Ilustración de las diferentes fases en la resolución de problemas

Seminario "Ramón Aller"

El artículo que se acompaña es parte del último trabajo, de más amplitud, realizado por el Seminario «Ramón Aller». Su pretensión es la de poner de manifiesto, con ejemplificaciones concretas, la incidencia de las diferentes fases, no siempre consecutivas, en la resolución de problemas.

La Resolución de Problemas es, desde hace algún tiempo, uno de los temas «estrella» en cuanto a las nuevas tendencias metodológicas referidas a la realización de actividades de aprendizaje de las matemáticas. Autorizados informes[1] hacen hincapié en la resolución de situaciones problemáticas, a su vez objeto constante de numerosas ponencias en congresos de profesores o de artículos en las revistas especializadas y, además, motivo de la aparición de nuevos libros o de la reimpresión de otros que ahora parecen recobrar valor.

Las líneas que siguen, dedicadas al citado tema, pretenden ilustrar, mediante ejemplificaciones, las diferentes fases en el proceso de resolución de situaciones problemáticas.

Las distintas fases

La atención que requiere cada una de las fases puede reflejarse mediante la presentación de problemas apropiados en cuya resolución tenga mayor incidencia alguna de ellas. Debido a la naturaleza particular del problema, una etapa concreta puede llegar a ser definitiva en la obtención de la solución correspondiente.

Así, para significar la importancia de **entender el problema**, pueden servir ejemplos como el que sigue, caracterizados por presentar **dificultades de enunciado**, donde la correcta comprensión del mismo proporciona de inmediato la respuesta adecuada a la situación planteada.

Muerte repentina

Hace muchos años, en una aldea gallega, el cura daba su sermón dominical. El sacristán, que ya era viejo, se quedó dormido mientras tanto. Soñó que estaba en la revuelta de los "irmandiños" y que iba a ser ajusticiado en el mismo momento en el que el cura terminaba su sermón. Al verlo dormido, le dio un pescozón. El sacristán, de la impresión, se murió en el acto.

¿Parece verosímil el relato anterior?

La correcta interpretación del enunciado anterior resultará clave para contestar a la pregunta que formula.

En ocasiones, aunque el problema no las enuncie, se consideran **hipótesis añadidas** que dificultan el alcanzar el objetivo. Las hipótesis no formuladas llegan a producir cierto bloqueo mental que impide desprendernos de ellas.

Como caso particular de problema sobre suposiciones adicionales, puede plantearse el siguiente:

[1] Cockroft, Kuwait

Las copas alineadas

> Tenemos seis copas alineadas sobre una mesa que, alternativamente, están una llena y otra vacía. Se pregunta de qué manera, moviendo solamente una copa, podemos dejar nuevamente alineadas las copas de modo que las vacías aparezcan en lugares consecutivos.

Resulta frecuente hacer la hipótesis adicional no enunciada de que si movemos una copa llena, no podamos vaciarla en otra. Tal suposición bloquea nuestra mente y nos puede conducir a la falsa conclusión de que el problema planteado no tiene solución.

Para «hacerse con el problema» en algunos casos, por la naturaleza de los mismos, se requiere algún tipo de **manipulación o tanteo**. Los problemas con cerillas o monedas resultan paradigmáticos de lo decisiva que puede resultar la fase manipulativa.

Se presenta a continuación un viejo problema con cerillas.

Cuatro triángulos equiláteros

> Retirar cuatro cerillas de la figura 1, de forma que queden exactamente 4 triángulos equiláteros.

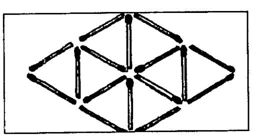

Figura 1

Una fase posterior corresponde a la **formulación de conjeturas**. Habituales de por sí en la actividad matemática requieren bien el contraejemplo para quedar refutadas, bien la demostración para quedar consolidadas. La teoría de números resulta particularmente rica en cuanto a la presencia de conjeturas que siguen, desde siglos, esperando ser confirmadas o descartadas. Por este motivo el ejemplo que se presenta pertenece al mundo de los números.

Divisores

> Encontrar los números que tienen un número impar de divisores.

Al observar que ocurre con los primeros números buscando regularidades, encontramos la situación de la tabla:

Números	Divisores	Nº de divisores
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2

De los resultados obtenidos se puede hacer una primera conjetura: «Solo tienen un número par de divisores los números primos». Pero esta conjetura queda descartada al avanzar un lugar más en la tabla anterior. El **6** rompe la pauta que siguen los cinco primeros números.

Números	Divisores	Nº de divisores
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	**1, 2, 3, 6**	**4**
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
...	...	...

Pero al ampliar la serie, se ponen de manifiesto los números que tienen un número impar de divisores:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

De inmediato se puede formular una nueva conjetura: «Tienen un número impar de divisores los **cuadrados perfectos**».

Esta conjetura se prueba a través del recuento de divisores de un número natural a partir de su descomposición en factores primos.

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

Si la descomposición en factores primos del número N es la anterior, el número de sus divisores es el producto:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$$

Para que N tenga un número impar de divisores, cada uno de los factores tendría que ser impar. Por lo tanto, los exponentes de la descomposición de N en factores primos serían todos pares, con lo que N habría de ser un cuadrado perfecto.

La fase de la **revisión** comporta el análisis de la solución obtenida. No ya sólo en cuanto a su validez, sino también en relación a la posibilidad de otras estrategias diferentes de la seguida para llegar a ella. Esta fase supone asimismo la generalización del problema o la formulación de otros nuevos a partir de aquél.

El problema que sigue resulta útil para poner de manifiesto, de manera natural, cómo, a partir de un problema concreto, se pueden plantear nuevos problemas inspirados en él.

Los cuadrados del tablero de ajedrez

> ¿Cuántos cuadrados contiene el tablero de ajedrez?

La estrategia de reducir inicialmente el número de casillas facilita el recuento de cuadrados y conduce a la obtención de la ley por la que se rige su número en las sucesivas ampliaciones del tablero. La generalización proporciona el resultado final de **204 cuadrados** para el tablero 8x8.

Dos posibles problemas que se plantean, casi de forma natural, podrían ser:

- ¿Cuántos rectángulos contiene el tablero del ajedrez?
- ¿Cuántos cuadrados contiene un tablero mxn?

El otro aspecto referido en cuanto a la fase de revisión es el análisis de otras estrategias diferentes de la seguida para solucionar la situación problemática.

La mosca y los trenes

> La distancia por ferrocarril entre Ferrol y Santiago es de 100 km. Un tren sale de Ferrol hacia Santiago con velocidad de 100 km/h. Simultáneamente otro tren sale de Santiago con destino a Ferrol a 50 km/h. Una mosca situada en la locomotora del primer tren comienzo a volar, siguiendo la vía del tren, a 150 km/h hasta chocar con el tren procedente de Santiago. En ese instante la mosca invierte el sentido del movimiento y se dirige al encuentro del tren que partiera de Ferrol. Cuando lo encuentra, vuelve a invertir su sentido, repitiendo estos movimientos hasta el cruce de ambos trenes. ¿Cuál fue la distancia total recorrida por la mosca?

Si seguimos los sucesivos movimientos de la mosca tal y como describe el enunciado, calculando en cada uno la distancia recorrida hasta alcanzar el tren que viene en sentido contrario, nos encontramos los resultados siguientes:

Trayecto	1º	2º	3º	4º	...
Distancia (Km)	75	15	7,5	1,5	...

Obtenidos los resultados parciales, la distancia recorrida por la mosca será la suma de todas ellas:

$$75 + 15 + 7{,}5 + 1{,}5 + 0{,}75 + 0{,}15 + \ldots$$

La suma de sus términos impares -distancia recorrida cuando la mosca va al encuentro del tren que parte de Santiago- es la de una progresión geométrica de razón 1/10, al igual que la suma de sus términos pares.

Realizadas las consideraciones anteriores, resulta finalmente que la distancia total recorrida por la mosca es de **100 km**.

La solución así obtenida es correcta, sin embargo el camino seguido, sugerido por el propio enunciado del problema, cabe calificarlo de «tortuoso» y, por lo tanto, parece conveniente analizar la posibilidad de otra estrategia de resolución.

La simple consideración de que la mosca está en movimiento durante el tiempo que tardan los trenes en cruzarse, indica que permanece volando durante 40 minutos. Puesto que la velocidad de la misma es de 150 Km/h, el resultado se obtiene de inmediato.

La reflexión sobre la forma de resolver el problema, sin aferrarse exclusivamente al enunciado del mismo, facilita en un caso como el señalado la consecución de la correspondiente solución.

Bibliografía

BALBUENA, L. y COBA, Mª. D. (1992). **La matemática recreativa vista por los alumnos**, Granada: Proyecto Sur, S.A.L.

BOLT, B. (1988). **Actividades matemáticas**, Barcelona: Labor, S.A.

MASON, J. y BURTON, L. (1989). **Pensar matemáticamente**, Barcelona: MEC-Labor S.A.

MATAIX, M. (1993). **Cajón de sastre matemático**, Barcelona: Marcombo.

Santiago Gallego Saavedra
Jorge Mejuto Couce
Luis Puig Mosquera
Concepción Ulloa Fdez. de Sanmamed
Jesús Castro López
Seminario «Ramón Aller»
I.B. «Sofía Casanova». Ferrol