Una breve panorámica sobre algunas investigaciones en curso

Bruno D'Amore*

El Núcleo de Investigación en la Didáctica de las Matemáticas de Bolonia (Italia) actualmente tiene en curso una vasta red de investigaciones que, así como diferencias, tiene sin embargo, muchos aspectos en común y por consiguiente están fuertemente interrelacionados entre ellos. Haré aquí un breve relato sobre algunos de estos aspectos, declarándome a disposición de los lectores que quisieran saber cualquier cosa más profundamente.

Los "Ejercicios Anticipados"

Dada la obvia diferencia entre "problema" y "ejercicio", aún reconociendo en el primero una mayor potencialidad educativa y en el segundo una fuente de entrenamiento necesario, hemos elaborado la idea de "ejercicio anticipado"; se trata de un ejercicio que viene propuesto en una categoría para la que un texto no es ejercicio. Por ejemplo, dada una circunferencia diseñada sobre un folio, se pide su medida; si este texto viene propuesto en un nivel III medio (alumnos de 13-14 años), se trata de un ejercicio vulgar, pero si viene propuesto en un nivel III elemental (alumnos de 8 años), ahora se tiene un hecho nuevo, porque estos niños quizás han oído usar ya el término circunferencia aunque, en resumen es para ellos un hecho nuevo.

La ejecución de un ejercicio pone la reflexión en la zona de desarrollo verdadero, en cuanto, a lo más, confirma el nivel allí alcanzado. La propuesta de un texto sobre las competencias aleja del todo la atención sobre la zona de desarrollo próximo, llendo a la investigación de la línea de desarrollo potencial: términos nuevos, nuevas formas de inventar, nuevas estrategias..., no pueden avivar "los ímpetus" a través de la zona de desarrollo próximo.

Se registran de hecho resultados de gran interés, o de motivación al "hacer matemáticas", o de curiosidad y estímulo; pero, sobre todo, de perenne atención al contenido real del texto.

Por un mejoramiento en el resultado Einstellung

Hemos dado a niños de niveles III, IV, V elemental los dos textos siguientes (sobre cuya formulación se verá más adelante).

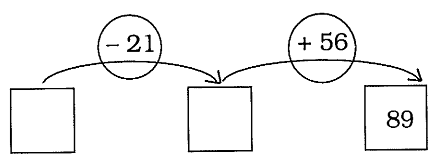
A. Michele tiene una cesta de caramelos.
Su madre le quita 12 caramelos para dárselos a una señora.
Su padre le trae 9 caramelos.
Ahora Michele tiene 63 caramelos en total.
¿Cuántos tenía al principio?

B. Giovanni recoge figurillas de barro.
Su hermana Andrea, sin querer, le pierde 21.

Ahora el padre le compra otras 56 figurillas.

Así, Giovanni tiene ahora 89 figurillas en total.

¿Cuántas figurillas tenía al principio?



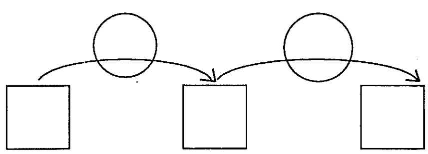
Un cruce vulgar entre las órdenes (primero A, luego B) (primero B, luego A) muestra que la capacidad de resoluciones de los problemas de este tipo aumenta notablemente con la ayuda constituida por la presencia del gráfico:

a) En el caso primero A luego B, se registra un aumento neto.

b) En el caso primero B luego A, se registra una permanencia del modelo gráfico que viene explotado en la resolución de A.

Termina aquí todo de manera obvia: había que esperar un comportamiento de este tipo. Pero hemos dado a todos un problema C (que no reproduzco para abreviar) de cualquier género, nulo para ver ni con A ni con B.

Entonces, se ha notado una clase de efecto Einstellung, en el comportamiento: muchos niños han diseñado para el primer argumento un gráfico del tipo:



que, habiendo tenido éxito en los dos casos precedentes, parecía que podía tener éxito siempre... Para advertir, después que sabían qué valores numéricos colocar en los espacios vacíos. Para reflejar: ¿Qué juego tiene fijeza, en la praxis de *problem solving*? ¿No se genera quizás un modelo mortífero en la repetición estereotipada? Si antes 2 problemas constituyen fijeza, ¿No es mejor variar continuamente el género de problemas propuestos?

(El texto de los dos problemas está inspirado en G. Verguand).

De una inmersión gradual, a una total.

El problema didáctico siguiente es muy discutido: ¿Afirmar o no una jerarquía de conceptos? Si la respuesta es positiva, tiene sentido estudiar una "escuela de dificultad en los problemas", de la más simple a la más compleja, y seguir ésta desde un punto de vista didáctico. Pero, no todos están de acuerdo: hay quien prefiere una "inmersión total"; esta crearía un ahondamiento motivante muy fuerte y constituiría un "ambiente" de trabajo múltiple.

Llamaría a la primera:
— Didáctica *gradual absoluta.*
y a la segunda.
— Didáctica *de las inmersiones totales.*

Si, suponemos, se ha establecido o tiene sentido admitir que allí hay una sucesión de conceptos del 1 al 10, cada uno por tanto lo llamará natural en lo sucesivo, en la didáctica gradual absoluta se podría optar por una exploración ordenada de 1 a 10, paso a paso; mientras en una didáctica de las inmersiones totales se afronta un problema que complica el concepto 10 y de ahí, por meditación y con una serie de reflexiones, llegar, después (pero no necesariamente en un orden inverso preciso) claramente hasta el 1.

Estamos estudiando una tercera solución que se podría llamar:
— Didáctica *sobre profundidad mixta:*
En nuestra escala, el proceso podría ser sintetizado: 1; 2; salto al 5, verificar un retraso de 4 y 3; 6; salto al 8; un retraso al 7; salto al 10; un retraso al 9; y así sucesivamente.

Se ha dicho a menudo que una didáctica gradual absoluta premia a los estudiantes menos notables pero castiga a los otros; mientras en la didáctica de las inmersiones totales se tiene un resultado contrario; me parece que saltos mínimos deberían permitir salvaguardar entre ambos y la fuerte estructuración didáctica podría ocurrir en aquellas situaciones difíciles en las que los niños más débiles irían ciertamente en contra de la dificultad. Los ejemplos están en estudio.

Contrato didáctico, motivación para aprender

Análisis sobre modalidad particular según la cual se presenta el "contrato didáctico" en situación no de aula escolástica, han sido repetidamente hechos, sobre todo en el ambiente "laboratorio de matemáticas". Se trata de un ambiente del todo separado del aula escolástica, con personal propio distinto del maestro ordinario, que hemos logrado alcanzar en 13 colegios de Emilia-Romagna (provincia de Bolonia y Ravena). Los niños son relativamente libres de reagruparse o individualmente o en un grupo pequeño programado; en los laboratorios, bajo la vigilancia de un "técnico" de laboratorio (preparado en un curso apropiado), los niños realizan objetos matemáticos que refuerzan competencias más o menos abstractos adquirido en clase. La motivación de aprender crece enormemente y el contrato didáctico sufre deformaciones muy interesantes que hemos estudiado ampliamente y que estamos estudiando ahora. Se registran, sin embargo, algunos casos negativos, por diversos factores.

De la postura de los profesores a las obligaciones parásitas

Las condiciones óptimas de información entre estudiantes e investigadores (por ejemplo, grupos de 10 estudiantes acompañados de 4 investigadores), hemos estudiado el comportamiento de los profesores durante la fase de resolución de los problemas-test por parte de los alumnos.

La situación es bastante compleja y muy interesante, imposible de resumir aquí, pero muy indicativa sobre:

— Aquello que sucede en clase durante la resolución del problema en condiciones normales (es decir, en la rutina normal de clase, sin los investigadores).
— Sugerencia de comportamien-tos que terminan con crear o bien aquellos resultados *Einstellung* mencionados anteriormente, o bien el surgir de "obligaciones parásitas".

Muy interesante es el sucesivo análisis hecho con los profesores (generalmente no dispuestos a admitir algunas fases evidentes en sus comportamientos). Por ejemplo, con lenguajes mímico-facial, gestual, con varios lenguajes no verbales, sustancialmente los profesores guían la resolución de un problema y el niño depende literalmente de aquellas indicaciones. Tenemos el caso de un niño iraní, desde hace poco incluido, que, no habiendo tenido condicionamientos precedentes estaba resolviendo muy bien el problema propuesto; el profesor, que no había comprendido bien el sentido de la pregunta, ha intervenido al principio con varias expresiones mímicas, y después, viendo que eso no surtía ningún efecto sobre el ignorante niño, lo ha bloqueado literalmente; sólo que, mientras imponía a los otros niños "su" interpretación (siempre sin hablar), el niño iraní, era trasladado fuera de la carencia de referencias a otra situación problemática precedente. Para ejemplificar mejor esto, el problema era el siguiente: (Ver **Figura 1** en pág. siguiente).

Se trataba, pues, sólo de una "traducción" de una situación concreta en un gráfico; pero el profesor había desarrollado un curso sobre recorridos eulerianos y por eso ha interpretado el problema en términos de "recorribilidad" (absolutamente no pedida).

En las "obligaciones parásitas", pondría además ciertos esquemas mentales que llegan a ser fijos (y forman por tanto siempre parte de una especie de efecto *Einstellung*). Por ejemplo:

Un autobús parte de la estación con 4 pasajeros.

En la primera parada desciende un pasajero y suben 6. En la parada siguiente bajan 2 pasajeros y suben 4. En la siguiente bajan 3 y suben 9. En la siguiente bajan 4 y suben 3.

La pregunta es:

¿Cuántas paradas ha hecho el autobús?

Se observan comportamientos bastante similares si el problema es propuesto oralmente, de total asombro, ¡como si la pregunta: "¿cuántos pasajeros hay ahora en el autobús?" fuese obligada y automática! Si la pregunta fuese: "Invéntate una pregunta", todos los alumnos tienden a idear preguntas del último tipo, estereotipados fuera de regla.

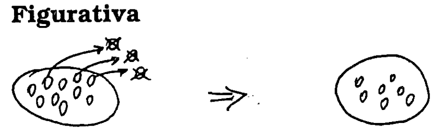
La autocámara lógica de la solución: La "traducción"

Se han hecho muchísimos estudios sobre el fenómeno de la "representación" interna y externa que el lector se hace de una situación problemática; si se pide una representación espontánea (no sólo a niños pequeños, sino también a profesores) de un clásico problema de resta:

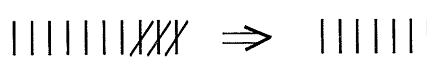
Pierino va al mercado y compra 10 huevos pero al volver a casa rompe 3; ¿cuántos huevos dará a la madre?

Se pueden tener respuestas de 3 tipos:

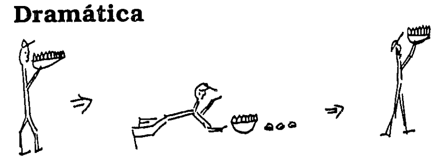
Figurativa



Esquemática



Dramática



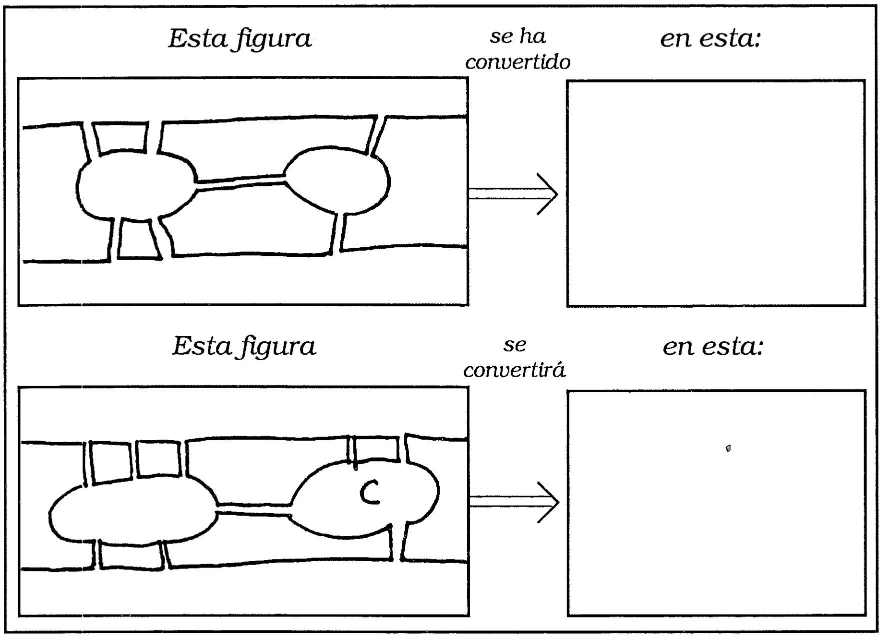


Figura 1

Aquí ha sucedido una verdadera y apropiada "traducción" de un lenguaje a otro, cuya punta de diamante está en la comprensión del lenguaje natural; en nuestro núcleo activo de reflexión sobre la lengua materna natural están quizás aquellas principales y las más sugeridas como conducción didáctica en los profesores (fin de la escuela materna, alumnos de 3-6 años, todavía en la escuela superior, alumnos de 14-19 años). Reflexionar sobre el "funcionamiento" de una lengua natural de seguridad sobre los aspectos morfológicos (que realizamos de modo explícito claro) semánticos, sintácticos.

No doy aquí indicaciones bibliográficas que son inútiles, vista la difusa atención internacional sobre este tema. Me limito a observar nuestro expediente de reflexión sobre el uso lingüístico de los términos: contenido/división que precede de una gran introducción... oficial de la división.

Consideramos los dos problemas:

— Tengo 18 botes que dividir en 3 cajas, de modo que haya el mismo número de botes en cada caja. ¿Cuántos botes debo meter en cada caja?

— Tengo 18 botes que dividir en cajas haciendo que en cada una haya 6 botes. ¿Cuántas cajas necesito?

Una interpretación gráfica oportuna muestra que los dos problemas son distintos, por tanto diré, por segunda de las direcciones que destacamos para interpretar la situación problemática, en el primer caso "vertical", en el segundo caso "horizontal".

Pero esto no impide el hecho que se trate de dos operaciones distintas sobre el plano intuitivo ingenuo. (Ver **Figura 2** en pág. siguiente).

Un estudio cerrado con los maestros muestra una mayor tranquilidad al afrontar, después, el problema de la división.

Un análisis razonado con los niños de los dos problemas contemporáneamente parece tomar todas las ansiedades en los maestros.

El texto de los problemas

Varias experiencias muestran, y el fenómeno es bien conocido en todo el mundo, que los niños tienen dificultad por varias razones, al entender el texto de los problemas. Hemos tenido experiencias sobre el tema que intentaré resumir aquí.

— Dado un texto lacónico (me gusta decir: braquilógico) lo hago leer (como texto, no como problema a resolver) y lo hago transcribir a los niños. Para obtener este resultado NO hacemos la pregunta explícita; suponemos que el problema sea resolver, pero permitimos a los niños discutir entre ellos en voz alta en la clase; registramos con extrema seguridad las observaciones de los niños sobre el texto y sus discusiones con atención; reescribimos el texto prácticamente con las mismas frases emergidas por parte de los niños. Proponemos de nuevo el texto, así logrado, a otros alumnos (de semejante edad y de la misma zona), ¡el resultado es mágico! La comprensión es total. El texto de los problemas del párrafo 2 han sido obtenidos así; se nota la sintaxis particular de esos, el gusto por las particularidades, etc. Esto debe hacer reflexionar. Otras veces hemos exigido sintetizar textos de problemas; sobre éste tenemos diferentes materiales, pero me limito a un flash: los niños tienden a no hacer uso de textos lacónicos o braquilógicos, sino a conservar cualquier cosa que recuerde una dramatización.

— Hacer construir la pregunta de un texto a los niños es hoy una práctica didáctica muy seguida, pero no lo bastante y reserva siempre sorpresas muy interesantes. Se ve como, a la idea adulta "lógica" ligada a la estructura misma del problema, el niño tiende a oponer una idea menos lógica, más cercana a los apropiados campos de experiencia. A propósito de esto, en el texto:

Antonio trabaja desde las 21 horas del martes a las 4 del miércoles. ¿Cuántas horas trabaja? Giovanni estudia desde las 21 horas del martes a las 4 del jueves. ¿Cuántas horas estudia? ¿Qué diferencia hay entre ambos problemas?

La diferencia que emerge entre los dos problemas no es aquella "lógica" expectación de los profesores, sino experimental: "Que Antonio trabaja y que Giovanni estudia" (respuesta típica de los niños, hasta 12-13 años).

La didáctica del tiempo

Parece que sobre el tiempo no se desarrollan bastante, de modo explícito, didácticas particulares, casi se aplaza de alguna manera de la experiencia extra-escolástica.

Basta decir que, todavía en nivel V elemental, muchos niños dan, en los dos problemas con los que se acaba el párrafo 7, estas 4 respuestas:

I: 7 horas - 17 horas.
II: 7 horas - 14 horas.
III: 8 horas - 18 horas.
IV: 8 horas - 16 horas.

En el caso II y en el caso IV, la presencia del miércoles es más que en el segundo problema, hace redoblar el número de horas. En los casos I, III, por el contrario, viene sumado 10 horas. En los casos III y IV, la respuesta 8 horas depende del hecho que los niños cuentan 4 horas entre las 21 y las 24, confundiendo la hora como "lapso de tiempo", la hora como "indicación horaria". Esto debe hacer reflexionar. Parece que la escuela sea el lugar apropiado para... construir una imagen racional conocedora del tiempo.

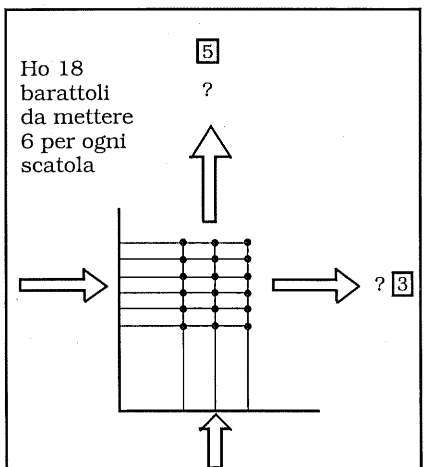
"Aparentar ser..."

Como el lector habrá notado, aquí nos interesa mucho aquello que llamamos "estrategia ingenua" en la resolución de los problemas, aunque tengamos que hacerlo con niños mayores. Obtener sin embargo un extrañamiento y una decontestualización, de modo que emerjan los verdaderos pensamientos "profundos" sobre matemáticas, no es fácil.

Hemos ideado (para el nivel medio II, alumnos de 12-13 años; para el III, alumnos de 13-14 años; para el nivel I superior, alumnos de 14-15 años), varias preguntas de este tipo. He aquí algunos ejemplos:

1. *Aparenta ser un comerciante...*

Una señora ha comprado varias cosas y ha gastado 3.700 liras; te ha dado 5.000 liras y tú le has dado el resto justo. Ella, sin embargo, protesta y dice que le tiene que devolver 1.700 liras. Tú, con calma, le explicas que tienes razón.



Ho 18 barattoli e 3 scatole da riempire tutte ugualmente

Figura 2

2. *Aparentar ser un maestro de elemental...*

Quieres explicar a tus alumnos de tercero (8 años) que el área del rectángulo se halla haciendo base por altura.

3. *Aparentar ser un geómetra...*

Esto es el plano de un pequeño apartamento que has diseñado; pero el comprador no entiende cómo hará para vivir en un apartamento tan pequeño que cabe en un folio.

Tú le explicas que esto sólo es un diseño a escala.

4. *Aparentar ser un ferroviario*

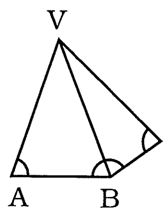
Una señora te pregunta a qué velocidad viaja cierto tren interurbano de Bolonia a Milán (220 kms.), dado que dura una hora y media. Tú le das la respuesta exacta, pero ella dice que es imposible y quiere que tú le expliques cómo has hecho las cuentas.

5. *Aparentar ser un padre...*

Tu hijo, que tiene 7 años, ha oído decir que todos los triángulos tienen 3 alturas y te pregunta: "¿Qué quiere decir?". Nada hay peor que eludir la pregunta de un niño pequeño; por lo tanto, decides responderle.

Si el muchacho está suficientemente motivado (lo que sucede bastante frecuente, contrariamente a las expectativas de algunos profesores) sus respuestas son muy significativas. De esto salen "modelos" mentales ricos e ingenuos, a menudo en puro contraste con las expectativas de los profesores, los cuales esperan establecer conceptos sobre sus profundas competencias, que... no son del todo semejantes.

Me parece que este es el punto en el que destacar otro ejemplo; al final del III nivel medio casi todos los niños saben calcular el volumen de una pirámide con estos datos:



$\overline{AB} =$ 6 cm.

$\overline{AV} =$ 21 cm.

Recurriendo al teorema de Pitágoras para calcular la altura. Hemos dado a los alumnos inteligentes de III nivel medio una pirámide verdadera de madera y una regla pidiéndoles que midan el volumen, buscando las medidas lineales necesarias. Entonces, casi todos los muchachos han medido el vértice de la base (se trataba de una pirámide recta regular de base cuadrada) y el vértice de los lados. ¿Fijeza funcional? ¿*Einstellung*? Creo que sólo un sano extrañamiento acompañado de una sana descontextualización ayudan a crear modelos matemáticos pertinentes y significativos.

Bibliografía:

* L.S. VYGOTSKIJ. **El proceso cognitivo,** I ed. original inglesa 1978.

* L.B. RESNICK-W. W. Ford. **La sicología de las Matemáticas para la Instrucción.** L. Erlbaum Inc., Hillsdale (N.J.) 1981, capítulo 2.

* B. D'AMORE, **Estrategias ingenuas en las resoluciones de problemas como medio para la construcción de conceptos.** Garda-Verona (Italia), 11-13 abril 1991.

* P. SANDRI. **Atracción Fatal**, sobre: "La Vida Scolástica". Roma Firenze. 1 octubre 1991. Nº 3, pp. 13-17.

* Autores varios, **Progreso Ma.S.E.**, Franco Angeli ed. Milán los primeros siete volúmenes están publicados entre 1986 y 1987, los otros 3 volúmenes están previstos sobre el 1992-1993.

* D'AMORE, **El laboratorio de Matemáticas como forja de ideas y pensamientos productivos.** Cagliari, IX vol. 3 1988.

* D'AMORE, **Aprender en laboratorio** sobre: "Reforma del colegio". Roma. 11 noviembre 1990. pp. 42-43 (1ª parte).

* M.L. CALDELLI-B. D'AMORE, ***Ideas para un laboratorio de Matemáticas en la escuela obligatoria.*** La Nueva Italia, ed., Firenze 1986.

* B. D'AMORE, **Eureka!**, sobre: "La vida Escolástica". Roma-Firenze, 1 octubre 1991, nº 3. pp. 8-12.

* B. D'AMORE, **Didáctica de las matemáticas en la escuela media obligatoria.**

* B. D'AMORE-P. SANDRI, **Problemas geométricos en la práctica educativa.**

* B. D'AMORE, **Problemas**, título provisional, de próxima publicación.

* B. D'AMORE, **Estilos diferentes de aprender por la educación matemática.**

Bruno D'Amore
Profesor de Lógica Matemática, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bolonia.