE MÁGICO

Coloca números en los círculos en blanco para que la suma de los números de cada recta del diamante sea la misma.



13 CALCULADORA MECÁNICA



14 SONETO

Raymond Quenau escribió un libro que tenía 10 páginas, con un soneto en cada una. Las páginas estaban cortadas de modo que se pudiera tomar un verso de cada soneto.

¿Cuántos sonetos distintos podrías construir?.

15 FACTORIAL

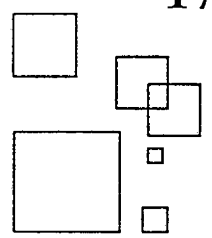
Mi ordenador ha calculado 15!, y me ha escrito.

1.307.?74.368.000

la quinta cifra no sale bien. Busca un método para averiguar la cifra sin repetir los cálculos.

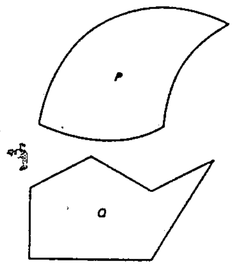
16 JARDINERO 17

Un jardinero dispone de cierto número de losetas cuadradas, todas iguales, con las que pudo formar dos embaldosados, también cuadrados y casi del mismo tamaño uno del otro.
Su afición a los problemas matemáticos le llevó a darse cuenta de que con el mismo número de losetas podría haber hecho dos embaldosados cuadrados distintos de los anteriores pero, esta vez uno mucho más grande que el otro.

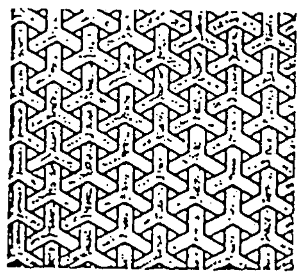


18 DOS PIEZAS IGUALES

Estas dos piezas se pueden dividir, cada una de ellas en dos piezas idénticas:



19 MOSAICO CHINO.



20 LA TABA.

En las excavaciones de cuevas prehistóricas habitadas hace 40000 años, se han encontrado huesos de astrágalo (taba) en proporción cinco veces superior al resto. Se supone que ya se utilizaba como instrumento de suerte en las riberas del mediterráneo.

21 LA SUMA

La siguiente suma no es correcta:

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ 3 \\ +\ 4\ \ 5\ \ 6 \\ \hline 7\ \ 8\ \ 9 \end{array}$$

Pero es posible colocar las nueve primeras cifras de forma que sea correcta. Hay 336 soluciones, calcula cinco de ellas y conjetura alguna pauta.

22 GALILEO

> *Las matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el Universo.*
> *Galileo Galilei.*

23 PORTALES II

El último número de la calle donde vive mi amigo es el 512. Si adivino el número de su portal en menos de diez preguntas a las que él responderá si o no, este amigo invita a una cena.

¿Qué preguntas habría de hacer?.

24 CUADRADO MÁGICO

Resulta de colocar todos los números del 1 al 9 en la cuadrícula de forma que las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales, sumen lo mismo.

25 SOLDADOS APURADOS.

Una patrulla de soldados, de maniobras por la jungla, se encuentran de pronto con un gran río profundo e infestado de cocodrilos.

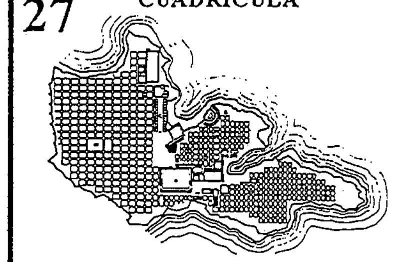
En la otra orilla ven a dos muchachos nativos con una canoa. La canoa sólo puede transportar a un soldado con su fusil y su mochila, o a los dos muchachos.

¿Cómo conseguirán los soldados atravesar el rio sin alimentar a los cocodrilos?.

26 EL AÑO.

El número de dias del año es muy peculiar, es el único número que es suma de tres cuadrados de números consecutivos, y que además es también suma de los cuadrados de los dos siguientes, ¿cuáles son estos números?.

27 CUADRÍCULA



Plano de la ciudad griega de Mileto.

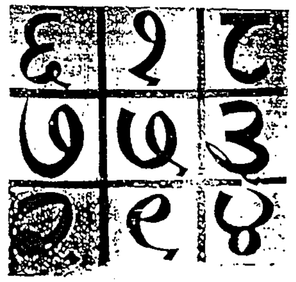
28 TRES ERRORES

Entre las afirmaciones de este problema hay tres errores. ¿Cuáles son?.

a) 2+2 = 4
b) 4/(1/2) = 2
c) 3: 0,01 = 300
d) 7-(-4) = 11
e) -10 x (6-6) = -10

29 CUADRADO MÁGICO

ciudad india de Ujjain



30 MELANCOLÍA

Es el título de un grabado de 1514 de Alberto Durero, en él se incluye el siguiente cuadrado mágico de orden 4.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant Tel. 512 24 57

Selección de problemas: Afred Mollà. CEP de Xàtiva

Setembre 94

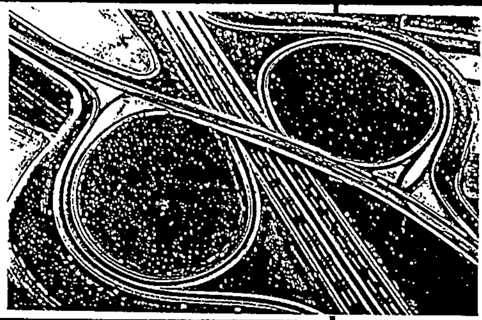
Calendari Matemàtic - 18

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA — الخوارزمي AL KHWÂRIZMÎ

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

1 CARRETERA



Enllaç de carreteres amb tangències

2 GUANY.

Si has d'elegir entre un guany segur de 30.000 ptas i una probabilitat del 90% de guanyar 40.000 junt a un 10% de no guanyar cap. Quina opció triaries?.

Quina és més avantajosa?

3 TRES VAQUES

Tres vaques poden menjar-se una determinada quantitat d'herba: la primera ho faria en una hora, la segona en tres hores i la tercera en sis hores.

Quant tardaran les tres juntes en menjar-se l'herba?.

4 AMAZONES.

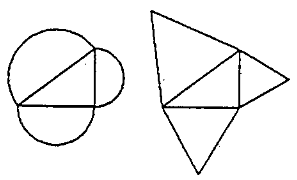
Amb el fi d'augmentar la població femenina, la reina de les amazones decreta que els matrimonis tindran tots els fills que puguen, fins que nasca la primera filla, després ja no tindrán més.

Aconseguirà el seu propòsit? Creixerà o decreixerà la població?

5 PITÀGORES.

Sense dubte coneixes el teorema de Pitàgores: Si en un triangle rectangle construïm un quadrat sobre cadascú dels seus tres costats, l'àrea del quadrat damunt la hipotenusa és igual a la suma de les àrees dels altres dos. Investiga si aquest teorema funciona amb altres figures: amb triangles equilàters, hexàgons regulars, semicercles, etc.

6



7 SANT LLUC.

Quan anava a Sant Lluc
em vaig trobar un home que tenia 7
cada dona tenia 7 sacs, [dones,
cada sac tenia 7 gats,
i cada gat 7 gatets,
Gatets, gats, sacs i dones
Quants anaven a Sant Lluc?

8 VUIT AMICS.

Joan tenia set amics. El primer el visitava totes les vesprades, el segon cada dos vesprades; el tercer cada tres vesprades, i així succesivament fins el seté.

Amb quina frequència es trobaven els vuit amics junts?

9 MÉS AMICS.

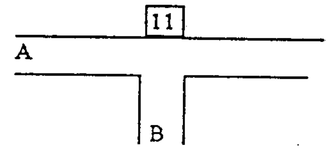
Dels set amics de Joan que apareixen en el darrer problema, hi ha dos que es veuen amb major freqüència en les seues visites a Joan, quins en són? I els que es veuen amb menys freqüència?

Cada quant temps es veuen en cadascú d'aquests casos?

10 ESPIRAL **Nautilo camerado.**

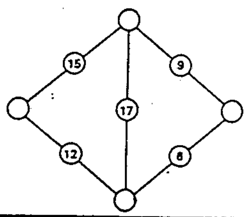
11 PORTALS I

Vaig per B a buscar el número 25 del carrer A. En arribar a l'encreuament, giraràs a l'esquerra o a la dreta?.

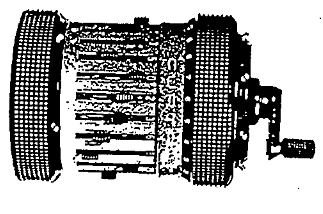


12 DIAMANT MÀGIC

Col.loca números en els cercles en blanc per a que la suma dels números de cada recta del diamant siga la mateixa.



13 CALCULADORA MECÀNICA



14 SONET

Raymond Quenau va escriure un llibre que tenia 10 pàgines, amb un sonet en cadascuna. Les pàgines estaven tallades de forma que es puguera prendre un vers de cada sonet.

Quants sonets distints podries construir?.

15 FACTORIAL

El meu ordinador va calcular 15!, i em va escriure.

1.307.□74.368.000

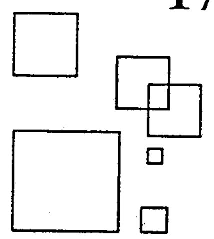
la cinquena xifra per l'esquerra no ix bé. Troba un mètode per esbrinar la xifra sense repetir els càlculs.

16 EL JARDINER

Un jardiner té una quantitat de llosetes quadrades, totes iguals. Amb elles va poder formar dos enrajolats, també quadrats i quasi de la mateixa grandària l'un de l'altre.

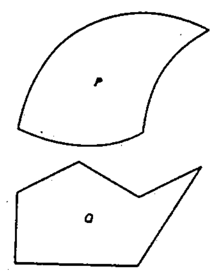
La seua afició als problemes matemàtics el va portar a adonar-se que amb el mateix número de rajoles podria haver construït dos enrajolats quadrats distints dels anteriors però, aquesta vegada un molt més gran que l'altre.

17

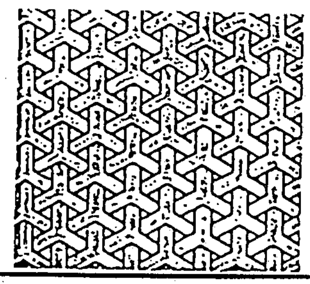


18 DOS PECES IGUALS

Aquestes dues peces es poden dividir, cadascuna d'elles en dues peces idèntiques:



19 MOSAIC XINÉS.



20 LA TABA.

En les excavacions de coves prehistòriques habitades fa 40000 anys, s'han trobat ossos d'astràgal (taba) en proporció cinc vegades superior a la resta. Es suposa que ja s'utilitzava com instrument de sort en les riberes del mediterrani.

21 LA SUMA

La següent suma no és correcta:

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3 \\ +\ 4\ 5\ 6 \\ \hline 7\ 8\ 9 \end{array}$$

Però és possible col.locar les nou primeres xifres de manera que siga correcta. Hi ha 336 solucions, calcula cinc d'elles i conjectura algun patró.

22 GALILEO

Les matemàtiques són l'alfabet amb el qual Déu ha escrit l'Univers.
Galileo Galilei.

23 PORTALS II

L'últim número del carrer on viu el meu amic és el 512. Si endevine el número del seu portal en menys de deu preguntes a les quals ell em respondrà si o no, aquest amic em convida a un sopar.

Quines preguntes hauré de fer-li?

24 QUADRAT MÀGIC

S'obté col.locant tots els números de l'1 al 9 en la quadrícula de manera que les tres files, les tres columnes i les dues diagonals, sumen la mateixa quantitat.

25 SOLDATS APURATS.

Una patrulla de soldats, de maniobres per la jungla, es troben de sobte amb un riu profon infestat de cocodrils.

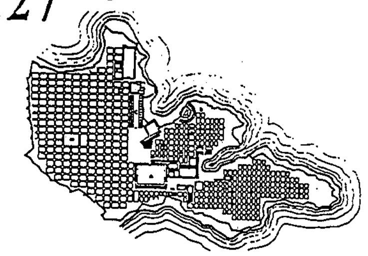
A l'altra vora veuen a dos joves natius amb una canoa. La canoa tan sols pot dur a un soldat amb el seu fusell i la seua motxilla, o als dos joves.

Com aconseguiran els soldats creuar el riu sense alimentar als cocodrils?

26 L'ANY.

La quantitat de dies de l'any és molt peculiar, és l'únic número que és suma de tres quadrats de números consecutius, i que amés és també suma dels quadrats dels dos següents. Quins són aquests números?

27 QUADRÍCULA



Plànol de la ciutat grega de Mileto.

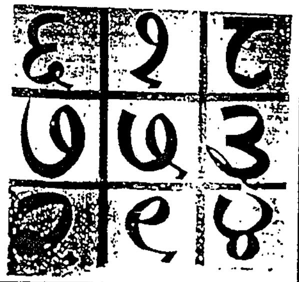
28 TRES ERRORS

Entre les afirmacions d'aquest problema hi ha tres errors. Quins en són?

a) 2+2 = 4
b) 4/(1/2) = 2
c) 3: 0,01 = 300
d) 7-(-4) = 11
e) -10 x (6-6) = -10

29 QUADRAT MÀGIC

ciutat india d'Ujjain



30 MELÀNGIA

És el títol d'un gravat de 1514 d'Albert Durero, en ell s'inclós el següent quadrat màgic d'ordre 4.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant Tel. 511 24 57 Selección de problemas: Afred Mollà. CEP de Xàtiva Traducció: Leandre Iborra i Maria Teresa Gòmez

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL KHWÂRIZMÎ

Octubre 94

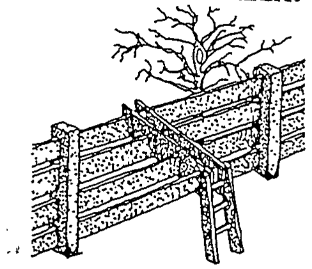
Calendario Matemático - 19

Lunes · Martes · Miércoles · Jueves · Viernes · Sábado · Domingo

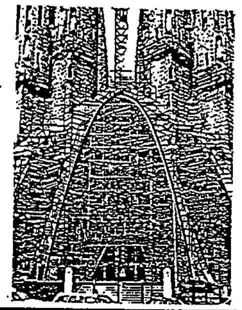
1 SEIS SEMANAS.

Este mes de Octubre de 1994 está incluido en seis semanas. ¿Qué condiciones debe cumplir un mes para que esté incluido en seis semanas?. ¿Y en sólo cuatro?.

2 ¿ESCALERA O VALLA?



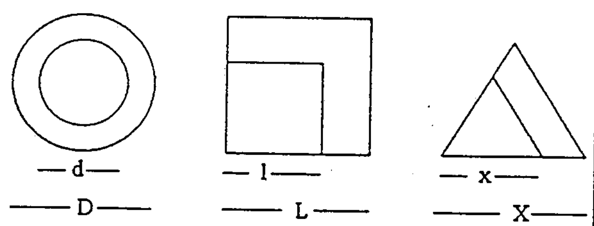
3 PARÁBOLA



Gaudí. La Sagrada Familia

4 LA MITAD DEL ÁREA. **5**

Calcula las relaciones D/d, L/l y X/x para que las áreas más pequeñas sean exactamente la mitad de las grandes.



6 APROXIMACIÓN AL 6

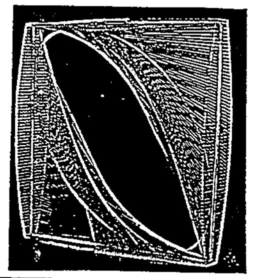
Un juego para practicar en grupo. El objetivo es un número cualquiera, por ejemplo el 6.

Gana el que encuentre una fracción cuyo cuadrado se aproxime más a 6.

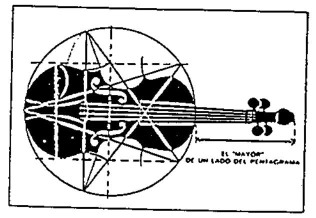
7 DENOMINADOR 7

Observa las expresiones decimales de 1/7, 2/7 y 3/7. ¿Puedes escribir, sin realizar la operación, las expresiones decimales de 4/7, 5/7, ...?.

8 NAUM GALES. Construcción lineal



9 EL PENTAGRAMA



10 UNIDAD TRIANGULAR I

Una unidad triangular es el área de un triángulo equilátero, cuyos lados miden una unidad de longitud.

¿Cuál es el área, en unidades triangulares, de los triángulos equiláteros cuyos lados miden 3, 4, 5, ... n unidades?

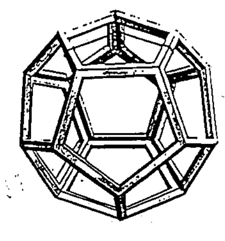
11 UNIDAD TRIANGULAR II

¿Cuál es el área, en unidades triangulares, de un cuadrado cuyos lados miden una unidad?.

¿Cuál es el área, en unidades cuadradas, de un triángulo equilátero cuyos lados miden una unidad?.

12 DODECAEDRO. **13**

El dodecaedro, según Platón, goza de notables propiedades: delimitado por doce caras pentagonales, descomponible cada una de ellas en treinta triángulos, está formado por 360 elementos últimos, lo que representa el número de días siderales o el de los grados de la circunferencia.



Dibujo de Leonardo da Vinci

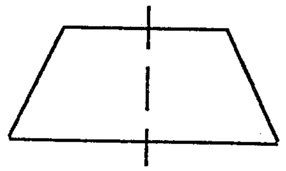
14 EL TERMOSTATO.

Observa un aparato de casa que utilice termostato, por ejemplo el frigorífico.

Haz una gráfica aproximada de la temperatura que hay en el interior según transcurre el tiempo

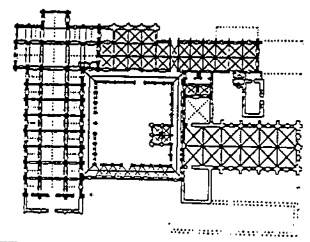
15 CUADRILÁTEROS

Clasifica los cuadriláteros según los elementos de simetría que posean.



16 MONASTERIO CISTERCIENSE

Fontenay. S. XII



17 EL MELÓN

Un melón de agua que pesa 20 Kg, está formado por un 99% de agua. Después de darle el sol todo el día, parte del agua se evapora y se queda en el 98% de agua.

¿Cuánto pesará después de la evaporación?.

18 J. HADAMARD

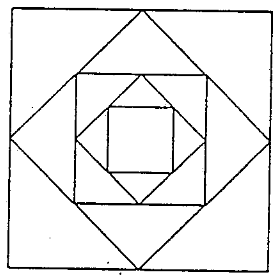
La matemática es la más simple, la más perfecta y la más antigua de las ciencias.
Jacques Hadamard.

19 LADOS Y CUADRADOS. **20**

Construye cuadrados siguiendo el criterio de la figura.

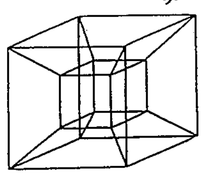
¿Qué relación hay entre el lado de un cuadrado y el lado del siguiente?. ¿Qué relación hay entre sus áreas?.

¿Cuánto mide el lado del n-ésimo cuadrado?. ¿Y el área?.



21 HIPERCUBO.

Representación plana de un hipercubo (sería lo más parecido a un cubo en la cuarta dimensión).

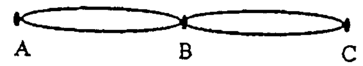


22 ANÁLISIS ARMÓNICO

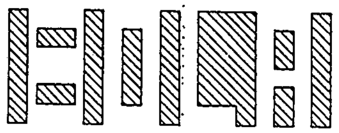
Isabel del Este. **Leonardo da Vinci.**

23 CAMINOS I

¿Cuántos caminos hay de A a C pasando por B?.



24 ¿QUÉ LEES?. **31**



25 FALTAN SIGNOS.

Escribe los signos de las operaciones y los paréntesis necesarios para que se verifiquen las igualdades:

3 3 3 3 = 3
1 2 3 = 1
1 2 3 4 5 = 1

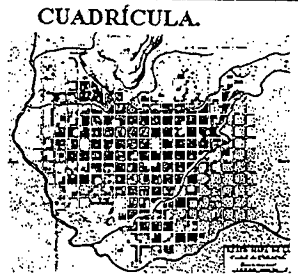
26 FALTAN CIFRAS

```
      - - 7 -
  x     - 7 -
  -----------
    - - - - -
  - - - 2 -
  8 - 5 -
  -----------
  - - - - - -
```

27 FILAS DE CUATRO

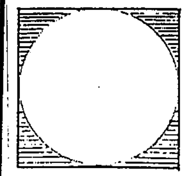
Coloca diez soldados en cinco filas de modo que cada fila tenga cuatro soldados.

28 CUADRÍCULA.



Plano de la ciudad de Buenos Aires. 1776.

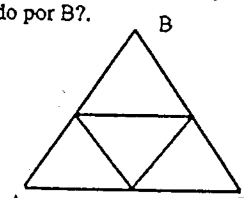
29 ÁREAS



¿Cuál es la relación entre las áreas del círculo y del cuadrado? ¿Y entre las áreas de la región sombreada y la del círculo?.

30 CAMINOS II

¿Cuántos caminos hay de A a C pasando por B?.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant Tel. 511 24 57

Selección de problemas: Floreal Gracia Alcaine. CEP de Castelló

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL-KHWARIZMI

Octubre 94

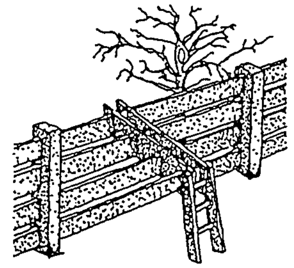
Calendari Matemàtic - 19

Dilluns · Dimarts · Dimecres · Dijous · Divendres · Dissabte · Diumenge

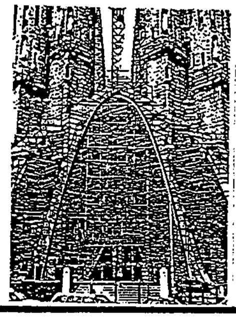
1 **SIS SETMANES.**

Aquest mes d'octubre de 1994 està inclòs en sis setmanes. Quines condicions ha de complir un mes per estar inclòs en sis setmanes?. I en sols quatre?

2 **ESCALA O VALL?**



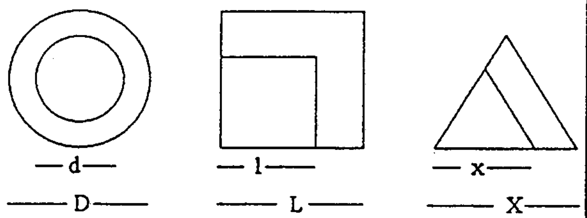
3 **PARÀBOLA**



Gaudí. La Sagrada Família.

4 **LA MEITAT DE L'ÀREA.** **5**

Calcula les relacions D/d, L/l i X/x perquè les àrees més xicotetes siguen exactament la meitat de les grans.



6 **APROXIMACIÓ AL 6**

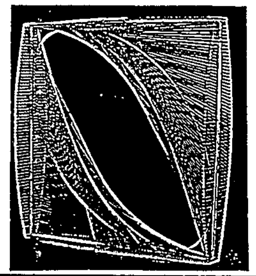
Un joc per practicar en grup. L'objectiu és un número qualsevol, per exemple el 6.

Guanya el que trobe una fracció, el quadrat de la qual s'aproxime més a 6.

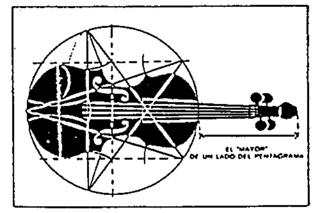
7 **DENOMINADOR 7**

Observa les expressions decimals de 1/7, 2/7 i 3/7. Pots escriure, sense realitzar l'operació, les expressions decimals de 4/7, 5/7, ...?

8 **NAUM GALES. Construcció lineal**



9 **EL PENTAGRAMA**



10 **UNITAT TRIANGULAR I**

Una unitat triangular és l'àrea d'un triangle equilàter, en què cadascun dels seus costats medeix una unitat de longitud.

Quina és l'àrea, en unitats triangulars, dels triangles equilàters els costats dels quals medeixen 3, 4, 5, ... n unitats?

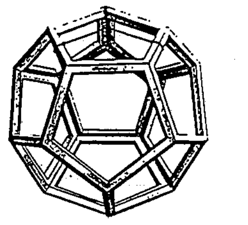
11 **UNIDAD TRIANGULAR II**

Quina és l'àrea, en unitats triangulars, de un quadrat en què els costats medeixen una unitat?.

Quina és l'àrea, en unitats quadrades, d'un triangle equilàter en què els costats medeixen una unitat?

12 **DODECAEDRE.** **13**

El dodecaedre, segons Plató, gaudeix de nombroses propietats: limitat per dotze cares pentagonals, descomposable cadascuna d'elles en trenta triangles, està formada per 360 elements últims, que representen el nombre de dies siderals o el dels graus de la circumferència.



Dibuix de Leonardo da Vinci

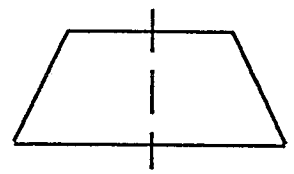
14 **EL TERMOSTAT.**

Observa com funciona un aparell de casa que utilitze termostat, per exemple el frigorífic.

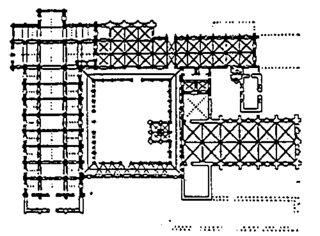
Fes una gràfica aproximada de la temperatura que hi ha en el interior segons transcorre el temps.

15 **QUADRILÀTERS**

Classifica els quadrilàters segons els elements de simetria que tinguen.



16 **MONASTERI CISTERCIENSE** Fontenay. S. XII



17 **EL MELÓ**

Un meló d'aigua que pesa 20 kg està format per un 99% d'aigua. Després de rebre el sol tot el dia, part de l'aigua s'evapora i es queda en el 98% d'aigua.

Quant pesarà després de l'evaporació?

18 **J. HADAMARD**

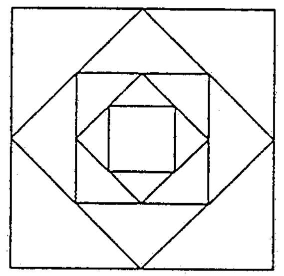
La matemàtica és la més simple, la més perfecta i la més antiga de les ciències.
Jacques Hadamard.

19 **COSTATS I QUADRATS.** **20**

Construeix quadrats seguint el criteri de la figura.

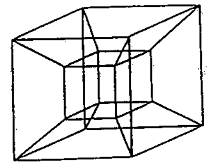
Quina relació hi ha entre el costat d'un quadrat i el costat del següent? Quina relació hi ha entre las seues àrees?

Quant medeix el costat de l'enèsim quadrat?. I l'àrea?

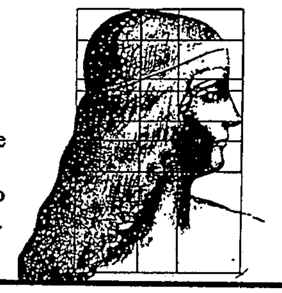


21 **HIPERCUB.**

Representació en el pla d'un hipercub (seria el més paregut a un cub en la quarta dimensió).



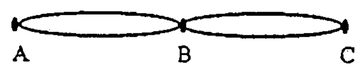
22 **ANÀLISI HARMÒNIC**



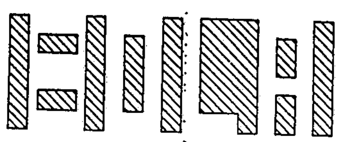
Isabel de l'Est. **Leonardo da Vinci.**

23 **CAMINS I**

Quants camins hi ha de A a C passant per B?



24 **QUÈ LLEGEIXES?** **31**



25 **MANQUEN SIGNES.**

Escriu els signes de les operacions i els parèntesis necessaris perquè es verifiquen les següents igualtats:

3 3 3 3 = 3
1 2 3 = 1
1 2 3 4 5 = 1

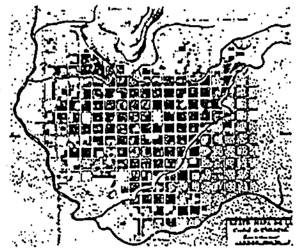
26 **FALTEN XIFRES**

```
   - - 7 -
x    - 7 -
-----------
 - - - - -
 - - - 2 -
 8 - 5 -
-----------
 - - - - - -
```

27 **FILES DE QUATRE**

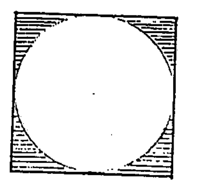
Col.loca deu soldats en cinc files de forma que cada fila tinga quatre soldats.

28 **QUADRÍCULA.**



Plànol de la ciutat de Buenos Aires. 1776.

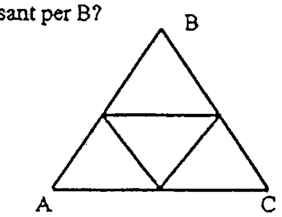
29 **ÀREES**



Quina és la relació entre les àrees del cercle i del quadrat?. I entre les àrees de la regió ombrejada i la del cercle?.

30 **CAMINS II**

Quants camins hi ha de A a C passant per B?



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª PL 03007 - Alacant Tel. 511 24 57   Selecció de problemes: Floreal Gracia Alcaine. CEP de Castelló. Traducció: Josep Andreu i Radiu

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL KHWÀRIZMÍ

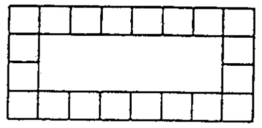
Noviembre 94

Calendario Matemático - 20

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

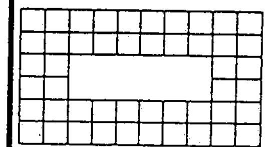
1 RECTÁNGULOS I

Consideramos un rectángulo formado por cuadrados unitarios como el de la figura:



¿Qué dimensiones debe tener un rectángulo para que el borde de formado por los cuadrados negros tenga igual área que la región interior formada por cuadrados blancos.

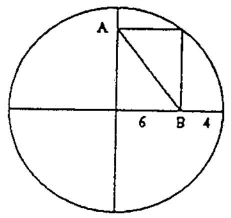
2 RECTÁNGULOS II



Investiga cuando el borde tiene 2, 3, 4, ... cuadrados de ancha.

3 DIAGONAL

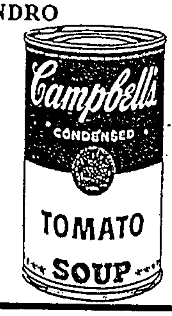
Dadas las dimensiones (en cm) que muestra la ilustración, ¿con qué rapidez puedes calcular la longitud de la diagonal del rectángulo que va de A a B



4 CILINDRO

Andy Warhol.

Campbell's Soup. (fragmento) 1968



5 CINCOS

Investiga una manera rápida de calcular los productos de números de dos cifras acabados en cinco por ellos mismos, es decir, 15x15, 25x25, 35x35, etc.

Estudia si puedes "adivinar" el resultado.

6 SEIS

Una asociación consta de seis miembros y cuatro clubs. Las reglas de los integrantes consisten en que cada miembro pertenece a dos clubs y cada club contiene a tres miembros. Utiliza un modelo para representar esta situación (puedes utilizar puntos, rectas, planos y curvas).

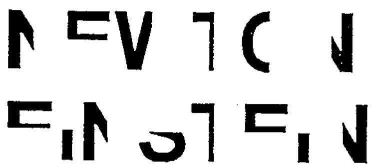
7 ¿QUÉ SE VE?.

8 GENERALIZA.

Generaliza el problema 1 en el espacio: un paralelepípedo rectángulo compuesto por cubos unitarios. ¿Qué dimensiones deben tener los lados para que el exterior de las caras de una capa de una unidad de grosor tengan el mismo número de cubos que los del interior?

9 SIMETRÍA

La simetría de ciertas letras permite descifran dos nombres como éstos:



10 FICHAS **11**

Colocamos seis fichas de dos colores como indica la figura:

Las reglas para moverlas consisten en que cada movimiento se toman exactamente dos fichas contiguas y juntas y, sin alterar su orden, se trasladan donde se encuentran espacios vacíos. El problema consiste en disponerlas de tal forma que se encuentren juntas las tres del mismo color, seguidas de las tres del otro color, pero la operación ha de hacerse tan solo en tres movimientos.

12 DOCE

La división del tiempo continúa haciéndose en base 12: 24 horas, 60 minutos, 60 segundos, ...

Contesta con rapidez: ¿Cuántas docenas de de horas tiene un año?

13 EL CAPITÁN

Un capitán de fragata organizaba en grupos a sus hombres para un desfile. Cuando los agrupaba en filas de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ó 12 marineros, siempre le sobraba uno, pero al agruparlos en grupos de 13 no le sobraba ninguno.

¿De cuántos hombres constaba el escuadrón?.

14 13 = 14

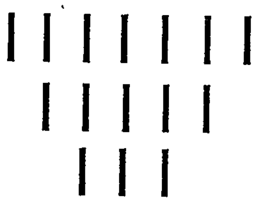
Alguien dijo un dia que 13 = 14, ya que si partimos de que

(3-3)x13 = (3-3)x14

y simplificamos el factor común (3-3), resulta 13 = 14.

¿Dónde se equivocaba?.

15 QUINCE **16**



La figura muestra 15 cerillas dispuestas en tres filas. Puedes coger las que quieras siempre que sean de la misma fila. Pierde el que se lleve la última cerilla.

¿Hay alguna estrategia ganadora?. ¿Prefieres comenzar o esperar que salga el otro?.

17 EL RELOJ

Si a un reloj le cuesta cinco segundos dar las seis, ¿cuánto tiempo le costará dar las doce?.

18 PRODUCTO

Multiplica el famoso número

12345679 por 18

¿Qué sorpresa hay?

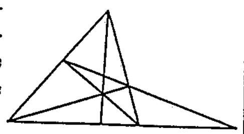
19 EL INSECTO

Un insecto tarda 10 segundos en arrastrarse a lo largo de una regla desde la marca de los 10 cm hasta la marca de los 5 cm que está en el centro. Siguiendo su camino, se desplaza desde la marca de 5 cm hasta la de 1 cm pero este recorrido sólo lelleva 8 segundos. ¿Se te ocurre alguna buena razón que lo justifique?.

20 LIBERACIÓN. M.C. Escher **27**

21 TRIÁNGULOS

Esta figura contiene triángulos, algunos de ellos se solapan. Inventa alguna manera sistemática para contar todos los triángulos sin que se te olvide ninguno.



22 PAPEL

Un arca tiene 22 resmas de papel, cada resma 500 folios y cada pliego 5 folios.

¿Cuántos pliegos hay en una resma?. ¿Y en una arca?.

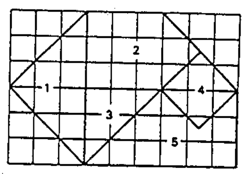
23 LA PARCELA

Una parcela triangular tiene por lados 1700, 3500 y 5200 m,

¿Cuál es su superficie en áreas?.

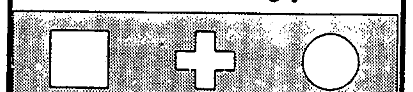
24 CUADRADO

Dibuja en papel cuadriculado las cinco piezas de la figura, recórtalas y trata de formar con ellas un cuadrado.



25 EL TAPÓN

En una plancha de metal hay tres agujeros como los de la figura. Diseña un tapón que pueda pasar por cada uno de los agujeros, pero que en cada caso, tapar completamente el agujero.



26 EL PESO

Escribe tu peso en un papel.
Multiplícalo por 10.
Resta a ese número un múltiplo de 9 inferior a 81.
Dará un número de tres cifras.
Si a las dos cifras de la izquierda le sumas la de la derecha, obtendrás tu peso.
¿Puedes investigar por qué ocurre?.

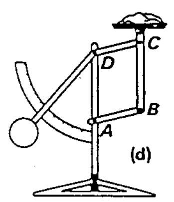
28 CUADRADOS

Calcula 31^2 y 13^2. ¿Qué observas?.

¿Qué pasa al elevar al cuadrado ciertos números y los obtenidos al cambiar el orden de las cifras. Experimenta con 12^2 y 21^2, 102^2 y 201^2, etc.

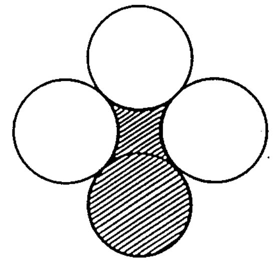
29 BALANZA

Utilización de la posibilidad de deformación de un paralelogramo para la construcción de instrumentos mecánicos.



30 CUADRATURA DE TETERA

En la figura la zona sombreada representa la sección transversal de una tetera que está limitada por arcos de cuatro circunferencias iguales. Investiga cómo podrías dividir esta sección en tres trozos utilizando dos rectas, de manera que, con ellas se pueda formar un cuadrado.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant Tel . 5 112457

Selección de problemas: Onofre Monzó. CEP de Godella

Novembre 94

Calendari Matemàtic - 20

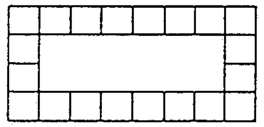
CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL KHWÂRIZMÎ

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

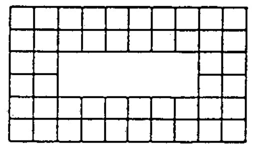
1 RECTANGLES

Considerem un rectangle format per quadrats unitaris com el de la figura:



Quines dimensions ha de tenir un rectangle per a que la vora formada per quadrats negres tinga igual àrea que la regió interior formada per quadrats blancs.

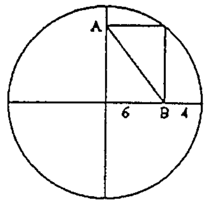
2 RECTANGLES II



Investiga quan la vora té 2, 3, 4, ... quadrats d' ampla

3 DIAGONAL

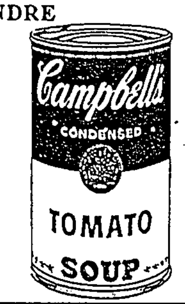
Donades les dimensions (en cm) que mostra la il.lustració, amb quina rapidesa pots calcular-ne la longitud de la diagonal del rectangle que va des de: A a B



4 CILINDRE

Andy Warhol.

Campbell's Soup. (fragment) 1968



5 CINCS

Investiga una manera ràpida per calcular els productes de números de dues xifres acabats en cinc per ells mateixos, o siga, calcula 15x15, 25x25, 35x35, etc.

Descobreix com es pot "endevinar" el resultat.

6 SIS

Una associació consta de sis membres i quatre clubs. Les regles dels integrants consisteixen en que cada membre perteny a dos clubs i cada club conté a tres membres. Utilitza un model per representar aquesta situació (pots utilitzar punts, rectes, plans i corbes).

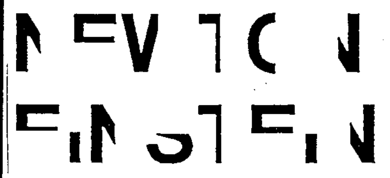
7 QUÈ ES VEU?

8 GENERALITZA

Generalitza el problema 1, ara a l'espai: un paral.lelepípede rectangle (taulell) que estiga composat per cubs unitaris. Què dimensions han de tenir els costats per a que les vores de les cares amb una capa d'una unitat de grossària tinguen el mateix número de cubs que els de l'interior?

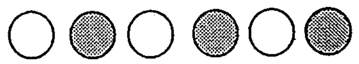
9 SIMETRIA

La simetria de certes lletres permet desxifrar dos nombres com aquests:



10 FITXES **11**

Coloquem sis fitxes de dos colors com indica la figura:



Les regles per moure-les consisteixen en què cada moviment es prenen exactament dues fitxes contigües i juntes i, sense alterar el seu ordre, es traslladen on s'hi troben espais buits. El problema consisteix en disposar-les de tal forma que es troben juntes les tres del mateix color, seguides de les tres de l'altre color, però la operació ha de fer-se tan sols amb tres moviments.

12 DOTZE

La divisió del temps continua fent-se en base 12: 24 hores, 60 minuts, 60 segons, ...

Respon amb rapidesa: Quantes dotzenes d'hores té un any?

13 EL CAPITÀ

Un capità de fragata organitzava en grups als seus homes per una desfilada. Quan els agrupava en files de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 mariners, sempre li'n sobrava un, però al fer-ho en grups de 13 no li'n sobrava cap.

De quants homes constava el seu esquadró?.

14 13 = 14

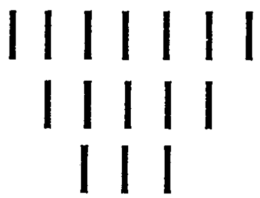
Un dia algú va dir que 13 = 14 , ja que si partim de que

(3-3)x13 = (3-3)x14

i simplifiquem el factor comú (3-3), resulta 13 = 14.

On s'equivocava?.

15 QUINZE **16**



La figura mostra 15 llumins disposats en tres files. Pots agafar les que vulgues sempre que siguen de la mateixa fila. Perd l'ultim que se'n porte el darrer llumí.

Hi ha alguna estratègia guanyadora?. Prefereixes començar o esperar que isca l'altre?.

17 EL RELLOTGE

Si a un rellotge li costa cinc segons donar les sis, quant temps li costarà donar les dotze?.

18 PRODUCTE

Multiplica el famós número

12345679 per 18

Quina sorpresa hi ha?.

19 L'INSECTE

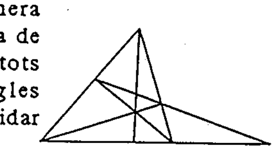
Un insecte s'arrosega al llarg d'una regla des de la marca dels 10 cm d'un extrem fins a la marca de 5 cm que està en el centre. En aquest trajecte inverteix 10 segons. Seguint el seu camí, es desplaça des de la marca de 5 cm fins la de 1 cm però aquest recorregut només li porta 8 segons. Se t'acudeix alguna bona raó que ho justifique?.

20 LLIBERACIÓ. M.C. Escher **27**

21 TRIANGLES

Aquesta figura conté molts triangles, dels que alguns s'hi solapen.

Inventa alguna manera sistemàtica de comptar tots els triangles sense oblidar ningú.



22 PAPER

Un arca té 22 raimes de paper, cada raima 500 fulls i cada plec 5 fulls.

Quants plecs hi ha en una raima?. I en una arca?.

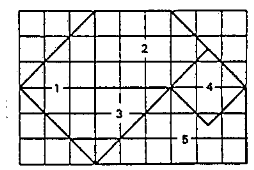
23 LA PARCEL.LA

Una parcel.la triangular té per costats 1700, 3500 i 5200 m,

Quina és la seua superfície en àrees?.

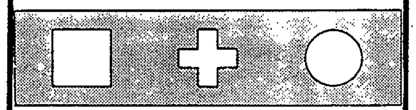
24 QUADRAT

Dibuixa en paper quadriculat les cinc peces de la figura, retalla-les i tracta de formar amb elles un quadrat.



25 EL TAP

En una planxa metal.lica hi ha tres forats com els de la figura. Dissenya un tap que puga passar per cadascun d'aquests forats, però, en cada cas, omplint completament el forat.



26 EL PES

Escriu el teu pes en un paper.
Multiplica-ho per 10.
Resta d'aquest resultat un múltiple de 9 inferior a 81.
Donarà un nombre de tres xifres.
Si a les dues xifres de l'esquerra li sumes la de la dreta, obtindràs el teu pes.
Podries investigar perquè ocorre?.

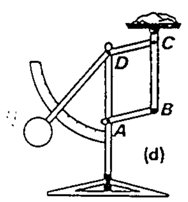
28 QUADRATS

Calculeu 31^2 i 13^2. Què observeu?.

Què passa en elevar al quadrat certs números i els obtinguts canviant d'ordre les xifres. Experimenteu amb 12^2 i 21^2, 102^2 i 201^2, etc.

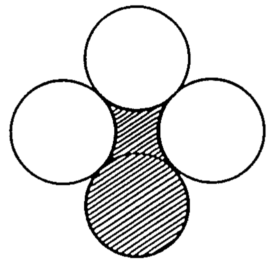
29 BALANÇA

Utilització de la possibilitat de deformació d'un paral.lelogram per a la construcció d'instruments mecànics.



30 QUADRATURA DE TETERA

En la figura, l'ombrejat representa la secció transversal d'una tetera, que és limitada per arcs de quatre circumferències iguals. Investiga com podries dividir aquesta secció en tres trossos utilitzant dues rectes, de manera que, amb elles es puguera formar un quadrat.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant Tel. 511 24 57   Selecció de problemes: Onofre Monzó. CEP de Godella

Diciembre 94

Calendario Matemático - 21

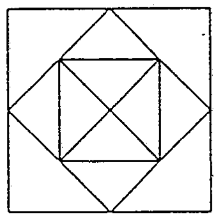
CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA الخوارزمي AL KHWÀRIZMI

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 CUADRADOS

Cuenta todos los cuadrados que hay en:

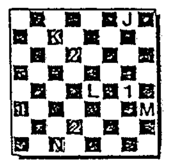


2 PANTALLA DE TV.

Se anuncia el nuevo formato 16:9 (ancho:alto) para las pantallas de TV. El normal, ahora, es el formato 4:3.

Compara las superficies de visión que ofrecen para una misma altura de pantalla.

3 AJEDREZ.



Las letras son las piezas: rey, dama, torre, alfil y caballo. Los números indican cuántas piezas amenazan esa casilla. ¿Qué pieza es cada letra?.

4 ALICIA.

Te recomendamos la lectura del libro de Lewis Carrol "Alicia en el País de las Maravillas", en él encontrarás muchas referencias matemáticas. Aquí tienes un poema "*Con mucha cola*":

Una FURIA dijo
a un ratón al que
en casa se encon-
tró: "Juntos ire-
mos ante la LEY:
¡Yo acusaré! ¡Tú
te defenderás!.
¡Vamos!. ¡No
aceptaré más
dilación! ¡Un
proceso hemos
de tener, pués,
en verdad no
he tenido
esta mañana
otra cosa que
hacer!" Dijo
el ratón a la
energúmena:
"Tal pleito,
respetable
dama, sin
jurado ni
juez, no
serviría
más que
para des-
gañitarnos
inútil-
mente".
Yo se-
ré el
juez, y
el jura-
do", re-
plicó,
taima-
da, la
vieja
furia.
"¡Se-
ré yo
quien
diga
tode
cuan-
to di-
ga y
YO
qui-
en a
muer-
te te
con-
de-
ne!.

5 FORMA Y FONDO

VELA BLANCA
Poema de
P. Català i Roca

una
vela
blanca
estela
la franca
i comuna
alegria del
retrobament.
Nova correntia
de companyonia
n'esdevé el vent.
Salve, vela coetània!
Solca la Mediterrània!

6 ELIGE BIEN. 7

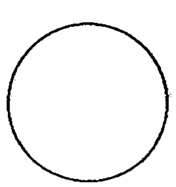
Te ves en la necesidad de elegir entre dos puertas, cada una con un cartel:

I	II
En esta habitación está el tesoro y en la otra hay un loro.	*En una de estas habitaciones hay un tesoro y en una de estas habitaciones hay un loro.*

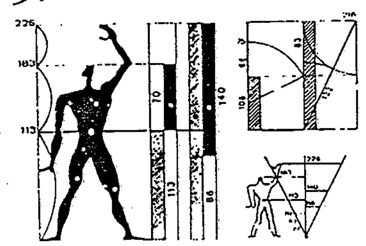
Te dicen que uno de los dos carteles dice la verdad y el otro no. Quieres el tesoro. ¿Qué puerta eliges?.

8 PROBLEMA DE NAPOLEÓN.

Encuentra el centro del círculo utilizando solamente un compás.

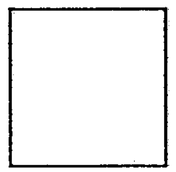


9 LE CORBUSSIER. Modulor.



10 CUADRADO.

Diseña una sala cuadrada con cinco ambientes rectangulares cuyos lados sean enteros y midan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 metros.



11

12 DOCE.

El número 12 tiene 6 divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Cuatro son pares y dos impares. Encuentra números que tengan todos sus divisores pares excepto el 1.

Intenta encontrar la regla que los define y justifícala.

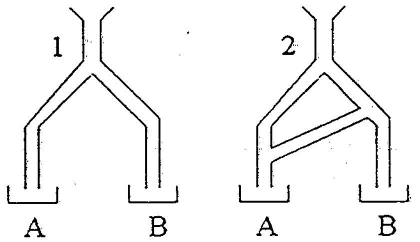
13 EL SISTEMA SOLAR.

Busca datos sobre tamaño de los planetas del Sistema Solar para hacer un dibujo a escala.

14 MIL BOLAS. 15

Se han echado 1.000 bolas por uno de los aparatos. Hemos contado 614 bolas en la caja A y 386 en la B.

¿Qué aparato se ha utilizado?.



16 EL MARCADOR.

Un partido de fútbol ha acabado con el marcador de 3-2.

¿De cuántas maneras diferentes se ha podido llegar a ese resultado?.

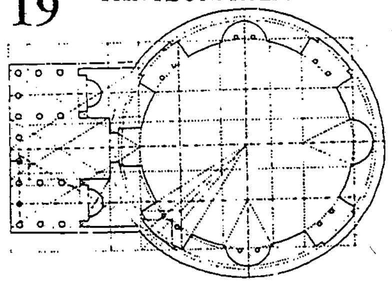
17 CERTEZA.

Determina el grado de certeza de cada una de las afirmaciones:

A.	B.
Un múltiplo de 4 es un múltiplo de 2.	Un múltiplo de 3 es un múltiplo de 6.

18

19 PANTEÓN. Roma



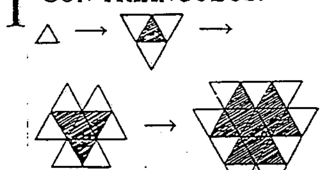
20 PALINDROMOS.

Son palabras o frases simétricas (se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda). Una muy famosa es:

Dábale arroz a la zorra el abad.

Encuentra otros.

21 CON TRIANGULOS.



Sigue la secuencia. ¿Cuántos triángulos con trama habrá después de 10 pasos?.

22 HORA CAPICÚA.

En un reloj digital, las 10:01 es una hora capicúa (simétrica).

¿Cuántas horas capicúas hay en un día?.

23 DR.FLIES.

A principios del siglo XX, el Dr. Flies asignó ciclos de 23 y 28 días a componentes masculino y femenino. Números personales concretaban combinaciones de ciclos que determinaban acontecimientos y días favorables o contrarios para realizar acciones (operarse,...). El mismo Freud estuvo un tiempo subyugado por esta teoría.

24 UNA SUMITA.

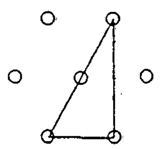
Vamos a calcular la suma:
1 - 1 + 1 -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...
Por una parte,
(1 - 1) + (1 -1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...= 0
Por otra parte,
1 + (- 1 + 1) + (-1 + 1) + (- 1 + 1)+...= 1
¿Puedes obtener suma -1?

¿Cuánto vale realmente esta suma?.

25

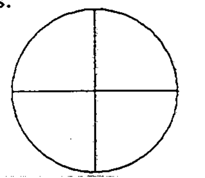
26 TRIANGULOS.

¿Cuántos triángulos podremos formar que tengan sus vértices en:



27 UN CUARTO.

Se ha divido el círculo en cuatro partes iguales. Hazlo tú de otras tres formas diferentes.



28 DR. FLIES.

Alguien se dió cuenta de que todos los números naturales se podían obtener combinando el 23 y el 28 adecuadamente. Por ejemplo:
1 = 23x11 + 28x(-9).

Encuentra las combinaciones que dan los números 2, 3, 4 y 5.

29 POTENCIAS

Observa:

$0 = 4^2-2^4$
$1 = 3^2-2^3$
$2 = 3^3-{}^{52}$
$3 = 2^7-5^3$
$4 = 5^3-11^2$
5 = ...
6 = ...

Expresa hasta el 10 como diferencia de potencias.

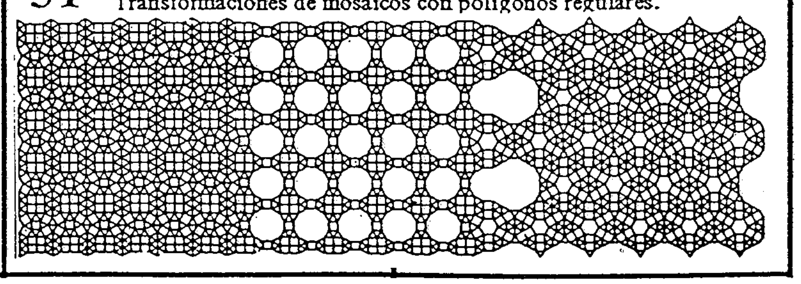
30 PATAS Y CABEZAS.

En una zona de un zoo con jirafas y avestruces, un visitante cuenta 18 cabezas. Otro visitante dice haber contado 50 cabezas.

¿Cuántas jirafas y avestruces había?.

31 MOSAICO

Transformaciones de mosaicos con polígonos regulares.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant. Tel. 5114257

Selección de problemas: Salvador Caballero

CENTRES DE PROFESSORS

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA
الخوارزمي
AL KHWÂRIZMÎ

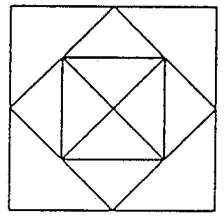
Desembre 94

Calendari Matemàtic - 21

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

1 QUADRATS

Compta tots els quadrats que hi ha en:

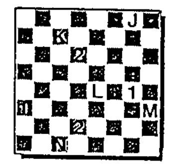


2 PANTALLA DE TV.

S'anuncia el nou format 16:9 (ample:alt) per les pantalles de TV. El normal, ara, és el format 4:3.

Compara les superfícies de visió que ofereixen per una mateixa altura de pantalla.

3 ESCACS.



Les lletres són les peces: rei, dama, torre, alfil i cavall. Els números indiquen quantes peces amenacen aqueixa casella. Quina peça és cada lletra?.

4 ALÍCIA.

Et recomanem que lliges el llibre de Lewis Carrol "Alícia al País de les Meravelles" i, clar!, has de trobar alguna referència matemàtica. Pel moment, ací tens un poema "Amb molta cua" que podràs llegir en ell:

Una FÚRIA va dir
a un ratolí al qui
en sa casa va tro-
var: "Junts ani-
rem davant la LLEI:
Jo acusaré! ¡Tú
et defendràs!.
Anem!. No
acceptaré més
dilació! ¡Un
procés hem de
tindre, doncs,
en veritat no
he tingut
aquest matí
altra cosa que
fer!" Va dir
el ratolí a l'
energúmena:
"Tal plet,
respectable
dama, sense
jurat ni
jutge, no
serviria
més que
per esgar-
gametar-
nos inútil-
ment".
Jo se-
ré el
jutge, i
el jurat,
va re-
plicar,
astu-
ta, la
vella
fúria.
"Se-
ré jo
qui
diga
tot
quant
diga
i
JO
qui
a
mort
et
con-
dem-
nel.

5 FORMA I FONS.

VELA BLANCA
Poema de
P. Català i Roca

una
vela
blanca
estela
la franca
i comuna
alegria del
retrobament.
Nova correntia
de companyonia
n'esdevé el vent.
Salve, vela coetània!
Solca la Mediterrània!

6 TRIA BÉ. 7

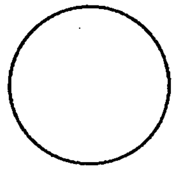
Et veus en la necesitat d'elegir entre dues portes, cadascuna amb un cartell:

I	II
En aquesta habitació és el tresor i en l'altra hi ha un lloro.	*En una d'aquestes habitacions hi ha un tresor i en una d'aquestes habitacions hi ha un lloro.*

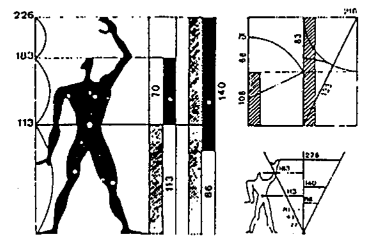
Et diuen que un dels dos cartells diu la veritat i l'altre no. Vols el tresor. Quina porta tries?.

8 PROBLEMA DE NAPOLEÓ.

Troba el centre del cercle utilitzant tan sols un compàs.

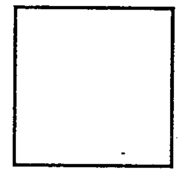


9 LE CORBUSSIER. Modulor.



10 QUADRAT.

Disenya una sala quadrada amb cinc ambients rectangulars que tinguen costats sencers i medeixen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 metres.



11

12 DOTZE.

El número 12 té sis divisors: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Quatre són parells i dos senars. Troba números que tinguen tots els seus divisors parells excepte l'1.

Intenta trobar la regla que els defineix i justifica-la.

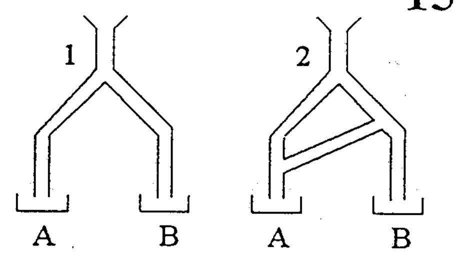
13 EL SISTEMA SOLAR.

Busca dades sobre la grandària dels planetes del Sistema Solar per fer un dibuix a escala.

14 MIL BOLES. 15

S'han llançat 1.000 boles per un dels aparells. Hem comptabilitzat 614 boles en la caixa A i 386 en la B.

Quin aparell s' ha utilitzat?



16 EL MARCADOR.

Un partit de futbol ha acabat amb el marcador de 3-2.

De quantes maneres diferents s'ha pogut arribar a aquest resultat?

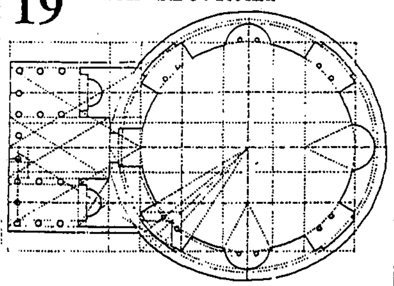
17 CERTESA.

Determina el grau de certesa de cadascuna de les afirmacions:

A.	B.
Un múltiple de 4 és un múltiple de 2.	Un múltiple de 3 es un múltiple de 6.

18

19 PANTEÓ. Roma



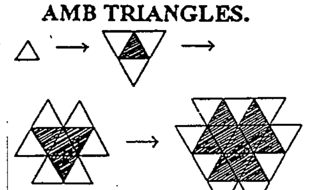
20 PALÍNDROMS .

Són paraules o frases simètriques (es lligen igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra). Una molt famosa en castellà és:

Dábale arroz a la zorra el abad.

Troba d'altres.

21 AMB TRIANGLES.



Continua la seqüència. Quants triangles ombrejats haurà després de 10 passos?.

22 HORA CAP-I-CUA.

En un rellotge digital, les 10:01 és una hora cap-i-cua (simètrica).

Quantes hores cap-i-cues hi ha en un dia?

23 DR.FLIES.

A principi del segle XX, el Dr. Flies va asignar cicles de 23 i 28 dies a components masculí i femení. Números personals concretaven combinacions de cicles que determinaven successos i dies favorables o contraris per realitzar accions (operar-se,...). El mateix Freud va estat un temps subjugat per aquesta teoria.

24 UNA SUMETA.

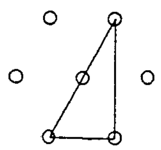
Anem a calcular la suma:
1 - 1 + 1 -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...
Per una part,
(1 - 1) + (1 -1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...= 0
Per d'altra,
1 + (- 1 + 1) + (-1 + 1) + (- 1 + 1)+...= 1
Pots obtenir suma -1?

Quant val realment aquesta suma?

25

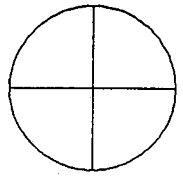
26 TRIANGLES.

Quants triangles podem construir que tinguen els seus vèrtexs en:



27 UN QUART.

S'ha dividit el cercle en quatre trossos iguals. Fes-ho tu d'altres tres formes diferents.



28 DR. FLIES.

Algú es va adonar de que tots els números naturals es podien obtenir combinant el 23 i el 28 adecuadament. Per exemple:

$1 = 23 x 11 + 28 x (-9)$.

Troba les combinacions que donen els números 2, 3, 4 i 5.

29 POTÈNCIES

Observa:

$0 = 4^2 - 2^4$
$1 = 3^2 - 2^3$
$2 = 3^3 - 5^2$
$3 = 2^7 - 5^3$
$4 = 5^3 - 11^2$
5 = ...
6 = ...

Expressa fins el 10 com diferència de potències.

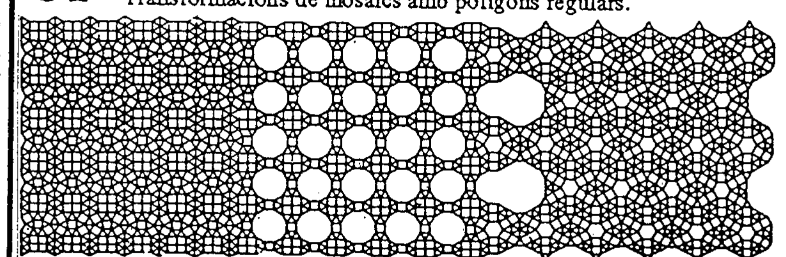
30 POTES I CAPS.

En una zona d'un zoo amb girafes i estruços, un visitant compta 18 caps. Altre visitant diu haver comptat 50 potes.

Quantes girafes y estruços hi havia?

31 MOSAIC

Transformacions de mosaics amb polígons regulars.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª PL 03007 - Alacant. Tel 511 24 57 Selecció de problemes: Salvador Caballero Traducció: Leandre Iborra i Maria Teresa Gómez