A patadas con los botes

José Lorenzo Blanco

Presentamos a continuación una actividad desarrollada con alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, en la materia optativa: Taller de Resolución de Problemas.

Auna el enfrentamiento a una actividad real, cotidiana, con la utilización de procedimientos y conceptos fundamentales en la formación básica en Matemáticas.

Uno de los imperativos de las nuevas propuestas curriculares y metodológicas en Matemáticas es la integración de los distintos contenidos del área. La doctrina del M.E.C. subraya expresamente que la secuenciación de dichos contenidos debe tener una «estructura helicoidal», que casi todos sean retomados varias veces y de modo que puedan relacionarse entre sí.

Dicha pretensión no es, bajo mi punto de vista, meramente formal o «estética», si no altamente trascendente, pues su consecución por parte del alumno permite comprobar de manera efectiva no sólo que hay aprendizaje, si no que éste es significativo y vinculado a sus modos de hacer cotidianos.

A lo largo de mi experiencia personal, contrastada con la de muchos compañeros, he venido observando graves deficiencias en muchos alumnos de 14-16 años sobre conceptos fundamentales como el volumen, la superficie, el Sistema Métrico Decimal, etc.

Asimismo, he constatado que algunos procedimientos como transformación de unidades, construcción y utilización de gráficas, empleo de las fórmulas elementales de la geometría, quedaban aislados en el restrictivo ámbito del tema concreto, y no se empleaban correctamente en problemas más abiertos y más ligados al entorno cotidiano.

La actividad objeto de este artículo se ha desarrollado con alumnos de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Pocas veces una sola investigación ha concitado aspectos tan diversos; a lo largo de su desarrollo, una amplia gama de conceptos y procedimientos tuvo que ponerse en juego desde una nueva perspectiva para el alumno. Ya no se trataba de aplicar conocimientos previos, si no, recurrir a procedimientos y conceptos que permitieran abordar las dificultades que encontraban, en los términos precisos en que habían aparecido.

Por orden vamos a presentar ahora la **Propuesta a los alumnos**, seguida de una **Breve reflexión sobre los resultados**, revisar después los **Principales hitos en el trabajo desarrollado por los alumnos** y finalizar con **Algunos comentarios**.

Propuesta a los alumnos.

BOTES DE PINTURA

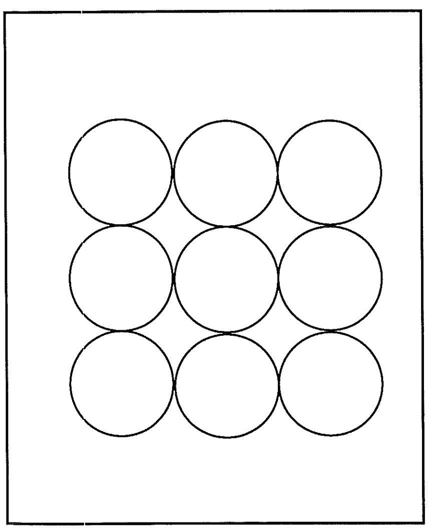
En la fábrica de pinturas «La Charra» andan muy preocupados con la «competitividad», así que están estudiando todos sus procesos de producción, al objeto de reducir costes.

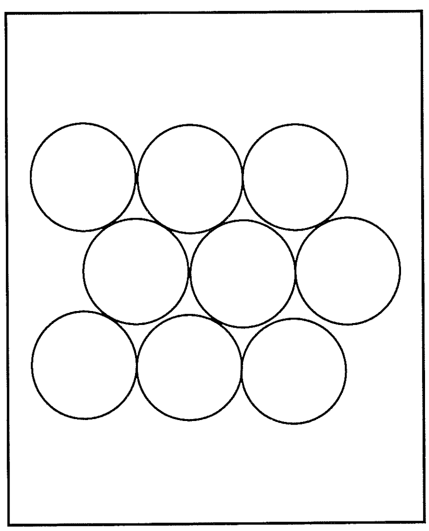
Tradicionalmente han venido envasando sus pinturas en botes cilíndricos, pero ahora desean ahorrar la mayor cantidad de lata que puedan. Desean seguir produciendo botes de 1 litro y de 0,375 litros, pero quieren saber cuáles deben ser las dimensiones idóneas del bote para ahorrar en su construcción el máximo posible. Ayúdales tú.

(Sugerencia: Quizás te venga bien realizar una gráfica, colocando en el eje de abscisas el radio de la base y en el de ordenadas, la superficie de latón empleada. Ten cuidado con las unidades de volumen y las de capacidad)

Además suelen emplear un camión para el transporte que tiene una caja de dimensiones interiores: 2m x 2m x 6.5m.

Se les ocurren dos formas de cargar los botes. Las siguientes figuras sugieren el dibujo de la base de la caja y la colocación de los botes según las dos posibilidades. ¿Cuál de los dos procedimientos permite transportar más carga? ¿Cuánto hueco queda en el camión? ¿Qué porcentaje de la caja del camión queda vacía en cada caso?





Breve reflexión sobre resultados.

Se trata, como se verá, de una actividad totalmente abordable para alumnos de 4º de E.S.O., pero es obvio que no disponen de las herramientas del cálculo infinitesimal con las que se obtiene una solución más exacta.

Siendo el volumen y la superficie total del cilindro:

$$V = \pi\, r^2\, h \qquad S = 2\, \pi\, r + 2\, \pi\, r\, h$$

Si despejamos la altura en la primera y sutituimos en la segunda, obtenemos la superficie como función del radio:

$$S = 2\, \pi\, r^2 + 2\, \pi\, r\, (V/\pi\, r^2)$$

Tras ser derivada e igualada a cero descubriremos que tiene un mínimo para el valor del radio:

$$r = \sqrt[3]{V/2\,\pi}$$

Nótese que la altura del cilindro será entonces:

$$h = \frac{V}{\pi\, \sqrt[3]{(V/2\pi)^2}} = 2 \text{ x } \sqrt[3]{(V/2\pi)}$$

Y por tanto el diámetro y la altura tienen el mismo valor.

Además, el valor mínimo de la superficie es:

$$S = 2\, \pi\, r^2 + 2\, \pi\, r\, h = 2\, \pi\, r^2 + 2\, \pi\, r\ \ 2r = 6\, \pi\, r^2$$

Lo que puede leerse como que la superficie es mínima cuando el área lateral coincide con el área de la base.

Para nuestros dos casos se obtienen los resultados:

	Bote de 1 litro	Bote de 0.375 litros
Radio =	5.4192607 cm	3.9079632 cm
Altura =	10.838521 cm	7.8159264 cm
Superficie =	553.581052 cm²	287.873747 cm²

El resto de los cálculos puede seguirse en el trabajo que desarrollaron los alumnos. Cabe hacer la salvedad de que dado que sus cálculos son aproximados, los resultados que obtuvieron difieren levemente de los exactos.

Principales hitos en el trabajo desarrolado por los alumnos.

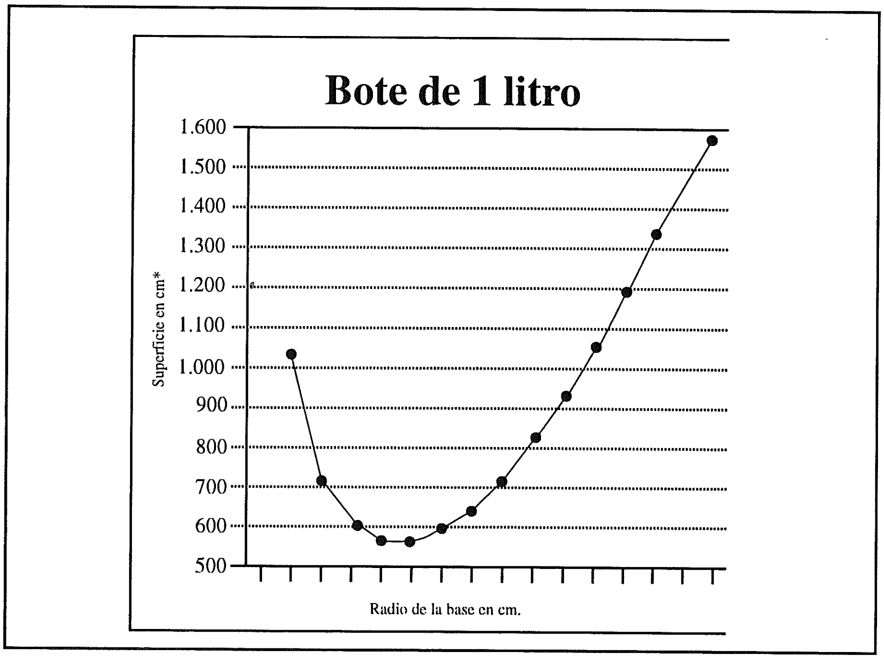
A continuación seguiremos las estrategias que desarrollaron los alumnos en esta investigación. Hemos señalado en ***cursiva*** algunos de los conceptos y procedimientos de los que hicieron uso, para destacar de este modo la gran cantidad de elementos de los que se hace uso.

Primera afirmación: «Si los botes tienen 1 litro, el gasto de latón es el mismo sean del tamaño que sean».

Esta idea es desgraciadamente frecuente entre los alumnos, evidencia confusión entre los conceptos de ***Volumen y Superficie***. Tras unas observaciones preliminares, los estudiantes decidieron hacer una serie de pruebas. Hubieron de dilucidar las relaciones entre ***Volumen y Capacidad*** y algunas cuestiones relativas al ***Sistema Métrico Decimal***. Asimismo fue preciso recuperar las ***fórmulas de la Superficie y del Volumen de un Cilindro***. Después de unas cuantas pruebas erráticas, ***sistematizaron*** su trabajo y lo reflejaron en la siguiente ***tabla:***

Con estas tablas realizaron sendas ***gráficas***. Veamos una de ellas:

Segunda afirmación: «Para que el bote tenga la menor superficie el radio debe estar comprendido entre 4.5 y 6 cm».



Dibujo de superficie de un bote de pintura de 1 litro

Bote de 1000 centímetros cúbicos			Bote de 375 centímetros cúbicos		
Radio cm.	Altura cm.	Superfice cm²	Radio cm.	Altura cm.	Superfice cm²
1	318.3099	2006.283	1	119.3662	756.2831
2	79.57747	1025.133	2	29.84155	400.1327
3	35.36776	723.2153	3	13.26291	306.5487
4	19.89437	600.5309	4	7.460388	288.031
5	12.7324	557.0797	5	4.774648	307.0796
6	8.841941	559.528	6	3.315728	351.1947
7	6.49612	593.5904	7	2.436045	415.019
8	4.973592	652.1238	8	1.865097	495.8739
9	3.929752	731.1602	9	1.473657	592.2714
10	3.183099	828.3185	10	1.193662	703.3185

Enseguida unos cuantos alumnos propusieron hacer una tabla recorriendo ese intervalo décima a décima. Esa propuesta tuvo inicialmente mala acogida, debido a que temían algunos que el poceso fuera interminable; de décimas a centésimas, de centésimas a milésimas, etc. Se aceptó finalmente que a efectos industriales, una ***precisión*** de una décima era suficiente. Todos asumieron que el resultado que obtuviéramos acarreaba cierto ***error***, aunque no fuera relevante a efectos prácticos.

Se obtuvieron las tablas:

Bote de 1 litro			Bote de 375 centímetros cúbicos		
Radio	Altura cm.	Superfice cm²	Radio	Altura cm.	Superfice cm²
4.5	15.719 01	571.679	3.5	9.744183	291.2547
4.6	15.043	567.7349	3.6	9.210359	289.7634
4.7	14.409 69	564.3275	3.7	8.71923	288.7195
4.8	13.815 54	561.4313	3.8	8.266361	288.0976
4.9	13.257 39	559.0226	3.9	7.84788	287.8749
5	12.732 4	557.0797	4	7.460392	288.031
5.1	12.23799	555.5825	4.1	7.100908	288.5472
5.2	11.77182	554.5127	4.2	6.766795	289.4068
5.3	11.33179	553.8531	4.3	6.45572	290.5947
5.4	10.91598	553.5881	4.4	6.165614	292.097
5.5	10.52265	553.7027	4.5	5.894631	293.9012
5.6	10.15019	554.1835	4.6	5.641129	295.9956
5.7	9.797171	555.0179	4.7	5.403635	298.37
5.8	9.46225	556.1939	4.8	5.180829	301.0146
5.9	9.144214	557.7007	4.9	4.971524	303.9204
6	8.841947	559.528	5	4.774652	307.0796

Tercera afirmación: «Los resultados aproximados son:

	Bote de 1 litro	Bote de 0.375 litros
Radio =	5.4 cm	3.9 cm
Altura =	10.915977 cm	7.8478769 cm
Superficie =	553.5881 cm²	287.8749 cm²

Inmediatamente algunos chicos se apercibieron de que la altura de los cilindros y el diámetro de sus bases eran prácticamente idénticos.

A continuación se enfrentaron al problema de la colocación en la caja del camión:

Cuarta afirmación: «Siguiendo cualquiera de los dos procedimientos el número de botes de altura es el mismo».

Además ese número se obtiene dividiendo la altura de la caja entre la de cada bote:

200 : 10.915977 =
18.321768 ... **18 botes de altura**

Quinta afirmación: «En la modalidad I, el número de botes colocados a lo largo y a lo ancho se hace del mismo modo».

Largo = 650 cm Ancho = 200 cm
Diámetro = d = 10.8 cm

650 : 10.8 =
60.185185 .... **60 botes a lo largo**
200 : 10.8 =
18.518519 .... **18 botes a lo ancho**

Sexta afirmación: «En la modalidad II al encajarse las filas, éstas ocupan menos espacio, ¿cuánto?».

La solución de este problema resultó ser muy dificultosa para los alumnos, rápidamente se percataron que esa distancia, que llamaremos h', es la que hay entre las dos rectas paralelas que se obtienen trazando las tangentes a las circunferencias de dos filas consecutivas. Al fin, uno se dio cuenta de que esa distancia era la misma que la que separaba las dos rectas que se obtienen uniendo los centros de las circunferencias de dos filas consecutivas. Así se puede construir un ***triángulo equilátero***, y aplicar el ***teorema de Pitágoras*** para obtener:

$$h' = r\sqrt{3} = 9\ .\ 3530744$$

Obviamente, para colocar la última fila debe caber un diámetro entero. d = 10.8 y no sólo h' = 9.35

Séptima afirmación: «Dentro de la modalidad II, hay dos formas de colocar los botes. Podemos situar la primera fila al fondo del camión (la llamaremos modalidad II.A) o colocar la primera fila en el lateral (modalidad II.B)».

Curiosamente, cuando se diseñó esta actividad, no se habían previsto estas dos posibilidades. Este sucedido, muy frecuente cuando se diseñan actividades, es muy enriquecedor; para los alumnos porque perciben que se trata de un problema «vivo», que no se trata de un «ejercicio mecánico» mil veces resuelto. Y para el profesor, porque por una parte sirve para plantearse el problema desde una nueva perspectiva, y por otra, ese elemento de incertidumbre sirve de acicate a su atención.

Octava afirmación: «En estas modalidades, todas las filas tienen tienen el mismo número de botes, si colocada la primera aún sobra una distancia mayor de un radio».

Así pues en la modalidad II.A:
Primera fila:

200 : 10.8 = 18.518519 .... 18 botes, y sobran: 200 - 18 x 10.8 = 5.6 cm (o sea más que un radio).

Por tanto, en todas las filas caben **18 botes de ancho**

Determinaron entonces los botes colocados a lo largo:

650 : h' = 650 : 9.3530744 = 69.495865

y como 650 - 69 x 9.3530744 = 4.6378664

sobran más de d - h' = 1.44469256, luego caben todos, y por tanto tenemos **69 botes a lo largo**.

Y en la modalidad II.B:

Primera fila:

650 : 10.8 = 60.185185 .... 60 botes, y sobran: 650 - 60 x 10.8 = 2 cm (o sea menos que un radio).

Por tanto, en las filas impares caben **60 botes**
y en las pares solamente: **59 botes**

Determinaron entonces los botes colocados a lo ancho:

200 : h' = 200 : 9.3530744 = 21.383343

y como 200 - 21 x 9.3530744 = 3.5854376

sobran más de d - h' = 1.44469256, luego caben todos y por tanto tenemos **21 botes a lo ancho**.

Y resumimos en la tabla siguiente los resultados:

Modalidad	Alto	Ancho	Largo	Total
I	18	18	60	19440
II.A	18	18	69	22356
II.B	18	21	11 de 60 y 10 de 59	22500

Determinaron a continuación el ***volumen del ortoedro*** que es la caja del camión, y establecieron los ***porcentajes de ocupación***

Volumen de la caja: 2 x 2 x 6.5 = 26 m^3 = 26000 dm^3

Modalidad	Nº Botes	Volumen ocupado	Porcentaje ocupación	Porcentaje de hueco
I	19440	19440 dm^3	74.769	25.231
II.A	22356	22356 dm^3	85.985	14.015
II.B	22500	22500 dm^3	86.538	13.462

Última afirmación: «Hemos resuelto el problema. Los botes deben tener 5.4 cm de radio y 10.915977 cm de altura. Además la modalidad más interesante es la II.B, pues caben 22.500 botes, lo que supone una pérdida de sólo el 13.462% del espacio».

Algunos comentarios.

Es preciso destacar la positiva actitud de los alumnos durante el desarrollo del trabajo. Se mostraron altamente interesados y se implicaron en él.

El hecho de que lo asumieran como suyo les permitió acudir a las herramientas matemáticas, no con el temor tradicional hacia ese lenguaje tan abstruso, si no con la certeza de que eran de los utensilios más idóneos para resolver «sus» dificultades.

Ese factor de identificación, de apropiación, es, a nuestro parecer, un elemento fundamental en el éxito de cualquier actividad matemática.

José Lorenzo Blanco
Profesor de Matemáticas del I.E.S. «Venancio Blanco». Salamanca