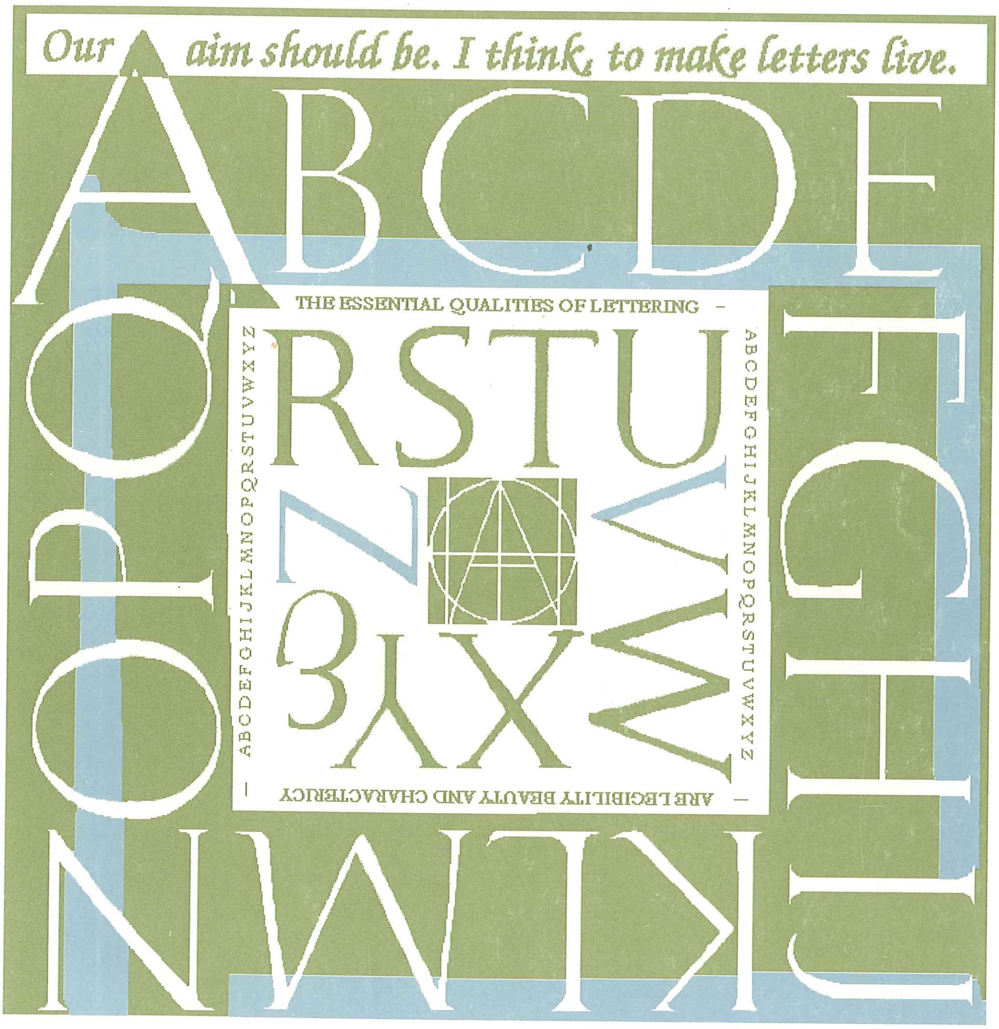
SUMA

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Número 16 - 1994



Monográfico Lenguaje y Matemáticas

DIRECTOR:
Sixto Romero Sánchez

SUBDIRECTOR :
José Antonio Prado Tendero

ADMINISTRADOR:
Antonio J. Redondo García

CONSEJO DE REDACCIÓN:
Juan José Domínguez Alarcón
José Antonio Acevedo Díaz
Pedro Bravo Sánchez
Teresa Fernández Rodríguez
José Romero Sánchez

PORTADA:
José L. Gozálvez Escobar

CONSEJO EDITORIAL:
Juan Antonio García Cruz, S.C.P.M. "I. Newton"
Claudi Alsina Catalá, Representante en el "ICMI"
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM "Puig Adam"
Francisco Javier Muriel Duran, Soc. Extremeña de Prof. Mat.
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM "Thales"
Angel Marín Martínez, SNPM "Tornamira" MINE
Florencio Villarroya Bullido, SAPM "P.S. Ciruelo"
Antonio Pérez Sanz, Soc. Madrileña Prof. Matemáticas
José A. Mora, S.E.M. Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"

EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines ADEMGI
Presidenta: María Antonia Canals
Apartat de Correus 835. 17080-Girona

Associació de Professros de Matemàtiques de les Comarques Meridionals
Presidente: Angel Xifré i Arroyo
Apartat 1306-43200-Reus

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Prof. de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Luis Alvarez García
Sede: Instituto de Educación Secundaria nº 5. 33400-Avilés

Sociedad Canaria de Prof. de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernádez Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna (Tenerife)

SUMA

Sociedad Castellano-Leonesa de Prof. de Matemáticas.
I.B. Comuneros de Castilla.
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
C/ Batalla Villalar, s/n. 09006-Burgos

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "AL-KHWARIZMI"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática
Apartado 22045. 46071-Valencia

Sociedad Extremeña de Educ. Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia I.B. de Ribadavia. Coordinador: Andrés Marcos García
C/ Rodríguez Valcárcel. Ribadavia. 32400-Orense

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado 9479. 28080-Madrid

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

PAPEL 100% ECOLÓGICO

***Depósito legal:* Gr. 752 - 1988**
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Tlf. (958) 550381
ARMILLA (Granada)

RIO

I SEMINARIO NACIONAL SOBRE LENGUAJE Y MATEMÁTICAS

INFORMACIÓN

Suplemento "Para Coleccionar"

2ª Parte de los Calendarios Matemáticos del Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"

EDITORIAL

"El matrimonio lenguaje y matemáticas, a nivel de reflexión, investigación y preocupación curricular tiene bastantes años. Casi podríamos afirmar que, desde el momento en que se interpreta la matemática como un lenguaje y se plantea la reflexión didáctica sobre las dificultades de los alumnos, se inician más relaciones".

En reunión celebrada los pasados 8 y 9 de Abril de 1994 en San Martín de Castañeda (Zamora) la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas acordó que se publicaran en SUMA las Actas del I SEMINARIO NACIONAL SOBRE LENGUAJE Y MATEMÁTICAS.

Fieles a esa decisión, cumplimos con nuestra obligación de publicar este interesante trabajo.

En otro orden de cosas, recogemos la idea de algunos compañeros participantes en el citado seminario de que, el proceso de adquisición y de lenguajes es un proceso dinámico. A modo de emulación, tal es el objetivo de nuestro trabajo, pretendemos incentivar a la comunidad de profesores de matemáticas a un dinamismo que se vea reflejado en las aportaciones a nuestra revista presentando las ideas y las tareas realizadas o no en el aula: ¡entre todos lo vamos consiguiendo!

Y, cómo una vez más y así hasta el día –14 de Julio de 1996–, estaremos con el ICME'8. No olvidemos que la Federación se comprometió a que el "gran" congreso se realizara en España; desde la oportunidad que se nos ofrece con esta publicación: ÁNIMO y a seguir trabajando por nuestro ICME.

Monográfico Lenguaje y Matemáticas

Dentro de las actividades programadas en el Convenio de Colaboración del Ministerio de Educación y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la Sociedad Canaria "Isaac Newton" organizó, en Diciembre de 1993, el I SEMINARIO NACIONAL SOBRE LENGUAJE Y MATEMÁTICAS, que tuvo lugar en La Laguna (Tenerife).

En dicho Seminario fueron presentados los doce trabajos que recoge esta Revista.

Desde un principio, aspiraban los organizadores a dar continuidad a este primer encuentro. El propósito se va realizando.

Durante los días 17, 18 y 19 de Junio de 1994, esto es, siete meses después, y en el mismo lugar, se celebrará el II Seminario. Éste, con un tema único: "Análisis del uso de los distintos lenguajes matemáticos en la resolución de problemas". Y, en el punto 3 de su convocatoria, dice: "Decisión sobre el tema a tratar en el III Seminario, que se celebrará en 1995".

Hasta ahora, participan cinco de las Sociedades federadas. Espero que se incorporen otras.

M. Fernández Reyes
Coordinador

PRESENTACIÓN

La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción

José Tomás Bethencourt Benítez

La resolución de problemas aritméticos constituye una parte importante del currículo de las matemáticas elementales y es de las que mayor dificultad comporta, tanto para el profesorado como para los escolares. El trabajo en la escuela con los problemas aritméticos conecta directamente con procesos de comprensión y de razonamiento (KRULIK y RUDNICK, 1993,94).

La investigación psicológica y educativa, durante años, ha venido estudiando las características sintácticas y semánticas de los problemas aritméticos con enunciados verbales, en tanto tareas matemáticas que han sido tradicionalmente trabajadas en la escuela primaria.

El estudio de las características semánticas se ha revelado más transcedental, dado que determina en gran medida las estrategias o proceso de resolución seguido por el niño.

Los distintos tipos de enunciados verbales de los problemas aritméticos representan a las diversas situaciones de la vida real, en las que los niños se pueden enfrentar con acciones matemáticas, como las aditivas y sustractivas, que en el presente caso nos ocupan.

Atendiendo a las relaciones semánticas subyacentes a los problemas, parece existir entre los investigadores un cierto consenso en diferenciar cuatro grandes tipos de problemas: *Cambio, Combinación, Comparación* e *Igualación*.

Reproduzco a continuación, por su posible utilidad para el profesorado de los últimos cursos de Educación Infantil, de primer ciclo de Primaria y de Educación Especial, la taxonomía de problemas aritméticos de adición y sustracción de RILEY, publicada en Riley, Greeno y Heller (1983). Los nombres de Rayco e Yruya que aparecen en la clasificación son nombres propios canarios; el resto de la traducción guarda una estricta fidelidad a la versión original de Riley de 1981.

Cambio

Resultado desconocido

1. Rayco tenía 3 boliches. Después, Iruya le da 5 boliches más. ¿Cuántos boliches tiene ahora Rayco?

2. Rayco tenía 8 boliches. Después, él da 5 boliches a Iruya. ¿Cuántos boliches tiene ahora Rayco?

Cambio desconocido

3. Rayco tenía 3 boliches. Después, Iruya le da algunos boliches más. Ahora Rayco tiene 8 boliches. ¿Cuántos boliches dio Iruya a él?

4. Rayco tenía 8 boliches. Después, él da algunos boliches a Iruya. Ahora Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches dio él a Iruya?

Inicio desconocido

5. Rayco tenía algunos boliches. Después, Iruya le da 5 boliches más. Ahora Rayco tiene 8 boliches. ¿Cuántos boliches tenía Rayco al principio?

6. Rayco tenía algunos boliches. Después, él da 5 boliches a Iruya. Ahora Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches tenía Rayco al principio?

Igualación

1. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 8 boli-ches. ¿Cuántos boliches necesita Rayco para tener los mismos que Iruya?

2. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 3 boli-ches. ¿Cuántos boliches tiene que dar Rayco para tener los mismos que Iruya?

Combinación

Valor de combinación desconocido

1. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tienen ellos juntos?

Subconjunto desconocido

2. Rayco e Iruya tienen juntos 8 boliches. Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Comparación

Diferencia desconocida

1. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Rayco más que Iruya?

2. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Iruya menos que Rayco?

Elemento comparado desconocido

3. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 5 boliches más que Rayco. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

4. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches menos que Rayco. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Referente desconocido

5. Rayco tiene 8 boliches. El tiene 5 boliches más que Iruya. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

6. Rayco tiene 3 boliches. El tiene 5 boliches menos que Iruya. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Veamos ahora detenidamente la naturaleza de cada uno de esos cuatro tipos de problemas:

Los *problemas de cambio* están referidos a situaciones dinámicas y se caracterizan por la presencia de una acción de transformación aplicada sobre una cantidad inicial, la cual experimenta un cambio (incremento o decremento) y resulta una cantidad final. Esquemáticamente, podríamos representar a estos problemas mediante (ICF), donde el estado inicial (I) es sometido a cambio (C), resultando un estado final (F). El número, **6**, de subtipos de problemas de cambio que tenemos en la clasificación, corresponde al producto del número, **3**, de lugares en los que se puede encontrar la incógnita del problema (resultado desconocido (F), cambio desconocido (C) e inicio desconocido (I)) por el número, **2**, de posibles acciones de transformación (aumentar o disminuir).

Los *problemas de combinación* están referidos a situaciones estáticas en las que se proponen dos cantidades disjuntas que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que haya ningún tipo de acción transformadora sobre ellas. Es decir, unión de dos conjuntos disjuntos de elementos o partición de un conjunto en dos partes. El esquema de este tipo de problema sería (E_1E_2E) significando que dos estados son combinados para resultar un tercer estado. Los dos subtipos de problemas que hallamos aquí, provienen del lugar en el cual se encuentre la incógnita, esto es, en el valor de la combinación (E) o en alguno de los subconjuntos (E_1E_2).

Los *problemas de comparación* también están referidos a situaciones estáticas en las que se establece una relación comparativa entre dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, o bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. El esquema de estos problemas sería (E_1RE_2), donde se plantea la relación comparativa entre dos estados. Los **6** subtipos de problemas de comparación obedecen, igualmente, al producto del número de lugares, **3**, en que puede encontrarse la incógnita (diferencia desconocida (R), comparado desconocido (E_1) o referente desconocido (E_2)) por el de tipos, **3**, de relación comparativa que se establezca («tantos más que» o «tantos menos que»).

He dejado para el final los *problemas de igualación* porque son una mezcla de los de cambio y comparación. En ellos, se plantean situaciones en las que hay una acción implícita de transformación que tiene que aplicarse a una de las dos cantidades disjuntas, similar a lo que ocurre en los problemas de cambio, de modo que al establecerse la relación comparativa entre esas dos cantidades, queden igualadas. Las dos variantes de problemas aquí existentes, responden al tipo de acción (aumentar o disminuir) que se tenga que efectuar sobre una de las cantidades para que quede igualada a la otra.

Además de esta clasificación de problemas aditivos y sustractivos de Riley, existen otras muchas, pero compartiendo un acuerdo esencial respecto a las características estructurales de los mismos. En una publicación reciente de FUSON (1992) puede consultarse una interesantísima revisión actualizada sobre el particular. En castellano, también cuenta el lector con buenos trabajos de revisión, como los de BERMEJO (1990) y MAZA (1989), en los cuales se puede encontrar información más detallada.

La taxonomía de Riley que aquí he presentado permite al profesorado contar con 16 tipos diferentes de problemas aritméticos. La necesidad de introducir en el trabajo escolar una amplia variedad de tipos de problemas, ha sido propuesta por DE CORTE y VERSCHAFFEL (1989), pues de ese modo se podrá facilitar a los alumnos la construcción de nociones y conceptos ricos y amplios respecto a las operaciones de sumar y restar. Pongamos, como ejemplo ilustrador de lo que señalamos, las concepciones unitarias o binarias de la adición que están asociadas a los problemas de cambio o combinación.

Las distintas características semánticas de los problemas aritméticos de adición y sustracción, producen desiguales niveles de dificultad en los escolares a la hora de tratar de comprender y resolver tales problemas. En tal sentido, me permito también reproducir aquí los resultados de un valioso trabajo de RILEY (1981), en el cual se muestra la proporción de niños de diversos grados de escolaridad (K = preescolar, 5 años; 1º, 6 años; 2º, 7 años y 3º, 8 años) que son capaces de resolver correctamente los diferentes tipos de problemas. Los datos de Riley se obtuvieron aplicando individualmente los problemas a los alumnos, permitiéndoles el empleo de objetos físicos, como bloques, e incluyendo cantidades del orden de las unidades, es decir, no había en los problemas cantidades iguales o superiores a las decenas.

Proporción de escolares que resuelven correctamente usando objetos.

	K	1º	2º	3º
Cambio 1	0.87	1.00	1.00	1.00
Cambio 2	1.00	1.00	1.00	1.00
Cambio 3	0.61	0.56	1.00	1.00
Cambio 4	0.91	0.78	1.00	1.00
Cambio 5	0.09	0.28	0.80	0.95
Cambio 6	0.22	0.39	0.70	0.80
Combinación 1	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinación 2	0.22	0.39	0.70	1.00
Comparación 1	0.17	0.28	0.85	1.00
Comparación 2	0.04	0.22	0.75	1.00
Comparación 3	0.13	0.17	0.80	1.00
Comparación 4	0.17	0.28	0.90	0.95
Comparación 5	0.17	0.11	0.65	0.75
Comparación 6	0.00	0.06	0.35	0.75

Muchos serían los comentarios que cada lector podría hacer a la luz de tales datos. Sirva como muestra alguno de los siguientes:

Los problemas de Cambio 1, Cambio 2 y Combinación 1 se manifiestan como el escalón más básico por el cual habría que iniciar el aprendizaje matemático. Los problemas de Cambio 5 y 6 son los más difíciles de todos los de cambio; tal es así, que aun en el tercer grado hay una cierta cantidad de alumnos incapaces de comprender y resolver los mismos. Los problemas de Comparación, en general son los más difíciles, por lo que habría que esperar hasta el segundo curso de Primaria para introiducirlos, siendo el 5 y el 6 extremadamente complejos de resolver. A diferencia, los problemas de Igualación 1 y 2, tal como veremos a continuación, son más fáciles; pueden ser introducidos antes y actúan como antesala preparatoria para los de comparación.

El principal valor de los datos que Riley nos proporciona, está en permitir al profesorado hacer una programación secuenciada de trabajo en la escuela con tales problemas, que sea a su vez respetuosa con los índices de dificultad que ellos presentan para el alumnado, y de manera que haciendo un uso adecuado e inteligente de los mismos, se evite la introducción prematura de algunos. Mi experiencia de trabajo con profesores de Primaria, de Educación Especial, de Escuelas Unitarias y con los estudiantes de 5º del Practicum de Psicología Escolar de la Universidad de La Laguna, me indican que un primer paso para animar a trabajar en la escuela la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción, es el dar a conocer con detalle los tipos de problemas y la dificultad de los mismos.

Respecto a los problemas de Igualación, cabe citar los datos de CARPENTER, HIEBERT y MOSER (1981), quienes obtienen que tanto el 1 como el 2 son solucionados correctamente, mediante el uso de objetos, por el 91% de los escolares de primer grado.

Otras evidencias relacionadas con el papel desempeñado por el lenguaje en el proceso de resolución de problemas aritméticos son las siguientes:

Por un lado, el trabajo de DAVIS-DORSEY, ROSS y MORRISON (1991) en el que se demuestra el efecto beneficioso de la reformulación verbal de los enunciados de los problemas, pues hace más clara y explícita la relación que se establece entre las cantidades dadas, así como la ventaja de personalizar el contexto de resolución, es decir, sustituir los nombres de los personajes que aparezcan en el enunciado del problema por el de los propios niños que se enfrentan a su resolución.

De otro lado, tenemos el estudio de MOYER, SOWDER, THREADGILL-SOWDER y MOYER (1984) en el que se demuestra la superioridad de un formato pictórico, frente al verbal y al telegráfico, a la hora de presentar los problemas aritméticos a escolares del grado 3º al 7º de bajo nivel lector.

Finalmente, cabe nombrar los trabajos de HEGARTY, MAYER y GREEN (1992) y de LEWIS y MAYER (1987), en los que se deja patente la dificultad mostrada por los escolares en la comprensión de las frases de relación, del estilo «más que» y «menos que», típicas de los problemas de comparación, tal como hemos visto.

La pequeña muestra de datos hasta aquí expuestos, confirman la creencia tan extendida entre el profesorado de Primaria, del peso específico que posee el lenguaje y los procesos de comprensión verbal en el aprendizaje de las matemáticas.

El análisis de las características semánticas de los problemas aritméticos de adición y sustracción, y de la dificultad asociada a las mismas, debe hacerse conjuntamente con los tipos de estrategias de resolución utilizada por los escolares. El presente artículo, dadas las limitaciones lógicas de espacio y la motivación por la que ha nacido, no puede detenerse en dicho aspecto, pero valgan como pinceladas las siguientes ideas:

La investigación viene demostrando que para ciertos tipos de problemas aritméticos, los niños emplean determinadas estrategias de resolución y no otras, es decir, parece existir una cierta correspondencia entre estructura semántica del problema y estrategia de resolución empleada por el sujeto. Ello hace que las estrategias no tengan un valor universal para todos los problemas, sino muy al contrario, una utilidad particular, aunque bien es verdad que esto no impide que en algunos casos de sujetos se observe una especie de sobregeneralización en el empleo de ciertas estrategias.

Por otro lado, el conocimiento hasta ahora acumulado con los sucesivos estudios sobre proceso de resolución seguido por los niños, apunta hacia la existencia de tres grandes grupos de estrategias, las cuales van apareciendo a lo largo del desarrollo. Primeramente, nos encontramos con las *estrategias materiales o de modelado*, así llamadas por consistir en el uso de objetos físicos para representar a las cantidades dadas en el problema: mediante la manipulación de los objetos el niño llega a la solución del problema. En segundo lugar, están las *estrategias verbales o de conteo*, basadas en la verbalización manifiesta o encubierta de la secuencia numérica en orden creciente o decreciente, ayudándose para ello el niño del uso de sus dedos, que actúan a modo de una memoria externa de trabajo. Por último, aparecen las *estrategias mentales o de memorización*, que se caracterizan por el recuerdo directo de ciertas combinaciones entre números o por el recuerdo derivado,es decir, la utilización de reglas de derivación que se aplican sobre combinaciones numéricas ya conocidas, para llegar de ese modo a la solución correcta.

Quiero terminar este artículo, expresando el deseo de que su lectura, pueda despertar la curiosidad entre el profesorado indeciso o temeroso de trabajar con profundidad esta parcela tan compleja e importante de las matemáticas escolares.

Bibliografía

* BERMEJO, V. (1990): **El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas**. Barcelona. Paidós.

* CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. Y MOSER, J. M. (1981): **Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems**. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

* DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S. M. Y MORRISON, G. R. (1991): **The role of rewording and context personalitation in the solving mathematical word problems**. Journal of Educational Psychology, 83 (1), 61- 68.

* DE CORTE, E. Y VERSCHAFFEL, L. (1989): **Teaching word problems in the primary school: What research has to say to the teacher**. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.): New directions in mathematics education. London: Routledge; pp. 85-106.

* FUSON, K. C. (1992): **Research on whole number addition and subtraction**. En D. A. Grouws (Ed.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan; pp. 243-275.

* HEGARTY, M., MAYER, R. E. Y GREEN, C. E. (1992): **Comprehension of arithmetic word problems: Evidence**

from students' eye fixations. Journal of Educational Psychology, 84 (1), 76-84.

* KRULIK, S. Y RUDNICK, J. A. (1993): **Reasoning and problem solving: An handbook for elementary school teachers**. Needman Heights, Mass.: Allyn & Bacon.

* KRULIK, S. Y RUDNICK, J. A. (1994): **Reflect for better problem solving and reasoning**. Arithemtic Teacher, 41 (6), 334-338.

* LEWIS, A. B. Y MAYER, R. E. (1987): **Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems**. Journal of Educational Psychology, 79 (4), 363-371.

* MAZA GÓMEZ, C. (1989): **Sumar y restar. El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta**. Madrid. Aprendizaje Visor.

* MOYER, J. C., SOWDER, L., THREADGILL-SOWDER, J. Y MOYER, M. B. (1984): **Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic**. Journal for Research in Mathematics Education, 15 (5), 342-351.

* RILEY, M. S. (1981): **Conceptual and procedural knowledge in development**. Unpublished Master's thesis University of Pittsburg.

* RILEY, M. S., GREENO, J. G. Y HELLER, J. I. (1983): **Development of children's problem-solving ability in arithmetic**. En H.P. Ginsburg: The development of mathematical thinking. New York: Academic Press.

José Tomás Bethencourt Benítez
Facultad de Psicología
Univ. de La Laguna.

Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos

Alicia Bruno Castañeda
Antonio Martinón Cejas

Introducción

En este trabajo exponemos algunos de los resultados obtenidos en una experiencia que hemos realizado sobre el aprendizaje de los números negativos, tratando principalmente la resolución de problemas aditivos simples, esto es, de dos sumandos. Nuestra atención se centra en los ***contextos*** y en la ***estructura*** de sus enunciados.

El término *contexto* se ha usado con distintas interpretaciones en la investigación sobre resolución de problemas (WEBB, 1980; CALDWELL, 1980; BELL, 1985). En este trabajo entendemos por contexto la *situación, entorno o ambiente con el que se enuncia una determinada actividad matemática.*

En los trabajos anteriormente citados se pone de manifiesto cómo el contexto que se usa en los enunciados de los problemas verbales es una variable a tener en cuenta al analizar sus dificultades. En la investigación realizada por BELL sobre problemas de multiplicación y división con números positivos, se comprobó que un contexto determinado induce a los alumnos a elegir una operación en lugar de otra. Y, asimismo, que los problemas con el mismo tipo de números e igual estructura, aumentan en dificultad sólo por el hecho de tener contextos distintos.

La influencia que tienen los contextos que se eligen en la enseñanza, para la buena comprensión de los conceptos matemáticos, ha llevado a los escritores de libros de texto y a los educadores a esforzarse por encontrar situaciones familiares al alumno, y que sirvan para ejemplificar, del mejor modo posible, las ideas matemáticas.

En la enseñanza de los números negativos, los contextos quedan considerablemente reducidos con respecto a los que pueden utilizarse en la enseñanza de los positivos. En este trabajo estudiamos cinco contextos que se usan con frecuencia en los libros de texto para presentar los números negativos, y que detallamos a continuación:

* ***Deber-tener***:
«Yo debo 6 pesetas».
«Perdí 6 pesetas».

* ***Nivel del mar***:
«6 metros bajo el nivel del mar».
«Bajé 6 metros».

* ***Temperatura***:
«Hay 6 grados bajo cero».
«La temperatura bajó 6 grados».

* ***Tiempo***:
«Año 6 antes de Cristo».
«Hace 6 años».

* ***Carreteras***:
«6 km a la izquierda del 0».
«Moverse 6 km a la izquierda».

Para presentar los tipos de estructura que hemos considerado en nuestro estudio, introducmimos ahora la terminología que utilizamos. Los números se utilizan para expresar un ***estado*** **(e)**, como se hace en los siguientes ejemplos:

«Debo 5 pesetas».
«La temperatura es de 8 grados bajo cero».

También se usan para comparar estados. Prestamos atención a las ***comparaciones*** **(c)** entre estados, que expresan una comparación absoluta de dos estados simultáneos:

«Yo debo 2 más que tú».
«Hay dos grados menos en Madrid que en Londres».

Y, finalmente, para las ***variaciones* (v)** entre estados de un mismo sujeto en momentos diferentes:

«Perdí 8 pesetas».
«La temperatura bajó 6 grados».

A partir de esto puede hacerse una clasificación de los problemas aditivos según el *tipo de estructura*, es decir, teniendo en cuenta cómo son las situaciones que aparecen en el enunciado del problema (estados, variaciones o comparaciones). En esta investigación hemos trabajado con los tipos de problemas que exponemos a continuación:

(1) Suma de dos *estados*, con resultado el *estado total*:

$$e_1 + e_2 = e_t$$

«Yo tengo 6 pesetas y debo 9 pesetas. ¿Cuál es mi situación económica?».

(2) Suma de un *estado inicial* y una *variación*, con resultado el *estado final*:

$$e_i + v = e_f$$

«La temperatura era de 6 grados bajo cero y subió 4 grados. ¿Cuál era la temperatura después de esa subida?»

(3) Suma de dos *variaciones*, con resultado la *variación total*:

$$v_1 + v_2 = v_t$$

«Un buzo bajó 6 metros y posteriormente subió 8 metros. ¿Cuánto ha variado su posición desde el primer movimiento?»

(4) Diferencia de dos *estados*, con resultado una *variación*:

$$e_f - e_i = v$$

«La temperatura por la mañana era de 3 grados bajo cero y por la noche era de 8 grados bajo cero. ¿Cuál ha sido la variación de la temperatura a lo largo del día?»

(5) Comparación de dos *estados*, con resultado la *comparación*:

$$e_1 - e_2 = c$$

«Un buzo está a 6 metros bajo el nivel del mar y un tiburón está a 15 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros debe moverse el tiburón para estar a la misma altura que el buzo?»

Un análisis de estos tipos de problemas ha sido realizado por VERNAUD (1976, 1982) en el ámbito de los números negativos. En este trabajo hacemos un primer acercamiento al estudio de estos problemas, relacionando la estructura y los contextos. Observamos también si los alumnos tienden a emplear un tipo de estructura o contexto con más frecuencia que otros al dar sentido a las operaciones (suma y resta), y qué contextos ocasionan más dificultades a la hora de resolver problemas aditivos.

En el primer apartado explicamos brevemente la metodología seguida en la experiencia de aula. En el segundo, damos los resultados de algunos «items» de las pruebas realizadas a los alumnos que participaron en la experiencia. En el tercero, aparecen las conclusiones de las entrevistas clínicas efectuadas a seis alumnos. El último apartado lo dedicamos a las conclusiones.

Experiencia

Para la realización de la investigación elaboramos un material curricular en el que se aborda la enseñanza de los números negativos y que fue seguido, durante dos meses, por 111 alumnos de edades comprendidas entre los 12-14 años de Séptimo nivel de E.G.B. (curso en el que normalmente se estudia el tema de los números enteros), en dos Colegios Públicos de Tenerife. Los 111 alumnos estaban divididos en cuatro grupos distintos, en uno de los cuales la experiencia fue realizada por la coautora de este trabajo.

En el material curricular que siguieron los alumnos se presentan los números negativos a través de situaciones concretas, en los contextos mencionados en el apartado anterior, que sirven para darles sentido y que, como ya hemos comentado, aparecen con frecuencia en los libros de texto. Todos los contextos aparecen en el material con el mismo grado de importancia y en situaciones que expresan *estados* o *variaciones*.

Enseñamos a los alumnos a representar los números con puntos en la recta (preferentemente para los estados) y con flechas (preferentemente para las variaciones), de modo que el trabajo en la recta se convirtió en algo habitual para ellos a la hora de resolver los problemas.

Las operaciones con números positivos y negativos se introdujeron a través de problemas verbales cuyos enunciados se referían a los contextos y estructuras ya mencionados. Para la suma, los alumnos trabajaron con problemas del tipo:

$$\mathbf{e_1 + e_2 = e_t \qquad e_i + v = e_f \qquad v_1 + v_2 = v_t}$$

y para la resta con problemas del tipo:

$$\mathbf{e_f - e_i = v \qquad e_1 - e_2 = c}$$

La multiplicación y división también se explicaron a través de situaciones concretas.

El objetivo de presentar los números negativos a través de situaciones era, por un lado, dar significado a estos números y, por otro, que pudieran encontrar sentido y justificación a las reglas que rigen su aritmética. A lo largo de la experiencia se pasaron a los alumnos distintas pruebas (al principio, a mitad y al final de la experiencia). En el apartado siguiente presentamos el análisis de los «items» pertenecientes a estas pruebas que tienen relación con aspectos contextuales y estructurales.

Resultados de las pruebas

El análisis de los resultados de las pruebas lo hemos dividido en dos apartados: *Resolución de problemas* e *Interpretación de operaciones.*

Resolución de problemas

En las pruebas incluimos 6 problemas con enunciado verbal (**Tabla 1**) que se resuelven con sumas o restas de números positivos o negativos y cuyos enunciados responden a los contextos y a algunas de las estructuras ya mencionadas. El objetivo principal de estos problemas era descubrir qué aspectos sería interesante analizar en las entrevistas clínicas posteriores.

El problema de carretera, señalado con **(*)**, se acompañó de una recta y tenía un objetivo distinto a los demás: se observó si los alumnos lo resolvían solamente en la recta o si planteaban una operación. En caso de que usaran la recta, el objetivo era observar si identificaban los estados con un punto, y las variaciones con flechas (cuestión que efectivamente se cumplió en un 98%).

Tabla 1: Problemas planteados en las pruebas

Temperatura
La temperatura en Valle Guerra es de 14 grados sobre cero y en Izaña la temperatura es de 3 grados bajo cero. ¿Qué tiene que ocurrir en Izaña para que la temperatura sea igual a la de Valle Guerra?

Temperatura
en Valle Guerra la temperatura subió 4 grados por la mañana y disminuyó 9 grados por la tarde. ¿Cuál ha sido la variación de la temperatura a lo largo del día?

Deber-tener
Sonia tiene 200 pesetas en el banco y debe a una amiga 260 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?

Nivel del mar
Un buzo está a 5 metros bajo el nivel del mar y desciende 6 metros. ¿Cuál es su posisción después de este descenso?

Tiempo
Si un hombre nació en el año 56 antes de Cristo y murió en el año 17 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

Carretera (*)
Un coche se encuentra en el kilómetro 6 de una carretera y se mueve 5 kilómetros hacia la izquierda. ¿En qué kilómetro se encuentra el coche después de este movimiento?

En la **Tabla 2** aparece el porcentaje de respuestas correctas, excluyendo el problema de la carretera.

Tabla 2: % de respuestas correctas a los problemas

Deber-tener $e_1 + e_2 = e_t$	Nivel-mar $e_i + v = e_f$	Temperatura $e_1 - e_2 = c$	Temperatura $v_1 + v_2 = v_t$	Tiempo $e_f - e_i = v$
83	64	54	53	40

Como puede observarse, el problema que resultó más fácil fue el del contexto de *deber-tener*, a pesar de que era el que tenía números mayores, mientras que los problemas en contextos de *temperaturas* y de *nivel del mar* presentaron una dificultad media. Por contra, el porcentaje más bajo de aciertos se dió en el problema de *iempo*. Encontramos que los alumnos seguían una de estas dos estrategias de resolución de los problemas:

* plantear una operación;
* buscar la solución apoyándose en la recta (en ocasiones sólo escribían la recta y la solución y, en otras, escribían los números en la recta y también una operación).

En la **Tabla 3** aparecen los porcentajes de alumnos que escribieron la recta para dar la solución del problema.

Tabla 3: % de alumnos que utilizaron la recta para resolver el problema

Deber-tener $e_1 + e_2 = e_t$	Nivel-mar $e_i + v = e_f$	Temperatura $e_1 - e_2 = c$	Temperatura $v_1 + v_2 = v_t$	Tiempo $e_f - e_i = v$
15	46	54	56	30

Como se observa en esta tabla, los alumnos no se inclinan por representar los problemas de *deber-tener* en una recta, lo que puede ser por dos razones: o bien porque los números eran de tres cifras; o bien porque los problemas con esta estructura no se prestan a ser representados en una recta de forma natural, ya que hay que representar un estado con una flecha. Nos inclinamos a pensar, por lo que pudimos comprobar en el aula mientras realizamos la experiencia,que lo que ocurre es esto último.

Es significativo el bajo porcentaje de alumnos que utilizan la recta en el problema de *tiempo*. Muchos alumnos resolvieron el problema por medio de la resta 56 - 17, ignorando cualquier planteamiento del problema con números negativos, lo que no se dió en el resto de los problemas. En algunos alumnos que usaban la representación gráfica, comprobamos la dificultad para representar, no sólo las fechas (antes o después de Cristo), sino también los años vividos por una persona, que algunos alumnos escriben con números negativos.

En cualquier caso, estas cuestiones relacionadas con el uso o no de la recta numérica a través de las pruebas escritas, sólo puede suponer un primer acercamiento al tema, ya que son aspectos de la resolución de problemas que se prestan más a ser analizados por medio de entrevistas clínicas, pues puede ocurrir que un alumno resuelva los problemas pensando en la recta numérica y, sin embargo, no llegue a dibujarla.

Interpretación de operaciones

En otra serie de preguntas se pedía la interpretación de operaciones con números positivos y negativos. El enunciado de estas preguntas aparece en la **Tabla 4.**

Tabla 4: Enunciado de 4 items de las pruebas generales

Escribe una situación que pueda ser representada por cada una de las siguientes expresiones: - 3 + (-14); - 4 + 13; -32 - 67; 4 - (-6)

En estos «items» analizamos principalmente los contextos y estructuras que emplean los alumnos. Los resultados aparecen en las tablas **5, 6, 7 y 8** con independencia de que el problema enunciado por los alumnos se correspondiera correctamente o no con la expresión numérica dada.

Tabla 5: % de contextos y estructuras para -3 + (-14)

Estructura / Contexto	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Deber-tener	43,2	19,8	11,7	0,9	-	0,9	76,5
Temperatura		3,6	0,9	0,9	0,9	1,8	8,1
Nivel-mar		-	2,7	-	-	-	2,7
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	0,9	-	-	1,8	2,7
Total	43,2	23,4	16,2	1,8	0,9	4,5	100

Respuestas en blanco: 10%

Tabla 6: % de contextos y estructuras para -4 + 13

Estructura / Contexto	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Deber-tener	17,1	33,3	15,3	-	-	0,9	66,6
Temperatura		11,7	1,8	1,8	-	0,9	16,2
Nivel-mar		0,9	2,7	-	-	-	3,6
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	1,8	-	-	0,9	2,7
Total	17,1	45,9	21,6	1,8	-	2,7	100

Respuestas en blanco: 10'9%

Tabla 7: % de contextos y estructuras para -32 - 67

Estructura	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Contexto							
Deber-tener	34,2	16,2	16,2	-	-	0,9	67,5
Temperatura		2,7	0,9	3,6	-	-	7,2
Nivel-mar		2,7	1,8	-	0,9	-	5,4
Tiempo		-	-	0,9	-	-	0,9
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	0,9	-	-	-	0,9
Total	34,2	21,6	19,8	4,5	0,9	0,9	100

Respuestas en blanco: 18'1%

Tabla 8: % de contextos y estructuras para 4 - (-6)

Estructura	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Contexto							
Deber-tener	18	28,8	5,4	-	-	2,7	54,9
Temperatura		9	2,7	0,9	2,7	-	15,3
Nivel-mar		1,8	1,8	-	1,8	-	5,4
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	2,7	-	-	0,9	3,6
Total	18	39,6	12,6	0,9	4,5	3,6	100

Respuestas en blanco: 20'8%

El contexto que eligen los alumnos con más frecuencia para interpretar las operaciones es *deber-tener*. El *tiempo* y la *carretera* prácticamente no se eligen; la *temperatura* y *el nivel del mar* son utilizados por más alumnos que los dos anteriores, pero no con demasiada frecuencia. Estos resultados indican la importancia de las situaciones *deber-tener* en el conocimiento numérico de los niños, no sólo en los números negativos, sino también en los positivos.

Los tipos de estructura por los que se inclinan los alumnos mayoritariamente son $\mathbf{e_1 + e_2 = e_t}$, $\mathbf{e_i + v = e_f}$

y $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \mathbf{v_t}$, es decir, las estructuras utilizadas para presentar la suma en la experiencia realizada. Por otro lado, las interpretaciones de las restas como diferencias, $\mathbf{e_f} - \mathbf{e_i} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = \mathbf{c}$, fueron casi nulas. Estos resultados los encontramos significativos porque, como ya hemos comentado, en el material curricular que trabajaron los alumnos, los problemas de estos dos últimos tipos sirvieron para apoyar la enseñanza y dar sentido a la resta; lo que indica que para ellos resulta muy compleja esta interpretación de la resta. Un alto número de alumnos interpretó las restas convirtiéndolas en las sumas -32 + (-67) y 4+6 y dando un enunciado de los tipos: $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = \mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_i} + \mathbf{v} = \mathbf{e_f}$ y $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \mathbf{v_t}$. Por otra parte, es curioso el hecho de que, para la suma -3 + (-14) , el 43'2 % de los alumnos escribió una situación del tipo $e_1+e_2=e_t$, frente al 17'1% que usaron este mismo esquema para la suma -4 + 13. Esto lleva a plantearse si distintas operaciones inducen a distintas estructuras.

El porcentaje de respuestas correctas fue mayor en la interpretación de las sumas que en la de las restas. De hecho, como se puede comprobar en las tablas 5-8, el número de respuestas en blanco aumentó en las dos restas (tablas 7 y 8).

A nivel lingüístico destacamos que, para cada operación, aproximadamente un 70% de los alumnos redactó el problema en primera persona del singular. Así, para la operación (-3) + (-14), la redacción más frecuente fue: «Yo debo 3 pesetas y debo 14 pesetas a otro amigo. ¿Cuánto debo en total?».

Como ya ha sido estudiado en algunas investigaciones con números positivos, hay palabras que determinan, al menos parcialmente, la elección de la operación en problemas verbales (lo que se ha denominado ***palabras claves***). Por ejemplo, los verbos «juntar», «reunir», «agregar»... se asocian con la suma; los verbos «separar», «quitar», «disminuir»,... con la resta. Esto queda reflejado claramente en estos 4 items, ya que los alumnos emplean verbos para dar sentido a los números y a las operaciones, que tenían asociados a la suma o resta de números positivos. La diferencia ahora es que estos verbos sirven tanto para las operaciones como para los números. Es el caso de un alumno que, para la operación -32 - 67, escribió: «Arranco 32 páginas de un libro, y luego arranco otras 67».

Algunos verbos que los alumnos emplearon, para las sumas o para interpretar los números positivos, fueron los siguientes: «dar», «quedar», «encontrar», «comprar», etc. Mientras que, para las restas o para la interpretación de números negativos, algunos alumnos escribieron: «arrancar», «quitar», «robar», «romper», «regalar», «comer», etc.

Otro ejemplo de las palabras que los alumnos tienen asociadas a determinadas operaciones es el siguiente:

«La temperatura en Londres es -4 grados y en Francia es -13 grados. ¿Cuánta temperatura tienen entre las dos?»

La repetición de un esquema lingüístico relacionado con la suma, como es «¿cuánto tienen entre los dos?», y que resulta válido en otros contextos, lleva a un error en este caso.

Entrevistas clínicas

El objetivo de las entrevistas clínicas era descubrir cómo razonan los alumnos cuando se enfrentan a problemas aditivos con números negativos, qué tipo de estrategia siguen y encontrar explicaciones a por qué unos contextos les resultan más fáciles que otros.

Las entrevistas se realizaron a seis alumnos que habían participado en nuestra experiencia, seleccionados según el nivel de comprensión del tema: dos de nivel alto (A1 y A2), dos de nivel medio (M1 y M2) y dos de nivel bajo (B1 y B2). Cada alumno fue entrevistado en cuatro sesiones de media hora cada una y se les pidió que resolviesen 17 de los problemas que ya habían trabajado en el aula o que habían aparecido en las pruebas pasadas. Se les ofreció la posibilidad de utilizar rectas numéricas, si querían o si las necesitaban, y que fueron dibujadas en folios y colocadas encima de la mesa de entrevistas.

A continuación exponemos los resultados que nos parecen más interesantes. En las entrevistas se observaron las dos estrategias para resolver los problemas que ya habían aparecido en las pruebas generales, es decir:

* Plantear una operación (una suma o una resta).
* Apoyarse en la recta numérica.

Al investigar la relación existente entre estas estrategias comprobamos que, efectivamente, los alumnos entrevistados parecen inclinarse hacia una de estas dos formas de resolver los problemas; esto es, unos tienden a resolverlos usando la recta y otros planteando solamente una operación, siendo esta inclinación muy clara en algunos casos. Esto último se puede comprobar en la **Tabla 9**, que muestra el número de problemas realizados con cada estrategia por cada alumno.

Tabla 9: Número de problemas realizado con cada estrategia

Alumno / Estrategia	A1	A2	M1	M2	B1	B2
Con Operación	6	14	6	4	13	11
Con la Recta	11	3	11	13	4	6

A la vista de las contestaciones de estos alumnos, sería interesante realizar un estudio más profundo sobre si estas preferencias tienen relación con el nivel de cada uno.

Lo que parece claro es que, a pesar de las preferencias, todos los alumnos manifiestan la capacidad para utilizar ambas estrategias en algún momento, y que su elección viene determinada por el tipo de problema. En este sentido coincidimos con PELED (1990), quien afirma que el conocimiento que tienen los niños sobre las operaciones con números negativos se manifiesta en dos dimensiones: la dimensión de recta numérica y la dimensión cuantitativa. Además, afirma que un niño puede tener más de una imagen de los números con signo, y puede usar diferentes imágenes en distintos tipos de problemas numéricos.

Una vez que los alumnos habían resuelto un problema, usando una de las dos estrategias ya mencionadas, se les pedía que lo resolviesen usando la otra. En muchas ocasiones, los alumnos obtenían resultados diferentes con cada estrategia. Al preguntarles cuál de los dos resultados era el correcto, daban como cierto el resultado obtenido en la recta. Así, por ejemplo, una de las conductas más frecuentes era la siguiente: empezaban el problema planteando una operación, posteriormente nosotros les pedíamos que lo hicieran con la recta. Si los resultados eran distintos, corregían la operación para que el resultado coincidiese con el de la recta. Otra conducta que se repitió fue la de realizar el problema con la ayuda de la recta y, al pedirles que plantearan una operación, buscar la operación adecuada para que les diese el mismo resultado que en la recta. Por lo tanto, los alumnos entrevistados tenían más seguridad en los resultados de los problemas cuando los hacían apoyándose en la recta que cuando los planteaban con una operación. Esto se hizo especialmente patente en los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ y $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$.

Intentamos indagar en las entrevistas por qué se producía esa diferencia de dificultad entre los distintos contextos y pudimos ver como los alumnos manifiestan una gran seguridad al explicar cuestiones relacionadas con *deber-tener*, quizás porque les aparecen con frecuencia en su vida diaria desde muy pequeños y porque, además, las pueden resolver usando números positivos.

Sin embargo, al pedirles explicaciones de los problemas sobre *tiempo* y, en concreto, los relacionados con fechas negativas (años a.C.), suelen dudar y sus argumentos se vuelven confusos. Hay que tener en cuenta que este contexto no es usual para ellos y lo ven prácticamente por primera vez en este curso. La principal dificultad que tenían los alumnos era la identificación de las fechas positivas y negativas, probablemente porque las palabras «antes» y «después» no se relacionan tan fácilmente con «negativo» y «positivo», como se pueden relacionar las palabras «bajo cero» y «sobre cero» o «bajo el nivel del mar» y «sobre el nivel del mar». Esta misma dificultad les lleva, en ocasiones, a escribir con números negativos los años vividos por una persona cuando esta ha nacido antes de Cristo.

Nuestra preocupación se centró también en averiguar por qué los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ y $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$ resultaban tan difíciles. Encontramos como causa de esta dificultad que los alumnos no tienen asimilado el concepto que está detrás de este tipo de problemas. Es decir, para ellos la sustracción está más relacionada con la idea de «quitar» que con la «diferencia» de dos estados, tanto cuando trabajan con números positivos como cuando trabajan con números negativos. Además, otra complejidad que se añade a los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ es la interpretación de la variación como un número negativo, ya que los alumnos tienden a dar siempre el resultado de la variación con un número positivo.

Cuando los alumnos estudian una ampliación numérica es normal que se sigan manteniendo formas de plantear y resolver problemas que utilizaban con los conjuntos numéricos previos. La siguiente observación es un ejemplo de este hecho. Los alumnos entrevistados, cuando resolvían los problemas planteando una operación, mostraban una tendencia a escribir el primer número que aparecía en el enunciado del texto y luego el segundo número del texto. Esta conducta ya ha sido estudiada en algunas investigaciones con números positivos.

Ya ha sido probado en diversos trabajos de investigación que los problemas del tipo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$ son más difíciles de resolver que los del tipo $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_t$ o los del tipo $\mathbf{e}_i + \mathbf{v} = \mathbf{e}_f$ (VERGNAUD, 1982). Al analizar cómo resuelven los alumnos los problemas del tipo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$ descubrimos que la primera dificultad que tienen al intentar representar la situación en la recta es que no saben en qué punto comenzar a representar la primera variación. La secuencia de actuación más común fue la siguiente:

1º) Representan la primera variación partiendo de cero.
2º) Convierten el número en que finaliza la variación en un estado.
3º) Resuelven el problema como si fuera del tipo $\mathbf{e}_i + \mathbf{v} = \mathbf{e}_f$. De esta forma superan la dificultad antes mencionada.

En las entrevistas repetimos tres problemas, que ya habían sido puestos en alguna de las pruebas, con el objetivo de comprobar cambios significativos en la forma de enfrentarse a ellos. Los cambios que observamos fueron de tipo procedimental. Por un lado, los alumnos pasaron de escribir los operaciones en vertical a escribirlas en horizontal. Y, por otro, cambiaron el tipo de operación, es decir, pasaron de plantear una resta a plantear una suma (o viceversa). Por ejemplo, el problema siguiente:

«Una persona debe 3.600 pesetas y tiene en el banco 4.000 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?».

En la prueba inicial realizaban la operación mientras que en la entrevista realizaron la operación **-3.600 + 4.000 = 400**. Por supuesto, entendemos que esto es una influencia del tipo de enseñanza recibida y de la cercanía de fechas entre la terminación de la experiencia y la realización de la entrevista.

A pesar de que la instrucción previa había sido la misma para los seis alumnos, las entrevistas revelaron que la comprensión de los problemas aditivos y sustractivos con números negativos es distinta de un alumno a otro. Respuestas iguales a un problema no implican el mismo grado de entendimiento. Así, por ejemplo, contrastamos las explicaciones dadas por distintos alumnos a un problema que habían resuelto de la misma forma y, mientras que unos se sentían incapaces de justificar sus respuesta, otros tenían argumentos claros del por qué de sus contestaciones. Estos distintos grados de comprensión de los problemas también quedan reflejados en los métodos que siguen para resolverlos. Exponemos a continuación dos formas de actuar de dos alumnos entrevistados: Uno de los alumnos de nivel medio resolvía siempre los problemas planteando operaciones con números positivos y apoyándose en la recta. Es decir, nunca llegó a escribir una operación en la que los números implicados fueran negativos, aunque sí representaba los números negativos en la recta. A pesar de ello, la mayoría de sus respuestas fueron correctas y sus explicaciones válidas.

Una de las alumnas de nivel bajo, seguía la siguiente secuencia de actuación: Primero escribía por separado los números que se daban en el enunciado del problema y colocaba el signo «=»; por ejemplo, **-7 11 =**. Su siguiente paso era decidir el signo que tenía el resultado del problema, y escribía: **- 7 11 = -** . Y, por último, buscaba la operación adecuada para que diese resultado negativo: **-7 - 11 = -18**.

Las preguntas que se le realizaron a esta alumna al finalizar los problemas mostraron que tenía una escasa comprensión de los mismos.

Conclusiones

Las dificultades que surgen en las operaciones con números negativos debido a la necesidad de usar reglas que, en ocasiones, son difíciles de entender por los alumnos, y los numerosos errores que se producen a causa de la notación de los números con signo o por el mal uso de los paréntesis, implica que el trabajo en el aula se centra la mayor parte del tiempo en la práctica rutinaria de operaciones.

Entendemos que abordar la enseñanza de los números negativos a través de la resolución de problemas es interesante, ya que permite a los alumnos reflexionar y razonar sobre las operaciones básicas y se les puede ofrecer una mayor riqueza de significados para ellas.

El número de contextos que puede usarse para dar sentido a los números negativos no es tan amplio como el los números positivos, pero esto, que en principio puede ser un impedimento, tiene la ventaja de que permite realizar una elección adecuada al preparar el tipo de problemas que se plantearán en el aula. En esta elección es importante tener en cuenta, por un lado, que los contextos que se utilicen influyen en la dificultad de los problemas, y, por otro, que deben trabajarse distintos tipos de estructuras que consoliden o amplien la visión que tienen los alumnos de los números y sus operaciones, teniendo en cuenta también que hay estructuras, como la diferencia de estados, que son más difíciles de interiorizar por los alumnos.

A la vista de los resultados de las pruebas, de las entrevistas clínicas y de las observaciones realizadas en el aula durante los dos meses que estuvimos con los alumnos, concluimos que el contexto que permite una mayor comprensión de determinadas operaciones con números negativos es el *deber-tener* y, más en concreto, las situaciones de dinero. La *temperatura* y el *nivel del mar* presentan una dificultad media, la *carretera* no parece ser un contexto difícil aunque su nula utilización induce a pensar que sea un contexto lejano para los alumnos. Esto mismo ocurre con el *tiempo*, con el añadido ahora de que este contexto sí resulta complicado para ellos. Pensamos que el uso de la recta numérica es beneficioso para comprender los problemas aditivos con números negativos. La recta parece ser fuente de significado para los alumnos, hasta el punto de ser el apoyo a través del cual resuelven los problemas o buscan la operación a plantear, aunque queda por estudiar en qué tipos de problemas tienden a usarla.

Bibliografía

* BELL, A., FISCHEIN, E. y GREER, B. (1984). **Choice of operation in verbal arithmetic problems: the efects of numbers size, problem structure and context.** Educational Studies in Mathematics. vol 15. pp 129-147.

* CALDWELL, J. (1980). **Syntax, Content, and Context Variables in Instruction.** In Goldin, G. and McClintock (eds) Task Variables in Mathematical Problem Solving. Eric/SMEAC: Columbus, Ohio.

* CASTRO E. RICO, L. y GIL, F. (1992). **Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos.** Enseñanza de las Ciencias. 10 (3), 243-253.

* PELED, I. (1991). **Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability.** Proceedings of the XV International Conference of PME. pp 145-152.

* VERGNAUD, G. y DURAND, C. (1976). **Structures additives et complexité psychogenetique.** La revue française de pedagogie. vol 36. pp 28-43.

* VERGNAUD, G. (1982). **Cognitive tasks and operations of thought.** In Carpenter, T., Moser, J. and Romberg, T. (eds). Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Lawrence Erlbaum Associates. Hilsdale, New Jersey.

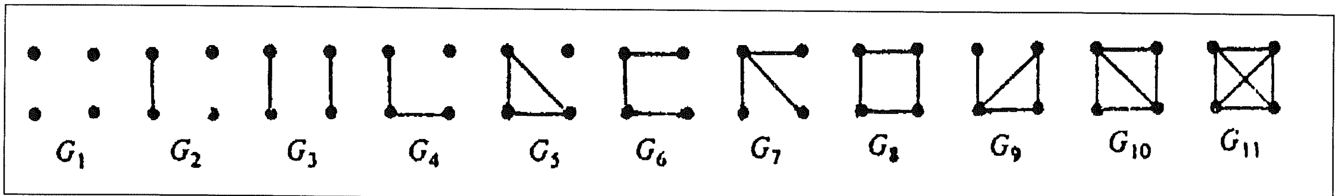
* WEBB, N. (1980). **Content and Context Variables in Problem Tasks.** In Goldin, G. and McClintock (eds) Task Variables in Mathematical Problem Solving. Eric/SMEAC: Columbus, Ohio.

Alicia Bruno Castañeda
Antonio Martinón Cejas
Univ. de La Laguna
Área de Didáctica de las Matemáticas.
S.C. "Isaac Newton" P.M.

El lenguaje de los grafos

María Candelaria Espinel Febles

Existen medios de comunicación universales como la música o el arte. La notación de las matemáticas también goza, afortunadamente, de cierta universalidad. Una parte de las matemáticas, la teoría de grafos, se ha mostrado, en los últimos tiempos, como una notación muy útil y unificadora en diversas disciplinas.

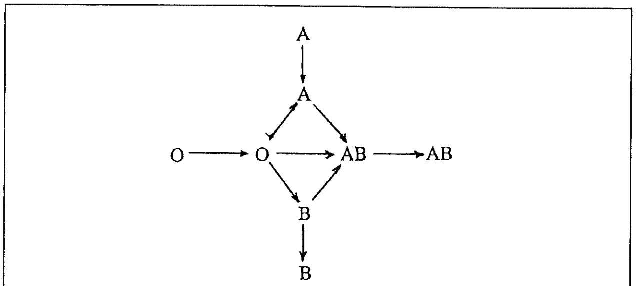


Ante un problema, a menudo uno tiende a trazar un grafo. Con sólo puntos y líneas podemos describir una situación, un sistema o una estructura. Los grafos son una teoría de relaciones y necesita de un número mínimo de definiciones para trabajar.

Aportamos algunas familias de grafos que consideramos factibles de incorporar a la enseñanza no universitaria. Proponemos una reflexión sobre una metodología que incorpore los grafos o redes al currículo de estos alumnos.

Mi exposición reducirá al mínimo las palabras. Dejaré que los gráficos hablen.

Donantes



El grupo O, conocido como donante universal, puede donar a todos; A y B sólo pueden hacerlo a los de su propio grupo y a los AB; los AB, sólo entre ellos.

Amistad-movilidad

Posibles relaciones de amistad en grupos de 4 personas:

En G_5, G_6 y G_7 hay tres pares de amigos, pero son patrones distintos, ya que:

En G_5 hay 3 personas que tienen dos amigos cada una y 1 persona no tiene amigos.

En G_6, 2 personas tienen un amigo cada una y 2 personas tienen dos amigos cada una.

En G_7, 3 personas tienen un amigo cada una y 1 persona tiene tres amigos.

Tabla de recuento: Puntos (Personas) / Líneas (Amigos)

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	2	2	2
3		1	3	4	5	5
4			2	6	9	10
5			1	6	15	21
6			1	6	21	41
7				4	24	65

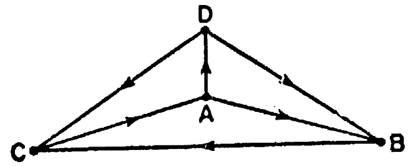
En la tabla se puede observar cierta relación entre el número de puntos y el de líneas, al menos en las primeras columnas. Para 4 puntos, en la tercera columna de la tabla, se tiene

$$\mathbf{1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11},$$

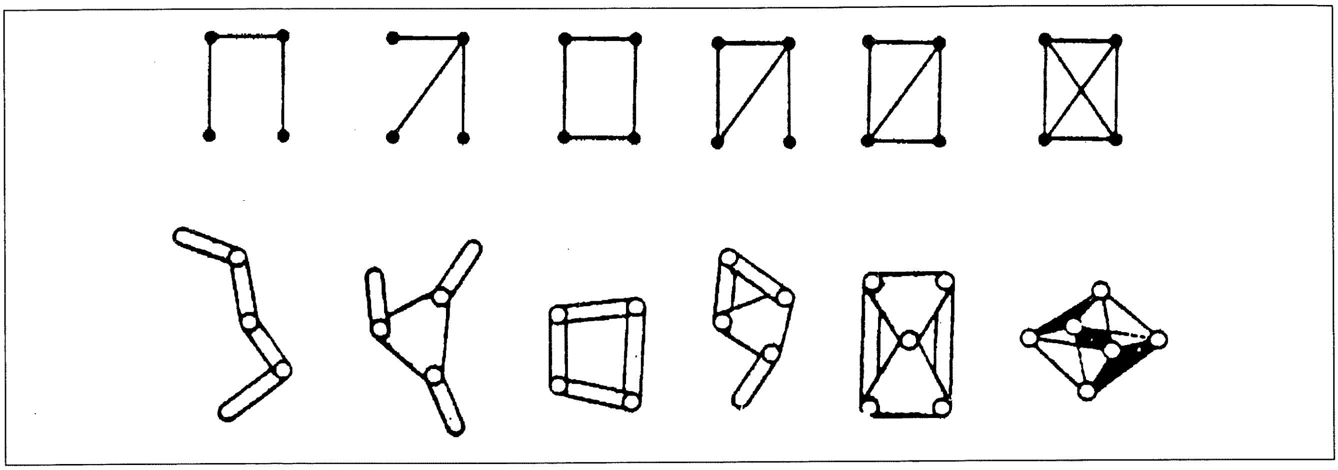
que son las posibilidades ya dibujadas. De $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_5$ son grafos no conexos, mientras que de $\mathbf{G}_6$ a $\mathbf{G}_{11}$ los grafos se mantienen unidos.

Obsérvese que, si **M(G) < 0**, se pueden eliminar ciertas aristas sin afectar a la movilidad del sistema.

Torneos



A gana a B y D
B gana a C
C gana a A
D gana a C y B



Los cinco grafos conexos modelizan sistemas cinemáticos de movilidad. Su aplicación es evidente; por ejemplo, en el diseño de robots. En este caso, los vértices del grafo corresponden a las articulaciones del sistema, y las aristas a los enlaces.

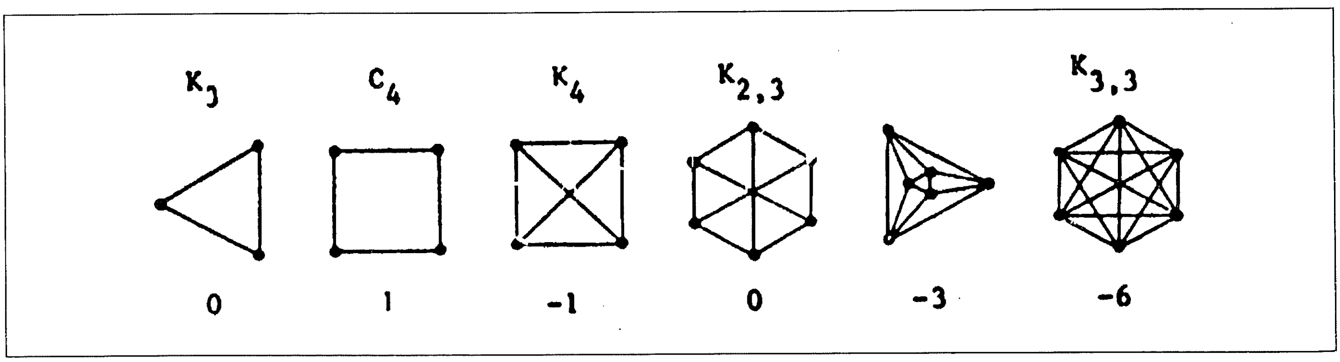
La movilidad del sistema es $\mathbf{M(G) = 2n - k - 3}$, siendo **G** un grafo planar con **n** vértices y **k** aristas.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Matriz de dominancia: **M**

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Dominancia de segundo orden: $\mathbf{M}^2$



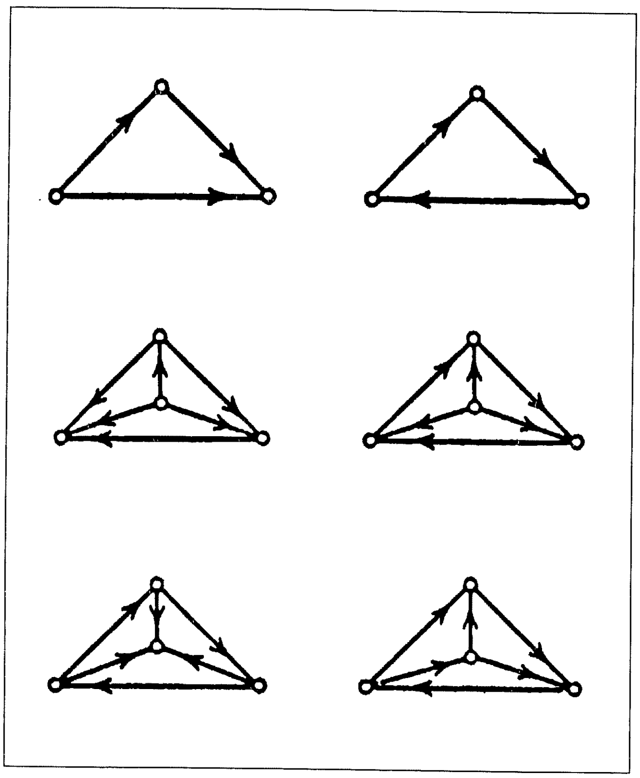
El tema de la movilidad se enseña tradicionalmente en geometría con tiras de mécano. Los grafos constituyen una forma más de trabajar el tema.

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{matrix}$$

Matriz $\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^2$

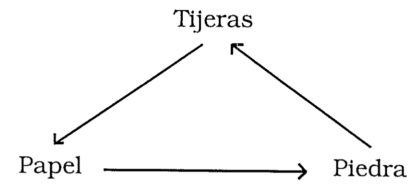
El «poder» de cada jugador, en la situación de dominancia descrita en el grafo, se entiende como el número total de dominancia en primero y segundo orden. Así, el «poder» de A es 5, el de B es 2, el de C es 3 y el de D es 4.

Un torneo o *tournament* es un grafo completo orientado. En un torneo siempre hay un camino dirigido que contiene a todos los vértices. A continuación se muestran todos los torneos posibles con 2, 3 y 4 vértices:



A estos grafos se les ha encontrado varias aplicaciones, pero más que en los torneos, de donde les viene el nombre, en situaciones de dominancia de la naturaleza. Así, hay especies de aves y mamíferos en las que uno de los individuos de cada pareja domina al otro. Otra aplicación surge en los métodos de *scaling*, por ejemplo, para conocer las preferencias de las personas en técnicas de *marketing*. También están presentes en la teoría de comités y elecciones.

El siguiente juego puede resultar divertido:



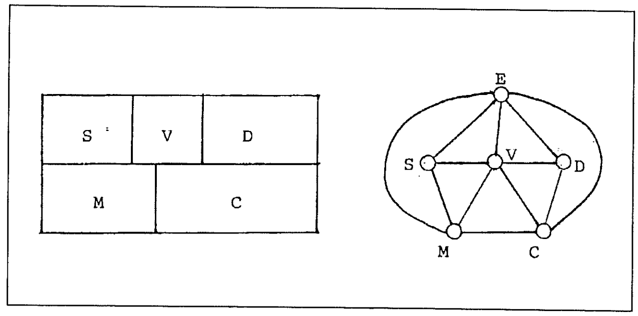
«Tijeras corta Papel»

«Piedra rompe Tijeras»

«Papel oculta Piedra»

Dos jugadores dicen simultáneamente: «uno, dos, tres». Al llegar a tres eligen: «tijeras», mostrando la V de victoria con los dedos; «papel», y muestran dos dedos juntos; o «piedra», enseñando el puño cerrado. Si los dos jugadores eligen el mismo objeto, se considera empate. Para cualquier otro caso, hay ganador: el jugador que coge tijeras vence al que coge papel, pero pierde ante un jugador que coge piedra; un jugador que coge papel vence a un jugador que coge piedra.

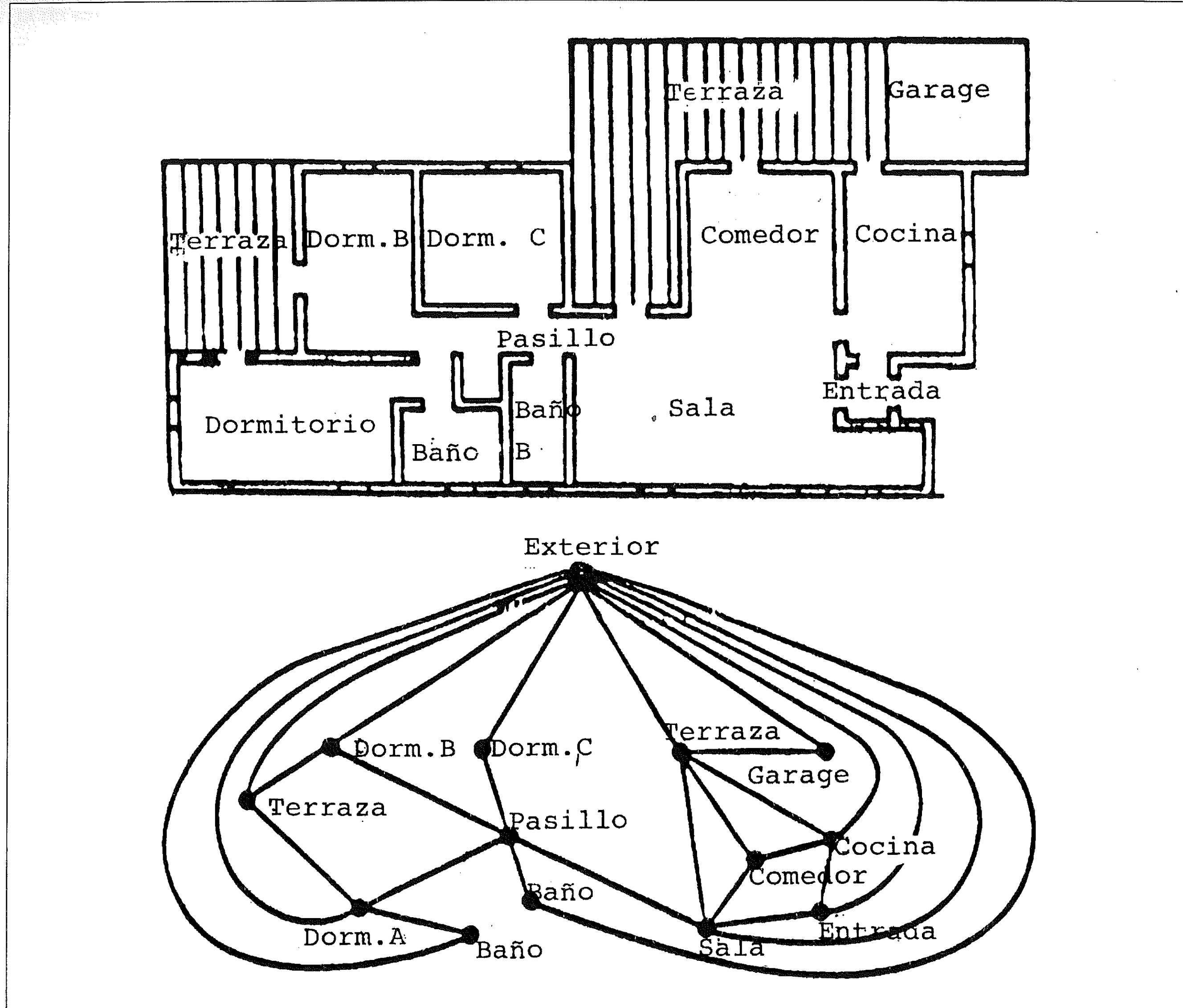
Arquitectura



V: Vestíbulo	S: Salón
D: Dormitorio	M: Comedor
C: Cocina	E: Exterior

El grafo anterior recoge la relación de adyacencia entre habitaciones y de todas ellas con el exterior.

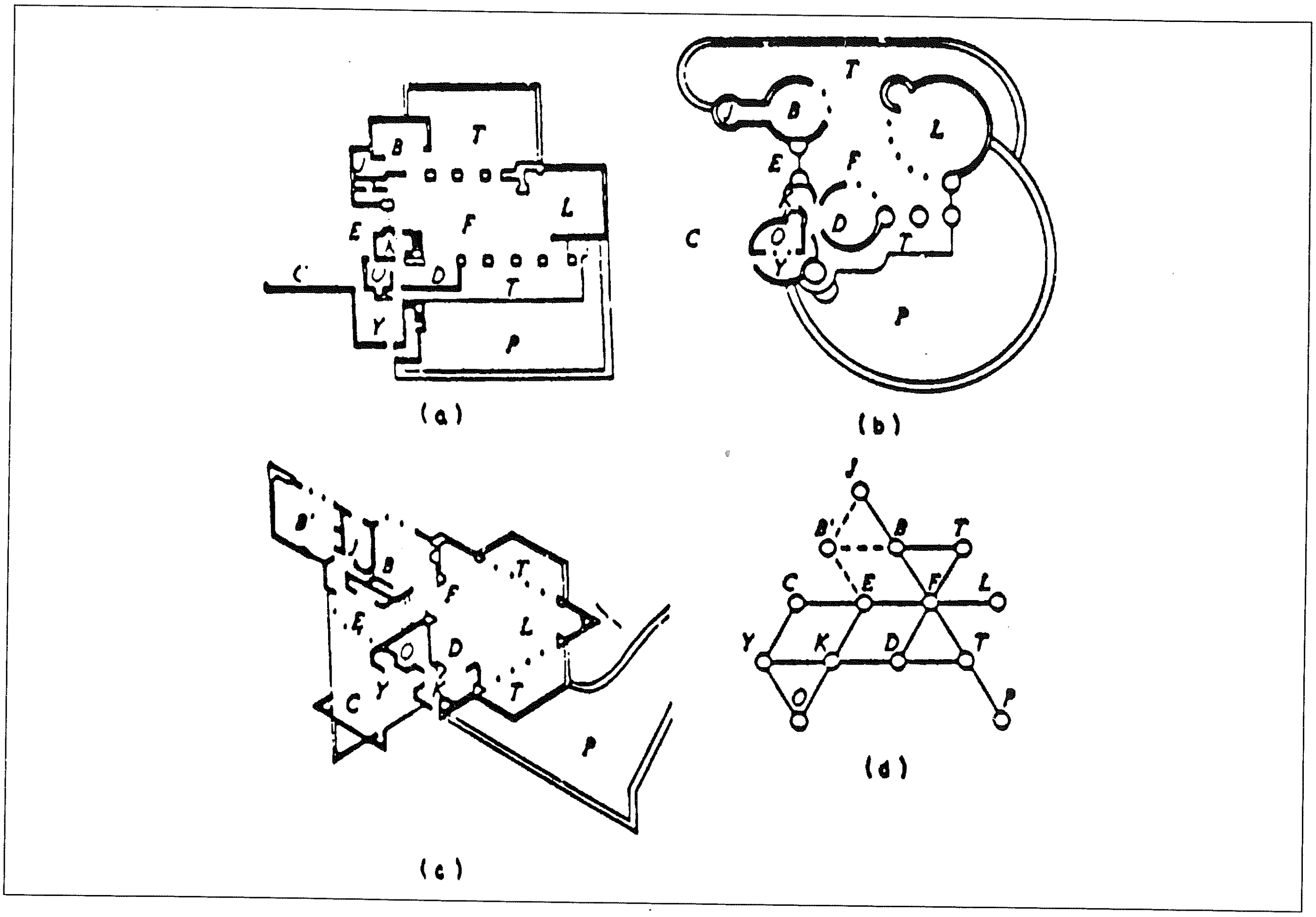
A continuación, el plano de una casa y su grafo de acceso asociado:



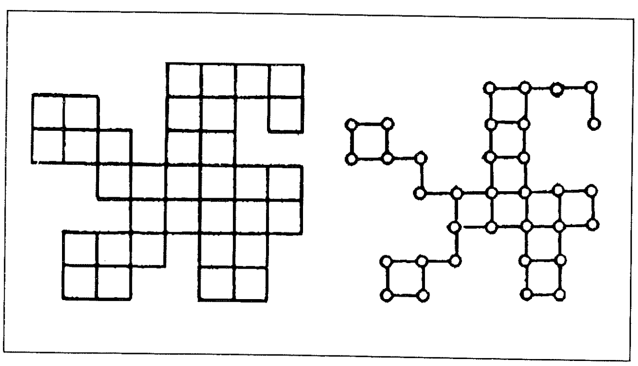
Las ilustraciones que siguen corresponden a tres casas, (a), (b) y (c), con planta cuadrada, circular y triangular, respectivamente. En ella es:

B: Dormitorio	F: Sala	P: Piscina
B': Dormitorio	J: Baño	T: Terraza
C: Garage	K: Cocina	Y: Patio
D: Comedor	L: Recibidor	
E: Entrada	O: Despacho	

El grafo de acceso, (d), es el mismo, a excepción de la habitación B' de la casa (c).



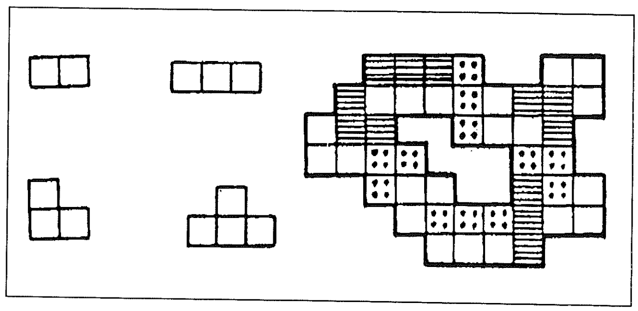
Poliminos



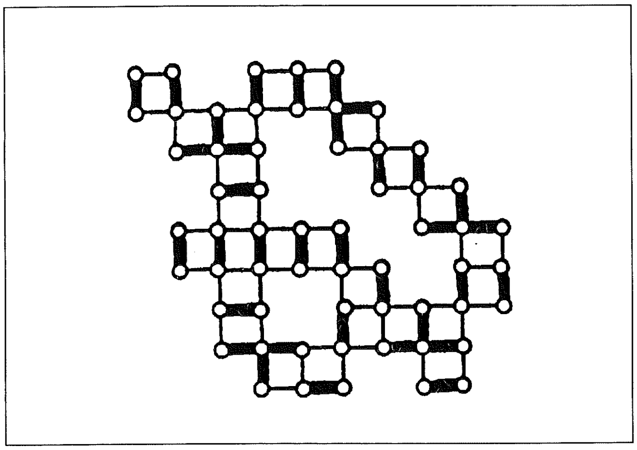
La cuestión es si con un dominó podemos teselar determinadas figuras, como por ejemplo la que se muestra en el dibujo. La teoría de grafos se ha mostrado muy útil para resolver esta cuestión. Con cualquier figura reticular se puede asociar un grafo, representando cada polígono de la figura por un vértice y uniendo dos vértices por una arista si los polígonos son adyacentes. En la figura anterior se muestra un retículo y su grafo asociado.

La existencia de teselación con un dominó es equivalente a que existe un 1-factor en el grafo asociado.

El problema es análogo con triminós y tetraminós. El siguiente tablero se muestra teselado con triminós.

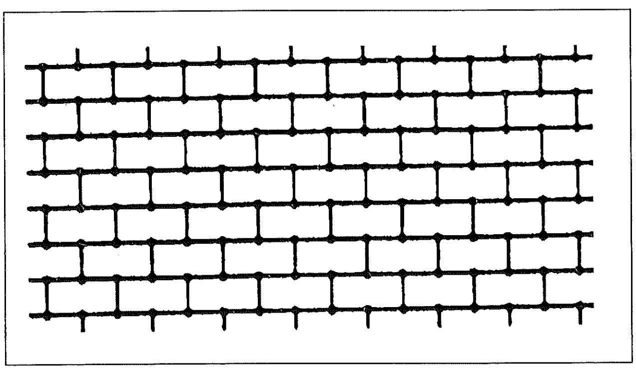


Un tetraminó y un dominó se utilizan para teselar el siguiente grafo:

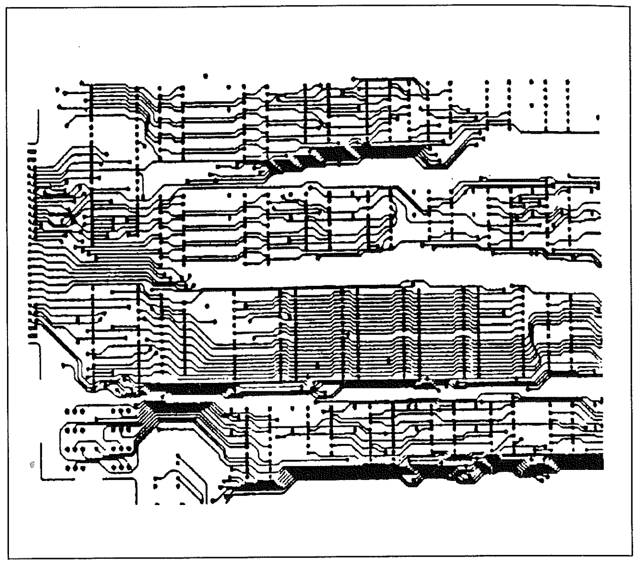


Circuitos impresos

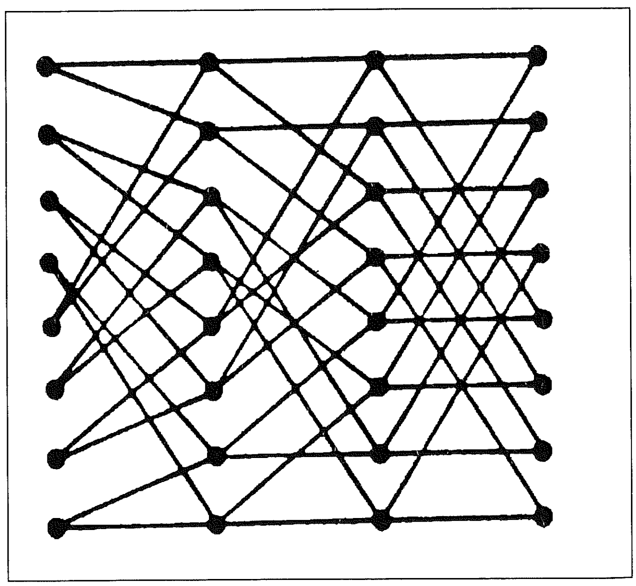
Quizás les hayan dicho alguna vez que los poliminós son poco útiles, pues nadie embaldosa su casa con estas figuras. Casi a modo de curiosidad, pues sé poco sobre el tema, les puedo decir que se están utilizando en el diseño de computadores en paralelo. De ello son una muestra los siguientes gráficos.



De hecho, la teoría de grafos ya se venía utilizando para diseñar circuitos. A continuación se muestra parte de un circuito impreso:

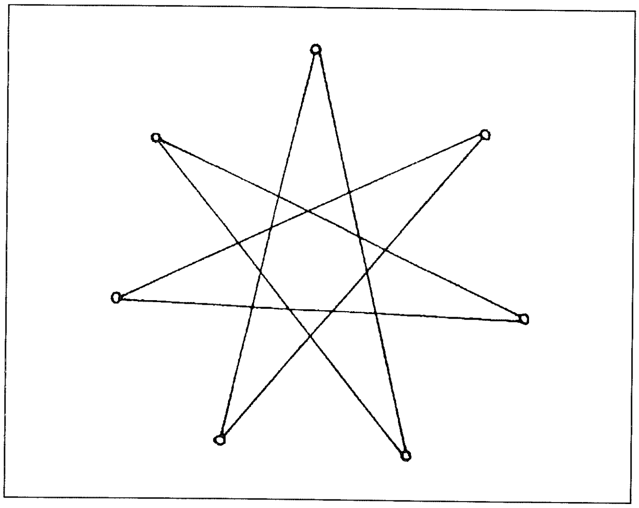


El grafo siguiente es un mapa de los pasos utilizados por un algoritmo para resolver cierto problema mediante ordenador.

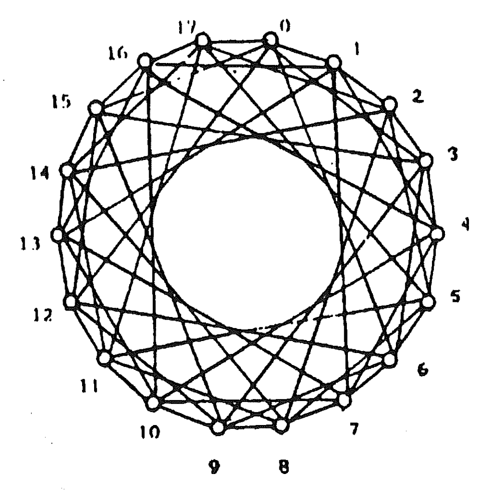


Pienso que hay muchos conocimientos que han estado dormidos y que la llegada de los ordenadores está despertando.

Polígonos estrellados - grafos circulantes - redes de doble bucle

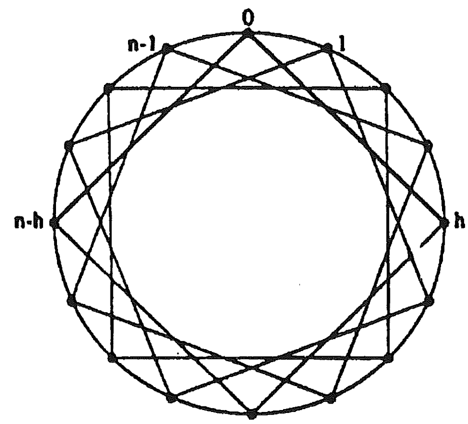


Se suele considerar que los polígonos estrellados datan del 540 a. C., con el pentagrama, símbolo de los pitagóricos. Se han venido utilizando con fines decorativos y fueron estudiados por varios matemáticos, entre ellos KEPLER. La idea de unir **n** puntos dando saltos de longitud **s** suscitó varias cuestiones como: si se cerrará siempre el polígono, el número de vueltas necesarias para que se cierre o el número de lados que tendrá. Las respuestas están relacionadas con la divisibilidad de los números **n** y **s.**



$C_{18}<1,3,6>$

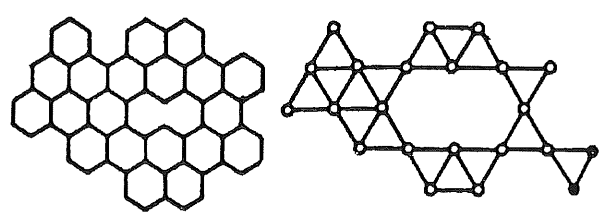
En 1846, CATALÁN introduce las matrices circulantes, que son las matrices de adyacencia de unos grafos que recuerdan a polígonos estrellados superpuestos y que llamaron grafos circulantes. Por su simetría, regularidad y, en particular, su conectividad, estos grafos se utilizan para la implantación de redes locales de ordenadores. La conectividad es máxima si el número de puntos **n** y la longitud **h** de todos los saltos son primos entre sí, lo cual en un factor muy importante porque garantiza la no vulnerabilidad de la red.



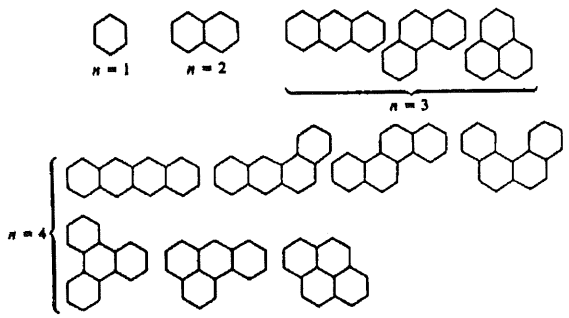
G(n,h)

En los últimos años, la programación en paralelo ha recurrido también al mismo modelo, llamándolos «redes de doble bucle», **G(n,h)**. La cuestión está en buscar **n** y **s** para que la red tenga diámetro mínimo.

Poliexos - Química - Geografía

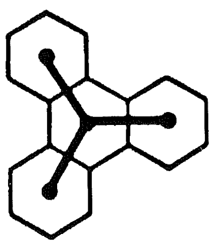


En la figura anterior tenemos un panal y su grafo asociado. Sin embargo, la teoría de grafos no ha resuelto totalmente la cuestión de teselar con poliexos; para algunos casos se conocen condiciones necesarias, pero no suficientes.

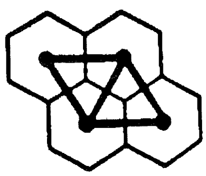


A las figuras formadas por hexágonos se les conoce como «animales hexagonales». De ellos, los más sencillos son los hidrocarburos aromáticos, también llamados arenos, algunos de los cuales son derivados del benceno.

La Química es uno de los campos de la ciencia donde la teoría de grafos ha resultado más productiva, tanto para fijar nomenclatura como para clasificación y definición de estructuras moleculares.

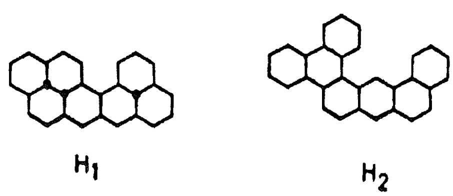


Cata-condensado



Peri-condensado

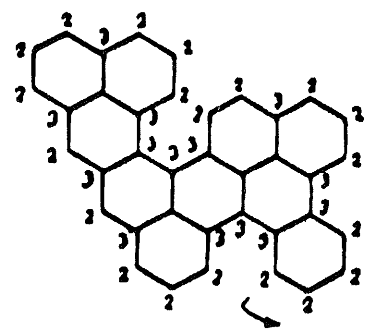
Para los polímeros se utilizan los términos cata-condensados y peri-condensados, según como sea la adyacencia. Los cata-condensados dan lugar a árboles en grafos y los peri-condensados han de tener al menos un circuito en el grafo asociado.



En general, el sistema hexagonal es peri-condensado si tiene vértices internos y cata-condensado si no los tiene; pero siempre se considera un sistema sin agujeros.

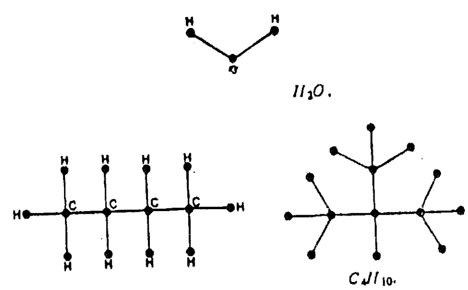
B = 22223322232223333322232222323232222333

Grupo	n_s	Δk_b
22223333	4	+3
222333	3	+2
2233	2	+1
23	1	0
333	3	-1
33	2	-1
3	1	-1
222	0	+3
22	0	+2
2	0	+1



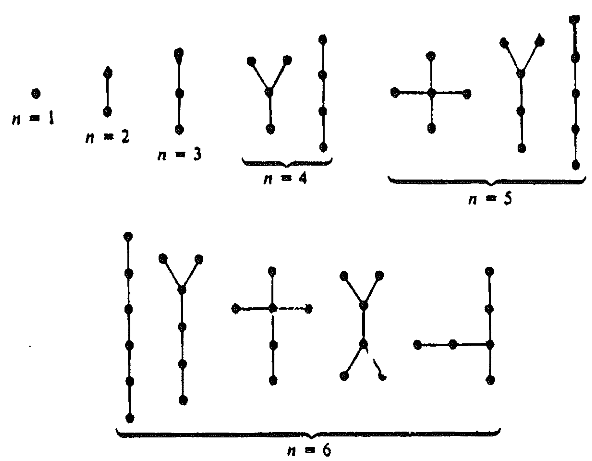
Otra forma de trabajar con los animales hexagonales es codificando su perímetro.

Para los que como yo no sabemos tanta química, es un placer reconocer en los siguientes árboles el agua y el butano.



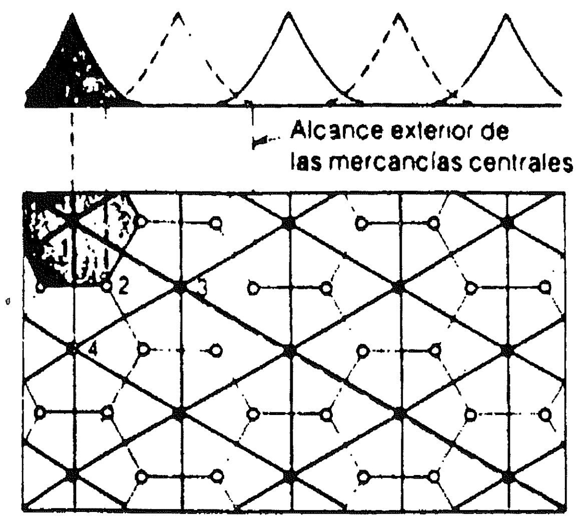
La teoría de árboles fue descubierta por CALEY (1857), a partir del trabajo de KIRCHHOFF, y completada luego por SYLVESTER (1878). La siguiente figura muestra los 6 primeros miembros de la serie alcalinos, C_nH_{2n+2}, donde se han quitado los hidrógenos y sólo se muestran los átomos del carbono. El primero es el metano, CH_4.

El método más poderoso para resolver los problemas de enumeración se debe a G. POLYIA (1937). Es válido para enumerar isómeros, alcoholes y una amplia variedad de estructuras inorgánicas.



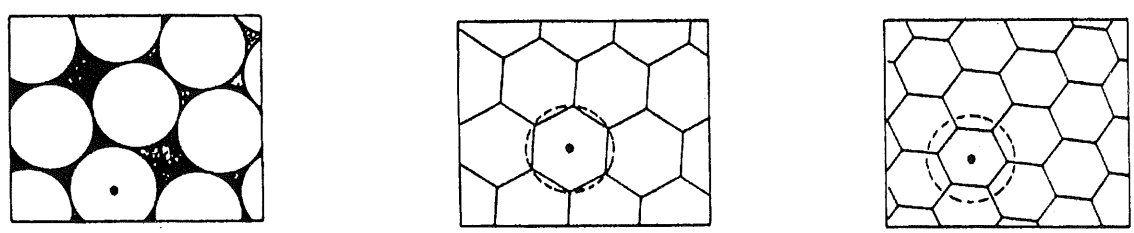
Uno de los modelos de asentamiento de las poblaciones, diseñado por el geógrafo alemán CHRISTALLER, considera la formación hexagonal. Además, este modelo de asentamiento se ha mostrado como el más eficiente para solucionar los problemas de transporte.

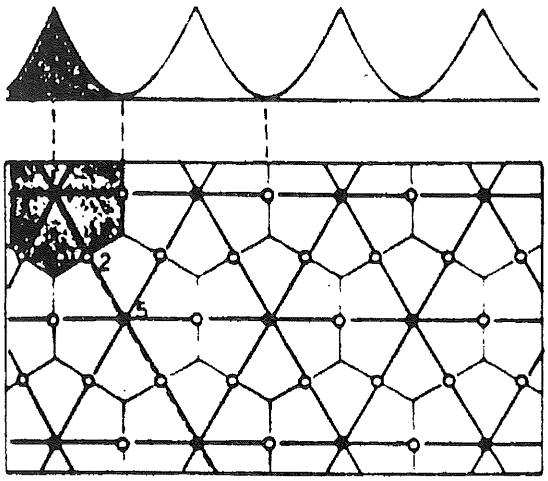
Principios alternativos de organización en el modelo de Christaller



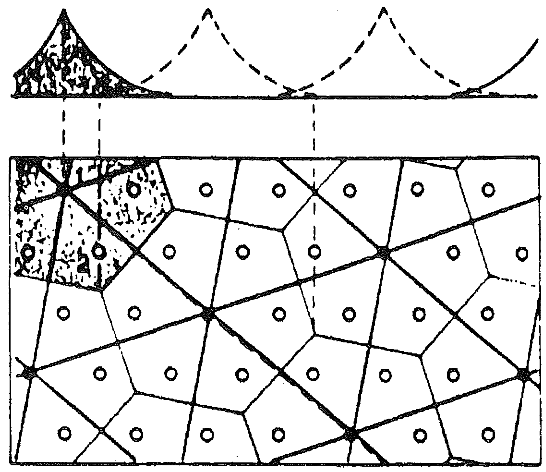
a) Principio de mercado $K = 1 + (6 \times 1/3) = 3$

Formación hexagonal



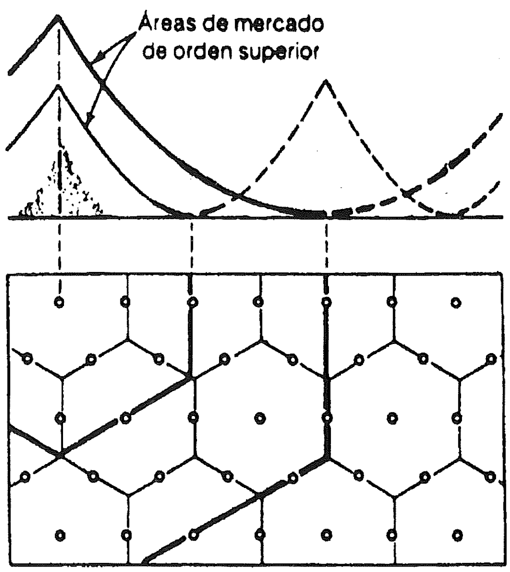


b) Principio de tráfico $K = 1 + (6 \times 1/2) = 4$



c) Principio administrativo $K = 1 + (6 \times 1) = 7$

● Lugar central ○ Lugar dependiente
——— Límite de región complementaria
- - - - - Tráfico entre lugares centrales



d) $K = 9$

Espero haber despertado su interés por el lenguaje de los grafos. El qué, el cómo y el cuándo se debe enseñar a los alumnos, espero se empiece a responder en el debate que seguirá.

Bibliografía

* HAGGETT, P. (1988).- **Geografía. Una síntesis moderna**. Omega.

* HARARY, F. (1972).- **Graph theory**. Addison Wesley.

* HARARY, F. - ROBINSON, R.W.(1984).- **Connect-it Games**. The College Mathematics Journal. 15, 5, 411-418.

* JAÑES ESCALADA, L. (1989).- **Fundamentos de Psicología Matemática**. Pirámide.

* LIESTMAN, A.L. - SHERMER T.C. (1993).- **Grid Spanners**. Networks. 23, 123-133

* PIMM, D. (1990).- **El lenguaje matemático en el aula**. MEC. Morata.

* SOCIEDAD CANARIA «ISAAC NEWTON» DE PROFS. DE MATEMÁTICAS - **Horizontes Matemáticos**. Exposición Itinerante.

* SOBRON, M.I. - ESPINEL, M.C. (1992) **Grafos a través de juegos**. SUMA, Revista de la Federación Española de Socs. Profs. Mats., 11 y 12, 86-94.

* WILSON, R.J. - BEINEKE, L.W. Eds (1979) **Applications of Graph Theory**. Academic Press.

ZEROVNIK, J. - PISANSKI, T. (1993) **Computing the Diameter in Multiple-Loop Networks**. Journal of algorithms 14, 226-243.

María Candelaria Espinel Febles
Área de Didáctica de las Matemáticas
Univ. de La Laguna
S.C. «Isaac Newton» P.M.

La interacción lenguaje-pensamiento y la construcción de los conceptos matemáticos en Primaria

Elvira Figueras i Latorre

En la actualidad ha desaparecido la idea de la enseñanza de las Matemáticas, en los niveles básicos, como ciencia puramente deductiva y se tiende a considerarla como proceso de inducción y construcción empírica de conocimiento.

Valoramos la importancia del lenguaje en la construcción de los conceptos matemáticos y entendemos la matemática como un lenguaje.

La experiencia y la manipulación son actividades básicas en la clases de matemáticas en Primaria. A través de operaciones concretas como son comparar, clasificar y relacionar, el niño va adquiriendo representaciones lógicas y matemáticas que, más tarde, valdrán por sí mismas de manera asbstracta y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independiente de la experiencia directa. La primera aproximación a los conceptos matemáticos la realizan los niños de manera intuitiva; no se puede hablar en estos primeros estadios de elaboración de conceptos. A partir de la manipulación y las consiguientes percepciones, los niños reciben informaciones de su entorno y elaboran las primeras imágenes mentales.

Es en este momento del proceso de aprendizaje cuando entra en juego la comunicación. La expresión ayuda a la concreción del pensamiento. La expresión verbal obliga a los niños a ordenar las imágenes mentales y crea la necesidad de adquirir el vocabulario adecuado.

Cuando entra en juego la comunicación escrita, entramos en el mundo de los símbolos matemáticos. De esta manera, el niño va elaborando los conceptos, explicita procedimientos, adquiere el vocabulario matemático correspondiente y se aproxima a la utilización de los símbolos. Consideramos que el niño debe haber explicitado por escrito -o sea, comunicado- muchas matemáticas, antes de ponerlo en situación de leer un texto escrito por un adulto.

Creemos que no es malo que se introduzca la utilización de vocabulario específico ya en las primeras edades, pero siempre que antes se haya creado su necesidad. Todos los términos utilizados por los niños tienen que estar llenos de significado.

Justificación

En el mes de abril del curso 92-93 se me invitó a colaborar en un curso sobre Matemáticas y Reforma. Se me pedía que presentara una ponencia sobre el descubrimiento matemático en los niños de Primaria; era el tema ideal para conseguir que aceptara la proposición de manera casi inconsciente, sin reflexionar, como si de una invitación a un viaje deseado se tratara. Hablar de los descubrimientos matemáticos que pueden realizar los niños en clase me entusiasmaba; no dudé ni un momento. No era la primera vez que exponía mis experiencias pedagógicas, pero en aquella ocasión la demanda era muy concreta y puntual. Llevo utilizando esta técnica en clase muchos años y la he defendido en muchas ocasiones, pero nunca se me había planteado una situación que me obligase a estructurarla para poder hacer una exposición ordenada y coherente.

¿Por qué se me pedía ahora que hablara de este tema? La respuesta es evidente: De alguna manera, el marco que había originado esta demanda tan concreta era el de la LOGSE. Cogí el Diseño Curricular de Matemáticas y me puse analizar los objetivos generales. Resumiendo, nos proponen allí conseguir niños motivados por la investigación, creativos, críticos, conocedores de sus recursos, sistemáticos y hábiles para utilizar los distintos lenguajes matemáticos y medios tecnológicos.

A continuación, estudié los procedimientos, actitudes, valores y normas y vi que la técnica del descubrimiento era buena para conseguir los objetivos de contenidos y, sobre todo, los de procedimientos y actitudes.

A nivel personal no me hacía falta esta reflexión, tenía comprobado que el trabajo de descubrimiento era una buena práctica matemática, pero seguro que estos argumentos me podían servir para animar a otros maestros a introducirla en sus clases.

Finalmente, las prescripciones educativas coincidían con las de psicólogos cognoscitivos, que consideran que educar es crear hombres capacitados para hacer cosas nuevas y crear mentes críticas. Y, también, con las de los maestros de vanguardia como FREINET, que desde su pequeña escuela rural ya practicaba una matemática de tipo funcional.

La construcción de conceptos. Teorías del aprendizaje

Hasta los años setenta estuvieron en vigor las teorías asociacionistas, modelo transmisión-recepción. Consideraban que los conocimientos se transmiten ya elaborados, y que los alumnos los integran, ya que llegan a las aulas vacíos de contenidos. Pensaban que aprender es asimilar contenidos, y que enseñar es exponer los que se quieren transmitir, de manera clara. Se basaban en la lección magistral del maestro, la lectura y la memorización. Los currículos eran listados de contenidos conceptuales. Queremos creer que estos métodos ya no son los únicos utilizados en nuestras clases.

Durante las dos últimas décadas se han desarrollado diversas teorías del aprendizaje: Genéticas-evolutivas (PIAGET), cognoscitivas (VIGOTZQUI y BRUNER), conductistas o behavioristas y constructivistas (AUSUBEL y NOVAK).

La teoría del descubrimiento de Bruner centra el aprendizaje en la actividad. Considera que aprender es adquirir procedimientos, y enseñar es coordinar actividades y experiencias. Parte siempre de los intereses del niño y siempre utiliza métodos inductivos. El currículo es la adquisición de habilidades cognoscitivas.

Hay dos principios de esta teoría que son aceptados por todas las tendencias:

* La necesidad de que el maestro descubra lo que el niño está en disposición de aprender y planificar las didácticas a partir de ello.
* La acción facilita el aprendizaje de conceptos.

Esta teoría fue seguida durante muchos años por la Escuela activa.

La teoría constructivista postula que aprender consiste en construir significados, dar sentido a aquello que se aprende y hacer que los alumnos lo realicen a partir de su experiencia personal. El niño construye sus conocimientos relacionando los conocimientos que ya tiene con las nuevas informaciones. Este método entra en conexión con la teoría de la *Gestalt* o teoría de la forma, que creía que el inicio del proceso de aprendizaje está en la percepción visual de la estructura física, percepción intuitiva que conducirá a la comprensión y posterior aplicación a otras situaciones. No contemplan la repetición mecánica.

El constructivismo es un tipo de aprendizaje cooperativo; es básica la confrontación de ideas que implica la formalización y, por tanto, la utilización de lenguajes.

El psicólogo constructivista Ausubel analiza y critica la teoría del descubrimiento de Bruner, pero justifica su utilización en la etapa de las operaciones concretas. Considera que es difícil aplicarlas en alumnos mayores, pero reconoce que su utilización mejora la significatividad intuitiva e intensifica y personaliza tanto lo concreto de la experiencia como las operaciones de abstracción y generalización que se hacen a partir de datos empíricos.

Las críticas que los constructivistas hacen al método del descubrimiento se pueden sintetizar así:

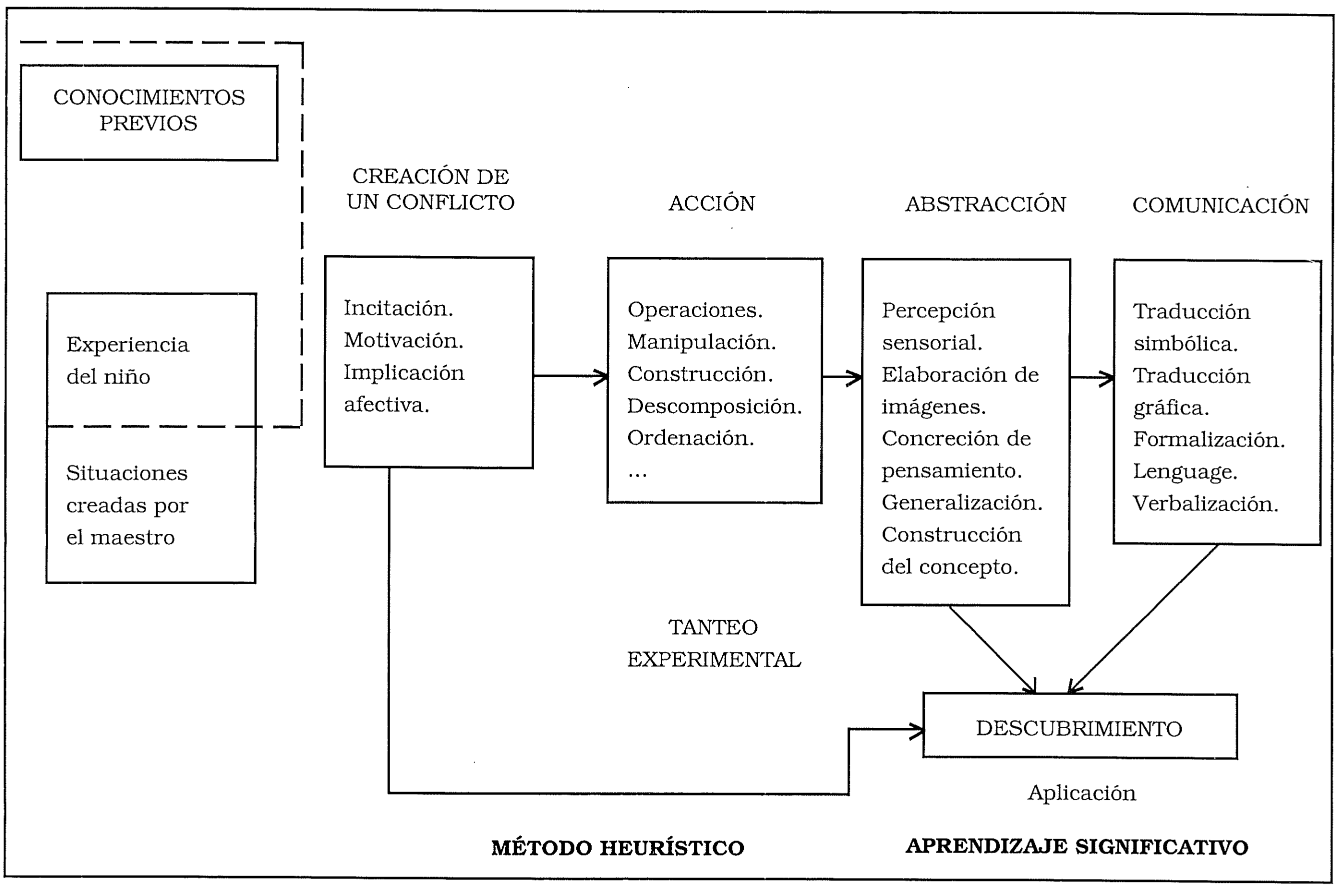
* No aceptan que el significado sea producto del descubrimiento creativo y no verbal.
* Creen que lo aprendido por medio del descubrimiento no se transfiere con facilidad a otras situaciones y problemas.
* Consideran que es útil para alumnos en los primeros años de escolaridad, pero que no lo es para los que ya dominan unos procedimientos y un vocabulario básico.

He querido esbozar las líneas generales de esta teoría del aprendizaje para, a continuación, concretar lo que para mí es el descubrimiento matemático. No querría que el nombre indujera a error

Creo que puede considerarse una técnica de tipo constructivista, a pesar de que cuando empecé a practicarla no conocía el modelo contructivista. Quiero ser sincera y deciros que tampoco conocía la teoría del descubrimiento. Esto nos constata que la práctica docente es una base muy importante para la elaboración y diseño de las didácticas, y que las observaciones de los procesos de aprendizaje de los niños que los maestros pueden hacer en las aulas son los argumentos que han de determinar la aceptación o rechazo de las teorías que los psicólogos propugnan. No creo que la práctica docente tenga que ser definida por una teoría concreta de aprendizaje. Pienso que se tiene que adaptar a cada sociedad, a cada escuela, a cada grupo, a cada alumno y a cada maestro. La personalidad del maestro define su práctica docente y no es bueno intentar asimilarla a una determinada corriente. Es necesario que el educador esté al día de las teorías psicológicas del aprendizaje, las haya analizado críticamente y las haya incorporado significativamente y que, después de confrontarlas con sus experiencias personales, las reinvente y las aplique adaptadas a las situaciones concretas.

¿Por qué consideramos el descubrimiento matemático una práctica de tipo constructivista? Cuando se inicia un descubrimiento siempre se parte de los conocimientos previos que tiene el niño. A veces, el trabajo consistirá en modificar sus preconceptos.

Se trata de que el niño construya conocimientos a partir de su propia experiencia personal y siguiendo su propio camino. Generalmente el alumno va siempre de lo fácil a lo difícil. Tiene claro lo que pretende hacer y qué quiere conseguir; los aprendizajes que realiza por medio de esta práctica son de tipo funcional, pues siempre son aplicables a la resolución del conflicto inicial. Es, pues, un tipo de aprendizaje significativo. (ANEXO 1).



Anexo 1

Lo que entendemos por descubrimiento de un niño en la clase de Matemáticas

Descubrimiento.- *Acción de descubrir aquello que estaba oculto, que era ignorado; la cosa descubierta.*

Descubrir.- *Ser el primero en conocer una cosa hasta aquel momento desconocida.*

Si analizamos el significado que de estas palabras nos da el dicionario, nos daremos cuenta de que las utilizamos correctamente cuando decimos que el niño descubre matemáticas y, si queremos puntualizar, hablaremos de sus redescubrimientos matemáticos.

El niño descubre cosas que, hasta aquel momento, para él estaban escondidas. Cuando un niño realiza un descubrimiento está contento, y el maestro debe estarlo con él y hacer participar de esta alegría a los otros compañeros de clase. Cuando el maestro, por medio de sus explicaciones, da a conocer una verdad al niño, éste no experimenta la misma satisfacción.

Cuando se inicia un trabajo, tanto sea personal como colectivo, siempre se parte de los conocimientos previos que tiene el niño. A veces el descubrimiento consistirá en modificar estos preconceptos. El primer paso es la creación de un conflicto. Debemos conseguir que el niño tenga necesidad de solucionarlo. Si se trata de un conflicto espontáneo, es decir, no inducido por el maestro, evidentemente la motivación será mayor.

Un maestro experimentado es capaz de motivar la creación de conflictos en el niño de manera indirecta.

Existen conflictos propios de cada edad que el niño debe plantearse obligatoriamente, ya sea de manera espontánea o provocada. Por esto se hacen descubrimientos colectivos en los cuales, a partir de una situación planteada por el maestro, cada niño se plantea su conflicto y lo soluciona siguiendo su propio sistema.

Es muy útil coleccionar todos los descubrimientos y ponerlos a disposición de la clase, como si de un libro más de la biblioteca se tratara.

La observación y estudio de los sistemas que utilizan los alumnos para hacer sus inducciones son fuente de material válido para realizar guías de descubrimineto para otros niños. PUIG ADAM, en su **Didáctica de la Matemática Heurística**, decía: «Los niños dan la llave para descubrir la didáctica más acertada a cada tema» (1956).

A veces, la investigación realizada por un niño no conduce a ninguna conclusión o bien plantea una conclusión equivocada. Es importante que el niño se haga consciente de su error, pero nunca tenemos que pensar que el trabajo que ha realizado no haya sido válido.

Puede pasar que un niño haga un descubrimiento de manera espontánea. No siempre es necesario el redescubrimiento; a veces la generalización es inmediata, fruto de un trabajo anterior. FREINET decía: «Si encontramos sin buscar es que antes habíamos buscado sin encontrar».

Todo descubrimiento debe tener una plasmación formal, una expresión que le permita comunicarlo a sus compañeros. Esto obliga al niño a ordenar sus ideas: primero, para expresarlas a nivel oral; después, utilizando diagramas, dibujos, etc. y, finalmente, elaborando un informe escrito.

Clases de descubrimientos (Anexo 2).

Habría muchas maneras de clasificar los descubrimientos realizados en clase, pero nos limitaremos a hacerlo bajo dos aspectos:

Atendiendo a las personas que intervienen en su elaboración, pueden ser **individuales** y **colectivos.**

Considerando el origen del conflicto, pueden ser **espontáneos** e **inducidos.**

La primera clasificación necesita muy pocas explicaciones.

Cuando un niño se enfrenta solo ante un conflicto, que se ha planteado él o que se lo ha provocado el maestro u otro compañero, consideraremos que está realizando una actividad de tipo individual. En el primer caso, espontánea; en el segundo, inducida.

En una clase de Quinto nivel, y mientras se realizaba un estudio colectivo del hexágono regular, se planteó la necesidad de encontrar un sistema para saber cuántas diagonales tiene un polígono. Los niños, en grupos, estuvieron trabajando con distintos polígonos hasta que, de una manera u otra, llegaron a descubrirlo.

La manera de saber cuántas diagonales tiene un polígono es bien conocida por todos, pero era desconocida para ellos y la descubrieron. Hasta aquí se trataba de un descubrimiento colectivo de tipo inducido.

ORIGEN DEL CONFLICTO

ESPONTÁNEO

INDUCIDO

- **Por el maestro**
  - ***Directamente:***
    - * Explicación
    - * Material
  - ***Indirectamente:***
    - * Fichero
    - * Colección de descubrimientos
- **Por los compañeros**
  - * Un descubrimiento
  - * Un conflicto anterior sin resolver

Anexo 2

Un niño de la clase se planteó la posibilidad de que al aplicar el sistema surgiera una división por dos que no fuera exacta, dado que el número de diagonales de un polígono no puede ser un número decimal. Calculó el número de diagonales de muchos polígonos y vio que nunca pasaba. Quiso saber la razón por la cual el producto del número de lados menos tres, por el número de lados, fuera siempre un número par. El trabajo, que en principio era colectivo e inducido, derivó en una actividad individual de tipo espontáneo.

Generalmente, el trabajo de clase se centra en un tema concreto. Esto hace que los descubrimientos que hacen los niños sean en torno a este nucleo de interés.

Muchas veces, niños diferentes llegan a los mismos descubrimientos paralelamente y utilizando los mismos caminos. Esto debe hacernos reflexionar: Seguramente el método seguido nos puede ser válido en otros momentos para ayudar a otros niños.

Introducción de este tipo de actividades en clase

Para que el descubrimiento matemático sea una práctica habitual en clase, lo ideal es que se empiece a practicar en la Educación Infantil. En estas edades los niños empiezan a hacer pequeños descubrimientos que el maestro o maestra deberá saber captar y potenciar haciendo que se sientan orgullosos de ellos. Los descubrimientos hechos por niños pequeños tienen siempre relación con cosas generales, no especialmente con las matemáticas.

Si tenemos suerte y llegan a nuestras clases niños con este tipo de experiencias, el trabajo con ellos será muy fácil, pero esto pasa raramente. Yo tuve la suerte de trabajar durante quince años en una escuela donde en todos los niveles se realizaban actividades de descubrimiento. Hace cuatro años, y por cambio de residencia empecé a trabajar en una nueva escuela. Debía dar las matemáticas a tres clases de Sexto. Los niños estaban acostumbrados a trabajar siguiendo un libro de texto, a escuchar las explicaciones del maestro y hacer después los ejercicios propuestos en el libro. Tenían un buen nivel mecánico. Nunca habían tenido posibilidad de escoger el trabajo que les interesaba hacer; hacían siempre, bien o mal, lo que el maestro les proponía. Eran muy disciplinados, pero se manifestaban muy poco creativos.

La primera reacción fue de desánimo, pensaba que niños de Sexto que nunca habían realizado trabajo libre, que nunca habían trabajado la matemática de una manera creativa, no podrían seguir la dinámica de clase que yo siempre había orientado. Intenté adaptarme un poco al sistema e ir cambiando poco a poco la dinámica de la clase. Introduje espacios de tiempo dedicados al trabajo libre en que los niños pudieran escoger sus actividades dentro de un abanico de posibilidades: introduciendo la práctica del descubrimiento, proponiendo situaciones que indujesen a la reflexión y posterior descubrimiento, organizando actividades lúdicas que animasen a los niños a jugar con los números, la lógica, la geometría. Mi meta era conseguir que los alumnos descubrieran la matemática de la vida.

La dinámica de la clase fue variando poco a poco; los niños empezaron a trabajar con ilusión, pronto empezaron a descubrir. Esto me hizo ver que los niños son creativos por naturaleza, les gusta descubrir, investigar, alejarse de las actividades dirigidas. También pude constatar que el hecho de tener buenos hábitos de trabajo y un buen dominio mecánico facilita mucho la asimilación de esta práctica.

Hace falta una organización de clase que facilite este tipo de actividad. Debe haber espacios de trabajo libre en los que cada niño pueda elaborar, de manera individual o en pequeño grupo, sus descubrimientos y también períodos de tiempo dedicados a la exposición y debate de los ya realizados. También deben existir actividades alternativas para los niños que no tengan conflictos planteados. Es bueno que haya un fichero inductor de descubrimientos para los niños que les cueste encontrar motivos.

El maestro debe tener el material y los recursos necesarios para provocar en los alumnos la elaboración de todos los conceptos y la consecución de todos los objetivos propuestos en la programación. No ha de ser un material rígido, es decir, ha de ser susceptible de continuas modificaciones. Tiene que incorporar aportaciones de los propios alumnos que en ocasiones sustituirán materiales preparados por el maestro.

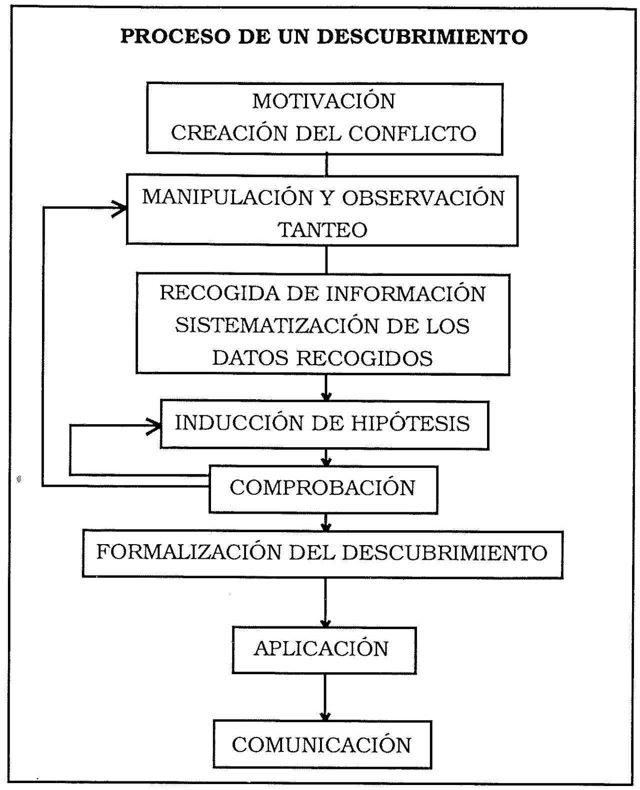
No se trata de que todos los alumnos realicen todas las actividades; un control estricto de la evolución de cada uno servirá al maestro para orientar el trabajo individual.

Cuando se trata de hacer descubrimientos colectivos, generalmente es el maestro quien plantea el conflicto, pero también pueden hacerlo los niños. En ocasiones, en el momento de la exposición colectiva se presentan conflictos que pueden ser motivo de trabajo de todo el grupo y posterior puesta en común.

También se puede potenciar que un alumno pida ayuda a sus compañeros. Cuando pasa esto, generalmente el clima de la clase se hace muy enriquecedor.

Proceso de un descubrimiento (Anexo 3).

El proceso se inicia con la creación de un conflicto, es decir, de una situación matemática por resolver. Debemos conseguir que se plantee como un reto personal en el que haya una fuerte dosis de implicación afectiva. La primera parte de la actividad será siempre eminentemente práctica. Se basará en la manipulación y en la observación; permitirá una posterior regogida de información. Se ordenarán y clasificarán los datos recogidos utilizando procedimientos gráficos. Es el momento de ofrecer a los alumnos los distintos mecanismos de recogida y



Anexo 3

clasificación de datos segun las necesidades lo requieran: tablas de doble entrada, diagramas, etc. A partir de los datos recogidos se inducirán hipótesis que deberan formalizarse, para lo que será necesario el uso de vocabulario matemático específico que el maestro suministrará al niño cuando haga falta.

Se seguirá después con la comprobación de la hipótesis planteada y, en caso de ser válida, se pasará a formalizar el descubrimiento. Si resulta ser falsa, se deberán formular nuevas hipótesis.

Para que el niño o niña pueda comunicar con claridad su descubrimiento es necesario que lo haya concebido realmente en su inteligencia, deberá haber ordenado sus ideas y necesita poseer de manera significativa el vocabulario necesario para su expresión.

Podemos considerar que un descubrimiento ha sido realmente comunicado cuando los demás niños de la clase son capaces de aplicarlo a situaciones distintas.

Elvira Figueras i Latorre
Associació d'Ensenyants de Matematiques de les Comarques Gironines (ADEMGI)

Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros

Manuel Fernández

Introducción

Hace ahora más de treinta años, nuestro PUIG ADAM (1), refiriéndose al papel de los modelos materiales en la enseñanza, escribía:

«... para nuestros alumnos de clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos, y al mismo tiempo lo que les invita a actuar. Si la percepción y la acción constituyen dos aspectos del aprendizaje, será necesario que los primeros modelos puedan provocar una y otra. Limitándonos, pues, a los modelos materiales, exigiremos que la traducción o la sugestión que entrañen no sean puramente contemplativas, sino que susciten una acción efectiva. Dicho de otro modo: los modelos deberán traducir o sugerir, creando situaciones activas de aprendizaje».

Es verdad que es una lástima, y es lástima que sea verdad, que visiones como ésta hayan sido tanto tiempo ignoradas. Mejor les hubiera ido a nuestros alumnos si las hubiéramos llevado a las aulas desde que fueron expuestas. Pero no, se ha esperado a que fueran sacralizadas por los ICMEs y demás cofradías. En fin, más vale tarde que nunca.

Por otro lado, desde que el niño entra en la escuela - sabiendo hablar, pero no escribir - se pretende (se pretendía y aún se sigue pretendiendo por muchos) que escriba «en Matemáticas» y, generalmente, no se insiste lo necesario en la expresión de nociones y destrezas matemáticas en **lenguaje natural**. Inexplicablemente, se suele olvidar que, en los niveles que nos ocupan, se piensa en palabras, no en símbolos.

El que en el título de este trabajo aparezca la frase «**lenguajes matemáticos**» obedece a la idea de considerar entre ellos al que, a falta de nombre mejor, denominaré **lenguaje físico** (los objetos también hablan) y al **ordinario o natural**.

Expondré aquí variados ejemplos de cómo acceder a determinados conceptos y relaciones a través de material (comercial o elaborado al efecto), haré hincapié en la posterior **verbalización** (oral y escrita), para, finalmente, ejemplificar el proceso de paso al **lenguaje simbólico**.

Se considerará también el empleo del **lenguaje gráfico**, entendiendo por tal la expresión mediante dibujos, diagramas, tablas, gráficas, etc.; la verbalización de lo así tratado y su traducción al lenguaje simbólico.

He de advertir que considero que la meta final de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los niveles no universitarios, ha de ser que el alumno adquiera una cierta soltura en la interpretación y escritura del lenguaje simbólico. Creo que no pretenderlo es jugar a enseñar Matemáticas; no es tratar seriamente de enseñarlas y de que sean aprendidas.

Un ejemplo del uso introductorio del lenguaje físico y sus sucesivas traducciones: Estudio de las unidades decimales de numeración a través del decímetro cúbico desmontable.

A) Fase físico-oral

Material: Un par de juegos para cada grupo de 3 ó 4 alumnos. Otros para el profesor.

Terminología: Al decímetro cúbico completo se le denominará **cubo**. A las partes, **plancha**, **barra** y **cubito**.

Los alumnos deben manipular el material hasta que lleguen a descubrir y expresar **oralmente** con corrección que: **una plancha** es **una décima** de **un cubo**; **una barra** es **una centésima** de **un cubo**; etc.

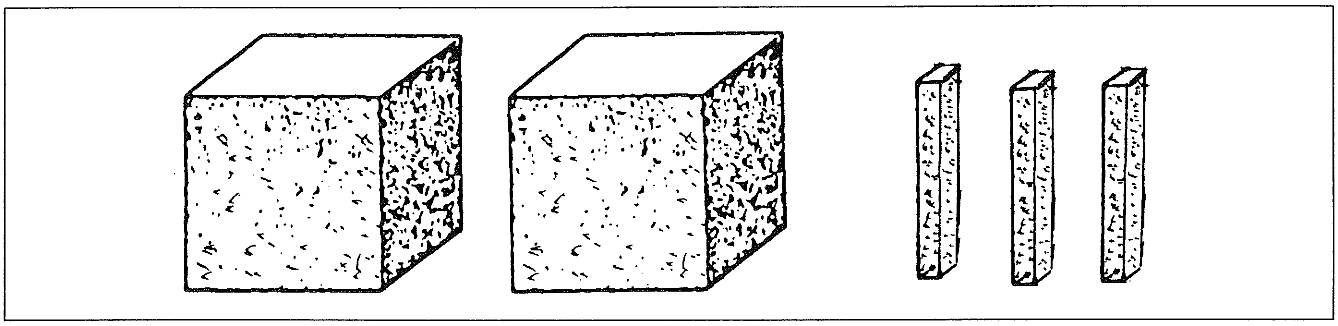
Oportunamente, sin precipitaciones peligrosas, debe procederse a ir cambiando la **unidad de referencia**. Entonces, los ejercicios consistirán en ver que, por ejemplo, **una barra** es **una décima** de **una plancha**; **un cubito** es **una centésima** de **una plancha**;...

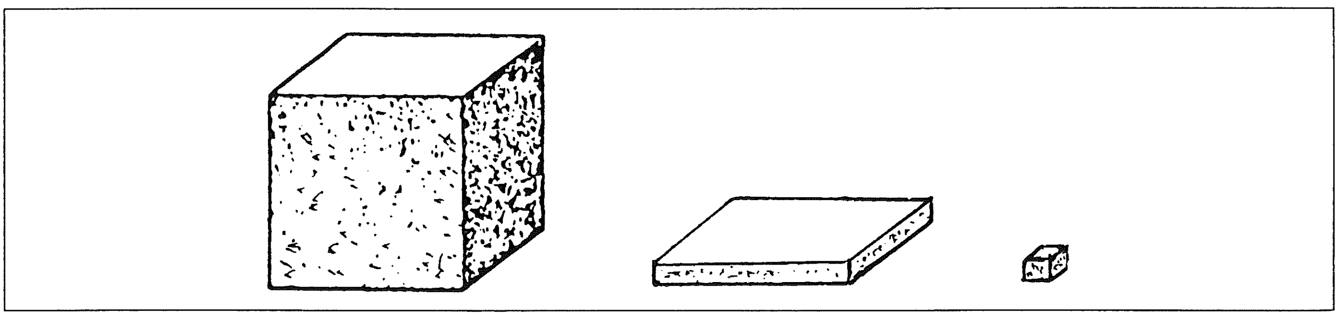
Cuando haya constancia de que lo anterior ha sido debidamente interiorizado, puede el profesor mostrar diversas combinaciones de distintas unidades **sucesivas**, y pedir que expresen en forma oral cada cantidad.

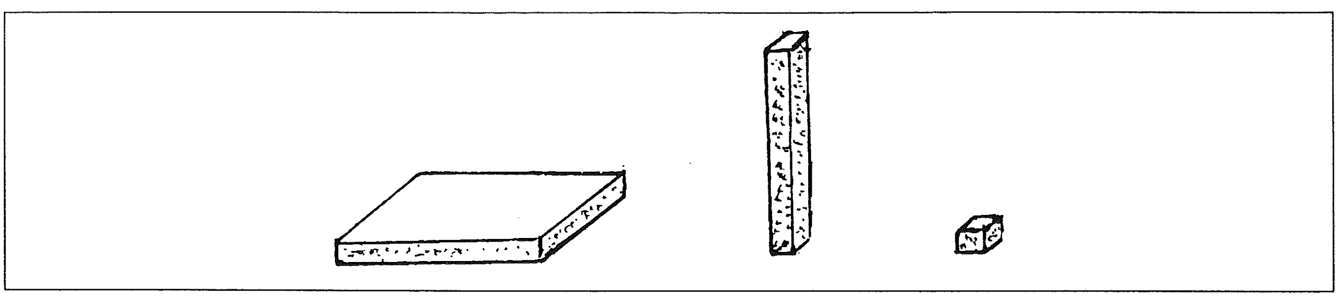
Más tarde, repetir el proceso con unidades **no sucesivas**. Por ejemplo, mostrándoles commbinaciones **materiales** como las que se representan a continuación, ayudarles a que expresen en lenguaje habitual las correspondientes cantidades.

Esto supone un importante paso más, una primera abstracción. Se trata, por ejemplo, de que digan, en el caso de la primera figura: **dos unidades y tres centésimas**.

O bien, tomando como unidad una parte del cubo, verbalizar la expresión **material** correspondiente. Tal es el caso representado a continuación:







Pero la actividad no debe terminar aquí. Debe adiestrarse al alumnado en el paso inverso, esto es, proponer muchos y variados ejercicios en los que se pida materializar enunciados como los que, a vía de ejemplos, siguen, sobreentendiendo que cada cual es libre de elegir, cuando se dé el caso, **la unidad de referencia**:

3 unidades y 2 décimas.
2 unidades, 2 décimas y 5 centésimas.
4 décimas y 3 centésimas.
2 unidades y 3 milésimas.
10 décimas
5 décimas.
15 centésimas.
25 milésimas.
100 centésimas es lo mismo que 1 unidad.
1007 milésimas equivale a 1 unidad y 7 milésimas.
200 centésimas es lo mismo que 20 décimas.
...

En todo este proceso surgen conflictos cognitivos entre el alumnado. Y es bueno que así sea. Cuando consigan superarlos -con nuestra ayuda o, mejor, sin ella- podremos asegurar que las nociones tratadas han sido significativamente aprendidas. Y cuando, más adelante, tengan que efectuar mediciones y anotar, pongamos por caso, la medida de un listón de **1 m 5 mm** , escribirán, con la seguridad con que lo hace un carpintero, **1'005 m**.

B) Fase físico-escrito

El proceso a seguir es igual que el de la fase anterior, pero aquí debe darse más autonomía a los alumnos: que sean ellos los que propongan los ejercicios, que comenten en voz alta las incidencias y dificultades encontradas, ...

Debe propiciarse el empleo de otros materiales; por ejemplo, manojos de palillos de dientes de 10 y 100 unidades, para el trabajo con décimas y centésimas; probetas graduadas y agua coloreada, etc. También, aprovechar la creatividad natural de los niños y proponerles que fabriquen otros; por lo menos, para el estudio de décimas y centésimas.

C) Fase del lenguaje gráfico

El decímetro cúbico real y sus partes se sustituyen ahora por buenos dibujos en tamaño real. Debe disponerse de varios juegos e irles mostrando diversas combinaciones para que expresen, oralmente y por escrito, lo que ven.

Constituye también un buen ejercicio que los alumnos vayan diciendo cantidades, y el profesor vaya enseñando los correspondientes dibujos. Y repetir esta escenificación, actuando sólo los alumnos.

No se le ocultará al lector que el objetivo de esto es aprovechar la ocasión para establecer una ***comunicación*** que facilite la construcción del conocimiento, la comprensión verdadera de los conceptos y relaciones.

D) Desde el lenguaje físico hasta el simbólico, y viceversa

Ha llegado el momento de hacer ver que las Matemáticas disponen de una forma más rápida y cómoda de escribir estas cosas. Procede ahora introducir el convenio del uso de la «**coma**» para separar y distinguir las **unidades** de las **unidades decimales.**

(Y, ¡cuidado!: Se está empezando a copiar el uso del punto decimal anglosajón, lo que puede acarrear problemas).

Se debe partir, aunque aquí no lo hagamos, de las representaciones materiales.

En esta etapa, hay que ir muy despacio. Es fundamental que, desde un principio, los chicos caminen seguros por esta vía a la abstracción. Se evitará así el que, más tarde -en especial cuando traten con fracciones ordinarias o medidas- cometan errores de difícil erradicación.

Ejemplos de ejercicios:

a) Traduce al lenguaje simbólico:
* 4 unidades 5 décimas
* 3 unidades 3 décimas 1 centésima
* 25 unidades 7 centésimas
* 7 décimas 5 milésimas
* 6 centésimas 5 milésimas
* 9 centésimas
* 23 milésimas
* 115 centésimas es lo mismo que 1 unidad y 15 centésimas
...

b) Expresa con números y palabras:
* 3'12

* 3'02
* 5'005
* 0'35
* 0'02
* 0'003
* 32'07
...

c) Materializa y representa con dibujos las cantidades propuestas en los ejercicios anteriores.

Pero... el lenguaje físico sirve para más: otros ejemplos

Ocurre que una parte muy considerable del profesorado considera, y actúa en consecuencia, que esto de manipular, de intentar que los alumnos «visualicen» las relaciones y matemáticos, sólo es útil cuando de los primeros niveles de la enseñanza se trata. Idea esta tan peregrina, como creer que a un laboratorio de Física sólo es necesario entrar para comprobar la dilatación de los cuerpos al absorber calor, o lo que el genial Arquímedes cuentan que descubrió mientras tomaba un placentero baño.

Creo, por el contrario, que casi todos los contenidos matemáticos de la Enseñanza Obligatoria y algunos correspondientes a los Bachilleratos pueden introducirse a través de materiales que, en muchos casos, se encuentran comercializados; en otros, se puede, y es altamente instructivo, diseñarlos y construirlos con nuestros alumnos.

EJEMPLOS:

A) Redescubrimiento del Teorema de Pitágoras

Material:
Para cada grupo de 3 ó 4 alumnos, varios juegos de varillas metálicas finas y difícilmente deformables: unos, con medidas equimúltiplos de 3, 4 y 5; otros, con medidas cualesquiera.

Proceso a seguir:
1º) Pedir a los alumnos que construyan triángulos, utilizando sólo las varillas de un mismo juego.

El objetivo primero es, solamente, que lleguen a la conclusión de que «no siempre se puede formar un triángulo». No creo que se deba pretender más, es decir, no se trata de introducir el teorema que afirma que «Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma...» que, además, no tiene mucho interés.

2º) Separar los juegos constituidos por varillas que no cierran triángulos.

3º) En una cartulina o chapa de madera, pegar los triángulos ***rectángulos*** resultantes.

4º) Medir los lados con la mayor precisión posible (la medición y corte de las varillas ha debido hacerse con el máximo rigor) y anotar las medidas.

5º) Procede ahora hacer una revisión del trabajo hecho. Habrá casos en que nuestras ternas pitagóricas habrán dejado de serlo, porque las mediciones hechas por los chicos no han sido correctas y, en consecuencia, han der ser corregidas.

6º) Una vez hechas y revisadas las correcciones, tabular los resultados, según el modelo adjunto:

3	4	5
6	8	10
...	...	...

A continuación, proponer las siguientes cuestiones:

1) Calcular los cuadrados de las medidas de los lados de cada triángulo.

2) ***Intentar descubrir qué relación existe entre los dos primeros cuadrados y el tercero.*** (Hay que evitar a toda costa que algún alumno conocedor del Teorema, nos chafe el invento).

Una disposición adecuada de los cálculos, aprovechando la tabla anterior, es esta:

3	4	5
$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
6	8	10
$6^2 = 36$	$8^2 = 64$	$10^2 = 100$
...	...	...

7º) Después del consiguiente debate, proponer la pregunta siguiente.

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados traduce la relación descubierta?:

* La suma de los cuadrados de las medidas de los lados menores de un triángulo, es igual al cuadrado de la medida del lado mayor.

* En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados.

* En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

* En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de la suma de los catetos.

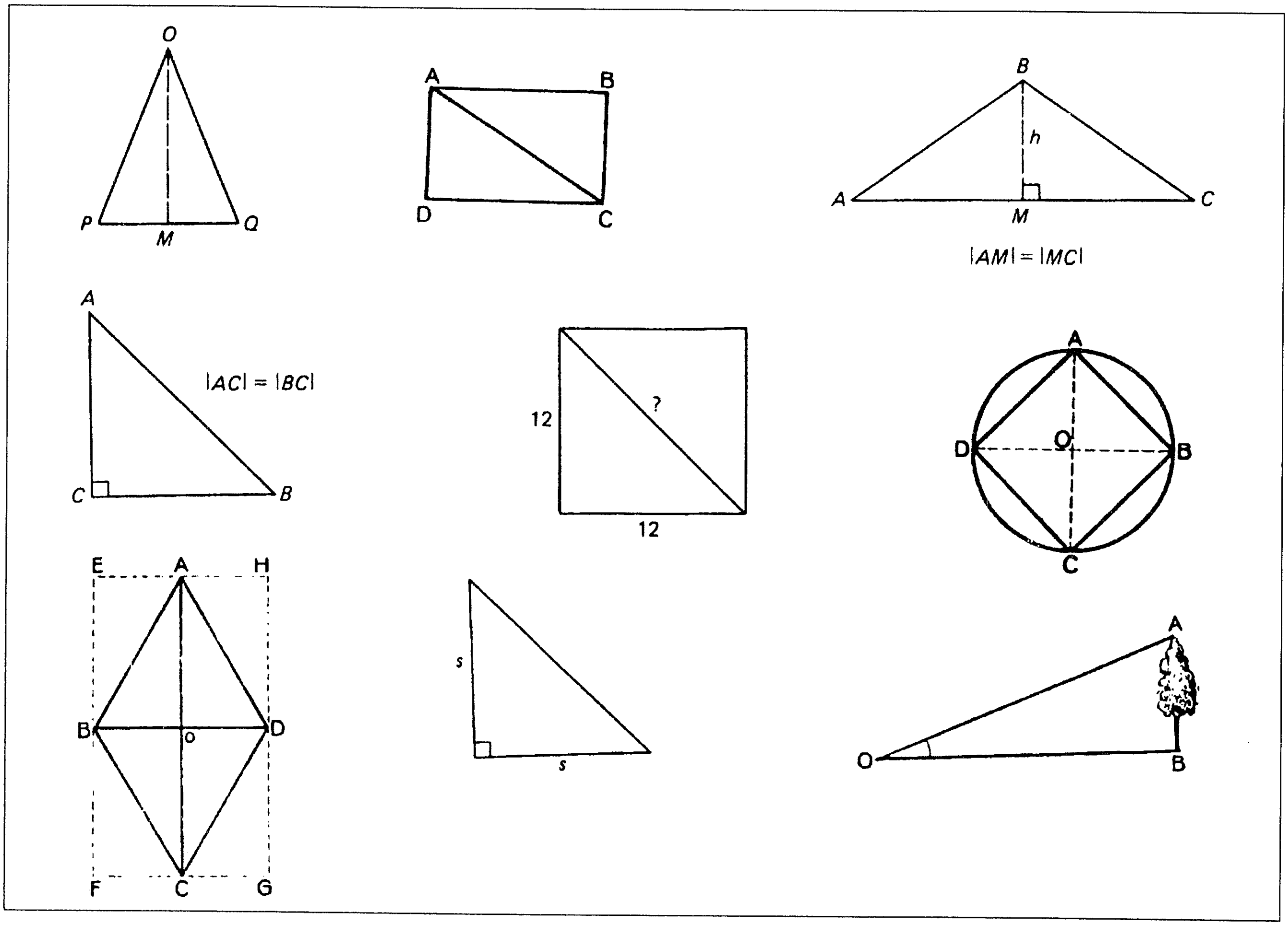
* Si un triángulo rectángulo tiene iguales sus catetos, el cuadrado de su hipotenusa es igual al doble del cuadrado de uno de los catetos.

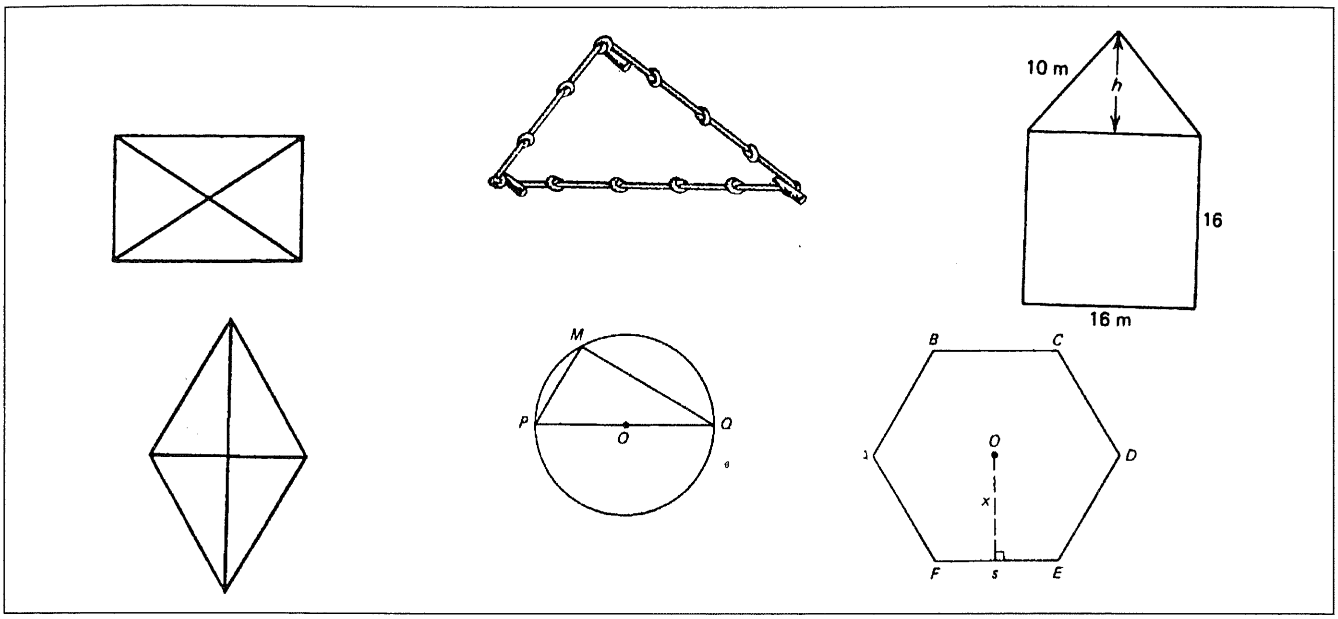
8º) El profesor puede ahora hacer alguna referencia a Pitágoras, los pitagóricos, etc., proporcionar alguna bibliografía y proponer al alumnado un sencillo trabajo sobre el tema; por ejemplo, un comentario de texto.

9º) El Teorema de Pitágoras suele enunciarse así:

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Aplicarlo a los triángulos rectángulos de las figuras que siguen:



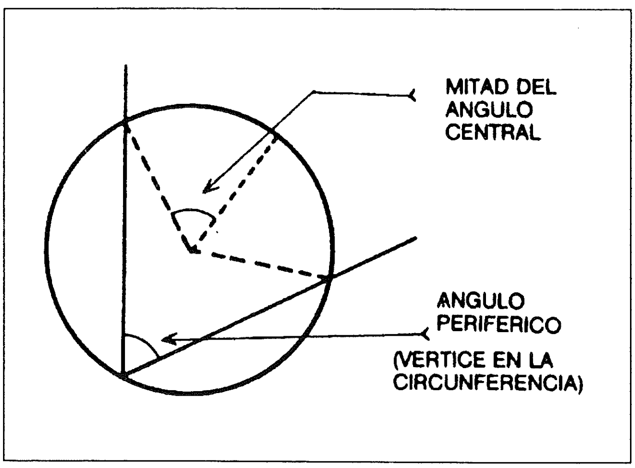


B) Medida de un ángulo periférico (Tomado de «CIRCULANDO POR EL CIRCULO» (2)).

Angulo ***central*** es cualquier ángulo con vértice en el centro de un círculo. Sus lados son semirrectas radiales.

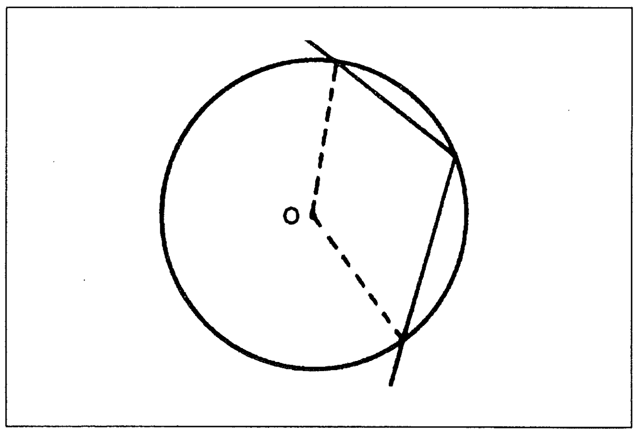
El ángulo ***periférico*** tiene su vértice en un punto cualquiera de la circunferencia. Sus lados pueden pertenecer a rectas secantes a la circunferencia, o bien, uno a una secante y el otro a una tangente.

1º) Entregar reproducciones en cartulina y en tamaño adecuado de la siguiente figura:

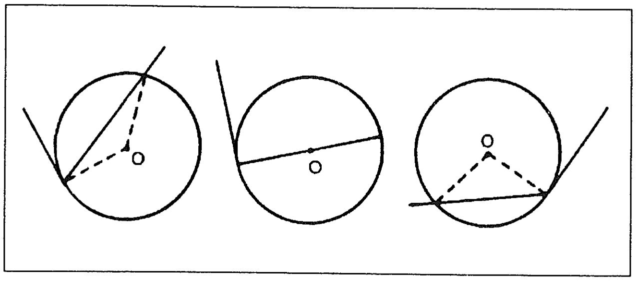


2º) Pedir que recorten el ángulo «mitad del central» y lo encajen en el «periférico». ¿Qué relación parece haber entre ambos ángulos?

3º) En reproducciones de la figura adjunta, pedir que tracen las bisectrices de los ángulos centrales y procedan como en el apartado anterior. (Advertir que, como el ángulo periférico es mayor que un recto, le corresponde un ángulo central mayor que un llano).



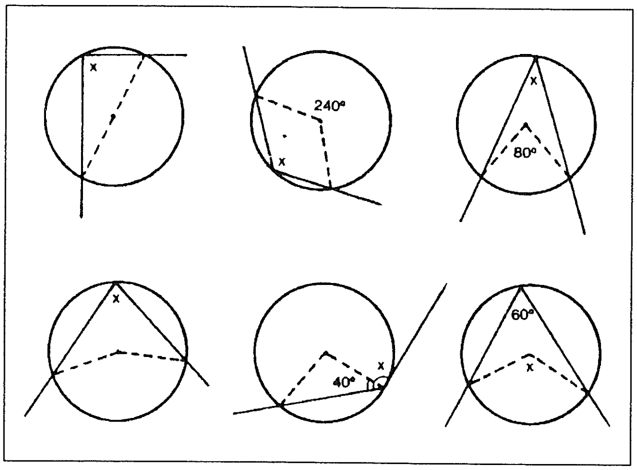
4º) En los ángulos periféricos de las figuras que siguen, un lado pertenece a una tangente a la circunferencia; por eso los llamamos «periféricos tangenciales».



Los alumnos han de disponer de cartulinas, tijeras e instrumentos de dibujo, y proceder como en los casos anteriores.

5º) Escribir en palabras la relación entre cualquier ángulo periférico y el central correspondiente.

6º) Calcular el valor del ángulo X de cada una de las figuras que siguen:



C) Algunas de las cosas que pueden hacerse con una moneda (3)

1. Medir el diámetro con un calibrador.
2. Medir su espesor.
3. Calcular la superficie de una cara.
4. Determinar, con una probeta, su volumen.
5. Verificar el resultado obtenido en 4, mediante el cáculo.
6. Pesarla.
7. Calcular el peso específico de la aleación de que está hecha.
8. Averiguar cuántas monedas iguales a la dada habría que fundir para llenar el espacio de la clase.
9. Si llenáramos la clase de mercurio, ¿cuánto más pesaría éste que el bloque obtenido en la fundición de las monedas?
10. ¿Qué presión ejercería el bloque de monedas sobre el piso de la clase? ¿Y el mercurio?

Dibujando y aprendiendo

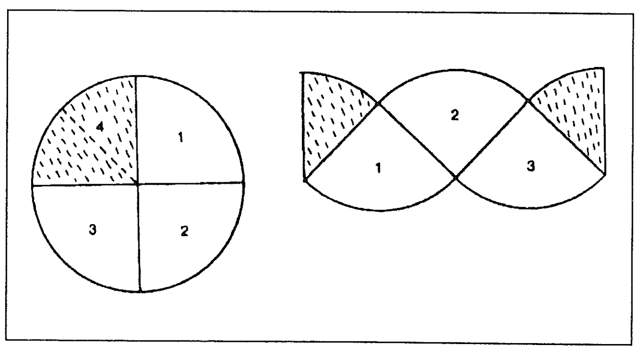
La poca atención prestada en los últimos años a la Geometría, ha traído aparejado el no aprovechar el enorme potencial del dibujo geométrico como lenguaje aclaratorio y enriquecedor; el no considerar la gran ayuda que puede prestar para:

* Fijar nociones intuidas a través de otras actividades de aproximación (con geoplanos, objetos circulares, recorte de figuras, etc.).
* Llegar, mediante un proceso inductivo, al descubrimiento de nuevas relaciones y propiedades.
* Preparar el camino para que el alumno pueda llegar, más tarde, a expresar, tanto en lenguaje ordinario como en el simbólico, y con la necesaria precisión y concreción, las propiedades y relaciones que tendrá que utilizar en la resolución de problemas geométricos.
* Ejercitarse en la construcción de figuras y, lo que es más importante, adiestrase en su observación, para descubrir o establecer relaciones, aspecto este que debe tratarse detenidamente, ya que es fundamental en el proceso de resolución de problemas de cierta complejidad.

Siempre a vía de ejemplos, incluyo a continuación dos actividades de este tipo. La primera, tomada del libro anteriormente citado.

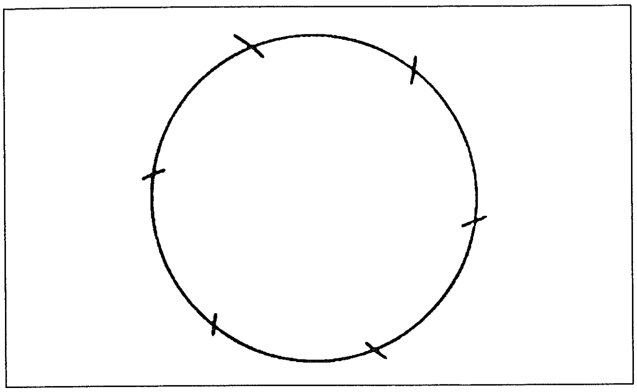
A) Deducción empírica de la fórmula para calcular el área del círculo

1. Dividamos un círculo en 4 sectores iguales y dispongamos estos como indica la figura:

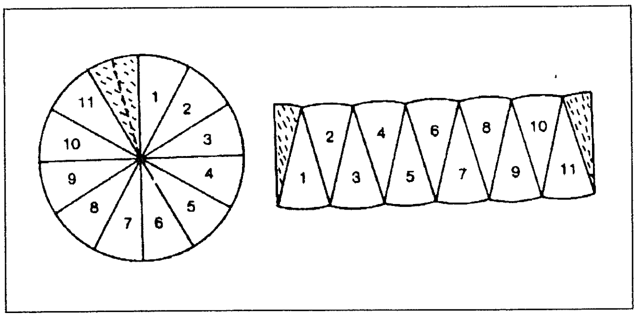


¿Se parece esto a un rectángulo? Tienes razón; no se parece en nada.

2. Prueba tú, partiendo el círculo en 6 sectores:



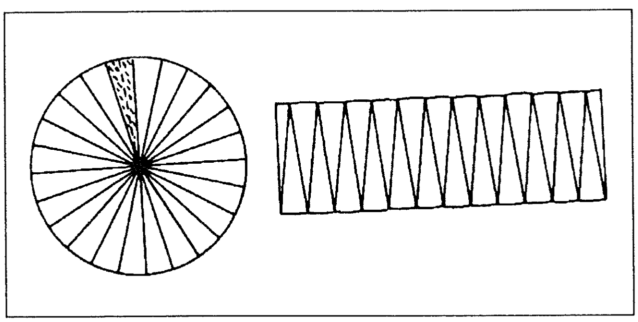
3. Veamos qué ocurrre con 12 divisiones:



4. ¿Y haciendo 15 sectores? Prueba a ver.

5. Antes de seguir, observa esto: la suma de los arcos de arriba (o la de los de abajo) es una ***semicircunferencia***, es decir, vale πr ¿Por qué?

6. Por lo que llevamos visto, cuanto mayor es el número de sectores, más se parece a un rectángulo la figura que se obtiene. Veamos el aspecto con 24:



7. Imagina ahora que divides un círculo en muchos, muchísimos sectores iguales. ¿Cómo serían los arcos? Casi como puntos, ¿verdad?. La figura obtenida se asemejaría mucho a un rectángulo de πr de largo y r de ancho y, por tanto, de área

$$A = \pi r^2$$

Por eso empleamos esta fórmula para calcular el área de un círculo.

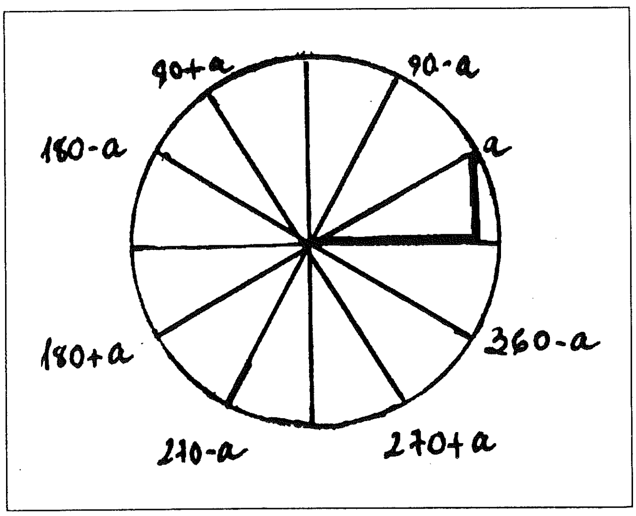
B) Signo y valor del seno (coseno) de ángulos que suman (o difieren en) a°, con a < 90 °

Conocidas son las dificultades que encuentra la mayoría de los alumnos para establecer la relación entre las razones de un ángulo en función de las de otro ángulo menor que un recto; esto es, para llegar, pongamos por caso, a escribir

$$\text{sen } 240^\circ = -\cos 30^\circ$$

El proceso que describo a continuación tiene la estructura expuesta en todo este trabajo: ***ir «atacando» el concepto mediante diversos lenguajes y, una vez realmente interiorizado por los alumnos, pasar a simbolizarlo.***

1º) Enseñar a la clase un panel en el que aparezcan, tal como muestra la figura, los ángulos indicados, el seno (marcado en verde) del ángulo auxiliar ***a*** y el coseno (en rojo) de dicho ángulo.



2º) Los alumnos, utilizando compás y regla, reproducen la figura.

3º) A continuación, vamos trazando el seno y coseno de 90–***a*** , 90+***a*** , etc., hasta que vayan viendo que la razón pedida es siempre igual «en tamaño», o sea, en valor absoluto, a la razón o **«co-razón»** del ángulo auxiliar. Y, en cuanto al signo, depende de que se trate de una abscisa (ordenada) positiva o negativa.

En caso de que la razón o co-razón buscada tenga signo contrario al de la correspondiente razón o co-razón del ángulo auxiliar, hay que hacer entender que la susodicha razón o co-razón es igual a la «menos razón» o «menos co-razón» de dicho ángulo auxiliar. Así, por ejemplo:

$$\text{sen}\,(270^\circ - a) = -\cos a$$
$$\cos\,(270^\circ - a) = -\text{sen}\, a$$

4º) Procede luego ir adiestrando al alumnado en casos concretos. Para ello, hay que conseguir que caigan en la cuenta de que para obtener el ángulo auxiliar hay que restar al dado **«el número de rectos que quede detrás»**, es decir: 90°, si el ángulo dado está en el segundo cuadrante; 180°, si está en el tercero; 270°, si en el cuarto. Por ejemplo, para hallar las razones de 200°, trabajaremos con 200° - 180° = 20°.

Es necesario advertirles que si el ángulo auxiliar tiene una amplitud próxima a 45°, puede haber confusión entre su seno y su coseno, por lo que debe medirse con la mayor precisión posible.

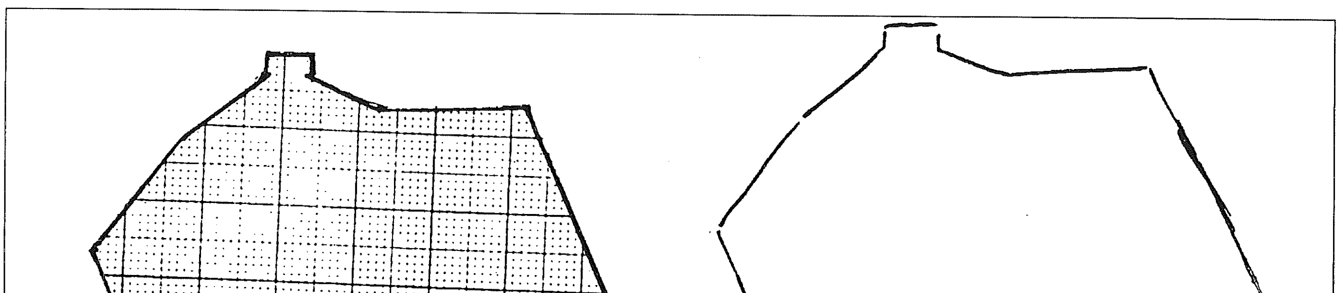
En el caso del ejemplo, tenemos:

$$\text{sen}\, 200^\circ = -\text{sen}\, 30^\circ = -1/2$$
$$\cos 200^\circ = -\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,/\,2$$

Si se insiste en este tipo de ejercitación, llega el momento en que los alumnos no necesitan dibujar la figura; SON CAPACES DE IMAGINARLA.

5º) Como ejercicio final, pedir que intenten tabular los valores del seno, coseno y tangente de todos los ángulos relacionados con 30° y 60°, incluidos -30° y 390°, **sin ayudarse del dibujo**. Me consta que la mayoría lo logra.

C) Tomando medidas a La Palma



El primero de los dibujos anteriores reproduce la forma y extensión (a escala 1: 400.000) de La Palma, una de las Islas Canarias.

Pedir a los alumnos que los reproduzcan y contesten el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es la distancia máxima Norte-Sur?
2. ¿Cuál la Oeste-Este?
3. Calcula el área aproximada de la primera figura.
4. ¿Cuál es la superficie aproximada de la isla?
5. Si el único dato fuera el segundo dibujo, ¿cómo podrías calcular lo anterior? (Una pista: necesitarías unas tijeras, cartón grueso y una balanza de precisión).
6. Calcula el error absoluto y el error relativo de tus dos cálculos.
   (La extensión de La Palma es 730 km^2).

Hay que mimar la expresión verbal

No es sólo misión nuestra, claro está, pero debemos hacer todo lo posible para conseguir de nuestros alumnos un considerable nivel de uso del lenguaje natural para expresar sus descubrimientos, elaborar e interpretar definiciones, enunciar conjeturas y, en definitiva, para que logren alcanzar la necesaria competencia de comunicación y recepción de ideas matemáticas.

Entre otros varios aspectos a tratar al respecto, cabe citar los siguientes:

a) Intentar conseguir el dominio por parte del alumnado de la terminología (términos y expresiones) necesaria - sólo la necesaria - para que el tratamiento de contenidos matemáticos pueda llevarse a término sin dificultades añadidas.

b) Evitar expresiones equívocas. Valgan como ejemplos las que siguen:

* «Máximo común divisor» y «mínimo común múltiplo», que llevan siglos ocasionando errores, y que podrían sustituirse por «**divisor mayor**» y «**múltiplo menor**», respectivamente. Propongo estas denominaciones y las notaciones usadas en los siguientes ejemplos:

$$\overset{:}{\mathbf{M}}(4, 26) = 2$$

$$\dot{\mathbf{m}}(4, 26) = 52$$

*«Cuadrado de una diferencia», frasecita que, irremediablemente, llegan a confundir con «diferencia de cuadrados». ¿Por qué no decir «**cuadrado de un binomio diferencia**»? Y, consecuentemente, «cuadrado de un binomio suma».

c) Desterrar el abuso de términos o expresiones sinónimos. ¿De cuántas maneras hemos visto denominar, por ejemplo, a la aplicación biyectiva?

Al respecto, convendría hacer un rastreo en los libros de texto para hacer un listado lo más completo posible de la terminología. Después de un detenido estudio del mismo, proponer (podría hacerlo la F.E.S.P.M. al MEC, a las Consejerías de Educación y las Editoriales) la eliminación de sinonimias innecesarias. Tal estudio podría aprovecharse, además, para analizar la coincidencia o no de significado entre términos y expresiones del lenguaje habitual y del matemático.

d) Partir siempre de enunciados verbales, no de operaciones indicadas. He aquí, algunos ejemplos:

1.Indica y calcula:

* Doble de 756
* Mitad de 75
* Tres cuartos de 600
* Triplo de 27'6...más cuadrado de 8
* Triplo...de 27'6 más cuadrado de 8

Los puntos suspensivos traducen la pausa que debe hacerse en la expresión verbal, para distinguir un enunciado de otro. Simbólicamente vienen representados, respectivamente, por la ausencia o no de paréntesis, es decir:

en el primer caso escribimos $3x27'6 + 8^2$;
en el segundo, $3x(27'6 + 8^2)$

* Cuarta parte de 180 disminuida en la mitad de 18
* Cuarta parte de 180 disminuido en la mitad de 18

...

2. Si **X** representa el dinero que tengo, simboliza:
* El cuádruplo de lo que tengo
* El doble de lo que tengo... más 1000

...

e) Acostumbrar a los alumnos a que, antes de operar con determinadas expresiones simbólicas, las verbalicen. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio:

Dadas las aplicaciones $\mathbf{f(x) = x^2 - 3}$ y $\mathbf{g(x) = x + 2}$, hallar las fórmulas que definan $\mathbf{f \circ g}$ y $\mathbf{g \circ f}$.

La aplicación **f** consiste en «elevar al cuadrado y restar 3»; la **g** es «sumar 2». Entonces,

f ∘ **g** es «cuadrar y disminuir en 3, lo que resulte de añadir 2», es decir,

$$\mathbf{f \circ g(x)} = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$$

Por el contrario, **g** ∘ **f** supone «añadir 2, al resultado de cuadrar y restar 3», esto es,

$$\mathbf{g \circ f(x)} = (x^2 - 3) + 2 = x^2 - 6x + 11$$

f) Nos solemos quejar de la mala preparación de los chicos en el uso del lenguaje ordinario (no entienden los enunciados de los problemas, son incapaces de definir, no saben relatar el proceso que han seguido al resolver un problema, ...). Intentemos ver las cosas al revés: Valgámonos de las Matemáticas para ayudarles a expresarse mejor. Fomentemos los razonamientos verbales en la resolución de ciertos problemas, provoquemos y animemos discusiones en clase, dejemos de ser tan algorítmicamente aburridos.

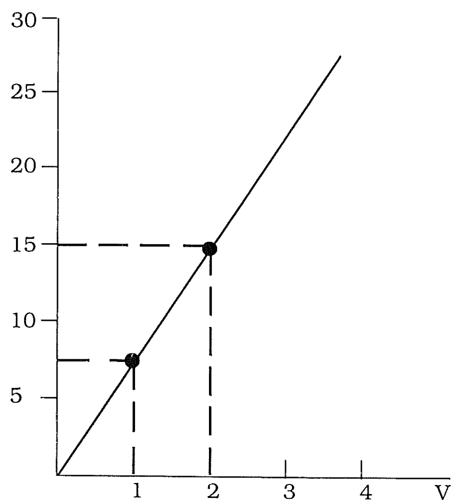
Dos ejemplos de actividades con gráficas

A) Relación volumen-peso.

Entre el volumen y el peso hay una relación de ***proporcionalidad directa***. La gráfica que ilustra esta relación es una ***recta***. Veamos un ejemplo para el caso del hierro:

Volumen: Peso:

$1\ cm^3$ 7'5 g.
$2\ cm^3$ 15 g.



Estudia la gráfica y, sin hacer ningún cálculo, contesta:

* ¿Cuál es el peso de 4 cm^3 de hierro?
* ¿Cuál es el volumen correspondiente a 37'5 g?

Elige un escala conveniente para cada eje y, sin hacer cálculos, determina:

* El peso de 45 cm^3 de Fe.
* El volumen correspondiente a 15 g.

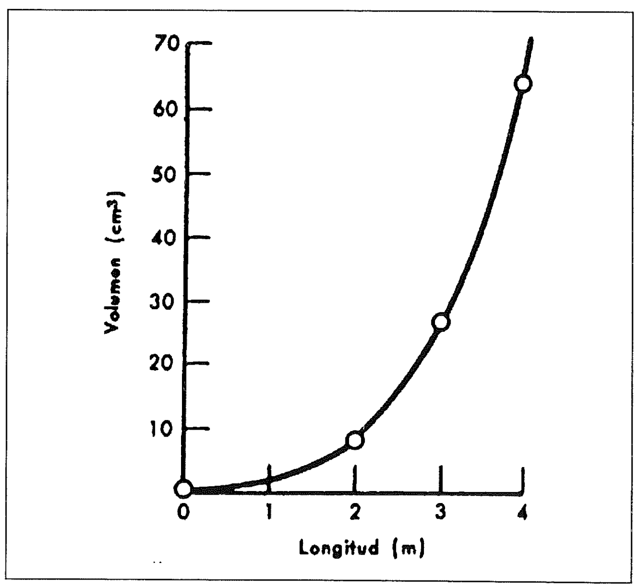
B) Apolo y el cubo

Es imposible duplicar el volumen de un cubo utilizando solamente una regla no graduada y un compás. En relación con este problema, que trajo de cabeza a muchos insignes matemáticos, existe la siguiente leyenda:

«*Una plaga amenazaba a la población de una ciudad griega. Sus habitantes consultaron al Oráculo de Delfos para averiguar qué dios estaba enojado y por qué. La respuesta fue que era Apolo, y que su enfado era debido a que quería que el altar que la ciudad le había dedicado, consistente en un cubo sólido de oro, fuese exactamente el doble de grande.*

El pueblo construyó entonces un nuevo altar, con una arista doble que la del otro...¡ y la plaga empeoró !

¿Crees que este mito tiene algo que ver con la gráfica que sigue?



Uso de los distintos lenguajes en la resolución de problemas

Este punto será tratado en el II Seminario Nnal. sobre Lenguaje y Matemáticas, a celebrar próximamente. No obstante, expondré aquí algunas de las consideraciones en las que baso mi enfoque del tema.

Aunque actualmente la expresión **resolución de problemas** hace referencia casi exclusivamente a problemas **abiertos o de investigación**, considero que:

* No debe excluir algunos de los problemas clásicos de aplicación.
* Tampoco debemos dejar de proponer algunos ejercicios puramente mecánicos.

Unos y otros, debidamente dosificados, contribuyen a que los alumnos vayan adquiriendo relativa destreza en el lenguaje formal.

Por otro lado, algunas de las modalidades del **lenguaje gráfico** no tratadas aquí, tendrán cabida en la segunda parte de este trabajo; la resolución de problemas es el lugar adecuado.

En conclusión, a lo largo de estas páginas -seguramente mal hilvanadas- he querido exponer mi creencia de que el tratamiento lento, ininterrumpido y debidamente graduado, de todos y cada uno de los modos de expresión de nuestra disciplina, y el paso de unos a otros, la hace más asequible e, incluso, puede generar entusiastas de su estudio. Muchos años de oficio, buscando caminos y veredas para enseñarla mejor, me han llevado a tal convencimiento.

En las repetidas lecturas de este trabajo, que impone la obligada revisión previa al envío a imprenta, he llegado a pensar que, en líneas generales, su enfoque se ajusta a las recomendaciones del **National Council of Teachers of Mathematics** (¡hay que ver, oiga!), ya que, en una de sus publicaciones (4), se dice textualmente:

«...el estudio de las matemáticas ha de incluir muchas oportunidades de comunicación, de forma que los alumnos puedan:

* **relacionar materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas;**
* **reflexionar y aclarar sus ideas sobre conceptos y situaciones con contenido matemático;**
* **relacionar su lenguaje diario con el lenguaje y los símbolos matemáticos;**
* **darse cuenta de que una parte fundamental para el aprendizaje y uso de las matemáticas conlleva el hecho de que éstas se representen, se discutan, se lean, se escriban y se escuchen;**
* **modelar situaciones usando métodos orales, escritos, concretos, pictóricos, gráficos y algebrai-cos;**
* **desarrollar estructuras conceptuales comunes sobre ideas matemáticas, incluyendo el papel de las definiciones;**
* **utilizar las destrezas de leer, escuchar y visualizar para intrerpretar y evaluar ideas matemáticas;**
* **discutir ideas matemáticas y elaborar conjeturas y argumentos convincentes;**
* **apreciar el valor de la notación matemática y el papel que cumple en el desarrollo de ideas matemáticas.**

En los niveles 9-12 (correspondientes a nuestra Secundaria Obligatoria), **el currículo de matemáticas debe incluir un desarrollo continuo del lenguaje y del simbolismo para comunicar ideas matemáticas para que los estudiantes sean capaces de:**

* **reflexionar y clarificar sus ideas sobre conceptos y relaciones matemáticas;**
* **formular definiciones matemáticas y expresar generalizaciones que se descubran por medio de la investigación;**
* **expresar ideas matemáticas oralmente y por escrito;**
* **leer comprensivamente presentaciones matemáticas escritas;**
* **formular preguntas de aclaración y ampliación en relación con las matemáticas que hayan leído u oído;**
* **apreciar la economía, potencia y elegancia de la notación matemática y el papel que cumple en el desarrollo de ideas matemáticas».**

Bibliografía

(1) **El material para la enseñanza de las Matemáticas:** Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de la Matemática. Aguilar S.A. de Ediciones, 1964.

(2) **Circulando por el círculo**: Fernández, M. ; Padilla, F.; Santos, A. y Velázquez, F. - Editorial Síntesis, 1991.

(3) **Las actividades 2C, 3C, 5A y 5B están sacadas de LA MEDIDA**, Cuaderno de trabajo elaborado por Fernández, M., González, S., Padilla, F., Santos, A., Trujillo, P. y Velázquez, F., en lo que corrresponde a «Práctica de la medida»; y por Artiles, J., Hernández, F., Morales, A. y Medina, J., en lo relativo a «Aspectos teóricos». El Cuaderno, actualmente agotado, fue publicado por la Soc. Canaria «Isaac Newton».

(4) **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática**: Edición en castellano de la S.A.E.M. «Thales», 1991.

Manuel Fernández
S.C. "Isaac Newton" P.M.

Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico

Grupo Azarquiel

Introducción

En esta comunicación presentamos parte de los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas dentro de Planes Nacionales de Investigación Educativa del C.I.D.E., durante los cursos 1987-88 y 1988-89, que trataban de averiguar *las dificultades del aprendizaje del Algebra en Secundaria.*

El objetivo inicial de este trabajo era estudiar las dificultades planteadas en ***la resolución de problemas de enunciado verbal en los que se utiliza una ecuación de primer grado o un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas,*** ya que considerábamos, como la mayoría de los profesores lo hace, que la mayor dificultad presentada en Algebra estaba en la resolución de estos problemas.

La primera fase de esta investigación consistió en recoger datos sobre los errores cometidos por los alumnos y cuantificarlos, para así conocer cuáles eran los que tenían más relevancia.

Para analizar los errores, se pasaron problemas de enunciado verbal con distintos grados de dificultad. Los sujetos de la investigación fueron 180 alumnos de 1º de BUP de distintos Centros de Madrid y niveles de comprensión muy diferentes.

La idea inicial era que de las tres fases que se suelen seguir en la resolución de estos problemas (**planteamiento**, **resolución** y **descodificación de la solución**) la mayor dificultad estaba en la primera. Dentro de esta fase distinguíamos entre:

* **Lectura y comprensión del texto,** que es en realidad una fase previa, y
* **Traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.**

El punto de partida era dar por supuesta la competencia algebraica de los alumnos, ya que, dado su nivel (1º de B.U.P.), pensábamos que eran capaces de practicar el método algebraico para el que habían sido adiestrados en los dos cursos anteriores, 7º y 8º de E.G.B., y conocían las destrezas algebraicas básicas. Por tanto, nuestra hipótesis fue suponer que:

«si un alumno, de este nivel, no resuelve un problema de enunciado verbal por métodos algebraicos, es porque no comprende el enunciado».

Esta hipótesis nos llevó a detectar y analizar los errores de comprensión. No tuvimos dificultad en aislar los de comprensión **sintáctica**, y pudimos observar que no se produjo prácticamente este tipo de errores cuando en los enunciados se utilizaba un vocabulario asequible y construcciones sintácticas correctas. Sin embargo, en el caso de la comprensión **semántica**, el problema se planteó al distinguir cuándo un error se producía debido a una falta de comprensión semántica del texto o en el proceso de traducción al lenguaje algebraico. Para ayudarnos a diferenciar unos de otros, pedíamos a los alumnos que resolvieran los problemas por métodos no algebraicos, utilizando el procedimiento que consideraran conveniente (tanteo, gráficos, recuentos, tablas,...), en lo que habían sido adiestrados, y, una vez resueltos de forma correcta, se les pedía que los resolvieran utilizando métodos algebraicos. Comprobamos que muchos alumnos que los resolvían correctamente por métodos no algebraicos, cometían errores cuando lo hacían utilizando métodos algebraicos.

Con este procedimiento, pudimos diferenciar los errores **de comprensión del enunciado** y los producidos **al realizar la traducción del lenguje natural al algebraico.** Los porcentajes (sobre el total de alumnos) de errores de comprensión estaba entre el 10% y el 15%, dependiendo del tipo de problemas. Sin embargo, en la traducción del lenguaje natural al algebraico, el porcentaje de error fue mucho mayor en todos los tipos de problemas investigados: de un 30% a un 50% (sobre el total de alumnos).

A la vista de estos resultados, supusimos que no se confirma la hipótesis de partida puesto que, contra lo que esperábamos, no tenían apenas errores de comprensión, pero sí tenían dificultades cuando intentaban hacerlo por métodos algebraicos. En consecuencia, se realizó un estudio cualitativo de los errores de traducción y de los procesos que siguen al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, mediante cuestionarios y entrevistas personales. En estas entrevistas se pedía que dijeran en voz alta lo que pensaban al resolver el problema. Los diálogos se grabaron en vídeo.

Esta fase fue muy costosa en principio, pues no fue fácil sacar muchas conclusiones, ya que los alumnos, muchas veces, no sabían por qué habían actuado así.

A partir de los resultados obtenidos en las entrevistas redujimos la investigación únicamente al estudio de las ***«estrategias utilizadas por los alumnos de 14-15 años en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico»***

Estrategias más frecuentemente utilizadas en la traducción del lenguaje natural al algebraico

En la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico nos fijamos en:

* **La escritura simbólica de las condiciones establecidas en el enunciado.**
* **La escritura de la ecuación o ecuaciones correspondientes utilizando los símbolos algebraicos.**

Observamos que muchos alumnos que eran capaces de traducir simbólicamente las frases establecidas en el enunciado del problema, no llegaban a establecer la ecuación o ecuaciones y cometían errores al plantearlas, pues desconocían la relación que se establecía entre las cantidades.

Vamos a presentar aquí distintas estrategias utilizadas en la traducción y que se ponen de manifiesto en los ejercicios de los alumnos.

A) Letras utilizadas como objetos

Los alumnos frecuentemente no distinguen entre variables y nombres. Ven las letras, simplemente, como nombres que expresan los objetos, en lugar de como variables que representan una cantidad no determinada. Este hecho es uno de los principales mecanismos causantes de un gran porcentaje de errores en el planteamiento de los problemas.

Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches, deben construirse 40 coches diarios. Sin embargo, si cada día se fabrican 5 coches más, tres días antes del final, solamente quedan 75 coches por hacer. ¿Cuántos días tenían que trabajar según el plan inicial? ¿Cuántos coches tenían que construir en total?

Podemos ver que el alumno utiliza las letras **x** e **y** en sustitución de las palabras **coches** y **días**, respectiva-

x = *coches*
y = *días*

$40x = y$ ⟶ *40 coches por día, sería* $40x = 1y$ *(1día)*

$5x \cdot y = -75x - 3y$ ⟶ *Cada día se fabrican 5 coches más*
$5x$ *(5 coches).* y *(por día). Ésto sería igual a que 3 días antes,* $-3y$*, que darán 75 coches* $(75x)$

mente: cuando escribe **40x** quiere decir **40 coches** y no 40 veces el número de coches e, igualmente, respecto a **días.**

B) Distintos significados del signo « = »

En muchos casos, en la resolución de estos problemas, el signo «=» se utiliza más como un signo de puntuación sintáctica que como un símbolo algebraico que representa una situación de equilibrio.

Es frecuente que los alumnos utilicen este signo para expresar la causalidad de lo que ocurre.

Como podemos observar, en el ejercicio del apartado anterior el signo «=» indica «**en un día**» («se fabrican 40 coches en un día»); está utilizado como un marcador causal.

C) Traducción literal

Esta estrategia es muy común y consiste en asociar el orden en que aparecen las palabras clave del enunciado del problema, con el orden de los símbolos que utilizan en la expresión algebraica.

El alumno del ejemplo anterior hace una «traducción literal» del enunciado verbal al lenguaje algebraico, cuando escribe literalmente, y utilizando las letras como los objetos **coches** y **días**: «...si cada día se fabrican 5 coches más, tres días antes del final, quedan sólo 75 coches por hacer» que traduce por **5x · y = -3y - 75.**

D) Acercamiento a la comparación estática

Se utiliza cuando se trata de comparar cantidades para establecer la igualdad de la ecuación, y consiste en poner el factor multiplicador al término mayor. Es una forma bastante usual de comparar los tamaños relativos de los dos grupos de una forma muy estática.

En el siguiente ejercicio, la alumna explica que multiplica por 3 «**para que tenga la segunda vasija el triple de la primera**»

En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Sacamos 26 litros de una de ellas y los echamos en la otra; ésta tiene ahora triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?

En la página siguiente, la hoja de resolución de la alumna.

E) Utilizar la letra X para designar casi siempre la variable

El uso generalizado en álgebra de la letra «x», cuando se quiere indicar la incógnita, nos lleva a situaciones tan contradictorias como la de la de la resolución presentada en el problema que sigue:

En una parcela, la piscina ocupa 25 m²; la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín; el jardín, tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos m² mide la parcela?

Piscina $= 20\ m^2$

Casa $= 20 + \frac{X}{2}$

Jardín $= X = 20 + 20 + \frac{X}{2}$

Parcela $= 20 + 20 + \frac{X}{2} + 20 + 20 + \frac{X}{2} = X$

Esta alumna utiliza la letra «**x**» para representar los metros cuadrados que mide al jardín y para representar los metros cuadrados que mide la parcela. Aunque en la entrevista se puso de manifiesto que veía perfectamente la diferencia entre ambas incógnitas, ya que al preguntarle el profesor por qué lo había puesto contestó: «**He puesto X para las dos cosas porque siempre a la incógnita se le llama X, peor son dos X distintas**».

$$\left.\begin{array}{l} x \to \text{vasija} \\ y \to \text{vasija} \end{array}\right\} -52$$

$$x = y$$

$$x - 26 = \underline{\underline{(y+26)\cdot 3}} \to x - 26 = 3y + 78$$

$$y = \frac{x - 26 - 78}{3}$$

$$y = \frac{x - 104}{3} \to 3x = x - 104$$

$$3x - x = -104$$

$$2x = -104$$

$$x = \frac{-104}{2} = -52$$

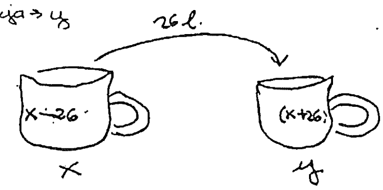
A cada encógnita he dicho que es una vasija luego en el planteamiento las he igualado $(x=y)$ porque nos dicen que tienen la misma cantidad de agua. Luego a una vasija lo he restado 26 porque nos dice que le sacamos esos litros para que luego sumado a la otra y multiplicado por tres para que tenga la 2ª vasija el triple que la primera. Y luego las he hallado,

F) Reducción de campo

Esta estrategia, aunque se utiliza en situaciones muy diferentes y a veces con significados muy distintos, podemos decir que consiste en quedarse sólo con las condiciones que le parecen más relevantes del enunciado, no teniendo en cuenta el resto.

En la entrevista mantenida con una alumna que resolvió el problema de las vasijas, justifica la igual-

Litros en 1ª vasija → x
Litros en 2ª vasija → y



$$x = y$$

$$x - 26 = (x+26)$$

dad **X - 26 = X + 26** diciendo: «**Escribo X - 26 = X + 26 porque el problema dice que las dos vasijas son iguales, y aunque saque 26 litros de una y los eche en la otra, tengo que poner que las dos vasijas son iguales. Ya sé que no puede ser X - 26 = X + 26 y que es una tontería, pero lo dice el problema**».

Como se ve, para esta alumna, la información de que las dos vasijas «sean iguales» (letras como objetos) es una información que procesa de forma prioritaria, hasta el punto de admitir que aunque es «una tonteria», «**lo dice el problema**».

G) Necesidad de clausura

Consiste en cerrar la operación, ante la necesidad de dar un resultado numérico. Esta estrategia aparece en situaciones muy diversas y es frecuente cuando se inicia el aprendizaje del álgebra y se están dando los primeros pasos de la aritmética al álgebra. Veamos, a vía de ejemplo, la solución que da un alumno al problema de la parcela *(Ver resolución del alumno).*

Se observa que el alumno entiende perfectamente el problema y sabe que para obtener la medida de la

Piscina $= 20\ m^2$ $\quad x = m^2$

Casa $= 20 + \frac{x}{4}$

Jardín $= 20 + 20 + \frac{x}{4}$

Para hallar este problema hay que sumar los m² de la piscina, de la casa y del jardín para hallar los m² que tiene la parcela

$$20 + 20 + 20 + 20 + \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$$

$$80 + \frac{2x}{4} = 320 + 2x =$$

$$x = \frac{320}{2} = 160\ m^2$$ ~~tiene~~ tiene la parcela.

parcela debe sumar los metros cuadrados que mide la casa, los metros cuadrados que mide la piscina y los metros cuadrados que mide el jardín. Sin embargo, no establece ninguna igualdad, pero nota que le falta un miembro para que sea una ecuación. Y lo resuelve igualando, mentalmente, a cero, aunque no lo escribe en el papel.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación nos llevaron a plantearnos la enseñanza del Algebra. Llegamos a algunas conclusiones que ya sospechábamos: **que es muy prematuro el momento en el que se inicia y que se hace de una forma rápida y muy centrados en destrezas.**

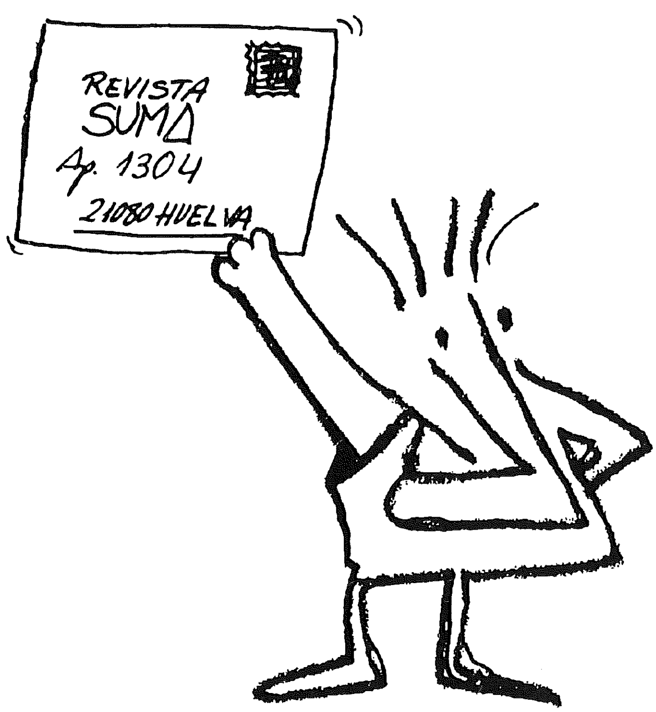
Tanto profesores como libros de texto, admiten de forma preferente que el Algebra es un lenguaje y, sin embargo, no suele hacerse un trabajo en profundidad de la traducción en los dos sentidos (del natural al algebraico y viceversa).

Entendiendo que la competencia algebraica no se puede valorar sólo con las destrezas sino con el dominio del uso del lenguaje, consideramos que algunos de los errores cometidos por los alumnos era posible que no se produjeran si se les iniciaba en el Algebra de una forma completamente distinta y utilizando materiales de apoyo.

Animados por esta idea, diseñamos unos materiales que tuvieran en cuenta todos estos aspectos.

Hemos podido comprobar, con el uso de estos materiales, que los errores debidos a la traducción de un lenguaje a otro (en los dos sentidos) disminuyen significativamente, lo que supone una mayor competencia algebraica.

Grupo Azarquiel
Soc. de Profs. de Matemáticas
«Enma Castelnuovo»



Lenguaje verbal y matemáticas: separación sin relaciones. Estado de la investigación

Joaquín Giménez

Introducción

El matrimonio lenguaje y matemáticas, a nivel de reflexión, investigación y preocupación curricular tiene bastantes años. Casi podríamos afirmar que, desde el momento en que se interpreta la matemática como un lenguaje y se plantea la reflexión didáctica sobre las dificultades de los alumnos, se inician unas relaciones.

En España, las relaciones se han centrado en la resolución de problemas y el lenguaje del álgebra. Entre los pocos artículos que sitúan el problema de forma general, citaremos el breve comentario de NORTES CHECA (1991) y el nuevo Currículo de Matemáticas en España (DCB, 1989), que incorpora reflexiones importantes. Se habla del uso de diversos lenguajes, del valor de la expresión, de la interrelación de representaciones, etc. También en el ámbito de la investigación surge una reflexión, fruto de la cual nace el Seminario en el que se enmarca este trabajo.

Esa «separación sin relaciones», como la he titulado, ha generado pocos hijos, siguiendo la metáfora. Mientras los postmodernos «métodos gráficos y problemas representacionales» ya han sido reconocidos como artículos, queda aún mucho por decir.

En lo que sigue, vamos a repasar ejemplos y situaciones de una pareja estable (lenguaje verbal - matemáticas), consumada en otros países. Trataremos fundamentalmente de mostrar, de forma sistemática, los tipos y evolución de los trabajos realizados, a grandes titulares, como si se tratara de un periódico sensacionalista, sin realizar un análisis pormenorizado que ejemplifique todos los resultados, lo que ocuparía más espacio. El objetivo general de estas líneas es, pues, ofrecer una síntesis del tipo de variables y problemas investigados en las relaciones lenguaje verbal- matemáticas con algunos de los resultados conocidos.

¿Por qué relaciones?

Las Matemáticas oficialistas han usado a menudo un lenguaje simbólico en el que el formalismo parece fundamental y el subjetivismo no debía ser un problema. Ahora bien, la consideración del valor social de las mismas y su enseñanza, exige elementos comunicativos, sujetos y colectividades que los usen. Desde este punto de vista, consideraremos que los problemas tratados en la investigación abordan cuatro grandes perspectivas desde el punto de vista de la función comunicativa:

(1) elementos curriculares o superestructurales,

(2) influencias interestructurales, en donde se incluye la comunicación,

(3) de desarrollo e implementación, llamadas también investigaciones funcionales, que incluyen el uso de variables sintácticas, inferencias y elementos semánticos diversos,

(4) análisis subestructurales, en donde se habla de contexto, epistemología y política y

(5) reflexiones teóricas.

Elementos curriculares

Ante todo, constatemos que la preocupación curricular en sentido amplio ha desatado muchas macroinvestigaciones en paises donde el interés por los resultados es grande. Así, en los últimos seis años, casi 30 investigaciones en Estados Unidos hacen referencias explícitas a problemas comunicativos y de lenguaje en relación con matemáticas. Consideraremos aquí cuatro tipos de trabajos según los objetivos y planteamiento general curricular del hecho comunicativo:

(a) estudios sobre elementos de lenguaje en el currículo: uso de lenguaje en documentos oficiales, manuales escolares, perspectivas sobre la evaluación de los elementos específicos de lenguaje, etc.

(b) influencias del lenguaje como variable de ajuste en los resultados de rendimiento,

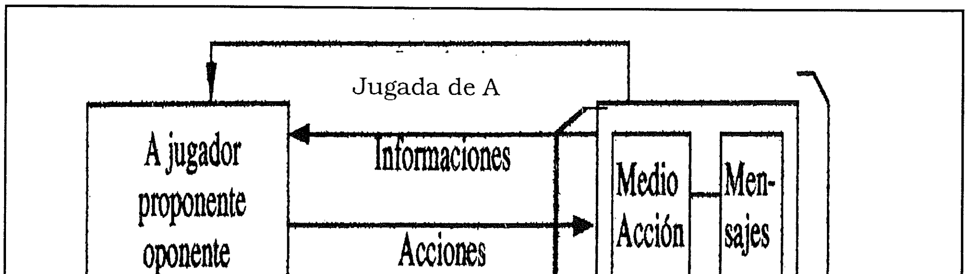
(c) análisis basados en la comunicación, observando implicaciones analíticas (en resolución de problemas), interacciones sociales y psicológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y

(d) estudios de carácter comparativo intercultural entre países.

Lenguaje y Currículo.

Los estudios de I. SANZ (1989, 1990) son de los pocos que se han realizado en el campo del análisis de manuales escolares desde el punto de vista de la representación, simbolización y significatividad, basados en las ideas de significado y significante. Ahí se abordan problemas tan acuciantes como la conveniencia o no de determinadas ilustraciones en los manuales, versatilidad y sentido otorgado a las mismas, etc. La verbalización se asocia al marco de los procesos de aprendizaje como una «red de vehiculación de presentación» (ROMBERG, 1988). En la presentación del trabajo en el aula se manifiestan como variables intervinientes: contexto, forma, imágenes, parámetros de respuesta e imágenes en los manuales escolares. Las dependencias que se analizan a menudo en estos casos son: completitud, distractores y facilidad de lectura. Por último, nadie olvida incluir valoraciones sobre elementos comunicativos en actividades concretas y proyectos de evaluación. Listar aportaciones puntuales en ese último ámbito sería interminable.

Lenguaje y rendimiento. Ajuste.



Gran parte de los proyectos internacionales en enseñanza de las matemáticas toman el lenguaje como una de las variables de análisis en relación con el rendimiento escolar. En ellos, CSMS (Hart 1981), IAEP (Robitaille 1992), WISCONSIN (Romberg et al. 1991), OW & OC (Streefland 1993), etc. observan las dificultades de los alumnos, y se hacen propuestas de reflexión específicas que inciden en los elementos de lenguaje y las representaciones. Todos estos estudios contribuyen al ajuste global del proceso enseñanza-aprendizaje, y promueven reflexiones de tipo comparativo intercultural.

Lenguaje en el contrato didáctico.

Para BROUSSEAU (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo entre el sistema, el profesor, el estudiante y el medio, donde el juego es la clave de dicho proceso.

En esa visión paradigmática, el lenguaje se analiza siempre como variable interviniente. En una línea semejante se encuentra el trabajo de STEINBRING (1988) e, incluso, las reflexiones aplicadas a la multiplicación como construcción científica.

A todos esos elementos curriculares los llamaremos *superestructurales,* aunque los últimos citados quizás forman parte de los que se implican en el desarrollo. Los llamamos superestructurales porque contribuyen claramente a relacionar diversas variables internas con procesos de socialización externos al individuo y a la propia matemática.

Variables contextuales.

En todas las investigaciones citadas y otras aportaciones teóricas, surgen normalmente variables «contextuales «en el sentido amplio de la palabra. Las más usuales son: elementos culturales, medios, estadios de evolución del entorno, alumnos específicos (ciegos, disléxicos, deficientes...), relaciones interculturales (distintos países, bilingüismo, etc.) y niveles de actuación (formación del profesorado, enseñanza a distancia, etc.).

Estudios interestructurales

Los elementos estrictamente lingüísticos y de comunicación influencian claramente los contenidos. Para ver como son esas influencias, la preocupación clásica de los estudios de resolución de problemas de los años 60-70 se centró en observar *variables de contexto,* como número de palabras y tópicos usados, así como las variables que describen los elementos del problema, tales como: condiciones, información numérica, ayudas, expresiones que indican principios de información, objetivos de información, etc. También se ha analizado el uso e influencia del material instrumental necesario para el desarrollo de la tarea (compás, regla, escuadra, ordenador, etc).

Más recientemente, las investigaciones que estudian relaciones entre contenido y contexto (WEBB 1984) en el sentido matemático, han tomado un cariz interestructural, pues se producen no sólo en el interior de la búsqueda de lo matemático o lo lingüístico, sino como interacción entre ambos.

Comunicación: interacciones y reflexión lingüística.

En otro lugar se tratará con mayor profundidad el tema de la comunicación como teoría, pero avancemos ya que se da un conjunto de dificultades que surge de usos diversos de lenguaje (WITTGESTEIN) y distintos niveles de funcionalidad del lenguaje en general. Por ejemplo, en la visión fenomenológica (FREUDENTHAL 1983) del reconocimiento de estructuras matemáticas en didáctica se observa un proceso de depuración del lenguaje natural, del que debe partirse (matematización horizontal, en expresión de TREEFERS & GOFRRE 1985, 1987) para llegar al lenguaje matemático . Otros autores analizan esas dificultades en los usos de lenguaje como fuentes de conflicto cognitivo (léase HASEMANN 1986, para el caso de fracciones).

En los estudios españoles se han dado diversos ejemplos de comparaciones entre lenguaje natural y matemático. El estudio de CERDAN y PUIG (1988) y el del grupo AZARQUIEL (álgebra), abordan ya esa problemática y proponen diversas situaciones. En nuestra investigación sobre los racionales (GIMÉNEZ 1991), observamos diversas implicaciones de lenguaje de la calle, (GIMÉNEZ 1992), niveles de graficidad, imagen, etc. en las producciones de los alumnos (siguiendo a STREEFLAND). Estas y otras investigaciones parecen surgir de los análisis de BRUNER en cuanto «modos de iconicidad» (Bruner 1967), que dan lugar al llamado principio de variabilidad perceptual (DIENES 1970, BEHR et al. 1983).

Sin embargo, en muchas producciones de 1980 y siguientes, se observan mayores influencias de tipo semántico, influidas sin duda por los desarrollos de AUSUBEL en cuanto a la significatividad (Ausubel 1976). De ahí los trabajos de ROMBERG (1988) y otros.

En investigaciones de los «90» se recuperan muchos elementos comunicativos en el desarrollo e implementación curricular. Ello permite sistematizar situaciones y analizar problemas nuevos tales como: lenguaje matemático adquirido por alumnos con dificultades, análisis de interacciones en el aula, procesos de descripción, etc. Se reincorpora también el análisis sintáctico con un contenido semántico, como se ve en trabajos que analizan lo comunicativo en álgebra (HEALY, SUTHERLAND y HOYLES 1990, 1991) y en resolución de problemas (NESHER 1989,1991).

Pueden encontrarse también aquí estudios sobre problemas verbales generales (PIMM 1987, TIROSH & GRAEBER 1989, entre otros) y consideraciones sociolingüísticas, como analizar posibles influencias de vivir en barrios periféricos (MORRIS 1978), variables afectivas (ZEPP 1989), e influencias del bilingüismo (MESTRE 1982, MESTRE et al. 1988).

Estudios funcionales o de desarrollo

La actividad matemática en el aula usa gran cantidad de elementos del lenguaje, pero la resolución de problemas tiene específicamente el lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos. Así, también muchas otras tareas matemáticas (AIKEN 1972). Por lo tanto, una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática. De ahí que a las investigaciones sobre desarrollo e implementación en el aula las llamemos *visión funcional*. Los elementos metodológicos en dichas investigaciones se centran inicialmente en cuantificaciones y análisis de elementos propios de la tarea (GOLDIN 1984). En todo ello domina el interés por lo sintáctico (reglas, procedimientos algorítmicos, errores, etc.), pero evoluciona en estudios posteriores hacia los análisis de procesos de aula de tipo cualitativo centrados en lo epistemológico. De ahí, el uso de elementos teóricos de VIGOTSKY (1962) tales como zona de desarrollo proximal.

Por otra parte, diversos estudios tratan los problemas de los elementos referenciales. En efecto, las habilidades de lenguaje son vehículos a través de los cuales los estudiantes aprenden, aplican y son evaluados sobre conceptos matemáticos y sus habilidades (THORNDIKE 1912).

La discusión investigativa de los problemas de desarrollo se rige por el concepto de *registro lingüístico* (iniciada en HALLIDAY 1975 y MORRIS 1975). En efecto, el quehacer matemático otorga un registro específico al lenguaje habitual, que se distinque de él, pero en ocasiones se aprovecha del mismo.

Nuestra tipología de investigaciones, que acentúa lo que hemos llamado «elemento de implementación-desarrollo», considerará tres tipos de variables (modificando un poco un viejo esquema de MORRIS, 1955):

(a) sintácticas;

(b) inferenciales, que incluye lo que algunos llaman pragmáticas y

(c) semánticas con las consiguientes relaciones epistemológicas.

Sobre variables sintácticas.

Se analizan básicamente los tipos de lenguaje en matemáticas: verbal, escrito, algebraico, gráfico, de computación,... En los análisis sintácticos se estudian variables como las siguientes: palabras, expresiones, relaciones, secuencias y problemas de desarrollo conceptual. El análisis sintáctico se basa en la consideración del lenguaje matemático como «sistema» simbólico con características determinadas que debe ser imitado por su poder como notación (SKEMP 1982).

En los diversos *estudios sobre palabras y expresiones* se han puesto de manifiesto las dificultades en las comparaciones («tan ...como», «de la misma forma que») y paráfrasis lingüísticas, preposiciones («de», «para cualquier», «dividir entre») y oraciones pasivas («un libro fue dejado...», «n se define...»), como las más fundamentales. Ciertas estructuras verbales de ese tipo tienen un grado de complejidad que se relaciona mucho con los elementos conceptuales (KNIGHT-HARRIS 1977, MUNROE 1979). Los resultados de esas investigaciones han permitido -entre otras cosas- la reflexión sobre grados de dificultad en resolución de problemas de cálculo mental y el reconocimiento de dificultades en tratamiento de errores conceptuales.

Otro grupo de investigaciones ha examinado las *dificultades de elementos relacionales lógicos y sus* influencias psicológicas: componentes linguísticos de conexión lógica (si y sólo si, cuando...entonces), procesos de reversibilidad (CRANDALL 1989, DOLCIANI & WOOTON 1970), etc. Hay multitud de estos ejemplos en los trabajos sobre álgebra (AZARQUIEL 1989, FILLOY y ROJANO 1988, GIMÉNEZ 1991b).

Se han observado muchos tipos de problemas vinculados al desarrollo, que han acentuado de formas diversas algunos *elementos de estandarización y anclaje conceptual* explicado por factores sintácticos. Aquí citamos los análisis estructurales de resolución de problemas que dan lugar a la construcción de numeración con los pequeños (GINSBURG 1977), confusiones potenciales con las cantidades (DURKIN 1986), estrategias de conteo (FUSON 1988), estructura de las operaciones en conjuntos numéricos (CARPRNTER & MOSER 1983, VERNAUG 1983, CERDAN y PUIG 1988). Numerosos estudios de álgebra se han centrado en los problemas de sintaxis (FILLO y KIERAN 1989), analizando el uso de las letras en diversos contextos. Los procesos de resolución geométrica han desenvuelto también reflexiones sobre el lenguaje y las expresiones de los alumnos (GALLO 1982, MAIER 1991, D'AMORE 1993). Así, un largo etcétera. Las variables estructurales más usadas han sido: relaciones entre datos, explicitación, orden y complejidad.

En otros casos, se trata de observar *variables de la representación* e influencias negativas de las secuencias verbales. Ahí se han forjado expresiones como «colas verbales y perceptuales» (BEHR et al. 1985). En estos estudios se constata como los alumnos se dejan llevar por esas percepciones para no desarrollar los conceptos.

Todas estas referencias son claramente interestructurales por cuanto usan el registro matemático, pero se analizan desde la vertiente lógica estructural.

Inferencias. Pragmatismos.

La investigación de los 80 ha encontrado implicaciones lingüísticas en los *procesos de construcción conceptual*. Así, el análisis de preconcepciones de los estudiantes tiene un tratamiento vinculado a elementos de lenguaje que no siempre puede ser considerado de naturaleza sintáctica o semántica (TALL y VINNER 1981).

Merecen citarse también en este bloque los análisis sobre las *dificultades* de algunos alumnos con problemas específicos de lenguaje (BISHOP 1991, SINCLAIR 1991) *en la interactuación* en el aula (sordos, discapacitados, etc.), y las búsquedas en cuanto a los llamados vacíos de experiencia (*lack of experience*) que promueven conflictos o contradicciones basados en problemas de tipo textual, que nacen de situaciones de interacciones y aprehensión de la realidad (SPANOS et al. 1988, 233ss).

Elementos semánticos.

El contenido semántico se ha observado desde hace tiempo desde el punto de vista estructural con investigaciones sobre las palabras matemáticas (palabras asociadas a significados o acciones asociadas a operaciones o relaciones funcionales) que se usan en la resolución de problemas, y análisis sobre la terminología matemática en cuanto al significado otorgado. De hecho, las matemáticas ejercen numerosas demandas (requerir explicaciones, extensión, reflexión, precisión, transposición, recursión), que desembocan en la necesidad de significado (MURRAY 1985).

** Acciones. Contenido semántico de palabras y/o expresiones.

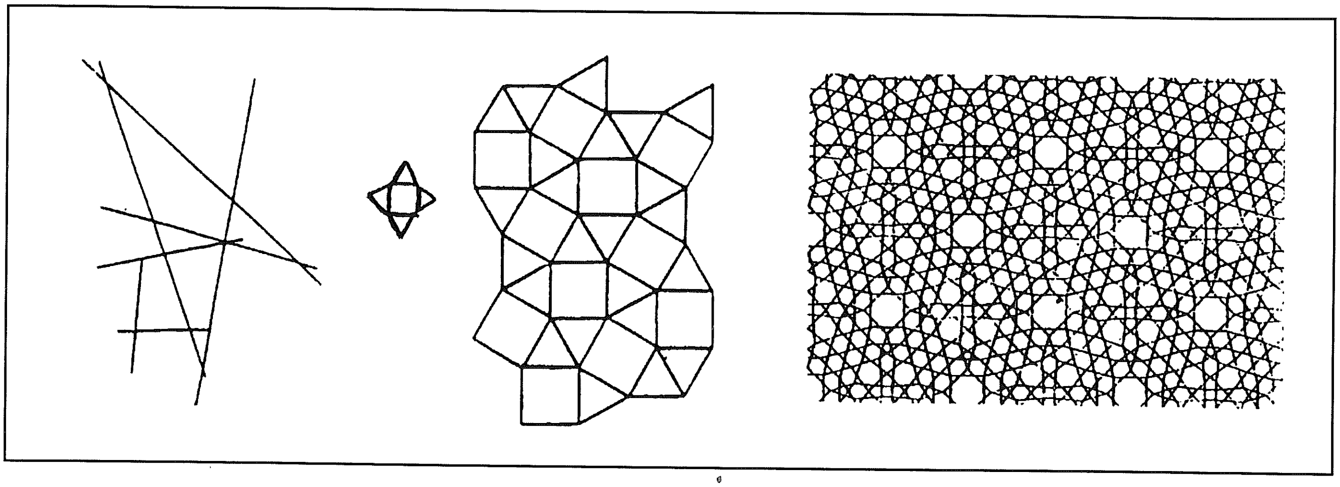
Muchos artículos actuales siguen insistiendo en dificultades asociadas con las expresiones y palabras, aunque en ellos se ve un enfoque centrado en el análisis de los procesos de aprendizaje, y no tanto en la visión de los resultados de los alumnos. Se acentúa el interés en el estudio sobre *usos de las expresiones* (SKINNER 1980) y *funcionalidad de las palabras clave* (WILLIAMS 1982), más que en el índice de dificultad que representan. También en esos trabajos se dice que los cambios socioculturales de las expresiones ejercen una mayor influencia que los propios cambios de significado.

Otros análisis tratan de explicar las estructuras semánticas subyacentes a la construcción de representaciones y significados (De CORTE et al. 1985, 1990). En un estudio más reciente, ERIC LOVE y D. TATHA (1991) analizan el valor de descriptores *(etiquetas)* que se están usando ahora a nivel bibliográfico como: concepto, imagen, numeración, contar, número, modelo, práctico, estructura, descubrimiento, comprensión, proceso, etc. De ahí se discute cómo detrás de muchos nombres hay multitud de programas y «agendas» que no siempre se tienen en cuenta, y se contrastan las posibles ambigüedades que provienen de usos curriculares particulares. En todas estas observaciones se analiza fundamentalmente la claridad y grado de relación de las variables en juego.

** Procesos reflexivos y léxicos. Terminología y lenguaje natural.

¿Existe una diferenciación entre un «lenguaje de razonar» y «lenguas para comunicar? (GRIZE 1988). ¿Hasta qué punto los problemas terminológicos y de uso del lenguaje natural manifiestan dicha diferenciación? ¿Qué influencias hay entre ellos y los procesos reflexivos?

Vamos a centrar un poco nuestra atención en este tipo de recientes investigaciones. El análisis de ciertas palabras preocupa ahora en cuanto expresa los procesos de reflexión (***reflective thinking***) de los alumnos y el grado de profundización en la adquisición-concepción de elementos integradores del trabajo matemático. En ese aspecto, sigue habiendo una preocupación por investigaciones de tipo evolutivo. Así, por ejemplo, a la pregunta «¿qué es un modelo?» (ORTON 1993) hubo acuerdo general entre alumnos en el hecho de que no cualquier figura fuera un modelo (izquierda).



«No hay repetición», decían. «Eso es sólo un conjunto de líneas formando como un spaguetti». Otro dijo: «No sabemos si se repetirá o no. A lo mejor eso es un trozo de una salita, y continúa con los mismos triángulos y figuras». Los alumnos de 5 años señalaron característi-cas de unión, repetición, «es bonito», etc. y, curiosamen-te, ninguno evoca la simetría. A los 7 años, hay mencio-nes de la simetría y teselado. Muchos alumnos de 9 años mostraron que la figura central es un modelo, pero los argumentos son de lo más exótico: «Las líneas se unen», «no quedan espacios vacíos», «es un teselado», etc. Junto a ello, había una mayor uniformidad en otras respues-tas: «se repite», «tiene figuras regulares que se repiten».... En efecto, ORTON indica (y muchos hemos constatado) cómo alumnos de 9 años *distinguen entre figuras y modelos* . María dijo: «Sí, porque puedes ver cuadrados y triángulos así como sus combinaciones». Pero resalte-mos cómo en la figura de la derecha, muchos alumnos no ven un modelo pues «no se repite la misma figura» y los de 11 años detallan más la expresión diciendo: «es un modelo de reflexión, figuras trasladadas, son triángulos y cuadrados girados, etc.».

El lenguaje natural y el matemático tienen distintos significados para análogas expresiones. Así, expre-siones como modelo, racional, igual, denominador, coeficiente deben ser analizadas en las aulas explícita-mente por causa de dichas diferencias (CRANDALL 1989). Los lenguajes matemáticos son un desafío mayor al lenguaje natural, y más aún cuando a menudo se establece la necesidad de codificación y decodificación entre ellos.

En otro orden de investigaciones-reflexiones, con-sideremos las que siguen la línea estructuralista, recordando elementos y aspectos de la imprecisión en lenguaje natural, y recuerdan los requerimientos de la lingüística estructural (SPERANZA 1989).

** Modificadores. Referenciales. Signos de valor.

Hay diversos elementos lingüísticos que pueden modificar o afectar las visiones conceptuales. Así, los artículos (considerados por los lingüistas como ele-mentos pre-modificadores) ofrecen muchas dificulta-des a los estudiantes, en cuanto sirven de elementos de distorsión y provocan problemas de generalización cuando se usan muchos indeterminados (MASON 1989).

También es importante el análisis de elementos variables referenciales como el usual empleo abusivo de las metáforas, las dificultades en las descripciones, la inclusión de modelos y la inclusión de jergas espe-cíficas. Con posterioridad a todo eso, se manifiesta la influencia de los juicios, valoraciones e interpretacio-nes con los que se construyen justificaciones que son la base de la construcción de conocimiento (LINS 1993).

** Construcción de significado. Funcionalidad.

En cuanto la construcción interna de significado, el problema más acuciante que se ha estudiado es el de la vaguedad. En efecto, ésta surge por homosemia, polisemia, o bien referencia contextual implícita (tí-pica en la resolución de problemas). En la subdivisión actual entre el contenido procedimental y el hecho conceptual se ha generado buena parte del trabajo en psicología de educación matemática.

En esos trabajos sobre construcción de significado, el lenguaje aparece como una componente que otorga un significado a expresiones y relaciones. En cuanto a funcionalidad de los términos léxicos, es interesante constatar que se ven funciones distintas entre términos parecidos, como es el caso de las expresiones «menor» y «menor que». Ahora bien, en la construcción de muchos conocimientos tales como los que se dan en tareas de generalización, los estudiantes no usan lenguajes «oficiales» de las matemáticas, sino más bien el lenguaje natural (LABORDE 1982, LEE 1987).

En los últimos años, el tema de las interacciones y de la socialización da lugar a nuevos análisis que se centran en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje (PIRIE & SCHWAZENBERGER 1988, PIRIE 1991). Ese tipo de trabajos tiene una perspectiva funcional en el sentido que todos los estudios coinciden en la importancia que la verbalización tiene para el desarrollo constructivo general (BALACHEFF & LABORDE 1988, HOYLES 1991) de aprendizaje de códigos aritméticos (SAADA y BRUN 1984), códigos geométricos (GAULIN 1985, OSTA 1988), etc.

** Uso de lenguajes gráfico-visuales.

En trabajos sobre el desarrollo, aunque no sea el objetivo específico de este artículo, debemos citar los análisis sobre lenguajes no verbales tales como: gráficos, esquemas, representaciones geométricas, etc. En dichos estudios se analizan básicamente elementos representacionales, de interpretación y, en general, de cambios representacionales (JANVIER 1987). Un análisis significativo reciente estudia las concepciones de alumnos frente a gráficas cartesianas (DEULOFEU 1993).

Análisis subestructurales

Llamamos así a las situaciones de investigación en las que se tratan los problemas de fondo, previos a la reflexión lingüística, y reconocen diversas perspectivas de la misma. Entre ellos, los análisis de contexto, bases epistemológicas y etnopolítica.

Análisis de contexto.

La expresión contexto incluye aquí no sólo la interpretación individual de situaciones, sino también expectativas y obligaciones (COBB 1986). Las interacciones usuales en que el contexto se manifiesta es la diferenciación de roles profesor-alumno en el diálogo de aula. El primero asume la reconducción y elabora descripciones en beneficio de otros, de tal forma que el alumno sólo interpreta la situación como simple suceso social (YACKEL 1993). En ese sentido, la expresión verbal es fundamental aunque el formato y las situaciones son elementos de dificultad que afectan a los conceptos en Secundaria, incluso en países como Japón (MINATO et al. 1993) en que la explicación verbal es muy usual (STIGLER 1986).

El lenguaje hablado se manifiesta de forma diferente según el papel de los interlocutores: (a) discurso exploratorio, en donde la planificación es lo importante (BARNES 1976, 1977); (b) hablar para uno mismo, reflexionando y organizando (PIMM 1987); (c) hablar para los demás centrado en la comunicación (SHANON-WEAVER 1949) y (d) discusión en grupo, reconceptualizando y reorganizando. En ese sentido, YACKEL (1993) ha mostrado que «la interpretación de una situación, las percepciones, expectativas y obligaciones, son más determinantes de la naturaleza de un discurso que la participación individual en tareas de clase o discusión en pequeño grupo».

Las tareas comunicativas de un proceso de desarrollo de aula pueden contemplar formas diferentes. Citemos dos esquemas distintos: el basado en las ideas de emisor y receptor (ROMISZOWSKY 1982) y el basado en las ideas más modernas de inteligencia artificial de información y control (FORTUNY 1990).

Epistemología

Un conjunto de investigaciones tratan el lenguaje como un vehículo de análisis histórico-lingüístico con contenido epistemológico (CHEVALLARD 1991, BOSCH 1992, GIMÉNEZ 1993), que en muchos casos forma parte de una reflexión más amplia sobre la consecución de conceptos (AZCARATE 1991, FILLOY y ROJANO 1989,...).

TATHA (1988) apuntó que se daban en la historia diferentes dimensiones y usos de lenguaje. En todos ellos, la metáfora juega un papel importante. Así, algo es transferido a otro al que no se le aplica normalmente. El análisis del contraste entre el abacista y el algorítmico en la época medieval es un paradigma claro del uso metafórico, que diversos autores han revelado (BATESON 1988, MATURANA 1989). En esas concepciones se basa el proceso llamado de matematización (THOM 1981, GOFREE & TREEFERS 1985).

El proceso de generalización es uno de los elementos en los que se refleja la acción lingüística (WILDEN

1976), no sólo con el uso de palabras, referentes y metáforas, sino con metonimias (MATURANA 1988). Es decir, algo es referido a otro por el nombre o algún aspecto o atributo de él, como cuando se dice: «la raíz cuadrada de -1 es «un número imaginario». La discusión teórica refleja diversos niveles de lenguaje, desde el natural al simbólico. Así, en el esquema de T.KIEREN (1988) se habla de los lenguajes siguientes: jeroglífico, hierático y demótico. Ello se ejemplifica adecuadamente en el caso de las fracciones en nuestro artículo sobre la descripción (GIMÉNEZ 1994). El propio Kieren explica como se usan esos diversos niveles de lenguaje para la construcción de conocimiento. La visión de recursividad (vuelta atrás en la reflexión) de los trabajos de MATURANA y KILPATRICK (1987) implica los procesos de evaluación y validación, así como la progresión de lo axiomático a lo particular es el énfasis fundamental de los trabajos de HILBERT y BATESON.

Un último objetivo de investigación se expone en cuanto análisis del binomio realidad-proyección en la visión psicoanalítica de la construcción de conocimiento (BALDINO 1993). De ahí que en estos estudios se analice el efecto de concienciación en el uso de lenguaje y su deseo de uso. En efecto, se dice en estos trabajos que lo imaginario es sustituido por lo simbólico (LACAN 1991). En Matemáticas estos análisis son importantes en cuanto al valor de la incertidumbre, irracionalidad, pérdida de control, etc. (WALDERKINE 1988, 1992).

Etnopolítica.

Un último grupo de investigaciones ha tratado los problemas de lenguaje desde una vertiente política. En efecto, el lenguaje matemático tiene en la actualidad un componente social específico en cuanto es un vehículo de la tecnología actual. Algunas reflexiones sobre este tema constatan su papel no sólo instrumental (KEITEL 1991, 1992).

Por otra parte, en la construcción conceptual hay una dimensión de poder, si se admite que debemos partir de un conocimiento extra-escolar de la vida que sobrepase lo estrictamente técnico. Así, el conocimiento del lenguaje matemático es para algunos autores un proceso de adecuación (KNIJNIK 1993) y no tiene por qué ser explícitamente un proceso de institucionalización que parta de un planteamiento epistemológico distinto (CHEVALLARD 1992). La discussión de los usos de lenguaje en ese sentido es importante en la construcción de un conocimiento institucionalizado (DÍAZ GODINO 1993) y a buen seguro se darán en los próximos años más reflexiones sobre las relaciones entre esos usos de lenguaje y las concepciones políticas.

Sobre esquemas teóricos

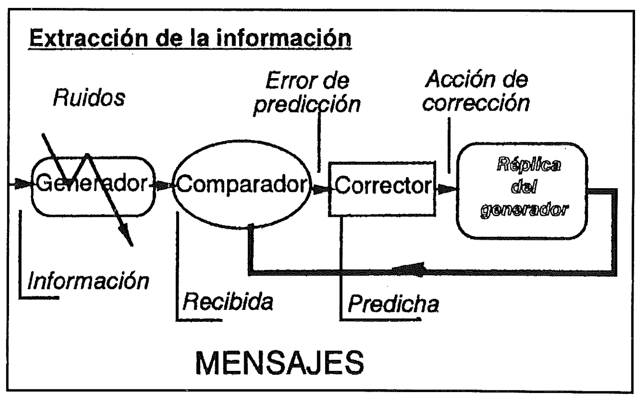
Sin extenderse demasiado, valgan las referencias a cuatro elementos clave:

- Semiótica.
- Comprensión.
- Inteligencia artificial y
- Teoría de la información.

Los trabajos que aplican esos conceptos a la educación matemática tienen un nivel de profundización aún incipiente.

El lenguaje como modo de representación sí ha llevado a diversas reflexiones que se centran en los trabajos de KAPUT 1986, 1987, la noción de icebergs de significatividad (JANVIER 1987, reformulado en SANZ 1989), y un esquema interactivo entre los diversos elementos representacionales (LESH 1985). Nadie duda ahora que los problemas de lenguaje intervienen en la formación de conceptos y son parte clave de los procesos de comunicación (LABORDE et al 1989). En suma, el lenguaje -en el decir de psicolingüistas- es un medio de regulación y control de la actividad y pensamiento (BEAUDICHON 1982, VIGOTSKY 1934).

En Teoría de la información, la reflexión presenta ya modelos matemáticos que nacen de los trabajos de De SAUSSURE (1915) hasta el esquema de SHANON (1949). En base a esos estudios, se mejora el esquema de extracción de la información (AGUILAR 1986) como se ilustra a continuación.



Conclusiones

Hemos recuperado a lo largo de esta revisión el reconocimiento funcional de distintos tipos de investigaciones: análisis superestructural, interestructural, funcional (de desarrollo e implementación), infraestructural y teórico. Nadie pone en duda la necesidad de un mayor número de investigaciones en todos esos campos, pero nos atreveremos a manifestar, junto a las conclusiones, la necesidad de incidir más en algunas de ellas. En resumen, en todos los trabajos se pone de manifiesto la importancia de:

(a) Reconocer el valor curricular de nuestro DCB y adaptaciones autonómicas en cuanto transmitir el valor e importancia de tratar el paso del lenguaje natural a los diversos tipos de lenguajes en la educación matemática básica de los individuos. Nos parece que dichas formulaciones son más profundas que las propias aportaciones de los **Standards**. Además de promocionar dichas ideas, se requiere investigar más sobre las diferencias entre los «usos» de los diversos lenguajes y sus relaciones; implicaciones positivas o no de un uso más amplio del lenguaje natural para iniciar determinado trabajo. En ese sentido, lo ya conocido sobre el valor del lenguaje no debe aplicarse a la expresión verbal (AZZOLINO 1990), sino a todo símbolo visual (NORTES 1991) para: comprender, recordar, representar, comunicar, construir, generar y facilitar la creatividad, y reflexionar sobre lo ya realizado.

Consideramos que sería importante que los análisis estructurales (propios de la década pasada) se centraran en su integración en el proceso de aula, más que en análisis estáticos de un momento determinado. Así, aunque deben realizarse análisis de resultados de las aplicaciones curriculares, no deberían ser el centro de atención focal en los próximos años. En todo caso, precisamos reconocer las influencias que hay en cuanto «saber de esos análisis» para la formación del profesor.

(b) Valorar -como hacen los análisis recientes de la construcción de conocimiento matemático- el uso de metáforas y metonimias como imágenes de situaciones. Pero queda mucho por ver qué tipo de imágenes es el más adecuado para diversos elementos conceptuales. A ese respecto, pensamos que los estudios epistemológicos-históricos que se están realizando deben influir positivamente en dicha búsqueda y deben incrementarse.

(c) Manifestar el valor de los diversos modos de lenguaje no sólo como instrumento funcional de comunicación sino como valor clave del quehacer matemático. En ese sentido reconocer la existencia de muy diversos lenguajes actuales: esquemas, programación, grafos, etc. Debemos reconocer las concepciones de los alumnos sobre dichos lenguajes, su progresivo uso y reconocimiento como potenciales recursos de gran valor comunicativo. También en ese punto precisamos reconocer más la influencia de implementar dichos modos en alumnos jóvenes. ¿Cuándo es el momento adecuado para introducir elementos de grafos? ¿Se puede hablar de generar la necesidad del uso de diagramas?

(d) Implementar, con mayor énfasis, actividades de generalización y análisis que no pierdan de vista el elemento comunicativo de lenguaje. Como se ha mostrado, las influencias analizadas han propiciado o remodelado «nuevas teorías sobre la construcción del conocimiento matemático». Pero, en el campo de lo semántico queda aún mucho por investigar.

(e) Reconocer la dimensión social del lenguaje y sus influencias, no sólo sobre los elementos conceptuales y procedimentales, sino también actitudinales y de construcción de valores.

(f) Saber que en una sociedad marcada por elementos tecnológicos, donde la comunicación juega un valor importante, no debe menospreciarse el uso de medios tecnológicos y de comunicación de masas así como el análisis de las implicaciones de los mismos en la educación matemática. Los trabajos de popularización, video, uso de medios informáticos,... ¿hasta qué punto influyen en la construcción de conocimiento? Sabemos algunas ventajas en cuanto la capacidad de visualización, reconocimiento y codificación, pero no mucho más...

(g) Implicarse en la reflexión política que implica el análisis de motivaciones que se dan según el tratamiento del lenguaje en la educación. Es decir, valorar las influencias de partir de la realidad de los individuos hacia el saber institucionalizado o el proceso inverso y analizar las dificultades que implica los posibles «usos de lenguaje» distintos que se derivan de una u otra concepción. Ante la necesidad de más investigaciones en España sobre estos temas con mayor profundidad, notemos que sí se han hecho muchas aportaciones en el campo del desarrollo en el aula. Por ello, debe incentivarse la investigación que analice las interacciones entre la actividad de aula que usa los diversos lenguajes y sus interrelaciones con la construcción de conocimiento de estudiantes y profesores.

Quizás sea que las relaciones lenguaje-matemática existen sólo en el placer de muchos profesores e investigadores... y se han usado métodos anticonceptivos. Quizás es que hay miedo al embarazo de trabajos sobre el tema, ... Pero, como catalizadores posibles de esta pareja, ya sea fecundación «in vitro» o, mejor, «in vivo», en el aula (VINNER 1992), pensemos que no debería importarnos superpoblar el mercado de producción científica sobre el tema, engendrando nuevos «habitantes».

Bibliografía

* AIKEN, L. (1971) **Verbal factors and mathematics learning. A review of research.** Journal for Research in MathematiGs Education 2 (4), 304-312.

* AGUILAR, J. (11986) **Senyals símbols i sorolls**. En Butlletí Soc. Catalana de Ciencies. VIII, 11-34.

* AUSUBEL, G. (1976) **Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo**. Trillas ed. (v.o. 1970).

* AUSTIN, J.L. & HOWSON, A. (1979) **Language and Mathematics Education**, in Educational Studies in Mathematics 10, 13-15.

* AZCARATE, C. (1992) **La velocidad: Introducción al concepto de derivada**. Tesis doctoral. UAB. Barcelona.

* AZZOLINO, A. (1990) **Writing as a tool for teaching Mathematics: The silent Revolution**, in Teaching and learning Mathematics in the 1990's NCTM Yearbook. Reston VA.

* BALACHEFF & LABORDE, C. (1988) **Social interaction for experimental studies of pupil's conceptions: Its relevance for research in didactics of mathematics**. In HG Steiner et al (eds) Proceedings II TME Univ Bielefeld. Univ Antwerpen. pp. 189-195.

* BEHR, M. et al. (1983) **Acquisition of rational numbers**. In Lesh & Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processess. AScademic Press. New York.

* BALDINO, R. (1993) **Object of knowledge and object of desire in a cooperative learning ca/culus course**. Unpublished paper. UNESP.

* BARNES (1976) **From communication to curriculum**. Harmondsworth Penguin.

* BARNES (1977) **Monitoring communication for learning**. In M. Marland (ed) Language across the curriculum (pp. 171-178) Heineman. London.

* BEAUDICHON (1982) **La communication sociale chez l'enfant**. Pressess Universitaires de France. Paris.

* BISHOP, A. (1988) **Mathematical enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education**. Kluwer ac. press. Dordrecht.

* BROUSSEAU, G. (1986) **Théorisation des phenomenes d'enseignement des mathématiques**. These d'état. Univ. Bordeaux.

* BRUNER, J. (ed) (1966) **Studies in cognitive growth** Wiley. New York.

* BRUNER, J. (1983) **Child's talk. LeaMing to use language.** Oxford Univ Press. Oxford.

* CALDWELL, J.H. & GOLDIN, G. (1979) **Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics.** Joumal for research in Mathematics Education, 10, 5, 323-336.

* CARPENTER & MOSER (1983) **The acquisition of addition and subtraction concepts**. In Lesh & Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processess. London. Academic Press.

* CLEMENT, J. (1982) **Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common missconception**. Journal for Research in Mathematics Education 13, 16-30.

* CERDAN, F. Y PUIG, L. (1989) **Problemas aritméticos escolares**. Ed Síntesis. Madrid.

* COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) **Linguistic and cultural influences on learning mathematics**. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.

* COOB, P. (1986) **Contexts, goals, beliefs and learning mathematics**. For the learning of mathematics 6 (2) 2-9.

* COSSIO, M.G. (1978) **The effects of language on mathematics placement scores in metropolitan colleges**. DAI 38, 4002A-4003A (University Microfilms no. 77-27. 882).

* CRANDALL, J. et al. (1989) **The language of mathematics: the english barrier**. Proc. of 1985 Delaware Symposium on language studies Vll Newark.

* CURRICULUM and EVALUATION STANDARDS for SCHOOL MATHEMATICS- N.C.T.M., 1989. - Edic. en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», 1991.

* CHARBONNEAU, M., JOHN STEINER, V. (1988) **Patterns of esperience and the language of mathematics**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on

learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey, 91-100.

* CHEVALLARD, Y. (1991) **Dimension instrumentalle, dimension sémiotique de l'activité mathématique**, Seminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1990-91, n° 122, pp. 103-117.

* CHOMSKY, N. (1985) *Reflexiones sobre el lenguaje.* Planeta. Barcelona.

* D'AMORE, B. (1993) **Esporre la matematica appres: un problema didattico e linguistico**. La matematica ella sua didattica, Bologna pp. 289-301.

* D.C.B. (1989) **Diseño Curricular Base. Área de Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria**. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

* DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1985) **The effect of semantic structure on first graders'solution strategies of elementary addition and subtraction word problems** Journal for Research in Mathematics Education 18, 363-381.

* DE CORTE, E. et al. (eds) (1987) **Learning and instruction. Eureopean research in an international context**. Leuven University Press. Leuven.

* DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1991) **Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes.

* DE LANGE, J. (1987) **Mathematics Insight and meaning. Teaching, LeaMing and Testing of Mathematics for the life and social sciences**. Utrecht. OW & OC.

* DE SAUSSURE (1915) **Cours de linguistique génerale**. Payot. París.

* DEULOFEU, J. (1993)**Els grafics cartesians de funcions. Un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del grafic**. phD Thesis. Universitat Autonoma de Barcelona.

* DÍAZ GODINO, J. (1993) **Verso una teoria della didattica della matematica**, La matematica e la sua didattica 3, 261-288.

* DICKSON, L. et al. (1990) **La enseñanza de las matemáticas**. Labor. Madrid. p 351-390.

* DIENES, Z.P. (1970) **La construcción de las matemáticas.** Vicens Vives. Barcelona.

* DOLCIANI, MP. & WOOTON, W. (1970) **Book one, modern algebra, rev. ed.** Boston. Houghton. Mifflin.

* DURKIN (1986) **Language and social cognition during the school years**. In Durkin (ed) Language development in the school years. London. Croom Helm.

* DURKIN, J. (1991) **Language in mathematics education**. Open University Milton Keynes.

* ERNEST, P. (1987) **Understanding the language of mathematics**. CASTME Journal h2), 10-15.

* FILLOY, E. & ROJANO, T. (1989) **Solving equations: the transition from arithmetic to algebra**. For the learning of mathematics. 9, 2, 19-25.

* FILLOY & KIERAN (1989) **La adquisición del lenguaje algebraico**. Enseñanza de las Ciencias.

* FORTUNY, JM. (1990) **Información y control en educación matemática**. En Linares & Sánchez (eds) Teoría y práctica de la educación matemática. Alfar Sevilla. 239- 294.

* FRANKESTEIN, M. & POWELL, A. (1993) **Toward liberatory mathematics: Paulo Freire's epistemology and ethnomathematics** in McLaren & Lankshea (eds) Conscientization and oppression. Rouletge. London.

* FREUDENTHAL, H. (1983) **Didactical phaenomenology of mathematical structures**. Reidel. Dordrecht.

* FUSON (1988) **Children's counting and concept of number**. New York. Springer Verlag.

* GAULIN, C. (1985) **The need of emphasizing** 3d. Proc. In L.Streefland (ed) PME V Utrecht.

* GIMÉNEZ, J. (1989) **About continuous operator subconstruct on rational numbers**. In G.VERGNSAUD et al. (eds) Proc. PME. París. 1, 5-10.

* GIMÉNEZ, J. (1991) **Innovación metodológica sobre el número racional positivo**. phD thesis Microfilm. Universitat Autónoma de Barcelona.

* GIMÉNEZ, J. (1991b) **Elaboración de un test de diagnóstico algebraico en el marco de la formación del profesorado**. Epsilon n. 23. Sevilla.

* GIMÉNEZ, J. (1992) **Unpublished presentation to CIEAEM meeting**. Chicago.

* GIMÉNEZ, J. (1994) **Provocadores de descripción en el aula de Matemáticas**. «I Seminario Nacional sobre Lenguaje

y Matemáticas - Soc. Canaria «Isaac Newton» de Profs. de Matemáticas - Tenerife, 1993.

* GINSBURG, G (1980) **Children's arithmetic The learning process**. VAn Nostrand. New York.

* GOLDIN, G (1984) **Syntax, content, and context variables examined in a Research study**. In Goldin& McLintock (eds) Task variables in mathematical problem solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia. 235-276.

* GOPEN, G & SMITH, D (1989) **What's an Assignment like you doing in a course like this? Writting to learn Mathematics**. In Paul Connolly et al. (eds) Writing to learn mathematics & science. New York. Teachers College Press. Columbia University.

* GRIGNON, C & PASSERON, J. (1992) **Lo culto y lo popular**. La piqueta. Madrid.

* HALLIDAY (1975) **Some aspects of sociolinguistics. In Interactions between language and mathematic education**. UNESCO. Copenhagen.

* HART, K et al. (1981) SESM **Strategies and errors in Secondary Mathematics Project**. Londres. Chelsea College.

* HASEMAN, K (1986) **Mathematische lehnprozesse**. Wiesbaden. Brunchsweig.

* HOYLES, SUTHERLAND, HEALY (1991) **Childrn talking in computer environments New insight s into the role of discussion in mathematics learning**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes. 162-176.

* JACOBSON, E (1975) **Interactions between linguistics and mathematics education**. Symposium UNESCO,CEDO & ICMI. Kenia. UNESCO Report no. ED-74/CONF. 808 Paris. Unesco.

* JANVIER, C (ed) (1987) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.

* JONES, P (1982) **Learning mathematics in a second language. A problem with more and less**. Educationa/ Studies in Matehematics 13, 269-288.

* KAPUT (1987) **Representation Systems and mathematics**. In C.Janvier (ed) Problems of representation in the teaching and learning of mathematic pp. 19-26. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale.

* KAPUT (1987) **Toward a theory of symbol use in mathematics**. In C.Janvier (ed) Problems of representation in the teaching of leaMing of mathematics pp 159-195. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.

* KEITEL, K (1991) **Matemáticas, tecnología y sociedad.** Conferencia pronunciada en V J.A.E.M. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Actas por aparecer.

* KERSLAKE, D (1986) **Fractions: children's errors and strategies**. Windsor. NFER Nelson.

* KESSLER, C, QUINN, M & HAYES, C (1986) **Processing mathematics in a second language**. Problems for LEP children. Proc. Delaware Symposium on Language Studies Vll. Newark.

* KIEREN, T (1988) **Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development**. In J. Hiebert & M. Behr (eds) Number concepts and operations in the middle grades. NCTM. Reston VA. pp. 162-181.

* KIEREN, T (1992) **Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding**. In T.Carpenter et al. (eds) Rational numbers. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. pp. 49-83.

* KILPATRICK, J (1986) **Reflexion and recursion** Proc. V PME Birkhauser. Boston.

* KILPATRICK, J (1987) Problem formulating Where do good Problems come from? *Cognitive Science and Mathematics EducaVon.* LEA. Hillsdale.

* KINGHT, L. & HARRIS, C. (1977) **Math language ability: Its relationship to reading in math**. Language Arts 54, 423-428.

* KNIJNIK, G. (1993) **An ethnomathematical approach in mathematical education: a matter of political power**. In For the leaMing of mathematics. Montreal.

* LABORDE, C (1982) **Langue naturelle et écriture symbolique.** These d'état. Univ. scientifique et médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble.

* LABORDE, C (1990) **Language and mathematics**. In Howson & Kahane (eds) Mathematics and cognition. A Research synthesis by IGPME pp. 53-69. Cambridge University Press. Cambridge.

* LACAN, J (1991) **Le séminaire de Jacques Lacan Livre XVII L'envers de la psychanalyse**. Ed du Seuil. Paris.

* LEE (1987) **The status of understanding of generalised algebraic statements by high schoolstudents**, In JC Bergeron et al. (eds) Proceedings of XI PME vol. 1, 316-323. Montréal.

* LESH, R. (1985) **Conceptual analysis of problem solving performance**. In E.Silver (ed) Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perpectives. LEA. Hillsdale. 309-329.

* LINS, R. (1992) **A framework for understanding what algebraic thinking is**. phD Thesis. Univ of Nottingham.

* LOVE, E. & TATHA, D. (1991) **Reflexions in some words used in mathematics education**, in D. Pimm & E. Love (eds) Teaching and learning School mathematics Hodder & Stoughton. London.

* MAIER, H (1993) **Problemi di lingua e di comunicazioni durante le ore di matematica**. La matematica ella sua didattica 1.

* MASON, J. et al. (1985) **Routes to roots of algebra**. Open University. Milton Keynes.

* MASON, J. (1989) **Expressing generallity**. Open Univ. Milton Keynes.

* MATURANA, H. & VARELA, F. (1987) **The tree of knowledge**. Boston & London. New Science Library. Shambhala.

* MESTRE, JP. **The role of language comprehension in Mathematics Problem solving**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey, 221-240.

* MESTRE, J.P,. GERACE, W., LOCKHEAD, J. (1982) **The interdependence of language and translational math skills among bilingual Hispanic engineering students**. Journal for Research in Science Teaching, 19, 399-410.

* MOORE, T. & HARRIS, AE. (1978) **Language and thought in Piagetian Theory**, en L. Siegel & Brainerd (eds) Alternatives to Piaget Critical essays on the Theory. New York Academic Press.

* MORRIS, C. (1955) **Foundations on the theory of signs**. International Encyclopedia of Unified Science 1(2) 78-137. Chicago, Il. Univ. of Chicago Press.

* MORRIS, R.W. (1975) **The role of language in learning mathematics**. Prospects 8, 73-81.

* MUNROE, J. (1979) **Language abilities and math performance**. Reading Teacher, 32, 900-915.

* MURRAY (1985) **Maths and exploratory talk**. Mathematics in School 14 (4) 15.

* MYERS, D., MILNE, A. (1988) **Effects of home language and Primary Language on Mathematics achievement**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey 259-293.

* NESHER (1989) **The stereotyped nature of school word problems** For the learning of mathematics 1, 41-48.

* NESHER, P. & TEUBAL, E. (1975) **Verbal cues an interfering Factor in verbal problem solving**, Educational Studies in Mathematics 6, 41-51.

* NORTES CHECA, A. (1992) **El lenguaje en matemáticas**, en Epsilon n. 20, Sevilla pp. 41-44.

* ORTON (1993) **What is a pattern?** In Mathematics in school 1, 8-10.

* OSTA, I. (1988) **L'ordinateur comme outil d'aide a l'enseignement d'une séquence didactique pou l'enseignement du réperage dans l'espace a l'aide des logiciels graphiques**. Doctoral dissertation. Univ Joseph Fourier IMAG. Grenoble.

* PIMM, D. (1990) **El lenguaje matemático en el aula (TRAD)**. Labor MEC. Madrid.

* PIRIE & SCHWARRZENBERGER (1988) **Mathematical discussion and mathematical understanding**. Educational studies in Mathematics 19, 459-470.

* PIRIE (1991) **Peer discussion in the context of mathematical problem solving**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes, 143-161.

* ROBITAILLE (1992) **ISMG. International Study**. Paper presented to ICME 8, Québec.

* ROMBERG, T. et al. (1988) **Essential features of the mathematical domain: Ratio and proportion**. Int. document. Univ. of Wisconsin. Madison.

* ROMBERG, T. et al. (1991) **How one comes to know Epistemological issues and challenges of assessment ll** In Niss et al. (eds) Assessment and mathematics Education. SA Calonge. Spain.

* ROMISZOWSKI (1981) **Designing instructional systems**. Kohan Page London.

* SAADA & BRUN (1984) **L'elaboration de formulations dans un jeu arithmétique**. Recherches en didactique des mathématiques. 2 (2), 215-231.

* SANZ, I. (1989) **Las representaciones en relación con la presentación de la información en los textos escolares de**

matemáticas. Actas del 2° Encuentro Nacional sobre el Libro de Texto. Sevilla.

* SANZ, I. (1990) **Comunicación, lenguaje y matemáticas**. En Linares & Sánchez (eds) Teoría y práctica de la educación matemática. Alfar. Sevilla. 177-235.

* SAXE, G. (1988) **Linking Language with Mathematics achievement**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (eds) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey, 47-62.

* SHANON & WEAVER (1949) **A mathematical theory of communication**. Urbana Univ. Press.

* SINCLAIR, A. (1991) **Children's production and comprehension of written numerical representations**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes.

* SKEMP, R. (1982) **Understanding the symbolism of mathematics (special issue) Visible language 16 (3)**. El autor tiene el artículo «Communicating mathematics: surface structures and deep structures».

* SKINNER, L. (1980) **Language and social change**, in L. Michael & C. Ricks (eds), The state of language, California University Press. pp. 574 ss.

* SPANOS, G et al. (1988) **Llinguistic Features of Mathematical Problem Solving**. 221-240.

* SPERANZA, F. (1989) **Matematica e linguaggio**. En L'educazzione matematica Ago 89, pp. 97-114.

* STEFFE, L., COBB, P., VON GRASERFELD, E. (1988) **Construction of arithmeVcal meanings and strategies**. Springer Verlag. New York.

* STREEFLAND, L. (1991) **Fractions in realistic mathematics education.** Kluwer. Dordrecht.

* STREEFLAND, L. (ed) (1993) **Realistic mathematics education in primary school.** Freudenthal Inst. Utrecht.

* TAKAHASHI, H., MINATO, S. & HONMA, M. (1993) **Formats and situations for solving masthematical story problems** in Hirabaiashi et al. (eds) Proceedings of PME XVII, Univ of Tsukuba, 11, 191-198.

* TALL & VINNER, S. (1981) **Concept images and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

* TATHA, D. (1988) **Lucas turns in his grave**. In D. Pimm (ed) Mathematics, teacher and children. Hodder & Stoughton. & Open University London.

* TATHA, D. (1991) **Understanding and desire'l**. In Pimm & Love (eds) Teaching and Learning School Mathematics. Hodder & Stoughton. London.

* THORDNIKE (1912) **The measurement of educational products**. School review 20, 289-299.

* TIROSH & GRAEBER (1989) **Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division**. Educational Studies in Mathematics 20, 79-96.

* TRABASSO, T., ROLLIN, H., SHAUGHNESSEY, E. (1971) **Storage and verification shapes in processing concepts**. Cognitive Psychology, 2, 231-289.

* TREEFERS, A. (1987) **Three dimensions**. Reidel. Dordrecht.

* TREFERS, A. & GOFREE, F. (1985) **Rational analysis of realistic mathematics education. The Wiskobas Program.** In L.Streefland (ed) Proc. PME IX, 2, 97-123. Utrecht. OW & OC.

* VERGNAUD, G. (1983) **Multiplicative structures**. In Lesh& Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processes. Academic Press. New York.

* VIGOTSKY (1962) **Thought and language**. MIT Press.

* VINNER, S. (1992) **In Vivo situations**. Unpublished paper Hebrew Univ. of Jerusalem.

* WALDERKINE, V. (1988) **The mastery of reason**. Routledge. London.

* WEBB, N. (1984) **Content and context variables in problem tasks**, in Goldin & McLintock (eds) Task variables in mathematical problem solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia. 69-102.

* WILLIAMS, R. (1982) **Keywords**, Fontana. Edimburg.

* WINOGRAD, T. (1972) **Understanding natural language**. New York. Academic Press.

* WITTGESTEIN (1977) **Investigaciones filosóficas**. (v.o. 1953) Ed. 62. Barcelona.

* YACKEL (1993) **Childrens'talk in mathematics class as a function of context**. In Hirabaiashi et al. (eds) Proceedings of PME XVII, Univ of Tsukuba, II, 199-206.

* ZEPP, R. (1989) **Language and mathematics education**. Hong Kong API Press.

Joaquín Giménez
Universitat Rovira i Virgili. Tarragona
Soc. de Professors de Matèmatiques de les comarques Meridionals de Catalunya

Provocadores de descripción en el aula de Matemáticas

Joaquín Giménez

Introducción: descripciones y referenciales

La descripción es una de las formas más usadas en el aula de matemáticas para indicar el resultado de múltiples descubrimientos. Ahora bien, esta puede surgir y provocarse a partir de diversos tipos de situaciones o actividades.

Ante todo, debemos ser conscientes de presupuestos previos como: el reconocimiento de problemas de verbalización específicos (fenómenos y expresiones del lenguaje natural); las dificultades ligadas a las concepciones representacionales usuales en que la verbalización se sitúa (dibujos, frases, etc., asociados), que generarán estereotipos quizás erróneos (VINNER 1983), y los elementos de orden sociocultural, que pueden favorecer o impedir la construcción de conocimiento.

En cualquier modelo de construcción del conocimiento matemático, los elementos referenciales son fundamentales y actúan como organizadores motivacionales para la consecución de imágenes básicas de los conceptos.

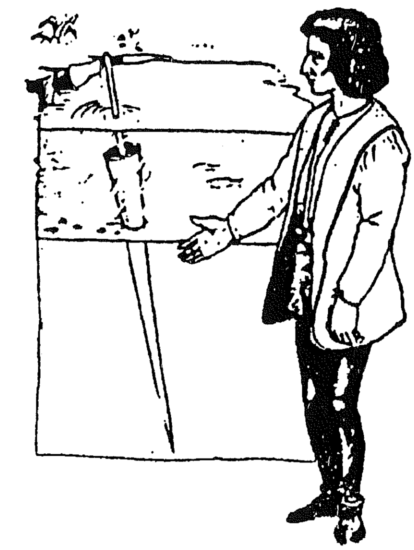
Las descripciones verbales actúan como vehículos privilegiados de esos referentes observados y para ello se usa el lenguaje oral y escrito. Así, aunque la actividad matemática surge a partir de realidades cotidianas, no puede aprenderse directamente de ellas, sino que el lenguaje juega un papel importante (SKEMP 1986). Ese lenguaje es jeroglífico (KIEREN 1988) en cuanto usa componentes primarios, de la calle, del entorno, de la historia, y no se encuentra nada elaborado. Este aspecto teórico correspondiente -aún estando presente de fondo- sólo se reflejará en este artículo brevemente y al final.

El objetivo de estas líneas es presentar algunas situaciones de aula y su valor descriptivo. Muchas de ellas han sido utilizadas en el Proyecto Curricular BDM 12-16 (ALSINA, FORTUNY y GIMÉNEZ 1992), o bien en la formación de profesores.

Usando textos y situaciones de la historia

Un primer ejemplo para Primaria en el tema de fracciones lo tomamos de **L'art de l'arismética**, de MATEU de SANCLIMENT. Proponemos a los alumnos el problema que se traduce en la forma siguiente:

«He aquí una lanza, en la que una mitad está en el fango, un tercio en el agua y fuera del agua queda 7 palos y 1/4. Se pregunta, ¿cuánto mide de largo aquella lanza? (La ilustración es más reciente y corresponde a la exposición «**Breve viaje al mundo de las matemáticas**» (GAVALDA 1983)).



"Ací ha una lança que la 1/2 sta en lo fanc e 1/3 es en laygua e defora layga 7 pais a 1/4. Deman: quant ha de llarch aquella lanç"

La descripción histórica indica lo que sigue: «Supongamos que la lanza fuera de 6 palos, la mitad sería 3 y el tercio 2, luego quedaría un palo fuera. Como son 7 y cuarto, debemos multiplicar por seis, que es la posición. Ello provoca la identificación esquemática de una tabla de valores y, a partir de ahí, el reconocimiento de una forma de la «regla de falsa posición».

La interpretación matemática hace surgir una idea de proporcionalidad, que se basa en reconocer que el factor de proporción se puede aplicar a la unidad. Así, una vez descubierta la unidad, se reconoce la solución del problema.

Después de este tipo de actividades, pueden sugerirse situaciones para completar textos, con un enfoque de evaluación de los conceptos trabajados.

Ejemplo:

Nombre .... Nivel ....

Una fracción $\boxed{1}$ constituye una buena aproximación $\boxed{2}$ π es 22 / $\boxed{3}$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

La $\boxed{4}$ de los términos de la $\boxed{5}$ de números de 1 hasta $\boxed{6}$ se consigue mediante la $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

$$\frac{(1 + n)\,n}{2}$$

$\boxed{4}$

$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

Dados tres $\boxed{9}$ consecutivos que sumados $\boxed{10}$ 32, la $\boxed{11}$ que corresponde a dicho enunciado es $x + (x + 1) + (x + 2) =$ $\boxed{12}$

$\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

Si unimos tres vértices no consecutivos de un cubo, obtenemos un $\boxed{13}$.
Los $\boxed{14}$ de ese $\boxed{13}$ son diagonales de las $\boxed{15}$ del cubo. Si sabemos la medida de los $\boxed{14}$ del cubo, podemos usar el $\boxed{16}$ de $\boxed{17}$ para averiguar la medida de los $\boxed{14}$ del $\boxed{13}$.

$\boxed{13}$ $\boxed{14}$

$\boxed{15}$ $\boxed{16}$ $\boxed{17}$

Las descripciones pueden combinarse con otras formas de expresión, como el uso de *comics*. En el ejemplo siguiente, se usa un problema en forma de historia dibujada y se pide su terminación:

Dos hombres tenían, respectivamente, 5 y 3 panes. El rey se les acerca y, como tiene que comer, se reparten los 8 panes entre los tres. El rey, en agradecimiento, les da 8 monedas, y surge la discusión de cómo deben repartirlas de forma equitativa a lo que aportaron. El primero dice «que sean 4 a cada uno», y el otro dice «no, 5 para mí y 3 para tí, en función de los panes que teníamos».

El estudiante debe ofrecer su respuesta continuando la historia.

Alguns repartiments de guanys quan hom es moria dona lloc a l'epoca de la dominació árab a Espanya problemes de repartiment curiosos.

UNA HISTÒRIA DEL REY EN JAUME

Llegeix amb atenció la història i acaba-la en forma de còmic.

Elementos verbales en descripciones escritas

El lenguaje escrito es la forma más usual de trabajo, aunque la descripción se reduzca a menudo al uso de definiciones y no se «hable» de sucesos desde el énfasis matemático, es decir, aportando aquellos elementos de condicionamiento que le son propios: observación de fenómenos, uso de los términos adecuados incorporados al sistema, deducción correcta, explicitación de posibilidades, toma de decisiones y justificación de las decisiones tomadas.

Veamos un ejemplo: la construcción de un guión ante un trozo de video geométrico sobre la construcción de triángulos isósceles. En este caso se trata de alumnos futuros profesores de la especialidad de Música (que usualmente no quieren saber nada con las matemáticas), a los que se les propone la actividad siguiente:

Este video no tiene palabras. Debes hacer una banda sonora en que se describa lo que está aconteciendo, para alumnos de ciclo final de Primaria.

Para ello se usa el siguiente esquema de acción: (a) Visionado, (b) segundo visionado con toma de apuntes, (c) discusión general de *ideas matemáticas* del video con todo el grupo, (d) elaboración personal de un primer guión, (e) tercer visionado para mejorar el guión, (f) toma de un ejemplo esquemático de uno de los alumnos adaptado a tiempo real, sin discusión colectiva, (g) cuarto visionado para ajustar cada texto.

Roser, no tiene un gran nivel matemático, y su texto es una muestra «claramente descriptiva, tratando de insistir en lo conceptual de las imágenes, con errores y de forma poco imaginativa». Notemos, sin embargo, su gran claridad y precisión lingüística. El subrayado de las frases es de la propia alumna:

* *En primer lugar, distinguimos mediante el uso de colores el número de partes iguales que podemos hacer del total de la pantalla. Hacemos particiones de 1, 2, 3, 4, 5, y 6.* ***Mediante círculos concéntricos diferenciamos particiones.***

(Las figuras serán una buena ayuda para el lector que no ha visto el video).

* *A partir de las particiones anteriores, introducimos el concepto de triángulo (tres lados) y, en particular, de triángulo equilátero (tres lados iguales).* ***«Construimos un triángulo equilátero en distintos lugares de la pantalla.***

* *Cuando nos damos cuenta del triángulo equilátero que aparece cada vez en la pantalla, entonces* ***distinguimos los tamaños diferentes que puede tener el triángulo equilátero.***

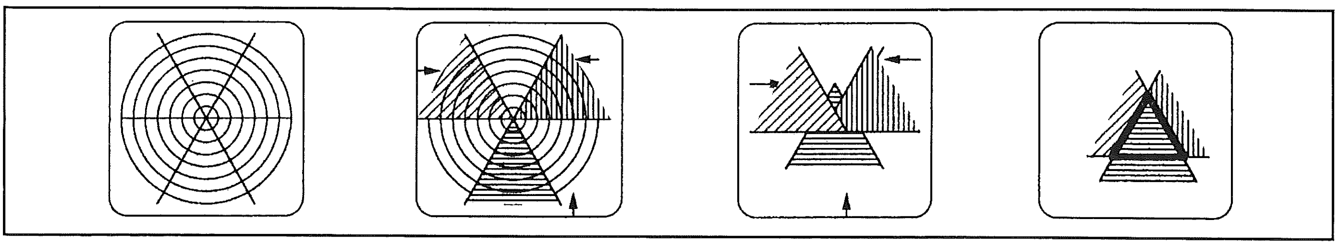
* ***Remarcamos los tres lados del triángulo equilátero con un color que destaque.***

...

No necesita más comentarios. Conceptualmente puede ser muy correcto... Ese tipo de descripciones es tremendamente normal en futuros profesores... Con estudiantes jovencitos ocurre lo mismo. ¿Qué quiero decir? Que no debemos conformarnos con buenas descripciones linguísticas, precisas y correctas matemáticamente, sino que éstas deben acompañarse de elementos de superación del propio elemento conceptual, integración en la vida del estudiante, agilidad y, por fin -si es posible- originalidad.

Comunicación oral como elemento de socialización

La lengua oral como elemento etnográfico no sólo es parte de la realidad social, sino que podemos considerar que es síntoma de la misma. Así, describir oralmente como forma de comunicación tiene una misión social (CALSAMIGLIA 1991). Su uso está regulado con normas condicionadas y, por ello, debe ser fruto de ayuda y dedicación específicos. En el caso de las matemáticas, hay usos adecuados del lenguaje y otros que no lo son. Por ejemplo, no es usual hablar con imperativos, como no sea en las preguntas y respuestas. Además, el proceso comunicativo es no lineal e incluye fases y trabajos de un gran valor social: cooperación, nego-



ciación, planteamiento y resolución de conflictos y superación de malentendidos. Convenimos en que el aula de matemáticas es un microcosmos de interacciones donde se crean y se modifican realidades.

El sentido, a diferencia de otros procesos de comunicación, se construye localmente. No puede generar más que pequeñas unidades, pero permite hacer matices (de entonación, tono, voz, silencio, etc.). Con ello se introduce en el espacio (cerca-lejos) y en el tiempo (pausas, lentitud,...). El trabajo oral, ofrece la posibilidad de dotar de sentido lo que se dice, dotando también al significado de esa visión espacio-temporal: compartiendo el tiempo en la construcción de conversación, y compartiendo lugar, en el sobreentendimiento del contexto, que evita repeticiones innecesarias. La comunicación oral en matemáticas se promueve mediante: el diálogo colectivo, promoviendo discusión sobre un tema y aprendiendo a tomar decisiones. Con ello se establece un estilo de laboratorio.

El diálogo colectivo, por ser un instrumento muy utilizado, no recibirá nuestra atención prioritaria y ejemplificaremos alqún caso de discusión oral no radial.

Las situaciones comunicativas de este tipo o similar, deben contextualizarse. Las posibles fórmulas son: «debes explicárselo a los padres para que sepan cómo es», «a otros niños que están preparando algo similar», «a la maestra de otro curso para que así lo pueda hacer en su clase», «contárselo a quien no lo ve», etc.

En este trabajo, se trata de comunicar algo. Los pasos que se efectúan son los siguientes:

(1) Describir una forma a alguien que no la ve, con el objetivo de que la reproduzca fielmente.

(2) Analizar la validez o no de las respuestas de los compañeros/as.

(3) Comprobar la propia respuesta dada.

(4) Razonar lo aprendido en esa actividad.

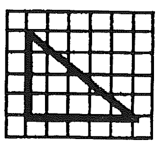
Así, lo fundamental es el desarrollo reflexivo que se provoca en la discusión elaborada de las respuestas de los alumnos. En efecto, veamos algunas de las respuestas de los alumnos de una clase de 12-13 años y sus comentarios:

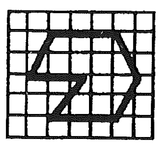
Un ejemplo: **Mensajes telefónicos.**

Saber comunicar las ideas con claridad indica tener un buen conocimiento de las cosas. Entender bien las cosas es una buena condición para resolver problemas.

ESCRIBE O VERBALIZA LAS INSTRUCCIONES

Imagina que estás hablando por teléfono a un compañero que necesita dibujar ciertas figuras que no puede ver. Escribe un conjunto de instrucciones para que tu compañero pueda dibujar exactamente las siguientes figuras.





Diseña criterios para criticar las respuestas. Critica las respuestas de tus compañeros en cuanto a su efectiviidad.

Estudiante B (fig. de la izq.).- *Coge una hoja con cuadros. Cuenta cuatro cuadros hacia abajo y traza una línea. Cuenta cinco cuadrados hacia la derecha (pegado a la linea que va hacia abajo), y traza la línea. Traza una linea intermedia de forma que se junten los dos bordes. Entonces te saldrá un triángulo rectángulo.*

Est. C.- *No puede salir bien pues no se ve claro qué es eso de la linea intermedia. No dice de donde sale el triángulo. Aunque... se podría interpretar que sale del extremo superior de la cuadrícula...*

B.- *Sí, claro, ya lo arreglo...*

Después de saber lo que ha puesto cada uno en la figura de la derecha, se llega a la conclusión de que F y M lo han dicho muy bien y convencen a todos con su método.

F. (fig. der.).- *Coge una hoja como antes. Divídela en cuadritos de 3 mm² cada uno. Numera los cuadrados verticales del 0 al 7 y los horizontales. Haz puntos en la combinación que te diré: (2,2)(3,2)(3,5, 3) ... Unelos.*

E.- *Aunque no sale, la idea es muy buena, y sirve para cualquier figura.*

Prof.- *Escribid, pues, lo que os ha aportado esta actividad.*

H.- *«He aprendido que cuando se dice una información, no deben darse datos innecesarios».*

La **discusión colectiva** es un instrumento importante en la formación y metacognición. Se inicia en la exposición de puntos de vista, debe proseguirse en la interactuación (intercambio de opiniones) y acabar con un proceso de mejora (ampliación verbal). La discusión promueve la comprensión lectora (ALVERMANN, DILLON O'BRIEN 1990) pero, además, contribuye al elemento recursivo (KIEREN 1988) de la construcción de conocimiento, es decir, la capacidad de reconocer en las imágenes conceptuales signos característicos y propiedades para poseer imágenes propias y establecer así relaciones conceptuales consistentes.

En una ficha de observación como la que se ve a continuación, pueden anotarse también, entre otros, los elementos interpretativos y comunicativos.

ALUMNO	**PROFESOR**	
TAREA	**FECHA**	**NIVEL**

		Suficiente	**Bien**	**Notable**	**Excelente**
OBSERVACIÓN	IDENTIFICACIÓN	Necesita explicaciones	Entiende el problema		Sabe ver la información importante
INTERPRETACIÓN	RECONOCIMIENTO	No sabe	Escoge una línea restrictiva de investigación		Refleja distinas líneas
	REFLEXIÓN		Limitaciones		Avances
	CRITICA		Superficial	Pertinente	Profunda
CAPACIDAD COMUNICATIVA	REPRESENTACIÓN	Refleja sólo cálculos	Usa diagramas		Utiliza esquemas diversos adecuados
	FORMULACION DE SOLUCIONES	Da sólo el resultado	Razona y refleja el razonamiento		Indica idea relevante y resume
	INTERVENCIÓN ESCRITA		Sólo descriptiva		Razonamiento escrito sintético y preciso
	COMUNICACIÓN ORAL		Sólo descriptivo		Razonamiento bien expresado
	INTERVENCION GRUPAL	Débil	Plantea preguntas de interés		Propone reflexiones críticas

OBSERVACIONES

Al término de actividades como estas, los propios estudiantes reconocen el valor socializador de las mismas. En efecto, entre los escritos, alguien reflejó el poder de cambio de actitud que promueve una discusión.

F.- *He aprendido que podemos discutir y aprender. A menudo* **G** *no reconoce que lo hace mal.*

Muy diversos autores han resaltado el valor de estas actividades para la educación matemática.

Toma de decisiones consensuada

En algunas actividades matemáticas colectivas, el objetivo es precisamente llegar a saber situar elementos de convencionalismo que permitan mejorar preconcepciones erróneas o, por lo menos, ponerlas de manifiesto.

Un ejemplo: **Hablando sobre la proporcionalidad con futuros profesores.**

La clase estaba dividida en dos grupos que habían trabajado un bloque común de aspectos de proporcionalidad. Posteriormente, en uno de los grupos menores, se desarrolla el siguiente diálogo que traducimos del original catalán.

Prof. - *Hoy, día del patrón de Cataluña y Europa, aprovecharemos para hablar de cuánto mide el dragón de San Jorge.*

Est. (grupo).- *Estás de broma.*

A.- *No lo tenemos.*

B.- *No podemos disponer de modelos y medirlos.*

C.- *Podríamos utilizar modelos de fotografías.*

D.- *Podríamos observar libros, escudos, etc. y hacer una aproximación estadística.*

C.- *Sólo podríamos establecer su magnitud si tuviéramos un punto de referencia: alguna persona al lado del dragón (aceptando que no fuera un gigante, claro).*

...

A estas alturas se había provocado un ambiente, en el que no fue difícil llegar a hablar de las expresiones que indican proporción . Se discuten expresiones como: tiene la misma forma, es igual a, es como, es el doble de, se parece a, es equivalente,... E, incluso, se juega con expresiones como: «es aproximadamente, ..., más o menos», y verbos como «reflejar».

Se propuso después un juego de expresión, donde se observa la ambigüedad de algunas de las frases. A partir de la discusión sobre «es duro como la piedra», en donde todo el mundo entiende lo que se significa pero nadie piensa en la escala de Mohs, los estudiantes escogieron jugar sobre la frase «es como...» y sus significados.

Se construyeron frases como: «es como un fórmula 1», «es como Terenci Moix», «es perfumado como la rosa». Se analizaron desacuerdos en sus significados. A partir de ahí, se analizaron «triángulos que se parecen», proporciones como «doble y triple de» y se acabó hablando del valor proporcional de las aproximaciones y la vinculación de la aproximación con el sistema decimal. En expresiones como «refleja la realidad», se observó que el reflejo es una relación 1 a 1, y que ese tipo de expresiones tienen un contenido matemático más profundo de lo que usualmente se le atribuye.

La moraleja es inmediata: la discusión-reflexión revela, no sólo las concepciones espontáneas de los propios profesores, sino que sirve para que ellos reflexionen sobre las mismas en el aprendizaje. Así, aparecieron comentarios como:

M.- *Nunca habíamos reflexionado sobre el valor de las expresiones cotidianas.*

H.- *Se hizo poco uso de la invención de problemas cuando éramos estudiantes.*

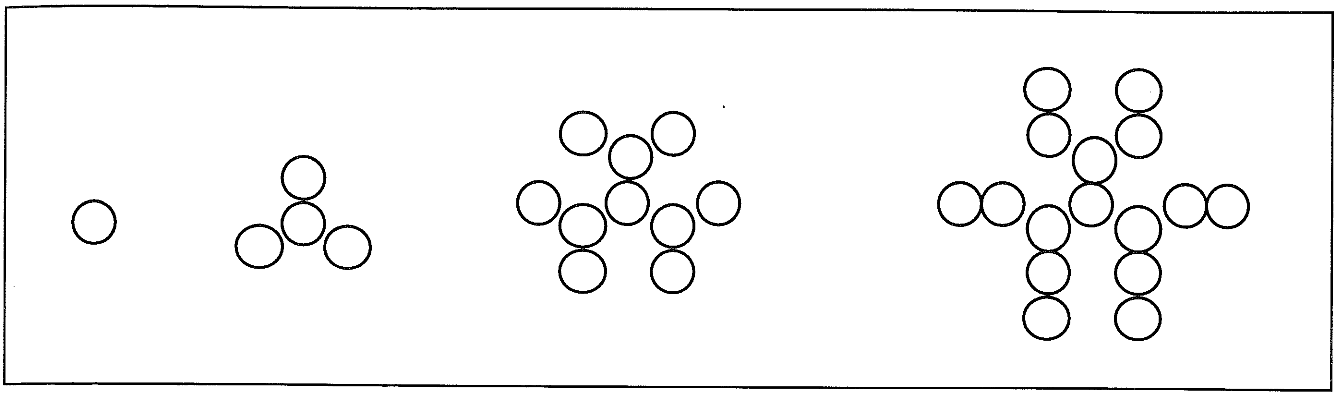
B.- *Los ejemplos de proporcionalidad que hemos visto siempre son de tipo geométrico (Thales). Los que no son geométricos no se trataban del mismo modo, como parte de lo mismo. Por ejemplo, la velocidad se daba en otro apartado. En el ejemplo del «es como el fórmula 1», se ve que tener el mismo coeficiente es ser semejante.*

I.- *Se usan excesivos elementos comparativos en el aprendizaje escolar, que no se separan de lo realmente proporcional.*

Otro ejemplo (a partir del trabajo de MASON 1988, retomado por FORTUNY y AZCARATE 1992): **Reconocer procesos de generalización en profesores en activo.**

Una primera parte de las fases del proceso son:

(1) Realizar la actividad «sigue la serie siguiente:



(2) Punto de discusión: ¿Qué métodos usaron los/las colegas?

(3) Seguir la actividad.

(4) Discusión. Preguntas. ¿Se trata de métodos recursivos o directos? ¿Se ha sugerido a los alumnos que usen métodos recursivos?

(5) Reflexión. ¿Qué sentido da a la frase «expresando generalidad»?

(6) Propuesta de otra situación.

(7) Discusión. Seleccione 2 páginas de fichas. ¿Qué generalidades se muestran?

(8) Trabajo en grupo. Declaración de niveles en DCB «expresar generalidad». Incluir referencias a conjeturas, convicciones y demostraciones. ¿En qué modo contribuir «expr. gen.» a la enseñanza de la parte extraída?

Quien lea estas líneas puede observar que en este método de trabajo, los profesores no sólo reflexionan como alumnos, sino que pueden contrastar sus métodos y trabajos con las respuestas de sus mismos estudiantes.

Valoración de elementos comunicativos

Los elementos comunicativos deben ser valorados también como parte del proceso de análisis de situaciones didácticas. Para ello deben programarse actividades específicas que se integren en un diseño de evaluación como se ha mencionado en el caso de completar textos, elaborar-completar *comics*, etc., y usarse regularmente registros adecuados de control. Así, también usamos categorías de «comunicación y claridad» en un trabajo con ordenador en actividades geométricas con «cabri» (GIMÉNEZ y FORTUNY 1994):

(a) Diseño y presentación visual.

(b) Saber dividir un problema en partes.

(c) Escribir y programar instrucciones.

(d) Interpretar, construir y comunicar mediante diversos modos de representación y

(e) Escribir demostraciones formales e informales.

Otro ejemplo de valoración se basa en la elaboración de un **Proyecto de trabajo.** Tiene la triple misión de ejercer una labor de control de elementos procedimentales que necesitan un mayor tiempo de manifestación, contribuir a la propia adquisición de dichos procedimientos y facilitar el trabajo de elementos transversales del currículo. Si bien es cierto que los tratamientos de tipo interdisciplinar cuidan ya ese último aspecto, no son menos ciertas las dificultades de implantación de dichas propuestas.

Un proyecto es un trabajo dilatado -generalmente a realizar fuera del aula- sobre un tema concreto, pero con características de apertura a múltiples enfoques. Los consejos de partida, las exigencias formales y la redacción final del trabajo implican un conjunto de dificultades que el profesor deberá enfrentar: desde facilitar la información necesaria, a indicar sólo pistas para favorecer la autonomía; desde la supervisión y posible revisión del primero de los trabajos, hasta la total libertad de acción...

Si bien es un instrumento que ahora se utiliza a menudo por parte de algunos profesores, no es fácil lograr una adaptación de la idea a niveles bajos de la Educación Obligatoria. La longitud y duración del trabajo pueden hacer pensar que se trata de una investigación «más larga». Pero no es sólo eso. El poder de decisión, búsqueda de información, adecuación, sistematización, nivel matemático, originalidad, etc., son categorías propias de este tipo de trabajo, que se dan con singularidad respecto a una simple investigación en donde los materiales se dan usualmente por parte del profesor. He aquí un ejemplo de presentación y página de estudiante. En la última se dan las categorías que han sido evaluadas.

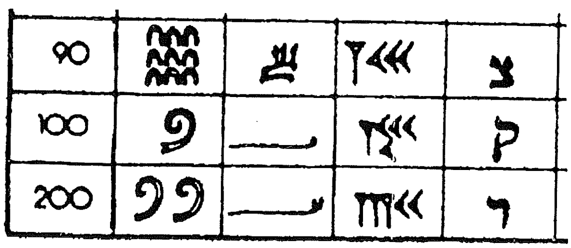
Activitat d'avaluació. Crèdit 1
Projecta d'investigació

NUMERACIONS ANTIGUES: EGIPCIA I HEBREA

Data d'inici: *28-10-92*

Data d'entrega: *7-12-92*

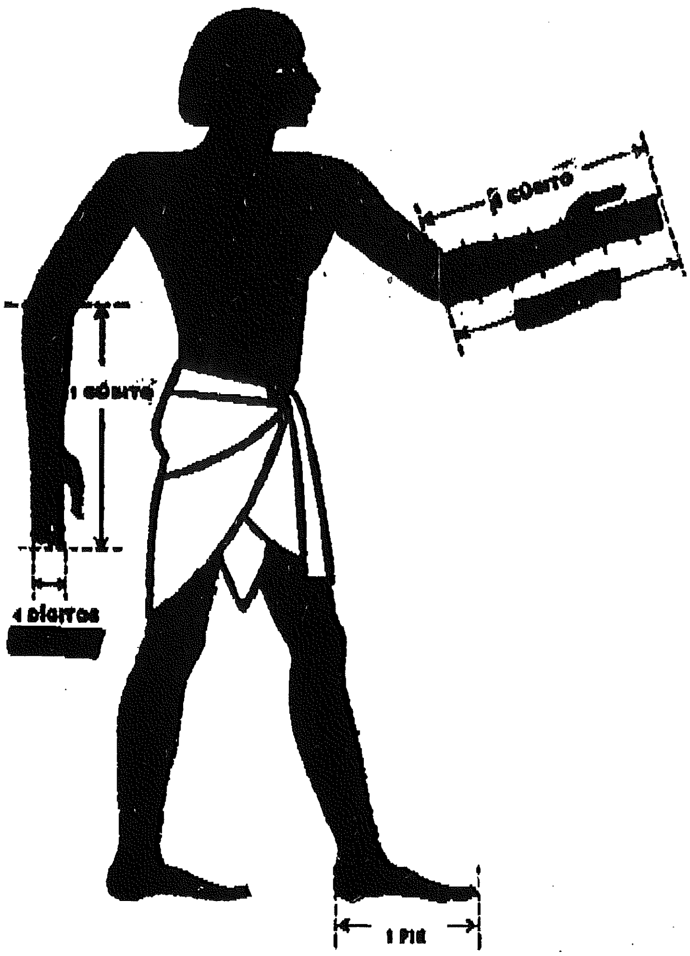
4-11-92 – Guión de trabajo



Document per l'alumne

Contingut
1. Tema. Consells generals i punt de partida.
2. Condicions per a la realització del Projecta.
3. Format de presentació de la memòria.
4. Criteris i graella d'avaluació.

EGIPCIOS



Tomaron un sistema fijo de medidas y se basaron en las proporciones del cuerpo humano, en las de su rey.

Fijándolas luego en reglas de madera o de metal. La principal unidad fue el cúbito longitud del antebrazo del hombre.

Otras medidas más pequeñas fueron:

- *El palmo equivalente a la séptima parte de un cúbito.*
- *El dígito equivalente a la cuarta parte de un palmo.*

pequeño codo .... 24 dedos

.... 20 dedos

.... 16 dedos

gran garra ...... 14 dedos

pequeña garra ...... 12 dedos

doble palma .... 8 dedos

puño cerrado ..... 6 dedos

mano .... 5 dedos

dedo 1

palma 4 dedos

La unidad de medida de superficie es la "cuerda" o set, representada por un cuadrado en el que cada lado tiene cuatro codos de largo. Losmúltipos y submúltiplas son:

o nennuh ..... 10 cuerdas

remen .... 1/2 cuerda

hepsp .... 1/4 cuerda

sa .... 1/8 de cuerda

su .... 1/16 de cuerda

runa .... 1/32 de cuerda

La unidad de lasmedidas de peso es el ten o

4. Criteris i graella d'avaluació

A. DISSENY GLOBAL I ESTRATÉGIES	Molt baix	Baix	Mitjá	Alt
1. Identificar informació	☐	☐	☒	☐
2. Treball sistemàtic i lògic	☐	☐	☐	☒
3. Extensió i aprofundíment	☐	☐	☒	☐
B. CONTINGUT MATEMÀTIC				
4. Formulació matemàtica	☐	☐	☐	☒
5. Us de llenguatge matemàtic	☐	☐	☒	☐
6. Aplicació de tècniques	☐	☐	☒	☐
C. EXACTITUD				
7. Exactitud en l'us de les matemàtiques	☐	☐	☒	☐
8. Corrocció en els resultats	☐	☐	☒	☐
D. LAREDAT I COMUNICACIÓ				
9. Explicacions clares i precises	☐	☐	☐	☒
10. Estructuració	☐	☐	☐	☒ Excepto final
E. ACTUTUD MATEMÁTICA				
11. Esperit de recerca	☐	☐	☐	☒
12. Matematització de situacions	☐	☐	☒	☐
F. AUTONOMIA				
13. Presa de decisions	☐	☐	☐	☒
14. Organització	☐	☐	☐	☒
G. VALORACIÓ GLOBAL				
15. Valoració de conclusions	☐	☐	☒	☐
16. Limitacions i perspectives	☐	☒ No están	☐	☐

Puntuació final 6

Comentaris *Pobre matemáticamente en algunos aspectos. Muy descriptivo y en un acento marcado en los aspectos históricos (bueno) olvidando la matemática en cuanto a comparación.*

Conclusión: lenguajes y construcción de conocimiento

En nuestras investigaciones y ejemplos, pensamos en la existencia de un modelo que reconozca unos pasos desde lo más intuitivo, cotidiano, real (etnomatemático), con lenguaje natural (jeroglífico) que -mediante la ayuda de metáforas y metonimias- fomente y mejore las intuiciones. Ese conocimiento se complementa y enriquece con procesos de validación y evaluación que utilizan lenguajes de tipo analógico (es como...) y establecen procesos de descubrimiento de propiedades, análisis y síntesis. Así se identifica un conocimiento cada vez más axiomático. Un ejemplo para el caso de fracciones (GIMÉNEZ 1991, siguiendo la línea expresada por T. KIEREN 1992) se describe en el esquema que aparece debajo de estas líneas.

En resumen, pues, hemos constatado en nuestra experiencia los siguientes usos de trabajo descriptivo: textos y situaciones de la historia, descripciones clásicas escritas, comunicación oral con discusión y toma de decisiones. Se ha analizado por fin brevemente la inclusión de elementos de valoración de esos procesos descriptivos.

Digamos, por último, que la inclusión de actividades adecuadas de tipo descriptivo mejoran el conocimiento y superan incluso distractores. Es especialmente paradigmático el ejemplo de STREEFLAND (1991) sobre fracciones en la óptica realista.

Tipo de conocimiento	**Uso de lenguaje**	**Ejemplo**
		El niño dice: Tomaré la «mitad mayor»
ETNOMATEMÁTICO	JEROGLÍFICO	
		El alumno usa **1** como tangente de 45º, pero sólo ve la fracción en su vertiente práctica, concreta.
INTUITIVO	METAFÓRICO	El niño reparte **2** pasteles entre **3** personas, y dice: a cada uno le toca una mitad y un tercio (de una mitad). El lenguaje de fracción se usa para acciones de reparto.
	ANALÓGICO	El alumno piensa en un algoritmo para la adición de fracciones 1/2 + 1/3 =(3+2)/(2x3)=5/6 y lo resuelve concretamente como un proceso 1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6
TECNO-SIMBÓLICO		
	DEMÓTICO	El niño ve un modelo para sumar cualquier número de fracciones y lo constata usando la equivalencia, multiplicando por **1.**
AXIOMÁTICO DEDUCTIVO		

Bibliografia

* ALSINA, FORTUNY, GIMÉNEZ (1992) **Bon dia Mates 12-16**. Generalitat de Catalunya. Barcelona.

* ALVERMANN, DILLON, O'BRIEN (1990) **Discutir para comprender. El uso de la discusión en el aula**. Aprendizaje. Visor, Madrid, pp. 16-17.

* CALSAMIGLIA, H. (1991) **El estudio del discurso oral**. Signos, 2, 44-45.

* CASSANY, E. (1988) **Descriure -escriure. Com s'aprén a escriure**. Bibl. Universal, 35, Empúries.

* EDWARDS, D-MERCER, N. (1988) *El conocimiento compatido.* Paidós-MEC. Madrid.

* GAVALDA, D. et al. (1983) **Breu viatge al món de la matematica**. Fund. Caixa de Pensions. Barcelona.

* GIMÉNEZ, J. (1991) **Innovación metodológica sobre el número racional posiVvo**. phD thesis Microfilm. Universitat Autónoma de Barcelona.

* GIMÉNEZ & FORTUNY (1994) **Geometria amb Cabri.** Generalitat de Catalunya PIE. Barcelona.

* KIEREN, T. (1988) **Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development**. In J. Hiebert & M. Behr (eds) Number concepts and operations in the middle grades. NCTM. Reston VA. pp. 162-181.

* KIEREN, T (1992) **Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding**. In T. Carpenter et al. (eds) Rational numbers. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. pp. 49-83.

* LABORDE, C. (1982) **Langue naturelle et écriture symbolique**. These d'état. Univ. scientifique et médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble.

* MASON, J. (1989) **Expressing generallity**. Open Univ. Milton Keynes.

* MATURANA, H. & VARELA, F. (1987) **The tree of knowledge.** Boston & London. New Science Library. Shambhala.

* PIMM, D. (1990) **El lenguaje matemático en el aula (TRAD).** Labor MEC. Madrid.

* PIRIE & SCHWARRZENBERGER (1988) **Mathematical discussion and mathematical understanding**. Educational studies in Mathematics 19, 459-470.

* PIRIE (1991) **Peer discussion in the context of mathematical problem solving**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes, 143-161.

* SALO, N. (1990) **La parla a la classe. Educació i ensenyança**. CEAC. Barcelona.

* STREEFLAND, L. (1991) **Fractions in realistic mathematics education.** Kluwer. Dordrecht.

* TALL & VINNER (1981) **Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

* VIGOTSKY (1962) **Thought and language**. MIT Press.

* VINNER, S. (1992) **In Vivo situations**. Unpublished paper Hebrew Univ. of Jerusalem.

Joaquín Giménez
Universitat Rovira i Virgili. Tarragona
Soc. de Professors de Matèmatiques de les Comarques Meridionals de Catalunya

Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna

Introducción

La resolución de problemas de Matemáticas es y ha sido un tema de fructíferas líneas de investigación. Distintas revisiones sobre el mismo hablan de miríadas de artículos. Se trata de un tema suficientemente amplio y que ha sido estudiado desde distintos ángulos.

Los primeros estudios se encaminaron a analizar aspectos referidos al problema en sí: enunciado, aspectos lingüísticos, tamaño de las cantidades que intervienen, contexto, etc.; o bien, a las habilidades específicas del resolutor («buenos» y «malos» resolutores). Posteriormente, y tomando como base los trabajos de **POLYA**, en especial su libro «**How to solve it**», muchos investigadores se centran en el estudio de las variables relativas al proceso.

En este trabajo pretendemos comunicar la reflexión que hemos realizado con el objetivo de diseñar un modelo de competencia para la resolución de problemas **aritméticos verbales.**

En primer lugar, expondremos algunos de los principales modelos propuestos por diversos autores, analizando más detenidamente el de **GOLDIN**, basado en los sistemas de representación. Posteriormente analizaremos algunos modelos específicos para la resolución de problemas verbales aritméticos, y terminaremos proponiendo nuestro modelo de competencia.

La resolución de problemas en general, y la búsqueda de un modelo que ayude a las personas en dicho proceso de solución, ha sido un tema investigado, tanto por parte de matemáticos como de psicólogos. Desde el punto de vista de la Psicología, diversas han sido las aportaciones más significativas a la resolución de problemas. El cuadro siguiente muestra algunos nombres importantes que se han ocupado del tema:

PSICOLOGÍA	MATEMÁTICAS
Dewey (1888)	
Asociacionismo	
Gestaltismo:	
Wallas (1926)	
Duncker (1945)	Polya (1945,1957)
Wertheimer (1945)	
Procesamiento de la información:	
Newell y Simon (1972)	
Mason, Burton y Stacey (1982)	
Mayer (1983)	
Bransford - Stein (1984)	Schoenfeld (1985)
	Goldin (1985,1987)
	Guzmán (1991)

Enfoques desde la Psicología

DEWEY, psicólogo y pedagogo **funcionalista**, que destaca por su «teoría del interés», presentó, a finales del siglo pasado, un modelo para resolver problemas (citado por PUIG y CERDAN, 1988), con las seis fases siguientes:

1. Identificación de la situación problemática.

2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

En este modelo, enfocado hacia problemas en general, podemos encontrar una secuencia que se va a repetir sin cambios significativos.

Los **asociacionistas** no aportaron grandes cosas sobre modelos, ya que entendían que en la resolución de problemas sólo interviene el empleo, más o menos mecánico, de la experiencia pasada.

Los **gestaltistas**, por el contrario, sí influyen fuertemente en las teorías actuales. Explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y es capaz de establecer la relación de las partes con dicho todo.

En «**The Art of Thought**» de **WALLAS** (1926) aparece un modelo para resolver problemas con cuatro fases:

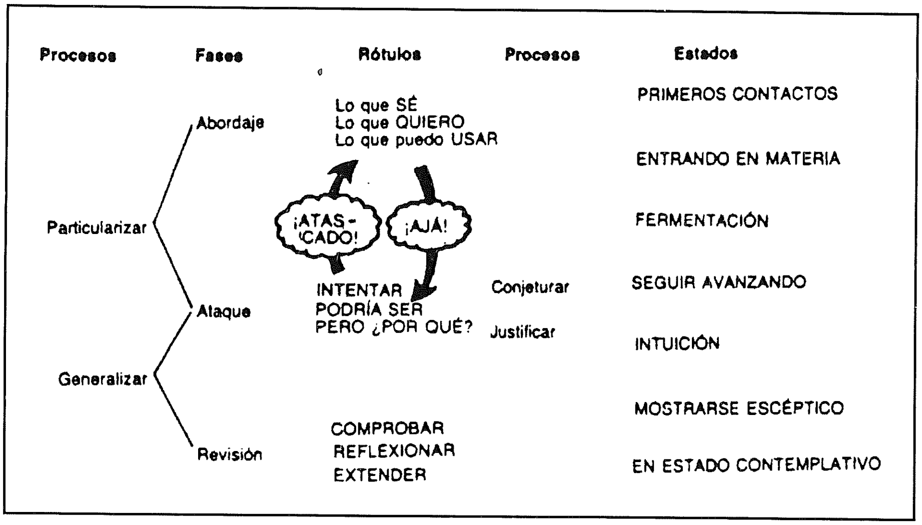
1. Preparación: Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación: Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir.
3. Iluminación: Aparece la clave para la solución (aquí es donde se produce el destello de «insight» o el «ajá»).
4. Verificación: Se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

WERTHEIMER y **DUNCKER** siguieron trabajando sobre este tema:

Wertheimer intentó demostrar que la aprehensión de las estructuras subyacentes lleva al pensamiento productivo y a la resolución elegante de los problemas.

Los trabajos de Duncker van encaminados a cómo orientar el proceso para conseguir el «insight». Insiste en el doble proceso que hay que realizar para resolver un problema: el procesamiento desde arriba, que parte del análisis de los objetivos y del replanteamiento del problema; y el procesamiento desde abajo, que parte del análisis de los elementos para llegar al objetivo del problema.

MASON, **BURTON** y **STACEY** proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o de análisis, sino una ayuda para la instrucción. En su obra «**Pensar matemáticamente**» lo esquematizan así:



El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo atacarlo de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de **POLYA** y **SCHOENFELD** (ver más adelante). Un aspecto a destacar en su modelo es la utilización, para diferenciar las fases, de lo que siente el resolutor, esto es, de sus estados afectivos.

El método **IDEAL** es otro modelo de resolución de problemas, creado por **BRANSFORD** y **STEIN**. Las letras de la palabra IDEAL indican los elementos del método. Está concebido, como ellos afirman, «con la finalidad de facilitar la identificación y reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas». Entre los autores que han inspirado este modelo se encuentra también POLYA.

Sus fases son:

I: Identificación de los problemas.

D: Definición y representación del problema.
E: Exploración de posibles estrategias.
A: Actuación, fundada en una estrategia.
L: Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

La primera fase pretende ayudar a identificar problemas. En general, los libros pasan por alto esta fase y cargan el acento en la resolución de problemas prefabricados, en lugar de detectar y utilizar problemas cotidianos.

El segundo aspecto consiste en definir y representar el problema con toda la precisión y cuidado que sea posible.

El tercero, se dirige a la exloración de distintas vías o métodos de resolución, lo que requiere analizar cómo estamos reaccionando en ese momento ante el problema y la consideración de qué otras estrategias podrían valernos. En esta etapa, el resolutor puede valerse de estrategias heurísticas tales como simplificar, empezar desde atrás, etc.

Las dos últimas fases son las que permiten al resolutor actuar y comprobar los logros alcanzados.

En las teorías basadas en el **procesamiento de la información**, se distinguen tres fases en la resolución de un problema: Preparación, producción y enjuiciamiento.

La preparación supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones. Además, una identificación del criterio de solución (comprender y concebir un plan).

La fase de producción comprende un conjunto de operaciones diversas que están relacionadas con la recuperación y el almacenamiento y la exploración y transformación de información hasta alcanzar una solución (ejecutar un plan).

Durante el enjuiciamiento se evalúa la solución generada, contrastándola con el criterio de solución (comprobar el resultado).

Los trabajos de **NEWELL** y **SIMON** (1972) sobre resolución de problemas han significado un impulso considerable dentro de este paradigma.

MAYER (1983), desde la óptica del procesamiento de la información, analiza los conocimientos necesarios para la resolución de problemas matemáticos. Considera dos estadios y, en cada uno de ellos, explicita los conocimientos necesarios.

Estadio	**Tipo de conocimiento**
Traducción	Lingüístico Semántico Esquemático
Solución	Operativo Estratégico

Conocimiento lingüístico o conocimiento de la lengua en que está redactado el problema.
Conocimiento semántico: conocimiento del significado de las palabras.
Conocimiento esquemático: conocimiento de los distintos tipos de problemas.
Conocimiento operativo: conocimiento sobre las operaciones, ecuaciones, etc.
Conocimiento estratégico: saber técnicas heurísticas o tener habilidades para saber utilizar los conocimientos disponibles para resolver un problema.

También **KULM** (1979), a partir de la clasificación sobre variables de la tarea hecha por **KILPATRICK**, creó una clasificación, similar a la de Mayer, de las variables que influyen en el proceso de resolución de un problema:

1. Variables **sintácticas**, que describen la estructura gramatical y la complejidad del enunciado del problema.

2. Variables **de contenido y de contexto**, que engloban todos los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos.

3. Variables **de la estructura**, que describen las características de la representación formal del problema y los procedimientos algorítmicos.

4. Variables **de la conducta heurística**, que incluyen los procesos heurísticos que son aplicables al problema y las consecuencias de aplicarlos.

Enfoques desde las Matemáticas

Entre los modelos propuestos por matemáticos destaca el de **POLYA**, que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Se basó en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas y en la obra de los gestaltistas, aunque también podemos encontrar coincidencias con el modelo de **DEWEY**. Sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Este modelo consta de cuatro fases que, a su vez, tiene otras subfases, y que él explica así:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan. Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares. Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Estos preceptos los descompone después a nivel molecular. Se sugiere en ellos estrategias individuales (considerando la estrategia como una técnica general para resolver problemas, que no garantiza que se encuentre la solución, pero constituye una guía para resolver el problema) a las que se podría recurrir en momentos adecuados, como:

* Si no es posible resolver el problema propuesto, búsquese un problema similar apropiado, que sí sepa resolver.
* Dé el problema por resuelto y trate de desandar el camino.
* Trate de avanzar.
* Restrinja las condiciones.
* Busque un contraejemplo.
* Tantee.
* Divida y vencerá.
* Cambie el enfoque conceptual.

El modelo de Polya se basa, como afirman Puig y Cerdán (1988) en la idea del resolutor ideal, esto es, la persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

SCHOENFELD (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: **análisis**, **exploración**, **ejecución** y **comprobación** de la solución obtenida. Para ellas ha preparado una tabulación de los principios heurísticos más frecuentemente utilizados en las Matemáticas de nivel universitario:

Análisis

1) Trazar un diagrama, si es posible.

2) Examinar casos particulares:
a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema y «adquirir mano».
b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1, 2,... y buscar una pauta inductiva.

3) Probar a simplificar el problema:
a) sacando partido de posibles simetrías, o
b) mediante razonamientos «sin pérdida de generalidad» (incluidos los cambios de escala).

Exploración

1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:
a) por sustitución de las condiciones por otras equivalentes,
b) por recombinación de los elementos del problema de distintos modos,
c) introduciendo elementos auxiliares,
d) replanteando el problema mediante
 * cambio de perspectiva o de notación,
 * considerando el razonamiento por contradicción o el contra-recíproco,
 * suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

2) Examinar problemas ligeramente modificados:
a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones).
b) Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
c) Descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.

3) Examinar problemas ampliamente modificados:
a) Construir problemas análogos con menos variables.
b) Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efecto tiene esa variable.
c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida:

1) ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?:
a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?:
a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Basándose en las variables que señala Kulm, GOLDIN (85, 87) presenta un modelo de competencia en resolución de problemas matemáticos basado en los **sistemas de representación**. (La palabra competencia describe las capacidades del individuo para ejecutar con éxito una clase de tareas, en este caso, la resolución de problemas matemáticos).

Este modelo, como él justifica, está basado en la teoría del **procesamiento de la información**, y se apoya en la idea de considerar una simulación del pensamiento humano basado en altos niveles de representación y no en un nivel de lenguaje de máquina producido por conexiones neurales.

Los sistemas de representación que utiliza son los siguientes:

1) un sistema verbal-sintáctico

2) sistemas no verbales para el procesamiento de las imágenes.

3) sistemas de notación formal

4) sistema de planificación

5) sistema afectivo

El procesamiento verbal y sintáctico es el primer sistema de representación: los alumnos parten de un enunciado, oral o escrito, que deben entender. Muchos alumnos pasan directamente de este nivel a una operación o una ecuación y, con frecuencia, utilizan para ello «palabras claves», sin comprender la situación del problema.

Un procedimiento alternativo sería transformar el enunciado verbal en una configuración de imágenes, con lo cual estarían utilizando un sistema de representación basado en el procesamiento de imágenes.

Todos sabemos que muchos alumnos necesitan «imaginar» la situación del problema para poderlo resolver. Goldin utiliza la palabra «imagen» para referirse no sólo a imágenes visuales, sino también a imágenes de palabras.

A partir de aquí el alumno estaría en mejores condiciones para pasar a un sistema de representación apoyado en el procesamiento de la notación formal.

Una gran parte del aprendizaje de Matemáticas va encaminado al dominio de una notación formal. Ahora bien, si los alumnos utilizan simultáneamente los anteriores sistemas de representación, aumenta la comprensión de los conceptos matemáticos.

El sistema de planificación comprende todos los procesos heurísticos usados por los alumnos. Algunos heurísticos han sido estudiados ampliamente y pueden mejorar los procedimientos utilizados por el alumno durante la resolución, sin embargo, tenemos dificultades para observar y comunicar como se producen estos procesos de planificación y ejecución durante la resolución de un problema.

El sistema afectivo juega un importante papel cognitivo. Comprende algo más que aspectos tales como las actitudes hacia las Matemáticas o la confianza del alumno en sí mismo como resolutor; abarca los sentimientos que experimenta una persona mientras resuelve un problema: ansiedad, frustración, placer, etc., que de alguna forma controlan su progreso a través del problema.

Uno de los últimos modelos publicados es el de **MIGUEL de GUZMÁN** (1991) que, sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor para que avance:

1. Familiarízate con el problema:
 * Trata de entender a fondo la situación
 * Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo
 * Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

2. Búsqueda de estrategias:
 * Empieza por lo fácil
 * Experimenta
 * Hazte un esquema, una figura, un diagrama
 * Escoge un lenguaje apropiado, una notación apropiada
 * Busca un problema semejante
 * Inducción
 * Supongamos el problema resuelto
 * Supongamos que no

3. Lleva adelante tu estrategia:
 * Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior
 * Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía. ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución. Revisa el proceso y saca consecuencias de él
 * Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?
 * Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona
 * Mira si encuentras un camino más simple
 * Mira hasta donde llega el método
 * Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

En la explicación de este modelo Guzmán insiste en que es necesario: tener una idea clara, un modelo, al que pensamos que nuestra forma de proceder se debe ajustar.

El modelo de Guzmán se basa en los modelos de Polya y Schoenfeld y en su propia introspección, introduciendo ampliamente refuerzos afectivos que ayuden a eliminar los bloqueos que a veces se producen.

Ahora bien, como dice **ALONSO** et al. (1988), la mayoría de estos modelos son modelos formales, construidos a expensas de un priori, que es el proceso ideal, conceptual o lógico, si se quiere, para resolver problemas.

Modelos sobre problemas aritmético-verbales

Los modelos que hemos indicado hasta ahora se refieren a problemas en general o a problemas matemáticos. Nuestra investigación está enfocada hacia la resolución de problemas **aritmético-verbales** por niños que cursan la Educación Primaria. Por ello, hemos analizado también dos modelos específicos para este tipo de problemas y dirigido a las edades mencionadas: El de **PUIG y CERDAN** y el de **De CORTE y VERSCHAFFEL**.

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritmético-verbales, que consta de las siguientes fases:

1. Lectura
2. Comprensión
3. Traducción
4. Cálculo
5. Solución
6. Revisión. Comprobación.

La fase «comprensión» de Polya la subdividen en dos etapas, **lectura y comprensión**, para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del enunciado.

La fase «elaboración de un plan» se llama aquí **traducción** y correspondería al paso del enunciado verbal a la operación u operaciones aritméticas correspondientes.

La fase **cálculo** corresponde a la de «ejecución del plan» y aquí intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes.

Las últimas fases, de **revisión y comprobación** coinciden con la de «verificación del resultado» de Polya.

De Corte y Verschaffel (1989), basándose en las teorías del procesamiento de la información y en sus propias investigaciones, han presentado un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que comprende 5 etapas:

1. Partiendo del enunciado del problema, el alumno construye una representación interna del problema en términos de conjuntos y relaciones entre estos conjuntos.

2. Sobre la base de esta representación, el resolutor elige la operación formal apropiada o la estrategia informal con el fin de encontrar el valor desconocido en la representación del problema.

3. Ejecuta la operación o acción seleccionada.

4. El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.

5. Se verifican las acciones realizadas con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

La primera etapa es la que consideran fundamental, y a ella han dirigido gran parte de sus investigaciones. La representación del problema es considerada como el resultado de interacciones complejas entre el análisis superficial y profundo del problema, contribuyendo a ello los esquemas cognitivos del sujeto.

Las dos categorías principales de esquemas cognitivos que distinguen son: el esquema semántico (cambio, comparar,...) y el esquema de los problemas verbales, el cual implica el conocimiento de la estructura de estos problemas verbales.

Nuestro Modelo

Presentamos, finalmente, nuestro modelo para resolver problemas verbales aritméticos dirigido a los alumnos de Educación Primaria. Está inspirado, como la mayoría de los anteriores en el modelo de Polya, pero hemos añadido algunos aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin.

Consta de las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado.
2. Comprensión
3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica
4. Representación, ejecución y solución formal
5. Soluciones.
6. Comprobación.

Partimos de la **lectura del enunciado**, en la cual ya se empiezan a detectar las primeras dificultades, ajenas a la propia Matemática, debidas a una falta de comprensión lectora. Generalmente, los niños necesitan leerlo unas dos veces como mínimo; la primera vez tratan de obtener una idea más global y en las siguientes van precisando los diferentes aspectos del problema.

En esta etapa de **comprensión**, les sugerimos que intenten hacer un dibujo que represente la situación, guiándolos hacia una representación más esquemática y que, prescindiendo de los detalles, se centre en los datos fundamentales del problema y posteriormente, que escriban con palabras los datos que les dan y lo que le piden calcular. En este momento ya están en condiciones óptimas para distinguir los elementos de problema y para bosquejar un camino para resolverlo. Intentamos evitar que los niños pasen directamente de la lectura, esto es, de un sistema de representación verbal a una operación aritmética (sistema de representación formal), paso que muchas veces realizan casi por azar. Durante el análisis del enunciado, se desarrolla en el niño un gestor que controla su propio avance (sistema de planificación y control) y la sensación de poder hacer, al menos, un dibujo de la situación, le produce una situación afectiva positiva (sistema afectivo).

La siguiente etapa, que no existe en los modelos anteriormente analizados, pretende que el niño, en un sistema de representación de imágenes, represente, ejecute y revise la solución obtenida mediante el uso de **representaciones visual-geométricas**. En un trabajo nuestro previo (**Socas y Hernández, 1991**) detectamos que algunas personas muestran una preferencia por utilizar aspectos de tipo gráfico-geométrico más que de tipo algebraico, tal como se refleja en los trabajos de **Krutetskii** (1976). Queremos hacer hincapié en que la utilización de diagramas no es simplemente un apoyo visual, sino otra alternativa válida para resolver problemas.

Esta fase, sin embargo, ha entrañado dificultades, por diferentes razones, al llevarla al aula (**Socas y Hernández, 1986**). Los niños, acostumbrados a un lenguaje formal, veían estos diagramas como un apoyo gráfico y no les parecía correcta la resolución de los problemas de esta forma. Existe la idea, casi generalizada, de que el objetivo de un problema es lograr una representación y resolución formal, y que, por tanto, el fin último es encontrar la operación adecuada. También hemos encontrado que la representación y solución de forma gráfica tiene una sintaxis compleja, que es necesario trabajar y comprender.

La siguiente fase es la tradicional, esto es, la **resolución** mediante la operación adecuada, cuya elección viene sugerida por el apartado anterior.

Las últimas fases, **solución** y **comprobación,** coinciden en todos los modelos, y lo que intentan es que el alumno compruebe que los resultados obtenidos son los correctos, contrastándolos con el enunciado y los datos del problema.

Nuestras fases contemplan explícitamente los sistemas de representación señalados en el modelo de Goldin. Esta presencia no es lineal, como tampoco lo es el alumno al resolver un problema, sino que intentamos que se mueva de un tipo de representación a otra, para que de esta forma al estar utilizándolas obtenga una representación mental de la situación más completa y pueda descubrir el camino para hallar la solución del problema, así como ejecutarla y comprobarla.

En el siguiente cuadro podemos comparar los tres modelos sobre resolución de problemas aritmético-verbales:

Nuestra investigación, actualmente, está centrada en el desarrollo de un diseño de instrucción en el aula para la etapa Primaria, tratando de descubrir las dificultades que se producen, las preferencias de los niños por los distintos sistemas de representación y el bloqueo que en algunos momentos se da debido a las concepciones del profesorado sobre las Matemáticas y su enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía

* ALONSO, V.; GONZÁLEZ, A.; SÁENZ, O. (1988): **Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el Ciclo Medio de la E.G.B.** Enseñanza de las Ciencias. V. 6 (3), pp. 251-264.

* BRANSFORD, J.D.; STEIN, B.S. (1987): **Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.** Barcelona. Ed. Labor.

* DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L. (1989): **Teaching word problems in the Primary School: What research has to say to the teacher**, in Greer & Mulhern (Eds): New Directions in Mathematics Education». London. Routledge.

* GOLDIN, G.A.; MCCLINTOCK, C.E. (Eds) (1984): **Task variables in Mathematical Problem Solving** Philadelphia. The Franklin Institute Press.

Puig y Cerdán (88)	**Hernández y Socas**	**De Corte y Verschaffel** (89)
1. Lectura	1. Lectura	1. Lectura y representación
2. Comprensión	2. Comprensión	2. Elección de operaciones
3. Traducción	3. Representación-ejecución y solución visual-geométrica	3. Ejecución
4. Cálculo	4. Representación-ejecución y solución formal	4. Solución
5. Solución	5. Solución	5. Verificación
6. Revisión	6. Comprobación	

* GOLDIN, G.A. (1985): **Thinking scientifically and Thinking Mathematically**. En Silver (Ed.): «Teaching and Learning Mathematical Problem Solving». Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

* GOLDIN, G.A. (1987): **Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving**, en Janvier, C. (Ed): «Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics». Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

* GUZMÁN, M. DE (1991): **Para pensar mejor**. Barcelona. Ed. Labor.

* KULM, G. (1984): **The clasification of Problem Solving Research variables**. In Goldin & McClintock (Ed): Task variables in Mathematical Problem Solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia.

* MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): **Pensar matemáticamente**. Barcelona. M.E.C. y Ed. Labor.

* MAYER, R.E. (1986): **Pensamiento, resolución de problemas y cognición**. Barcelona, Ed. Paidós Ibérica S.A.

* POLYA, G. (1957): **How to solve it**. (Traducción española: **Cómo plantear y resolver problemas**. México. Ed. Trillas. 1976).

* POLYA, G. (1962): **Mathematical discovery**. New York. Wiley.

* PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988): **Problemas aritméticos escolares**. Madrid. Editorial Síntesis.

* SCHOENFELD, A. (1985): **Mathematical problem solving**. New York. Academic Press.

* SOCAS, M., HERNÁNDEZ, J. (1991): **Analogías y diferencias observadas entre buenos y malos resolutores de problemas matemáticos**. V JAEM (en prensa).

* SOCAS, M., HERNÁNDEZ, J. et al. (1986): **Propuesta didáctica sobre resolución de problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la E.G.B.** Revista NÚMEROS, 13. Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas. Apdo. 329 La Laguna - Tenerife.

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna
Univ. de La Laguna.
Área de Didáctica de las Matemáticas
S.C. «Isaac Newton» P.M.

Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico

Mª Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

Introducción

En este trabajo se presentan los resultados de una revisión de investigaciones relacionadas con los procesos cognitivos integrados en el aprendizaje del álgebra. Nos ocupamos especialmente de los obstáculos que frenan el progreso del conocimiento del alumno y que son inherentes al aprendizaje de conceptos y procedimientos en el inicio del acercamiento al álgebra, o sea, tipos de dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el comienzo de su aprendizaje.

Sabemos que los conceptos matemáticos vinculados con el álgebra y su operatoria muestran, con frecuencia, dificultades y conflictos para los estudiantes. En este sentido se expresa D. TALL (1989) cuando indica que concebir una expresión algebraica como un objeto matemático, más que como un proceso, puede, manipulando algebraicamente, ser una fuente de conflicto.

Nuestro interés se centra en el estudio de posibles obstrucciones al aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos que presentan dificultades para el alumno, en particular aquellos relacionados con el lenguaje algebraico, con el objeto principal de intentar entender lo mejor posible el proceso cognitivo del estudiante con respecto a conceptos relacionados con el álgebra escolar, buscando así ganar evidencia o clarificar algunos esquemas de respuesta que presentan ya cierta estabilidad y que, por ello, adquieren interés para su estudio. Pretende proporcionar una perspectiva para entender e interpretar las investigaciones cognitivas existentes en la relación del álgebra y el aprendizaje inicial de la misma.

Nuestro análisis presupone que nuestro interés educativo es ayudar a los estudiantes a resolver sus dificultades y motivar a sus profesores a investigarlas.

Obstáculo cognitivo y error

Nuestra revisión de la literatura relevante sobre el tema se centró primeramente en el análisis de estudios de investigación cognitiva en general, para caracterizar e identificar más tarde la distinción entre ***obstáculo cognitivo*** y ***error***.

Las metas de la investigación han sido, en general, el análisis cuantitativo y, a veces, cualitativo, de errores cometidos por los estudiantes, con escasa distinción entre los diferentes tipos de causas que los provocan.

Es cierto que se ha investigado sobre las razones por las que un alumno se expresa o reacciona de una u otra manera, pero también es cierto que no se ha diferenciado profundamente la distinta naturaleza causal. No aparece realmente diferenciada la idea de *obstáculo cognitivo* y la de *error*, ya que se llega a expresar que los obstáculos se manifiestan por los errores, cuando éstos no se deben al azar, sino que son persistentes y reproductibles, y afloran cuando los estudiantes se enfrentan de nuevo a situaciones similares a aquellas en que se observan por primera vez y que se producen según una «lógica» de los alumnos.

Existe poca diferenciación respecto a los obstáculos cognitivos encontrados por los estudiantes y los errores que ellos cometen. Esta correspondencia no debe tomarse demasiado literalmente refiriéndonos al lenguaje algebraico, ya que se podrían identificar dificultades de aprendizaje que no son, estrictamente, de la misma naturaleza.

Nuestra propuesta es, por el contrario, que, desde el punto de vista del investigador, son distintos, ya que puede haber errores que sí son debidos a obstáculos cognitivos; otros, a falsas y prematuras generalizaciones y, otros,al mal uso de propiedades o características propias del lenguaje algebraico que no lo son de la aritmética.

Noción de obstáculo. Obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos

Para una mayor comprensión de nuestra idea, parece conveniente hacer algunas consideraciones relativas a la concepción de **obstáculo** en distintos autores.

Comenzamos indicando que, según nuestra revisión bibliográfica, la primera idea de **obstáculo** es la del filósofo francés BACHELARD (1938-1983), que está definida desde la perspectiva epistemológica y en relación al desarrollo del pensamiento científico. Identifica varias clases,según surjan desde:

* la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas,
* la tendencia a generalizar, que puede ocultar la particularidad de la situación, o
* el lenguaje natural.

Las define en el contexto del desarrollo del pensamiento científico en general, no en términos de experiencias de aprendizaje específicas, individuales. Para este filósofo, el conocimiento científico se edifica salvando obstáculos, no sólo de tipo externo, como los debidos a la complejidad de los fenómenos o a la debilidad de las facultades perceptivas humanas,sino también a los que se producen en el propio acto de conocer y que se manifiestan como una especie de inercia que provoca el estancamiento o, incluso, la regresión del conocimiento. Estos últimos son los que él denomina **obstáculos epistemológicos**.

Un trabajo sobre obstáculos relacionado con la Didáctica de las Matemáticas, nos lo encontramos en GLAESER, G. (1981), que recoge, en su ***«Epistemologie des nombres relatifs»***, la idea original de GASTON BACHELARD de obstáculo epistemológico definida a propósito de la Física, y la adapta a las Matemáticas, en especial al estudio de los números «enteros».

En 1983, el Profesor G. BROUSSEAU, en su artículo ***«Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques»*** considera ampliamente la idea de obstáculo epistemológico y su posible relación con la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Hace referencia explícita a los trabajos de BACHELARD (1938) y PIAGET (1975) y expresa que ellos muestran también que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que se quiere a veces que jueguen. «El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, que se cree en las teorías empiristas y behavioristas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus éxitos, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son intermitentes o imprevisibles, están constituidos en obstáculos».

Brousseau, que en este artículo reconoce que Bachelard es el primer autor que habla de obstáculos y que los estudia en ciencias físicas, manifiesta que la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: a Didáctica, a Psicología, a Psicofisiología, etc. Sus primeras referencias a la noción de obstáculo las manifiesta en el año 1976, en la exposición que realiza acerca de **«La problématique et l'enseignement des Mathématiques»**, en el CIEAEM de Louvain. Acuña el nombre de **obstáculos didácticos**, obstáculos que se dan en la construcción del conocimiento matemático por los alumnos. Indica que un obstáculo se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, no son fugaces, intermitentes, sino reproducibles, persistentes. Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre, para Brousseau, el fruto de una interacción del alumno con su medio y, más precisamente, con una situación que vuelve este conocimiento interesante.

Este autor clasifica los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico así:

* De origen ***ontogénico*** o ***psicogénico***, debidos a las características del desarrollo del niño.
* De orígen ***didáctico*** , que resultan de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
* De origen ***epistemológico***, intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no quiere decir que se deba ampliar su efecto ni que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido.

HERSCOVICS, N. (1989), reconoce la introducción de la noción de *obstáculo epistemológico* por parte de Bachelard y su definición en el contexto del desarrollo del pensamiento científico (no menciona a Brousseau ni sus obstáculos didácticos). El denomina por primera vez la noción de **obstáculo** en la adquisición de esquemas conceptuales por el aprendiz y lo expresa en su trabajo ***«Cognitive Obstacles Encountered in the***

Learning of Algebra», en Wagner, S. - Kieran, C. (Ed. 1989). Expresa también que para que el obstáculo cognitivo sea construido como un suceso natural necesita relacionarlo con una Teoría del Aprendizaje y se provee de la Teoría de Piaget del equilibrio, desde la cual la adquisición del conocimiento es un proceso que contiene una interacción constante entre el sujeto que aprende y el medio ambiente, entre dos mecanismos indisociables: la **asimilación** de la experiencia a las estructuras deductivas (la integración de las cosas a ser conocidas en una estructura cognitiva existente) y la **acomodación** de estas estructuras a los datos de la experiencia (cambios de la estructura cognitiva del aprendiz precisada por la adquisición del nuevo conocimiento). En términos generales, la adaptación supone una interacción entre el sujeto y el objeto de forma tal, que el primero puede hacerse con el segundo teniendo un cuenta sus particularidades, y la adaptación será tanto más precisa cuanto más diferenciadas y complementarias, sean la asimilación y la acomodación.

Siguiendo con este análisis sobre las obstrucciones en el aprendizaje del álgebra, interesa destacar lo que indica D. TALL en su trabajo ***«Different Cognitive in a Tegnological Paradigm»***, en Wagner, S., Kieran, C. (Ed. 1989). El no hace distinciones entre los obstáculos; los llama simplemente **obstáculos cognitivos**, y distingue dos tipos:

a) Obstáculos **basados en la secuencia de un tema**, en que afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

b) Obstáculos **basados sobre casos simples**, posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un período sustanclal de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Observamos que la idea de obstáculo parte de la misma fuente: el «obstáculo epistemológico» de Bachelard.

Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como: **«aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas»**.

Podemos precisar expresando que:

- Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.
- Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.
- Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

Un enfoque del problema

Dentro de todo este contexto queremos señalar que optamos por considerar los **obstáculos basados en la organización curricular**. Esta organización lleva implícita reflexión epistemológica, psicopedagógica y social, o sea, que nos ocuparemos de los obstáculos relacionados con aspectos **epistemológicos** (propios de la disciplina) y **didácticos**, y prescindiremos de los ontogénicos.

Desde este punto de vista, es decir, admitiendo la idea de obstáculo de Bachelard, Brousseau y Herscovics, afirmamos, con D. TALL (1989), que **«se puede conjeturar que los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias»**.

Por otra parte, la propia organización curricular acepta el grado de complejidad de la Matemática e implica un orden.

En la línea de nuestra opción, queremos hacer una diferenciación dentro de lo que hasta ahora se ha considerado indistintamente como obstáculo cognitivo o error, y así distinguiremos:

A) Obstáculos cognitivos.
B) Errores del algebra que están en la aritmética.

C) Errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico.

A) Obstáculos cognitivos.- Son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a otros problemas.

Como ejemplo podemos citar el que indica COLLIS (1974) relacionando las dificultades que los niños tienen en el álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. El apuntó la idea de que los estudiantes principiantes de álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Por ejemplo, si se les requiere que dos números conectados por una operación sean reemplazados por el resultado de la operación, y posteriormente se les introduce al álgebra con expresiones tales como **X+7** y **3X** para ser reemplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden «cerrarse», son expresiones «incompletas», los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que «**no hay aceptación de la falta de clausura**».

DAVIS (1975), por su parte, también plantea algunas situaciones a los estudiantes en las que se le hace difícil dar respuestas «legítimas». Esta dificultad está relacionada con la distinción entre la **adición aritmética**, donde « **+** » es una pregunta o un problema (**3 + 7**) y la **adición algebraica**, como en **X + 7**, donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Esto necesita por parte de los alumnos un «reajuste cognitivo» y es lo que Davis ha llamado dilema **proceso-producto** donde, simultáneamente, se describe el proceso y se nombra la respuesta.

La «**concatenación**», esto es, la yuxtaposición de dos símbolos, es otra fuente de dificultad para el estudiante principiante de álgebra (HERSCOVICS, 1989). También MATZ (1979), había observado que, en aritmética, la concatenación denota adición implícita, como en la numeración de valor posicional y en la notación numérica mixta. Sin embargo, en álgebra, concatenación denota multiplicación. Esto explica por qué varios estudiantes cuando se les pidió sustituir **2** por **a** en **3a**, pensaron que el resultado sería **32**. Sólo cuando específicamente se les requirió responder «en álgebra» respondieron «**3 veces 2**» (CHALOUH Y HERSCOVICS, 1988).

B) Errores del álgebra que están en la aritmética.- El significado de los signos usados es el mismo en ambas ramas de las Matemáticas. El álgebra no está separada de la aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso, a veces las dificultades que los estudiantes encuentra en álgebra, no son tanto dificultades en el álgebral como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; por ejemplo en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc. Al respecto, dice BROUSSEAU: «Podríamos considerar que hay un cambio previo, natural, que es la Aritmética, el campo primero. El Algebra sería un medio de hablar de la Aritmética, de hablar de cosas aritméticas que pedirían un **contrato didáctico** un poco especial con los alumnos». Este es un punto de vista meta-aritmético.

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como éstos:

$$1/2 + 1/3 = 1/(2+3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 1/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 2/(2+3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 2/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 1/(2\cdot 3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 1/(x\cdot y)$$

También surgen muchos errores en la suma o resta de fracciones. Por ejemplo, para calcular **3/28 + 8/35**, escriben

$$3/28 + 8/35 = (3+8) / (4\cdot 7\cdot 5)$$

que, traducido algebraicamente, da

$$x/(y\cdot z) + k/(y\cdot p) = (x+k) / (y\cdot z\cdot p)$$

Otras veces, con la preocupación de no olvidar los factores por los que hay que multiplicar los numeradores primitivos, omiten estos. Así

$$3/28 + 8/35 = (5+4) / (4\cdot 7\cdot 5)$$

Y, de forma análoga,

$$x/(y\cdot z) + k/(y\cdot p) = (z+p) / (y\cdot z\cdot p)$$

El signo « - » , sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores:

(3+5) =-3+5 ➛ **(a+b) = -a+b**

-(3+5)/4 =-3/4 + 5/4 ➛ **-(a+b) / c = -a/c + b/c**

El uso inapropiado de «fórmulas» o «reglas de procedimientos» también da lugar a errores de este tipo. Se debe a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un «puente» para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por falta de linealidad de estos operadores.

La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes independientemente. Un operador es empleado linealmente cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada parte y luego se combinan los resultados parciales. La linealidad es bastante natural para muchos alumnos, ya que sus experiencias anteriores son compatibles con hipótesis de linealidad. Entre los errores derivados, distiguimos:

I) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción), al caso de la multiplicación:

3·(4+5) = 3·4 + 3·5 ➛ **a·(b+c) = a·b + a·c**

3·(4·5) = 3·4·3·5 ➛ **a·(b·c) = a·b·a·c**

b) La estructura $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, de un modo inconsciente, para los alumnos muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado. Es la misma situación que en el trabajo con números, aunque en el caso de la suma, y si se trata de númetros pequeños en valor absoluto, suelen resolver primero la suma.

c) De la misma forma que con las potencias sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad respecto a la adición o sustracción.

Otros errores,reseñados por el **Grupo Azarquiel** (1991), pueden ser también incluidos en este apartado:

(3+4)/5 = 3/5 + 4/5 se extiende a **3/(4+5) = 3/4 + 3/5**

Y, de manera análoga,

(a+b)/c = a/c + b/c se extiende a **a/(b+c) = a/b + a/c**

Y, también:

$2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3$ a $2^{a+b} = 2^a + 2^b$ y su correspondiente traducción algebraica.

II) Errores relativos al uso de recíprocos

1/3 + 1/5 = 1/(3+5) ➛ **1/x + 1/y = 1/(x+y)**

1/3 + 1/5 = 2/(3+5) ➛ **1/x + 1/y = 2/(x+y)**

1/3 + 1/5 = 1/(3·5) ➛ **1/x + 1/y = 1/(x·y)**

III) Errores de cancelación:

(Indicaremos sólo la versión algebraica).

(x·y)/(x·z) = y/z se extiende a **(x+y)/(x+z) = y+z**

y también a:

(a·x + b·y) = a + b

(a·x + b)/b = a·x

(a·x - b)/a = x - b

Los dos últimos se pueden obtener por analogía con

a/(a·x) = 1/x

Estos tipos de errores parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas condiciones. Tanto los errores de cancelación como los cometidos al trabajar con recíprocos, se podrían haber evitado si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la nueva situación. Por ejemplo, para el error de recíprocos, la solución podría ser igualar una fracción a otra, encontrando el denominador común, y después expresando la suma de fracciones en una sola fracción.

C) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética.

Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo « = » en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal.

En el primero (sentido del signo =), aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como $\mathbf{4x - 3 = 2x + 7}$, que sólo es verdadera cuando $\mathbf{x = 5}$. A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen a la ecuación verdadera.

En el segundo (sustitución formal), queremos señalar que los procesos de sustitución que conducen de $\mathbf{3 \cdot 5 = 5 \cdot 3}$ a $\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$, son procesos formales, que no incluimos en la sustitución formal propiamente dicha, y que denominamos procesos de generalización, contemplados en el apartado **B**.

La sustitución formal se extiende más allá de la generalización. Por ejemplo, de la identidad $\mathbf{(a+ b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$, se obtiene, al reemplazar **a** por **a + c** y **b** por **b + d**, la igualdad

$$\mathbf{(a + c + b + d) \cdot (a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2}$$

donde, variables de una expresión, son sustituidas por expresiones más complejas, que son nuevamente variables.

Estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que está a mitad de camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado.

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización.

A modo de conclusión

Hemos presentado, de manera resumida, una serie de investigaciones con relación a obstáculos relacionados con el aprendizaje del álgebra escolar con distintos enfoques: epistemológico, didáctico y cognitivo.

Cabe destacar que los problemas que se han detectado sugieren que debieran considerarse desde la enseñanza.

Podríamos concluir con KIERAN - FILLOY (1989):

Hoy en día el álgebra no es meramente «dar significado a los símbolos» sino otro nivel más allá de eso, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos; por ejemplo manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, **«es lo que significa pensar algebraicamente».**

Los investigadores de la Psicología Cognitiva sobre la habilidad y destrezas algebraicas se han centrado sobre los aspectos prácticos de cómo los estudiantes **ejecutan** las tareas en lugar de los aspectos que en sí presentan mayor dificultad teórica, de cómo los estudiantes **se enfrentan** con el lenguaje algebraico y su uso.

CHAIKLIN, S. (1989) indica que estudios extensos han identificado y catalogado los errores que cometen los principiantes. Por ejemplo, al resolver ecuaciones algebraicas, CARRY LEWIS y BERNARD 1980; MATZ 1983 y SLEEMAN 1984, han encontrado que estos errores son frecuentemente sistemáticos, reflejando las creencias de los resolutores de tareas sobre lo que está por hacer. Por ejemplo, algunos estudiantes dan $\mathbf{a^2 + b^2}$ como solución de la expresión $\mathbf{(a + b)^2}$, lo que no es un error de descuido, sino que, más bien, refleja la creencia de parte de los estudiantes en procedimientos incorrectos.

Los estudios cognitivos del aprendizaje del álgebra pueden iluminar los procesos de aprendizaje de relaciones conceptuales y las dificultades particulares (individuales) a las que los estudiantes se enfrentan.

Hemos revisado una postura de diferenciación de obstáculo cognitivo y error en el uso del lenguaje algebraico y su comprensión que, a pesar de sus limitaciones, el nivel de discusión sobre la misma y el aprendizaje del álgebra, puede ser provechoso.

Hay que esperar que los educadores matemáticos puedan ser capaces de desarrollar una instrucción más efectiva para alcanzar sus metas educativas haciendo uso de los resultados proporcionados por la Psicología Cognitiva en relación a la naturaleza del aprendizaje del álgebra.

Habría que hacer una distinción entre la **dificultad cognitiva** de los estudiantes y la **cuestión pedagógica**, esto es, qué podemos hacer para ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas. Tendríamos que plantearnos el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales, identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso del álgebra. Por tanto, debemos diseñar unidades de estudio que correspondan a unidades manejables tanto por los maestros como por los estudiantes.

El tratamiento de los errores cometidos por los alumnos en el uso de expresiones algebraicas no puede ser general para todos ya que aceptan la clasificación propuesta.

El análisis de errores, como ya hemos indicado, tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza-aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores; de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. En este sentido, el profesor debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades del álgebra, que requiere un esfuerzo preciso en las dos direcciones apuntadas anteriormente, entendiéndose, obviamente, que: si al detectar un error, el alumno reconoce inmediatamente el fallo y lo corrige, aplicándolo a la generalidad de los casos, no será necesario ningún remedio; si, por el contrario, se produce con cierta frecuencia, implica que es algo más que un descuido que necesita una atención más precisa.

La superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje, que genera grandes dificultades. Las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación. Incluso, en muchos casos, parece que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos, con desilución, resurgir al poco tiempo. Por ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual de una parte del álgebra es incorrecta y darles entonces una explicación, es, a menudo, insuficiente para eliminar el error.

El estudiante debe participar activamente en el proceso de superar sus propios errores. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en su mente a partir de la inconsistencia de aquellos, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada. El profesor rara vez indica a los alumnos cuál es la respuesta correcta, sino que simplemente les pide comprobaciones y pruebas que intentan provocar contradicciones que resultan de los falsos conceptos de los estudiantes. Ellos están dirigidos a conseguir la resolución de la contradicción, mediante la solicitud de más comprobaciones y pruebas. El objetivo no es tanto hacer escribir a los estudiantes la fórmula o regla de procedimiento, como eliminar sus falsos conceptos de forma que no vuelvan a aparecer.

Otra ventaja de esta forma de tratar el problema, dado que es muy poco probable que toda la clase esté de acuerdo al mismo tiempo con la respuesta correcta, es que en la clase se generan discusiones que son excelentes, no sólo para mostrar los diferentes conceptos falsos que los estudiantes puedan tener, sino también para ayudarles a superarlos a través de sus propias interacciones.

Establecida la hipótesis de que «los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procedimiento interno de estas experiencias», concluimos con D. TALL (1989) que: una secuencia alternativa para el currículo, donde pueda llevarse a cabo, podría cambiar la naturaleza y comprensión y el tipo de obstáculo cognitivo que pueda surgir; por el contrario, si el diseño curricular se mantiene, es rígido, el tratamiento de los errores en el desarrollo del citado diseño ha de ser distinto.

Nuestro **Diseño Curricular** reconoce que cada alumno posee un determinado **nivel de competencia cognitiva general,** cuyo desarrollo, aunque guarda estrecha conexión con los conocimientos anteriores descritos, limita en algunos momentos la adquisición de otros.

Una buena didáctica presupone «una variedad de formas de actuación por parte del profesor». «La primera de ellas, por su importancia y por su eficacia, es el **conocimiento de los alumnos.** En la medida en que el profesor conozca mejor a cada uno de sus alumnos, podrá intervenir mejor en su aprendizaje».

También parece conveniente indicar que «**a través de la selección de actividades** puede conseguirse que los alumnos muy diferentes aprendan simultáneamente».

«Existe la posibilidad de plantear **actividades diferentes a distintos alumnos** o a distintos grupos de alumnos».

En relación a orientaciones sobre contenidos específicos hacemos referencia a algunas ideas expresadas en el Diseño Curricular referidas al lenguaje algebraico:

«El aprendizaje del álgebra representa un escollo importante para un buen número de alumnos. Algunas características del lenguaje algebraico, como el mayor grado de abstracción que requiere la utilización de símbolos, a menudo sin significado inmediato, lleva consigo **dificultades** insalvables para algunos alumnos», esto obliga a introducir el álgebra con gran cautela y en este nivel «pretender poco más que una **iniciación al lenguaje simbólico**».

Bibliografía

* AZARQUIEL, GRUPO (1991). **Ideas y actividades para enseñar álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje**. Ed. Síntesis. V. 33.

* BACHELARD, G. (1938). **La formation de l'esprit scientifique**. Paris Vrin 1975.

* BOOT, L.R. (1984): **Algebra: Children's strategies and errors**. Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.

* BROUSSEAU, G. (1983). **Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathematiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4,2.

* COLLIS, K. F. (1974, June). **Cognitive Development and Mathematics Learning**. Paper presented at the Psicology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

* CHAIKLIN, S. (1989). **Cognitive Studies of Algebra Problem Solving and Learning**. Research Agenda For Mathematics Education. Reseach Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner - Kieran Editors. N.C.T.M.

* CHALOUH, L. - HERSCOVICS, M. (1989): **Teaching algebraic expressions in a meaningful way**. In A. Coxford (E.), The ideas of algebra, K-12. (1988 Yearbook, pp. 33-42). Reston, VA: N.C.T.M.

* DAVIS, R.B. (1975): **Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations**. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1 (3), 7-35.

* FILLOY, E., RIOJANO T. (1985 A). **Obstructions to the Adquisition of Elementary Algebraic Concepts and Teaching Strategies**, Proceedings of the Ninth Anual Meeting of the PME, Utrech, Holanda, pp. 154-158.

* GALLARDO, A., ROJANO T. (1988). **Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9/2, 155-188.

* GLAESER, G. (1981). **Epistemologie des nombres relatifs**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 2, n°3.

* HERSCOVICS, N. (1989). **Cognitive obstacles Encounteres in the Learning of Algebra**. Research Agenda For Matematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.

* KIERAN, C. (1992). **The Learning and Teaching of School Algebra**. Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning. In D. Grouws (Ed).

* KIERAN, C. - FILLOY, E. (1989) **El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica** (traducido por Puig, L.). Enseñanza de las Ciencias, Vol.7 (3).

* PIAGET, J. Traducido al castellano por Francisco J. Fernández Buey. **Psicología y Pedagogía**. Ed. Ariel 7ª Ed. 1980. Barcelona-Caracas-México.

* SOCAS, M. M. y otros (1989) **Iniciación al Algebra**. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Ed. Síntesis. V. 23.

* SOCAS, M. M. y otros (1989). **Una clasificación de errores en Algebra**. XIV Jornadas Hispano-Lusas. Universidad de la Laguna.

* SOCAS, M.M. - PALAREA, M.M. (1991). **Enseñanza de resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas mediante la yuxtaposición de sistemas de representación**. Actas de la V JAEM (en prensa).

* TALL, D. (1989). **Different Cognitive Obstacles in a Tecnological Paradigm**. Reseach Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching for Algebra. Wagner - Kieran Editors. N.C.T.M.

Mª Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna
Univ. de La Laguna.
Área de Didáctica de las Matemáticas
S.C. «Isaac Newton» P.M.

La expresión oral y escrita en las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria: Una experiencia de trabajo en el aula

Amalia Sánchez Benito

Necesidad de trabajar aspectos lingüísticos en clase de Matemáticas

A) *Planteamiento del problema*

Las áreas que merecen un tratamiento específico, dada su importancia para la preparación de los alumnos con vistas a su incorporación a una sociedad en continuo estado de evolución, son el lenguaje y las matemáticas.

Hay, pues, que buscar una interconexión entre ambas áreas, que aunque tratadas como unidades independientes de contenido, se complementan para lograr una formación en la que los conocimientos adquiridos puedan ser trasvasados de una a otra, permitiendo una fácil asimilación y comprensión.

Los problemas que conlleva aprender a usar las matemáticas como un medio de comunicación no son los mismos que los de aprender el uso de la lengua materna. A diferencia de ésta, las matemáticas no se adquieren de modo natural, no se usan constantemente, tienen que aprenderse y practicarse. Expresan la información de un modo más preciso y concreto de lo que requieren normalmente los mensajes «gramaticales» expresados en la lengua materna habitualmente, razón también por la que los errores tienen mayores consecuencias.

Sin embargo, el lenguaje matemático y su dominio sólo son posibles cuando se conoce y utiliza de manera adecuada la lengua materna, ya que la información matemática en la mayoría de las ocasiones nos llega mediante el lenguaje oral o gráfico, a la vez que los datos obtenidos al resolver una situación problemática se suelen transmitir por los mismos medios.

No obstante, el hecho de que las matemáticas se encuentren en los planes de estudio se debe, fundamentalmente, no a su «utilidad» para la vida, sino y sobre todo, a que poseen, indudablemente, valores formativos y complementarios de la personalidad.

Tradicionalmente, al evocar «los contenidos de matemáticas» siempre se hacía referencia a conceptos y destrezas, quizás por ser más fáciles de evaluar. Es innegable, que en la actividad matemática deben estar presentes los contenidos conceptuales (hechos, conceptos y principios), pero no son los únicos que hacen mover esta actividad. A veces, lo esencial puede ser el promover el gusto por las matemáticas, saber tomar decisiones, discutir conceptos previos que tiene el alumnado al comienzo de un tema, etc. Por estas razones, se establecen otros contenidos matemáticos: los procedimentales y los actitudinales (actitudes, valores y normas).

Si atendemos a los objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en el área, los contenidos procedimentales tienen en cuenta la importancia que de los distintos tipos de lenguajes matemáticos (numérico, gráfico, algebraico, probabilístico, etc.) puede y debe darse para alcanzar los objetivos propuestos, haciendo referencia a su comprensión y uso, tanto en su expresión oral como escrita. Igualmente, aparecen términos más generales tales como sintetizar, valorar, criticar, decidir, planificar, comprobar, etc., que requieren la utilización de un lenguaje estructurado y claro, y que forman parte de estrategias heurísticas, propias de la resolución de problemas.

Existe una estrecha relación entre los **objetivos generales de la E.S.O.** y los **objetivos generales del área de matemáticas**, que pone de manifiesto el carácter eminentemente formativo de su enseñanza en dicha etapa, contribuyendo a la formación integral del alumno, y que, por tanto,no puede disociarse del conocimiento de la propia lengua.

Esta relación se pone de manifiesto en el siguiente listado de objetivos generales de los **Diseños Curriculares de Canarias - ESO - Matemáticas** (en adelante, **DCC**).

La necesidad de la utilización correcta del lenguaje se pone nuevamente de manifiesto en los DCC, que muestran la interrelación existente entre los contenidos curriculares de matemáticas, y donde puede observarse que los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales confluyen en la resolución de diferentes situaciones problemáticas. Parece, pues, evidente, la necesidad de conseguir que nuestros alumnos de Secundaria resuelvan problemas de matemáticas.

OBJETIVOS GENERAL DE ETAPA

a) Conocer y comprender los aspectos básicos del funcionamiento del propio cuerpo y de las consecuencias para la salud individual y colectiva de actos y decisiones personales, y valorar los beneficios que suponen los hábitos del ejercicio físico, de la higiene y de la alimentación.

b) Formarse una imagen ajustada de sí mismo, de sus características y posibilidades, y desarrollar actividades de forma autónoma y equilibrada, valorando el esfuerzo y la superación de las dificultades.

c) Relacionarse con otras personas y participar en actividades de grupo adoptando actitudes flexibles, solidarias y tolerantes, superando inhibiciones y prejuicios y rechazando todo tipo de discriminaciones debidas a la raza, sexo, clase social, creencias y otras características individuales y sociales.

d) Analizar los mecanismos y valores que rigen el funcionamiento de las sociedades, en especial los relativos a los derechos y deberes de los ciudadanos, elaborar juicios y criterios personales y actuar con autonomía e iniciativa en la vida activa y adulta.

e) Analizar los mecanismos básicos que rigen el funcionamiento del medio físico, valorar las repercusiones que sobre él tienen las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo como elemento determinante de la calidad de vida.

f) Conocer y valorar el desarrollo científico y tecnológico, sus aplicaciones y su incidencia en su medio físico y social.

g) Conocer, apreciar y disfrutar el patrimonio cultural y contribuir activamente a su conservación y mejora, entendiendo la diversidad lingüística y cultural como un derecho de los pueblos y de los individuos, y desarrollando una actitud de interés y respeto hacia el ejercicio de este derecho.

h) Comprender y producir mensajes orales y escritos con propiedad, autonomía y creatividad en castellano y, en su caso, en la lengua propia de la Comunidad Autónoma, y al menos en una lengua extranjera, utilizándolos para comunicarse y para organizar los propios pensamientos, y reflexionar sobre los procesos implicados en el uso del lenguaje.

i) Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos, y técnicos, articulándolos con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionando sobre los procesos implicados en el uso del lenguaje.

j) Elaborar estrategias de indentificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso segundo.

k) Obtener y seleccionar información utilizando las fuentes en que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla de manera organizada e inteligible.

l) Obtener el conocimiento indispensable de las creencias, actitudes y valores propios del patrimonio cultural y de la tradición de nuestra sociedad, a fin de poder valorarlos críticamente y de realizar aquellas opciones de valor o sentido que mejor favorezcan su propio desarrollo integral como personas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										A
c	C								B	
d								C		
e						B		B		C
f		B	B	B			C	B		
g										
h	A									
i	A	B	A							
j	B	A		A					A	
k	C	C	B							
l										

OBJETIVOS GENERALES DE MATEMÁTICAS

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, algebraica) con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, realizando medidas, utilizando distintas clases de números para recoger y tratar la información y realizando los cálculos pertinentes mediante los algoritmos apropiados a cada situación.
4. Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, valorando la conveniencia de las estrategias en función del análisis de los resultados.
5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
6. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la naturaleza, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y disfrutando de la belleza de generan.
7. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista-aleatorio, finito-infinito, exacto-aproximado, etc.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones como instrumento y modelo para conocer la realidad y para una mejor comprensión de los mensajes.
9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con formas propias de la actividad matemática tales como la exploración sistemática de alternativas, la necesidad de precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, etc.
10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar sin inhibiciones las situaciones que requieran su empleo, disfrutando con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

El célebre matemático G. POLYA, en su libro **Cómo plantear y resolver problemas,** nos proporciona unas pautas para la resolución. El cuadro que exponemos a continuación está basado en Polya y otros autores como BURTON, MASON y STACEY, así como en algunas orientaciones de SCHOENFELD.

ABORDAJE

1. Comprender el problema
* Lee el problema despacio.
* ¿Cuáles son los datos? (lo que conoces) ¿Cuál es la incógnita? (lo que buscas).
* Trata de encontrar la relación entre los datos y la incógnita.
* Si puedes, haz un esquema o dibujo de la situación.

2. Concebir un plan
* ¿Se parece este problema a otro que conozcas?
* ¿Podrías plantear el problema de otra forma?.
* Imagínate un problema parecido, pero más sencillo.
* Supón que has resuelto el problema. ¿Cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?

ATAQUE

3. Llevar a cabo el plan
* Al ejecutar el plan, comprueba cada uno de los pasos.
* ¿Tienes la seguridad de que los pasos dados son correctos?
* Antes de hacer algo, piensa: ¿para qué hago esto?
* Acompaña cada paso con una explicación que indique lo que haces y para qué lo haces.
* Si no puedes encontrar la solución, prueba de nuevo desde el principio, reordena las ideas, vuelve a intentarlo.

REVISIÓN

4. Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan.
* Examina la solución obtenida. ¿Te parece lógica?
* ¿Puedes comprobar la solución?
* ¿La solución es única? ¿Puedes hallar alguna otra?
* Explica claramente tu solución, así como el proceso seguido para calcularla.

El primer paso, esencial sin lugar a dudas, plantea serias dificultades a gran parte del alumnado. Las mayores dificultades con las que se encuentra son casi todas de origen extramatemático: incomprensión del enunciado, inseguridad o ansiedad ante la materia, miedo a arriesgarse utilizando métodos no habituales... Otras se refieren a la parte heurística del problema, esto es, a la fase que va desde la lectura del enunciado hasta la concepción de un plan de resolución; por no hablar de la última parte, en que se pide al alumno que explique el proceso seguido, así como los pasos intermedios para la resolución del problema.

Quizá los programas excesivos y a veces ilógicos, la prisa por poderlos terminar («mis alumnos no van a ser los peores») y la propia ansiedad del profesorado ante estas situaciones, ha hecho que la fase de revision sea, la mayoría de las veces, la menos trabajada en clase.

¿Es posible motivar al alumno con unas matemáticas más atractivas, participativas, inteligibles, sin olvidar los aspectos informativos y del currículo? Creemos que sí. Y este es el punto de partida de este trabajo.

B) Utilización de textos matematicos

Un currículo en el que se consoliden la reflexión y el pensamiento, partiendo de la observación, de la práctica, de la exploración y la experimentación, exige disponer de materiales variados. Se necesitan recursos que reflejen ampliamente los fines, objetivos, contenidos y métodos de enseñanza. Esto debe incluir un amplio abanico de materiales impresos; no sólo libros de texto y fichas de trabajo, sino material de referencia, libros sobre temas particulares y «material real» (folletos, hojas de publicidad, impresos, letras de cambio, etc.), que es útil para relacionar las matemáticas con la vida actual.

Existen diversos criterios para clasificar textos. Pueden utilizarse criterios extralingüísticos, tales como la intención comunicativa, el tipo de destinatario y el lugar social del texto; y criterios lingüísticos, en los que no vamos a entrar. Nos centraremos en un criterio para su clasificación: el de su intención comunicativa. La clasificación obtenida así, queda reflejada en la siguiente tabla:

TIPO DE DISCURSO	INTENCIÓN COMUNICATIVA	TEXTOS QUE CONCRETAN EL TIPO DE DISCURSO
INFORMATIVO	Transmitir al destinatario un dominio del saber social	Noticia, reportaje, crónica, documental, artículo de enciclopedia, informe, memoria, documento histórico, diagrama, cartel cultural, itinerarios, descripciones,...
EXPLICATIVO	Lograr que el destinatario comprenda	Exposición didáctica, informe explicativo; artículos y textos de manuales que describen un mecanismo o procedimiento, interpretan un fenómeno, desarrollan un proceso de razonamiento, modifican el conocimiento acerca de una determinada realidad.
PERSUASIVO	Convencer al destinatario, persuadirle acerca de algo	Anuncio publicitario en prensa escrita, radio, televisión, cartel publicitario, carta de solicitud, artículo crítico, coloquios, debates,...
PRESCRIPTIVO	Lograr que el destinatario realice una acción o tenga un determinado comportamiento social	*De instrucciones:* Consignas, avisos, recetas de cocina, instrucciones sobre el funcionamiento de objetos (calculadora), reglas de juego, etc. *Normativo:* Disposiciones legales, contratos, resoluciones.....
CONATIVO	Contactar con el destinatario	Diálogo, conversación, entrevista, tertulia, coloquio, mesa redonda.
ESTÉTICO Y LÚDICO	Recrear al destinatario, divertirle, desarrollar su fantasía	Cuento fantástico, leyenda, cuento de humor, relato de ciencia-ficción, juegos de lógica, etc.

De la observación del cuadro anterior, puede deducirse que todos los tipos de textos citados pueden ser abordados en clase de matemáticas; de hecho, casi todos los profesores los hemos trabajado, con mayor o menor intensidad, al proponer a nuestros alumnos diferentes tipos de actividades. No se trata, por tanto, de trabajar algo nuevo o revolucionario; se trata, simplemente, de reflexionar sobre la importancia de la comprensión oral y escrita de los textos y no sólo del aspecto matemático de los mismos, al cual el alumno no podrá acceder de manera adecuada si no ha realizado aquellas actividades.

Al final de este trabajo, se presentan varias actividades trabajadas en el aula, en las que la lectura y la síntesis son prioritarias en el trabajo del alumno. Sin ellas, las actividades podrían resultar, en ocasiones, demasiado mecánicas o elementales para el nivel 14-16.

Otra posibilidad de trabajar estos aspectos en el aula es el **Comentario de textos matemáticos**, dentro del cual podemos incluir cualquiera de los tipos de textos citados anteriormente. Tiene, como principales objetivos, los que siguen:

* Adiestrar al alumno en el conocimiento de su propia lengua.
* Introducirle en el dominio de un vocabulario matemático básico.
* Ayudarle en la interpretación de conceptos y símbolos matemáticos.
* Proporcionarle información y documentación.
* Proporcionarle habilidad para expresar por escrito sus ideas matemáticas.
* Ejercitarle en la interdisciplinariedad.
* Ayudarle en la elaboración de juicios críticos y opiniones positivas.
* Desarrollar la capacidad de abstracción y síntesis sobre los elementos que aparecen en el texto y expresarlos en pocas palabras.
* Conseguir una actitud positiva y activa hacia el texto matemático.
* Motivar al alumnado: Todos los alumnos pueden y saben hacer algo.
* Proporcionar al profesor una vía de trabajo para tratar la diversidad en el aula: No todos los alumnos quieren ni pueden hacer lo mismo.
* Permitir la posibilidad de trabajar áreas transversales.
* Favorecer la autonomía de aprendizaje del alumnado.

Experiencia realizada en el aula

El **I.B. «Pérez Galdós»** de Las Palmas de Gran Canaria está situado en la zona centro de la ciudad. Cuenta con 2.500 alumnos, distribuidos en turnos de mañana, tarde y noche, y con unos 140 profesores, de los cuales 70 están implicados en la E.S.O.

En este Centro, en el que se trabaja desde hace diez años la Reforma de la Enseñanza, la mayoría del profesorado que la imparte lo hace de forma voluntaria.

En el curso escolar, 1992 - 1993, se estuvo trabajando en la anticipación de la L.O.G.S.E., con un total de 40 profesores, 4 de ellos- entre los cuales me encuentro- del Seminario de Matemáticas. En el curso académico 1993-1994, se imparten 10 cursos de 3º y 4 de 4º de E.S.O.

Durante el curso pasado, con la colaboración de todo el profesorado implicado, se trabajaron los recursos de evaluación del alumnado, llegando a unos acuerdos de Centro. Uno de estos recursos, y quizá uno de los más trabajados, es la observación del cuaderno del alumno.

Esta observación precisa unas pautas tales como: correcciones y autocorrecciones, resultados, conclusiones, reflexión personal (notas, aclaraciones, síntesis, conclusiones), recopilar y utilizar adecuadamente el vocabulario específico de cada materia, utilizar gráficas y símbolos específicos de la materia, creatividad (observando si añade o no información por cuenta propia), etc. Por otra parte, y también a nivel de Centro, se acordó trabajar, como objetivo prioritario para la elaboración del Proyecto Curricular de Centro, la comprensión y expresión oral y escrita.

Metodología seguida

Ya hemos comentado algunos de los aspectos a observar en el Cuaderno del alumno, un poderoso recurso de evaluación gracias al cual puede observarse su método de trabajo, y sus progresos y deficiencias en actitudes, procedimientos y conocimientos conceptuales.

Las dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de los enunciados, así como las que encuentran cuando tienen que explicar los pasos que realizan y por qué en la resolución de un problema, así como la elaboración de resúmenes de clase, ejercicios de síntesis, etc., quedan al descubierto cuando observamos sus cuadernos.

Todos sabemos que en muchas ocasiones lo más importante de una determinada actividad no es el desarrollo aritmético o procedimental de la misma, sino las ideas o contenidos conceptuales que el alumno pueda abstraer de ella. Nuevamente, la observación de estas conclusiones, resúmenes o síntesis - algunas de las cuales comentaré después, por lo que tienen de anecdóticas - parece indicar que, o bien el alumno no ha entendido nada, o bien no sabe expresar aquello que ha entendido o aprendido. ¡Cuántas veces la famosa frase «o sea....», con la que quiere explicar alguno de sus conocimientos o resultados, contradice aquello que acaba de escribir o de obtener correctamente!

Por otra parte, para el alumno es importante interiorizar y manifestar oralmente o por escrito aquello que ha aprendido o lo que no ha aprendido. Sólo de esta manera, será capaz de plantear y resolver sus dudas, así como valorar positivamente lo que acaba de asimilar, para así motivarse a sí mismo para sucesivos aprendizajes o, lo que es lo mismo, aumentar su autoestima.

La metodología seguida ha sido la de buscar, seleccionar y diseñar actividades en las que, sin abandonar los contenidos conceptuales, se trabajase fundamentalmente la lectura y la síntesis de textos matemáticos, elaborados con el fin de motivar al alumno a la lectura del texto o a la resolución del ejercicio que plantea bajo títulos sugerentes o atractivos, en la medida de lo posible. Empleándolos una veces como introducción a un tema, tal como ocurre con determinados textos explicativos, como, por ejemplo, la actividad titulada **La música pitagórica,** en la que se pide al alumno una ficha monográfica sobre el teorema de Pitágoras, además de la correspondiente síntesis del texto, etc.; o en **Los números: ¿familia o sólo amigos?**, donde, además, se dan a conocer determinados aspectos anecdóticos de la historia de las matemáticas. Otras veces, invitando a la resolución de un problema matemáticamente fácil, pero cuya lectura implica cierta dificultad, aunque su título y contenido anima al alumnado a su resolución (**Rarezas de extraterrestres, Misiones peligrosas,**... Y, otras, a través de juegos de lógica, en los que no sólo tienen que entender en qué consiste el juego, sino criticar los resultados por ellos obtenidos, o explicar el procedimiento utilizado para su resolución, bien sea oralmente o por escrito.

Los textos de tipo prescriptivo son utilizados en algunas ocasiones. Por ejemplo, para trabajar actividades con la calculadora, se les facilitaron dos páginas con las instrucciones y utilidades de las teclas más utilizadas, en las calculadoras más comunes. Aquellos alumnos que disponían de calculadoras diferentes, debían escribir y describir cómo trabajaba la suya aquellas funciones en las que se manifestaba la diferencia de comportamiento. Otros textos de este tipo pueden considerarse los destinados a explicar cómo se resuelven determinados tipos de juegos lógicos.

Algunos textos de carácter informativo (actividad titulada **La Biblia y el número** π), cuya lectura, aparentemente fácil les crea conflictos, ya que están habituados a utilizar todos los datos que se les da en los problemas para su resolución, y no entienden el significado de «codos», «estimación», etc.

Además de los juegos de lógica, podemos hacer uso de textos recreativos o lúdicos para conseguir reforzar algunos conceptos matemáticos, como el de semejanza o el de proporcionalidad (**Un viaje a Liliput**), animando al alumno a la lectura, a la reflexión y al trabajo en grupo.

El lenguaje algebraico se ha trabajado a través de actividades como la **Historia de Diofanto,** presentada de forma que el alumno puede observar la utilidad del esquema en la resolución de un problema, y de frases más o menos largas, algunas de las cuales, cuya escritura en lenguaje vulgar es parecida, son claramente diferentes al escribirlas en forma algebraica. Por ejemplo: la sexta parte de un número aumentado en 6 unidades, y la sexta parte de un número aumentada en seis unidades, etc.

La lectura e interpretación de gráficas de funciones se trabajó a través de múltiples ejemplos sobre la vida real; por ejemplo, un viaje en moto.

No siempre es exigible en matemáticas un lenguaje preciso y riguroso. Así, en las actividades relacionadas con la estimación, en las que el alumno puede dar varias respuestas y, por tanto, no existe una solución única y tampoco una estimación es necesariamente más correcta que otra, conviene emplear el trabajo oral y la discusión en grupo. Expresarse oralmente ayuda a los alumnos a emplear la estimación y disminuye su intranquilidad por los datos que quedan escritos. Cuando los alumnos deben compartir su información y justificar cómo han llegado a obtenerla, mejoran su comprensión de los procedimientos para valorar numéricamente una cantidad y perfeccionan sus técnicas para hacer cálculos mentales. La tolerancia para el error es una consecuencia importante que debe aprenderse, a lo cual contribuye considerablemente la capacidad para transmitir estimaciones y justificar su obtención.

Otras veces, el lenguaje vulgar y el de la matemática son totalmente contrarios. Así, por ejemplo, en el lenguaje ordinario, ordenar una habitación puede ser agrupar los objetos según su utilidad, por ejemplo la ropa en un sitio, los libros en otro, los juguetes en otro, etc. Esto sería, matemáticamente, una clasificación. Igualmente, también se da confusión al contrario; así, en las páginas deportivas de cualquier periódico, se puede ver el lunes una tablas con los equipos de fútbol que es meramente ordenatoria y no clasificatoria.

Otra interferencia importante entre ambos lenguajes, puede estar en la utilización del término «semejante», utilizado en el lenguaje vulgar, como sinónimo de «parecido» e incluso como «igual», mientras que en matemáticas ese término tiene un significado más preciso. Esto suele dar lugar en ocasiones a problemas en la comprensión de algunos conceptos y es conveniente trabajar en clase la utilización e interpretación de ambos lenguajes.

Autoevaluación y evaluación

El trabajo de síntesis es un importante recurso de evaluación y autoevaluación del alumno y el profesor.

Partiendo de algunas de las actividades trabajadas en el aula, observamos las siguientes respuestas del alumnado:

En la actividad titulada **La Biblia y el número** π, algunos de los resúmenes de los alumnos fueron:

«Los antiguos no medían, aproximaban».
«Los israelitas creían que π valía 3».
«Hoy hemos aprendido que «codos» es igual que «pies», etc.

Sólo un alumno del curso mencionó en su resumen de clase que había trabajado intervalos en la recta real y que había aprendido a aproximar números por exceso y por defecto. Ninguno hizo alusión al hecho de que se pudiesen emplear términos matemáticos en La Biblia. Tampoco, al hecho de que la estimación es importante en muchas ocasiones en las que no es necesario o posible medir con exactitud.

Cuando trabajamos la división entera con la calculadora:

«Hoy hemos aprendido a dividir sin la tecla de dividir».
«Hoy hemos aprendido que dividir es restar».

En el comentario de texto titulado **«La música pitagórica»** no resumen el texto, se limitan a numerar las líneas y contestar con diez números. No elaboran la ficha sobre el teorema de Pitágoras. Simplemente escriben la expresión matemática del teorema.

Tras estas observaciones, llega el momento de retomar la situación. ¿Dónde está el fallo? No podemos pedir a los alumnos que resuman, si antes no los enseñamos a resumir. ¿Qué debe contener un resumen de clase; qué, el resumen de una actividad? ¿Qué es lo más importante de un texto? ¿Cuál es el contenido indispensable para transmitir la idea principal?...

Los alumnos que no cuentan en su resumen de la actividad referente a La Biblia que trabajaron con intervalos en la recta real, dejaron de hacerlo porque: a) no saben tomar apuntes; b) no saben concretar lo que aprendieron o, quizá, no entendieron la idea de intervalo; c) no les pareció importante; d) otras causas. Lo que si es cierto es que sólo cuando se haya interiorizado y se sea capaz de resumir esta idea, podrá decirse que el alumno la ha asimilado. «Sólo se puede decir o escribir algo de aquello de lo que se sabe algo».

Por otra parte, el objetivo antepenúltimo del trabajo de comentario de texto, hace referencia a la posibilidad de trabajar la diversidad en el aula. Efectivamente, hay alumnos que, bien por sus capacidades o bien por encontrarse especialmente motivados, desarrollan un trabajo monográfico cuya calidad y contenido es eminentemente superior al de otros. La capacidad de abstracción y síntesis, también lo es, etc. Este hecho nos da la posibilidad de trabajar en el aula las mismas fichas o actividades con distintos niveles de alumnos, permitiendo de esta forma que cada alumno llegue hasta dónde le es posible o quiere, pero no hay ningún alumno que no pueda hacer algo.

Finalmente, ¿qué evaluar en el trabajo de los alumnos, y cómo hacerlo?

1º. Se pretende que el alumnado sea consciente de los aspectos que caracterizan las situaciones problematicas: pregunta o preguntas, datos o condiciones y contexto en el que se presentan.

2º. Método de trabajo.- Este criterio lleva consigo la observación del trabajo en cuanto a orden, organización, sistematización, respeto a las normas inherentes al trabajo de grupo, cómo son las opiniones e ideas de los demás, solidaridad y colaboración en las tareas y aceptación de los juicios críticos sobre sus propios razonamientos.

3º. Capacidad para describir el proceso de resolución de problemas desde una perspectiva global, apreciando las diferentes fases que se atraviesan, y usando para ello la práctica, la reflexión y el análisis de sus propios mecanismos de resolución.

4º. Intervenciones.- Apreciar y valorar convenientemente el uso de preguntas hacia sí mismo y hacia los demás. Comprobar si aumenta su capacidad para tomar decisiones, a la vista de una determinada situación y de las variables que intervienen.

5º. Evolución del alumnado en cuanto a su capacidad, habilidad y recursos para la resolución de situaciones problemáticas.

6º. Crítica de los resultados obtenidos, valorando no tanto los resultados finales como la crítica que el propio alumno haga de ellos.

Valoración de la experiencia

La valoración de la experiencia es muy positiva. Por una parte encontramos un alumnado muy motivado ante la asignatura, entiende lo que hace, siempre puede hacer algo, lo encuentra útil o curioso, no se aburre. Por otra, sus padres han colaborado estrechamente con ellos en algunas actividades, lo que también les ilusiona. Por ejemplo, en **Juegos lógicos**, en la actividad titulada «**Saber utilizar la luz con inteligencia**», etc.

Como resultado de esta motivación positiva, los alumnos trabajan en clase con ilusión, y piden, cuando acaban su trabajo, un nuevo juego o actividad. Su actitud en clase es activa y participativa.

Algunas de las actividades propuestas

Sólo expondremos algunas de las realizadas en clase.

La música pitagórica

La indiferencia por el tema de las estrechas relaciones existentes en la Antiguedad entre la música y las matemáticas es, incluso en el mundo de la música, poco y pocas veces apreciada. Esta estrecha unión se inició muy pronto en las culturas caldea, egipcia, babilónica y china; pero fueron los pitagóricos los que con las cuerdas vibrantes unieron irrevocablemente la música y las matemáticas. La forma más sencilla de la doctrina pitagórica que asociaba la música a los números, puede ser descrita como sigue:

Si se fija uno de los extremos de una cuerda tensa y se hace vibrar, emitirá un sonido de un tono. Si se hace vibrar la mitad de la cuerda, el tono aumentará un octavo. Si vibran los dos tercios de la cuerda, el tono estará 1/5 por encima del que produjo la cuerda entera.

Estos resultados (y los intermedios) fueron utilizados por los pitagóricos para construir escalas. Poco a poco, la relación entre la porción vibrante de una cuerda y la cuerda entera fue expresándose en términos de razones. Por ejemplo, 2:3 (la quinta) era más armoniosa que 8:9 (la separación entera). Según Pitágoras, los sonidos armoniosos son producidos por razones expresadas como números enteros y, cuanto más sencilla es la razón, esto es, cuanto más pequeños son los números que la expresan, mejor es la armonía. Así, la octava, la quinta y la cuarta fueron consideradas, desde el punto de vista de la música, superiores a otros intervalos.

1. ¿En qué líneas del texto se encuentran ideas fundamentales?
2. Haz una ficha: El teorema de Pitágoras
3. Inventa otro título para el texto.
4. Reproduce en diez líneas todo el texto.
5. ¿Recuerdas algún teorema que haga referencia a la proporcionalidad de dos o más magnitudes?. Cítalo. Pon ejemplos.

Los números: ¿familia o amigos?

*Los números que tienen factores tales como 2, 3, 5, 11, 13... y así sucesivamente, se llaman «**números primos**» o, simplemente, «**primos**», derivándose este nombre de una palabra que significa «primero».*

Para la gente que ve valores misteriosos en los números, parecería como si los números primos pudieran haber existido primero, mientras que los números compuestos pudieran haber sido construidos después, sacándolos de los primos. En otras palabras, una vez que existieron los números 2, 3, y 5 pudo formarse el 60 por multiplicación de 2 x 2 x 3 x 5 .

*El primer esquema para conocer los números primos, se conoce con el nombre de su autor, **Criba de Eratóstenes**. Es simplemente un cuadrado donde aparecen los 100 primeros números y, siguiendo un procedimiento que estudiarás pronto, se van tachando los números que no son primos.*

***Euclides**, matemático griego, descubrió hace 2.200 años que no existe el número primo más alto.*

*Los griegos se entretenían jugando con los factores de los números (incluyendo el número 1 pero excluyendo el propio número para ver qué pasaba). Algunas veces, los factores de un número sumaban menos que el propio número. Por ejemplo, los factores de 10, suman sólo 8. Al número 10 lo llamaban, por esto, **número deficiente**. Los factores del 12 , es decir, 1, 2, 3, 4 y 6, suman 16; por esto, al número 12 lo llamaban **número abundante**. Por el contrario, los tres factores del 6, suman 6, y los cinco de 28, suman 28, razón por la que a números como estos los llamaban **números perfectos.** Encontraron aún más relaciones curiosas. Así, por ejemplo, decían: «dos números son **amigos,** cuando la suma de los divisores propios de uno es igual al otro y recíprocamente. Los números 220 y 284, ya conocidos por los pitagóricos, son **amigos**. **Pierre Fermat** descubrió el par de amigos 17296 y 18416. **Descartes** encontró un tercer par: 9.363 584 y 9.437 056. Más recientemente, **Paganini** descubrió la pareja 1184 y 1210. Actualmente se conocen más de 1000 pares de números amigos. No se conoce ninguna. fórmula para determinar este tipo de números.*

1. ¿En qué líneas del texto se encuentran ideas fundamentales?
2. Haz una ficha: La Criba de Eratóstenes.
3. Inventa otro título para el texto.
4. Reproduce en diez líneas todo el texto.
5. Escribe en lenguaje matemático: «Los factores del 12, (1, 2, 3, 4 y 6), suman 16».

Rarezas extraterrestres

Objetivos de la actividad:
1. Identificar las ideas fundamentales del texto.
2. Trabajar la comprensión lectora.
3. Agilizar el cálculo numérico.
4. Saber evaluar los datos.

En un planeta muy extraño, la «gente» crece a brincos duplicando su estatura. Los bebés, llamados CONGOS, se alargan de repente al doble y se vuelven niños. Igualmente, los niños, llamados MONGOS, se alargan al doble pasando a adultos, los cuales son llamados ELONGOS.

En otro planeta vecino del anterior, aún más extraño, pasa lo contrario. Los bebés, llamados TRUNCOS, se achican a la mitad al volverse niños; y los niños, llamados SUNCOS, se encogen a la mitad otra vez al pasar a ser adultos, a los cuales se les llama DUNCOS.

Un día, un mongo fue de visita al otro planeta y, jugando con suncos, se dio cuenta de que tres suncos subidos uno encima de otro igualaban su estatura.

Relaciona las alturas de:
a) Un congo y un elongo.
b) Un trunco y un dunco.
c) Un elongo y un dunco.
d) Un congo y un trunco.

Si un mongo se sube a la cabeza de un trunco, ¿cuántos truncos, uno encima de otro, se necesitarán para igualarlos?

¿Se puede hacer el problema con los datos dados?. En caso afirmativo, explica el porqué. En caso negativo, ¿qué necesitarías saber?

Misiones peligrosas

Objetivos de la actividad:
1. Motivar al alumno con la presentación de un ejercicio formulado en términos que le produce curiosidad, por su desenlace.
2. Trabajar la comprensión lectora.
3. Repasar operaciones y propiedades de los números enteros y racionales.

1) La persona que envía el mensaje {-1, 2, - 15, 6, -10, 7, 3, - 8} es una mujer, si la suma de estos números es un entero positivo; y es un hombre, si es un entero negativo. Su edad viene dada por la suma de los valores absolutos de estos números. Obtén, con estos datos, toda la información posible del mensaje.

2) El contenido del mensaje { -3, 4, -5, 8, -1, 10, -7, 7, -2, 9} es una afirmación, si el producto de los números positivos, dividido por el valor absoluto del producto de los negativos, es un cociente exacto de números enteros. En caso contrario, el contenido es una negación. ¿De qué tipo es el contenido del mensaje?.

3) Se recibe el mensaje
3.[5 - (1 - 6)] + 2.[(1 - 5) + (5 - 1)] - [(4 - 8) - (1 - 3)].
La primera cifra del resultado de esta expresión indica el día en que se envió ; la segunda, el mes. Calcula la fecha de emisión del mensaje.

4) Para averiguar el día en que se envió el mensaje de la actividad anterior, hay que sumarle 2 al opuesto del resultado, y dividir por - 6 el número obtenido. ¿Qué día se ha recibido el mensaje si el mes es el mismo que el de la emisión?

5) En el mensaje cifrado

$$\frac{-2}{-3+1} + \frac{-(7-1)}{-2} + [(-3+2] - (-1-6)] + \frac{-40}{-4}$$

el primer sumando indica el número de días que hace que se empezó una determinada misión. El segundo, el número de agentes que la llevan a cabo. El tercero, el número de objetivos de la misión. El cuarto, el número de minutos de que se dispondrá para abandonar el último objetivo. El resultado de la expresión, el número de días que se emplearán. ¿Cuánto hace que se empezó la misión? ¿Cuántos días dura en total? ¿Cuántos agentes la llevan a cabo? Si se necesitan 9 minutos para abandonar el emplazamiento del último objetivo, ¿se dispone del tiempo necesario para hacerlo? ¿Cuántos objetivos tiene la misión?.

Un viaje a Liliput

Objetivos de la actividad:
1. Fomentar el gusto por la lectura.
2. Trabajar los conceptos de semejanza y proporcionalidad.

3. Identificar las ideas esenciales del texto.
4. Fomentar el trabajo en grupo.

Doscientas costureras fueron destinadas a hacerme camisas, manteles y ropa de cama, empleando las telas más fuertes, que, sin embargo, había siempre que doblar tres o cuatro veces, porque las más recias eran algunos puntos más suaves que el más fino lino. Sus piezas de tela suelen medir tres pies por tres pulgadas de anchura. Las costureras me tomaron medidas, para lo cual me tendí en el suelo, y una se situó junto a mi cuello y otra a media pierna, sosteniendo cada una los extremos de una cuerda fuerte, mientras una tercera, con una regla, de una pulgada de longitud, comprobaba la extensión de la cuerda. Luego les bastó medir mi pulgar derecho, ya que un cálculo matemático, fundado en que una muñeca tiene dos veces el perímetro del pulgar y la cintura dos veces el del cuello, les permitió, con ayuda de un exámen de mi vieja camisa extendida en el suelo, hacerme otras ajustadas a mi medida.

1. Indica, en unidades del sistema métrico decimal, cuáles eran las medidas de las piezas de tela que usaban las costureras liliputienses.

2. Comprueba, midiendo sobre tu propio cuerpo y el de algún compañero, si los cálculos que hicieron las costureras eran correctos.

3. Como sabes, las medidas de Gulliver eran doce veces las de los liliputienses. Recuerda que la razón de las superficies es el cuadrado de la razón de las longitudes, y que la razón de los volúmenes es el cubo.

4. Teniendo en cuenta que lo que comía Gulliver dependía de su capacidad (volumen), ¿sabes qué cálculos utilizaron los liliputienses para averiguar la comida que le correspondía?

5. Sabiendo que la longitud de los liliputienses era de 12 pulgadas, ¿cuál era la altura de Gulliver en unidades del sistema métrico decimal?

6. Suponiendo que el largo de los colchones de los liliputienses era, al menos, de su misma altura, y que lo mismo ocurría con la de Gulliver, ¿qué longitud tendría que tener su colchón y cuál debería ser su espesor? ¿Crees que Gulliver tenía derecho a quejarse?

Historia de Diofanto

Objetivo de la actividad:

Traducción del lenguaje ordinario al matemático

Diofanto fue un gran matemático griego. Todo lo que se conoce de él ha sido tomado de la inscripción que figura en su sepulcro y que a continuación se reproduce. Tú deberás pasarla a lenguaje matemático y responder a las preguntas que se te formulan.

Lenguaje ordinario	Lenguaje matemático
!Caminante!, aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, !oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	
Había transcurrido, además, una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla.	
La séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.	
Y con profunda pena, descendió a la sepultura habiendo sobrevivido 4 años a la muerte de su hijo.	

¿Cuántos años vivió Diofanto?
¿Cuántos años tenía cuando se casó?
¿A qué edad fue padre?
¿A qué edad perdió a su hijo?
¿Cuántos años tenía su hijo cuando murió?

La Biblia y el número π

Objetivo de la actividad:

Realizar estimaciones sobre valores desconocidos del pasado.

La descripción que da La Biblia de lo que fue el templo de Salomón hace pensar que al cronista no le preocupaba en exceso la exactitud de los datos, tal como hoy la concebimos. En el libro II de las Crónicas se describe el altar de bronce del templo, y se hace la descripción en lo que hoy llamamos «números redondos»: Tenía veinte codos de largo, veinte de ancho y diez de alto. Los sacerdotes se lavaban en una especie de piscina de fundición «que tenía diez codos del uno al otro borde, enteramente redonda; su altura era de cinco codos y un cordón de treinta codos la ceñía en derredor».

a) Suponiendo que fuesen exactos los datos que da el cronista, ¿cuál es el valor aproximado de π que usaban los israelitas?

b) Puesto que los datos que utiliza el cronista son datos redondeados a números enteros de codos, este texto nos lleva a pensar que el diámetro de la piscina podría estar comprendido entre 9,5 y 10,5 codos. Si utilizamos π = 3,14, ¿entre qué valores estará comprendido el perímetro de la piscina?

c) Haz una estimación razonable de la capacidad de la piscina. ¿Qué sería más prudente, dar un resultado único o un intervalo posible de valores?

Adivina el número (Juego de Lógica)

Objetivos de la actividad:
1. Potenciar y estimular el trabajo en grupo.
2. Observar las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en resolución de problemas.
3. Fomentar en el alumno la evaluación de resultados.
4. Desarrollar el pensamiento lógico.
5. Motivar al alumno.

En el siguiente cuadro podrás observar un número de pistas a partir de las que podrás deducir un número de cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con 0. En la columna C (correcto), se indica cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (regular), se indica la cantidad de dígitos de la fila en común con el número buscado, pero en otra posición diferente. Adivina el número.

				C	R
				4	0
8	2	3	0	1	0
6	3	9	8	1	0
5	6	9	0	0	2
2	7	5	4	0	2

Saber utilizar la energía eléctrica con inteligencia

Objetivo de la actividad: Realizar estimaciones en situaciones reales, que proporcionen un margen de seguridad.

Información:

Cada aparato eléctrico tiene una determinada potencia. Puede verse escrita en watios en las bombillas, en las placas de características técnicas de los electrodomésticos y en los folletos y manuales de uso que entrega el fabricante. Para calcular la potencia a contratar conviene seguir los siguientes pasos:

Primero: Suma la potencia de todos los electrodomésticos que vayan a funcionar habitualmente al mismo tiempo.

Segundo: Una vez obtenida la suma total, fíjate en la tabla que da la escala de potencias normalizadas y elige, como potencia a contratar, la inmediata superior a la cantidad que hayas obtenido. Esto se debe a que el usuario no puede contratar cualquier potencia, sino que tiene que atenerse a la siguiente escala normalizada, expresada en kilovatios (kw):

0.03; 0,06; 0,77; 1,10; 2,20; 3,30; 4,40; 5,50; 6,60; 7,70; 8,80; 9,90; 11,00; 13,06

Ejercicio

«Hemos comprado un apartamento en la playa que consta de comedor, tres dormitorios, cocina y cuarto de baño.

Estima la potencia que debemos contratar si disponemos de lavadora, frigorífico, horno eléctrico, televisión, plancha eléctrica y las luces correspondientes en cada habitación».

ELECTRODOMÉSTICO	CONSUMO (w)
Lavadora	300 w (Mínimo) 2.300 w (Máx.)
Televisión	165 w
Plancha eléctrica	1.000 w
Horno eléctrico	2.000 w
Frigorífico	200 a 300 w
Bombilla	60 w

Escribe sí o no a continuación de cada pregunta.

Si contratamos una potencia de 2,20 kw, ¿podrán funcionar a la vez?:

a) El horno y la lavadora
b) Luces, frigorífico y TV
c) Lavadora y plancha
d) Horno, frigorífico, TV y luces
e) Luces, plancha, frigorífico y TV

Bibliografía

* DE GUZMÁN, M. COLERA, J. SALVADOR, A.: **Matemáticas 1º de B.U.P.**, Ed. Anaya, Madrid 1987.

* DAVIS, PHILIP J., HERSH REUBEN: **Experiencia Matemática**. 1ª ed. Ed. Labor, Barcelona 1988.

* COCKCROFT, W.H.(Informe): **Las Matemáticas sí cuentan**, 1ªed., Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid 1985.

* LAFOURCADE, PEDRO D.: **Evaluación de los Aprendizajes**. Ed. Cincel, Madrid 1977.

* UDINA I ABELLÓ, FREDERIC. **Aritmética y Calculadora**. Ed. Síntesis. Madrid 1989.

* SEGOVIA, ISIDORO; CASTRO, ENRIQUE; CASTRO ENCARNACIÓN; RICO, LUIS: **Estimación en cálculo y medida**. Ed. Síntesis, Madrid 1989.

* GRUPO BETA: **Proporcionalidad. Geometría y Semejanza**. Ed. Síntesis, Madrid 1990.

* VIZMANOS, J.R., ANZOLA, M.: **Matemáticas. Algoritmo 1**. B.U.P. Ed. S.M., Madrid 1991.

* SWIFT, JONATHAN: **Los viajes de Gulliver**. Ed. Susaeta, Madrid 1991.

* GARCÍA JIMÉNEZ, J.E.: **Ideas, pautas y estratetegias heurísticas para la resolución de problemas**. «AULA», 6 (1992), pp. 14, 15.

* GRUPO DECA: **Diseño Curricular del «Curso Taller de Resolución de Problemas»**. «AULA», 6 (1992), pp. 31, 32.

* PROYECTO ARIADNA: **Matemáticas 1º de B.U.P.** Ed. Akal. Madrid, 1985.

* MARTÍNEZ UGARTEMENDÍA, J.: **Cálculo 7º**. Ed. S.M., Madrid 1990.

* MANSILA ROMO, BUJANDA JÁUREGUI: **Pitágoras 7**. Ed. S.M., Madrid.

* MARTÍNEZ UGARTEMENDÍA, J.: **Cálculo 8º**. Ed. S.M. Madrid, 1990.

* MANSILA ROMO, BUJANDA JÁUREGUI: **Pitágoras 8**. Ed. S.M. Madrid, 1990.

* COLETTE, JEAN-PAUL.: **Historia de las Matemáticas**. 1ª Ed. Ed. Siglo XXI de España. Madrid, 1985.

* EQUIPO SIGNO: AZIMUT. **Matemáticas 8º**. E.G.B. Ed. Anaya.

* BARRIENTOS, CARMEN: **La diversidad de los discursos como eje de secuenciación**. «AULA» 14, 1993, pg. 11.

* FUENTE GONZÁLEZ: **El Departamento de Matemáticas**. Ed. Anaya/2. Madrid 1978.

* «LOGIC». **Juegos lógicos**. Ed. Zugarto.

* GOBIERNO DE CANARIAS: DISEÑOS CURRICULARES. (E.S.O). MATEMÁTICAS.

Amalia Sánchez Benito
S.C. "Isaac Newton" P.M.

La inconcreción del lenguaje matemático en los primeros años de escolarización

Fidela Velázquez

«La filosofía está escrita en este gran libro -quiero decir el Universo- que permanece continuamente abierto a nuestra vista, pero no puede entenderse a menos que uno aprenda primero la lengua e interprete los caracteres en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él; sin ellas uno vagabundea en un oscuro laberinto».

Galileo Galilei.

«Los matemáticos son como los franceses: cuando les hablas trasladan lo dicho a su propio lenguaje, e inmediatamente se convierte en algo completamente distinto».

Johann von Goethe.

Sobre el papel del lenguaje en la adquisición de conceptos matemáticos existen diversos cuerpos de teorías, en algunos casos contrapuestas. Así, todas las **teorías conductistas** ponen el énfasis en la naturaleza verbal del pensamiento, esto es, la necesidad del lenguaje para su desarrollo (para ellos, el pensamiento supone un «habla no vocalizada»).

En el otro extremo, **Piaget** considera que el pensamiento es básicamente espacial, esto es, consiste en acciones internalizadas, con lo cual el lenguaje es sólo un reflejo del pensamiento cognitivo. Esta interpretación no es nueva; ya **Aristóteles**, en su obra «Sobre la interpretación», decía: «El habla es la representación de la mente, y la escritura lo es del habla».

No obstante, algunas teorías no son tan exclusivistas al señalar una interdependencia más o menos estrecha entre lenguaje y desarrollo conceptual. Así, **Choat** (Mathematics Teaching, 1974) dice: «Aunque el sujeto que aprende interactúe con los aspectos materiales de la situación de aprendizaje, el elemento verbal es necesario tanto como medio de comunicación cuanto como instrumento de representación individual... en la adquisición de conocimiento matemático, un concepto nuevo trae consigo una palabra nueva. Falto del concepto, el niño no comprenderá la palabra; carente de la palabra, no podrá asimilar y acomodar el concepto con la misma facilidad».

Esta interdependencia es señalada, asimismo, por **Vigotsky**; e incluso **Piaget**, en su última época, admite el desarrollo paralelo de las áreas lingüística y cognitiva.

Lo que sí está claro es que la adquisición de lenguajes y de conceptos es un proceso dinámico, por lo que resulta fundamental que analicemos conjuntamente con los niños los diversos significados e interpretaciones de las palabras y frases, de forma que se elimine, en lo posible, la ambigüedad en la comunicación matemática. Este análisis podría comenzar con una negociación de significados expresados en lenguaje natural (frases descriptivas que reemplacen, en un primer estadio, ciertos términos técnicos propios de las Matemáticas) para irlos sustituyendo por términos especializados que es necesario incorporar paulatinamente al aprendizaje y a la enseñanza de la disciplina. Este es un paso previo a la exigencia-necesidad de que los alumnos entiendan lo que leen. Hasta ahora, se enseña Matemáticas de manera ajena al lenguaje usado, cargando el acento fundamentalmente en los códigos escritos y, en algunas ocasiones y de manera tangencial, haciendo referencia a los significados. Esto ha ocurrido porque ciertos métodos de enseñanza no han posibilitado realmente ni el desarrollo del lenguaje ni la formación de conceptos, al usar muy limitadamente un vocabulario básico, específico y restringido. Ello ha contribuido a un trabajo matemático no derivado del lenguaje natural, sino relacionado artificialmente con connotaciones que el alumno deduce (a menudo de manera aleatoria) de los problemas a resolver.

En las actividades escritas, lo primero a lo que se enfrenta el alumno es a la lectura de la pregunta. En esta fase, hay dos elementos que afectan a que tal lectura se realice de un modo correcto: el reconocimiento de las **palabras** usadas y el de los **símbolos** usados (código específico matemático).

Respecto al primero, existen múltiples problemas. Así, algunas expresiones matemáticas pueden no ser reconocidas por el alumno, bien porque las lee incorrectamente, bien porque las confunde con otras. La lectura incorrecta de algunas palabras por desconocimiento de su significado matemático, da lugar a errores; por ejemplo, cuando al pedir a un alumno que dibuje una **cuerda**, toma la acepción de este vocablo en el lenguaje habitual, y no la geométrica. (**Balbuena, L.** y **de la Coba, Mª. D**).

Asimismo, y es muy importante tenerlo en cuenta en aquellas comunidades con lengua propia o con alumnos procedentes del extranjero, esta confusión semántica se produce de manera acusada entre alumnos cuya primera lengua no es el castellano. Así, por ejemplo, un alumno de origen alemán, que resultó finalista en el III Torneo de Matemáticas organizado por la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, tuvo problemas con el siguiente enunciado:

«**Imagínate que estás viendo un cubo:**

a) ¿Cuántas caras puedes ver simultáneamente? Haz un dibujo en cada caso.

b) ¿Cuál es el máximo número de caras que puedes ver simultáneamente?. Razona la respuesta».

El alumno, tras una lectura detenida del problema, preguntó a la profesora encargada: «Pero, ¿cubo de figura matemática o cubo de echar agua?». Evidentemente, para alguien no castellano-hablante, tiene que resultar absolutamente contradictorio el que se llame coloquialmente **cubo** lo que matemáticamente es un **tronco de cono**.

En este aspecto, y a medida que vayan apareciendo términos específicos matemáticos, convendría ir recordando a los alumnos que, a menudo, el término habitual *no tiene* relación con el término matemático. En algunos casos, ni siquiera a cualquiera de los dos niveles en que se produce la sinonimia. En efecto, dos términos pueden ser sinónimos a nivel total o a nivel parcial. Se produce sinonimia entre A y B a nivel total, cuando A=B. La sinonimia entre A y B es parcial, si A incluido en B implica que A es B.

También dentro de esta fase referida a la capacidad de lectura, aparece el papel de la lengua como decodificadora del lenguaje matemático, esto es, el reconocimiento de símbolos específicos. Dentro de esta línea se encuentran confusiones habituales, tales como identificar el signo **<** con el signo **>**, o bien, identificar la expresión **m.c.d.** con el mínimo común múltiplo, o viceversa. La extensión de ciertas propiedades hacia campos conceptualmente inapropiados podría encuadrarse dentro de este mismo apartado. Por ejemplo, la extensión de la distributividad de la potenciación respecto a la multiplicación, a la adición: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2}$

Asimismo, ciertos errores de conceptualización, por los que se transforma una relación u operación matemática en una expresión numérica generalizada, para poder operarla por extensión, a continuación, mediante una distributividad: **sen (a + b) = sen a + sen b**.

El segundo aspecto al que se enfrenta el alumno, una vez superada la fase de lectura de la pregunta en cuanto a reconocimiento de palabras y símbolos, es la de la comprensión de la pregunta. La comprensión abarca dos aspectos fundamentales: uno, de **comprensión general** y el otro de **comprensión de símbolos y de términos específicos**. La comprensión general parece hacer referencia a lo que se conoce, con carácter general, por lectura comprensiva. Más específico es el aspecto que hace referencia a la comprensión de símbolos y de términos específicos. Este es un aspecto en el que nos gustaría incidir especialmente. En efecto, en las situaciones problemáticas al uso, aparecen algunas veces significantes que matemáticamente tienen el significado de una determinada operación, cuando la lectura y comprensión del mismo por los alumnos de corta edad les puede inducir a entender justamente la operación contraria. Así, los términos «robar», «quitar», «coger» o «tomar», que usualmente tienen el significado de sustracción, en determinados contextos significan justamente lo contrario: la adición.

A este respecto, el **Informe Cockcroft** dice:

«Es muy importante advertir la gran variedad de formas lingüísticas que se aplican para indicar a los niños las operaciones matemáticas que han de realizar. Por ejemplo, las intrucciones <<suma 3 y 5>>, <<calcula 3 más 5>>, <<haz la suma de 3 más 5>> o <<halla el número que es 3 unidades mayor que 5>> requieren todas ellas la realización de una misma operación matemática. Se trata sólo de cuatro de las muchas formas en que puede estructurarse la instrucción; la estructura verbal que se emplea con mayor frecuencia es la que surge de forma natural en el contexto del momento. Los niños han de interpretar estas instrucciones, sólo en apariencia discrepantes, emplearlas en su propio lenguaje y pensamiento y, en un momento posterior, asignar a todas ellas la forma simbólica 5 + 3. A no ser que se familiaricen con las muchas formas en que puede expresarse una misma idea matemática y sepan reconocerla pese a sus diversas formulaciones, no sólo experimentarán dificultades al enfrentarse a ejemplos del tipo citado, sino también al solucionar problemas expresados en palabras».

Esto último ocurriría, por ejemplo, en los siguientes ejercicios sacados de libros de texto al uso:

* **«En un cajón hay 23 libretas. Yo cojo 6 y Enrique 8. ¿Cuántas libretas quedan en el cajón?»**
* **«Un repartidor lleva 12 paquetes. Deja 4 en una casa y 6 en otra. ¿Cuántos paquetes le quedan?».**
* **«Yo tenía 827 pesetas. Me gasté 57 y perdí 32. ¿Cuántas me quedan?».**
* **«Pedro tiene 48 caramelos. Da 13 a Jorge y 14 a Rosa. ¿Cuántos le quedan?».**
* **Jorge tenía 12 caramelos. Ha dado 2 a su hermana, 3 a un amigo y él se ha comido 4. ¿Cuántos caramelos le quedan?».**

Los términos «coger»,» dejar», «dar», «comer» y «quedar» tienen que ver con el significado de restar. Pero en estas actividades, el camino usual es sumar los elementos en los que el total se va reduciendo. Es decir, coger o dejar una cantidad y luego coger o dejar otra, es coger o dejar en total la suma de ambas, lo que tiene que ver más con la operatoria con números negativos que con la de números naturales. Esta confusión de ciertos significantes que son tomados por los alumnos por el significado inverso al verdadero está relacionada, a nuestro entender, con ambos aspectos de la comprensión: la comprensión de términos específicos, que son confundidos (tal vez porque su formulación resulta confusa), o bien porque los contenidos, como hemos dicho, pertenecen a un dominio matemático que trasciende la edad de los alumnos y cuya comprensión les resulta dificultosa, sobre todo a los alumnos rezagados de la clase.

Respecto a otras operaciones existe también un divorcio entre el significado matemático de los términos empleados y el sentido habitual de los mismos. Por ejemplo, una de las equivocaciones más habituales de los alumnos al trabajar la multiplicación consiste en traducir el «más» de la expresión «tres veces más» por una suma. Este error se prolonga incluso durante la enseñanza secundaria. Ejemplo:

«Una niña tiene 87 pesetas. Su hermana tiene tres veces más. ¿Qué cantidad de dinero tiene su hermana?»

Respuesta incorrecta habitual: 87 + 3 = 90.

«Pedro y María suman entre los dos 52 años. Pedro tiene tres veces más años que María. ¿Qué edad tiene cada uno?

Respuesta incorrecta habitual:
Edad de María: X
Edad de Pedro: X + 3

Planteo de la ecuación: X + X + 3 = 52

(En ambos casos, el alumno se centra en la lectura del «más» identificándolo con una operación conocida y omitiendo la lectura del término «veces» que sigue a «tres»).

Errores similares -agravados con las dificultades algebraicas y la persistencia de un cierto pensamiento aditivo en los alumnos, cuyo tránsito al pensamiento multiplicativo se caracteriza, como todas las adquisiciones conceptuales, por avances y retrocesos, a lo largo de los cuales se producen las acomodaciones previas a las adquisiciones- se dan en la lectura de ejercicios como los que siguen:

* **Si al duplo de un número se le suman 21 unidades, se obtiene un número que es cinco veces mayor que el primero. ¿Cuál es este número?**

* **Reparto 32 pts. entre 2 niños de modo que uno reciba tres veces más que el otro? ¿Cuánto le toca a cada uno?**
* **La edad de un padre es actualmente siete veces la de uno de sus hijos. Dentro de 2 años, la edad del padre será sólo cinco veces mayor? ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?**

Otro aspecto a considerar es el referido a las dificultades en la comprensión general de actividades que hacen referencia a la inversión de operaciones. En efecto, el origen de esta dificultad estriba, a nuestro entender, tanto en la comprensión del sentido de la inversa de una operación (fundamentalmente por la asimetría del tratamiento de la reversibilidad del pensamiento en las actividades habituales del área), como en la comprensión general de los enunciados correspondientes, cuyo origen puede ser común a lo anteriormente descrito. Por ejemplo, actividades del siguiente tipo:

* **«¿Qué número debo añadir al 46 para obtener el 142?».**
* **Resulta que la cuarta parte de los árboles de un parque son 248 árboles. ¿Cuántos árboles hay en el parque?**

El **Informe Cockcroft** aborda el tema de los errores cometidos por los alumnos en ejercicios del tipo de los descritos, de la siguiente manera:

«Los alumnos cuyo dominio del lenguaje es vacilante, suelen soslayar sus problemas fijándose en el empleo de palabras como «más» o «menos», y considerarlas como «indicios verbales» que, en su opinión, reflejan la operación que se les pide. Sin embargo, con eso no resuelven el problema.

Véanse los dos ejemplos siguientes:

Janet tiene 5 peniques y John tiene tres peniques *más*. ¿Cuánto dinero tiene John?

Janet tiene 5 peniques y John 3. Averigua cuánto dinero tiene Janet *más* que John.

Ambos problemas contienen la palabra *más*, pero para resolver el primero hay que sumar, y para el segundo restar. En estos casos, el lenguaje sirve de puente entre la situación real (comparar monedas) y las operaciones aritméticas que han de realizarse para hallar la respuesta. No obstante, el lenguaje más bien estilizado que suele emplearse en los «problemas expresados en palabras» puede dificultar la evocación de las imágenes mentales precisas y la elección de la operación aritmética correcta, a los niños cuyas destrezas de lenguaje y lectura no sean muy sólidas. Por ellos se ven obligados a recurrir a los «indicios verbales», y los profesores han de ser conscientes de ello».

Todo este cúmulo de ejemplos es designado por diversos autores como aspectos relacionados con el meta-lenguaje y las meta-notaciones matemáticas.

Actividades similares a la que se pasa a describir (donde no incluimos las figuras que el profesor va mostrando), podrían ayudar a los alumnos a realizar elaboraciones conceptuales y ajustes mentales de los términos que definen o describen situaciones a elementos matemáticos:

Profesor al alumno:

«Describe un cuadrado»

Alumno:

«Es una figura con cuatro lados»

Profesor:

¿Esto?

Alumno:

«No. Es una figura *cerrada* con cuatro lados»

Profesor:

¿Esto?

Alumno A:

«No, es una figura cerrada con cuatro lados *iguales*»

Profesor:

¿Esto?

Alumno A:

«No, es una figura cerrada con cuatro lados iguales *y cuatro ángulos iguales (o rectos)*».

Alumno B:

«No, es una figura cerrada con cuatro ángulos *iguales (ó rectos)* y cuatro lados».

Profesor:

¿Esto?

Alumno B:

«No, es una figura cerrada con cuatro ángulos iguales (o rectos) y cuatro lados *iguales*».

Mucho más poéticamente, **Jorge Luis Borges**, en «Prólogos», dice así:

«El empleo de cualquier vocablo presupone una experiencia compartida, de la que el vocablo es el símbolo. Si nos hablan del sabor del café, es porque lo hemos probado, si nos hablan del color amarillo, es porque ya hemos visto limones, oro, trigo y puestas de sol.»

Uno de los orígenes de la última categoría de problemas de comprensión descritos anteriormente, podría estar en la enseñanza prematura (o exclusiva) de las operaciones a través de los algoritmos directos. Así, se produciría una identificación unívoca, no razonada, del término que determina el signo de la operación (por ejemplo, «más»), que contextualmente pudiera significar otra cosa distinta, con la operación que simboliza. No parece ser esta la línea que los actuales currículos pretenden hacer seguir a la enseñanza de las Matemáticas. En efecto, la pretensión de los programas que en la actualidad se están implementando es la de una enseñanza comprensible de las Matemáticas, trascendiendo de la comprensión instrumental que venía siendo habitual (saber aplicar reglas sin comprender su funcionamiento) hacia aspectos de comprensión relacional (saber qué ha de hacerse en los casos concretos y estar en condiciones de relacionar estos procedimientos con conocimientos matemáticos más generales, como podrían ser las propiedades de la numeración de posición y de las distintas propiedades de las operaciones: asociativa, conmutativa, distributiva, ...) e incluso, si procediera, de comprensión integral (reconstrucción del camino que conduce al resultado, conociendo las razones de los pasos que se siguen).

El problema estriba en los hábitos de enseñanza-aprendizaje adquiridos. Nuestro aprendizaje de las operaciones (y que transmitimos a los alumnos) está tan ligado a su algoritmo, que se suele confundir la operación con el algoritmo que la resuelve, porque el algoritmo introducido a edades muy tempranas sitúa el énfasis en la obtención correcta y rápida del resultado. Así, se da prioridad al automatismo en detrimento de la comprensión. En este sentido, la finalidad de la enseñanza de los algoritmos pasa de ser la operación algoritmizada a situar el objetivo en el propio algoritmo.

Una enseñanza fundada en los algoritmos al uso:

a) Tiene como objetivo el propio algoritmo.
b) Los problemas que se proponen son ejercicios para practicar.
c) Son más fáciles y rápidos de enseñar.
d) Es un camino firme y seguro para el profesor, porque reproduce su propia experiencia de alumno.

No obstante, y lo que produce aprendizajes significativos, es una enseñanza comprensiva en sentido amplio, que

a) utilice el algoritmo como herramienta,
b) sea la respuesta a situaciones problemáticas y no al revés,
c) evite los males producidos por la no comprensión de lo que ocurre, esto es:

- Idea equivocada de cómo es y cómo funciona la matemática.
- Menosprecio a la inteligencia de los alumnos.
- Fuente de errores.
- No hay recuerdo posterior para reconstruir pasos.
- Falta de flexibilidad.

David Fielker lo expresa muy adecuadamente así:

«No voy a decir que los algoritmos de lápiz y papel no deberían enseñarse, pero sí diré que solamente deberían enseñarse como parte del arsenal de técnicas de que disponemos para ayudar a comprender los números y no porque sean útiles».

Un ejemplo, y una cuestión abierta es la necesidad de explicar el algoritmo tradicional de la multiplicación por medio de la propiedad distributiva (o doblemente distributiva) del producto. El problema es, de un lado, cuál de las distributividades es la más adecuada, y del otro, cuándo introducir el producto así, de manera que se convierta en el referente posterior de la distributividad aplicada al ámbito algebraico.

Las posibilidades entre las que optar serían las siguientes:

* Multiplicación tradicional justificada:

$$26 \times 34 = 26 \times (4 + 30) = 104 + 780 = 884$$
$$26 \times 34 = 26 \times (30 + 4) = 780 + 104 = 884$$

La anticipación algebraica a que da lugar es del tipo

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

* Multiplicación posicional absoluta (con todas las variantes posibles):

$$26 \times 34 = (20 + 6) \times (30 + 4) =$$
$$20 \times 30 + 20 \times 4 + 6 \times 30 + 6 \times 4 = 884$$

Esta variante da lugar a la anticipación algebraica

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

* Multiplicación posicional absoluta de **Freudhental** (para Freudhental, la imagen natural es la distribución bidimensional, la tabla de doble entrada):

	20 + 6	
30	**30 x 20**	**30 x 6**
+ 4	**4 x 20**	**4 x 6**

Este paso gradual del dominio de los números al álgebra es uno de los aspectos más abandonados de las Matemáticas. El resultado es doble: De un lado, ciertos alumnos se algebrizan en exceso, con lo cual se produce un menoscabo de la comprensión numérica en general. De otro, una vez introducido el álgebra, ciertos alumnos con capacidades formales poco desarrolladas, evitan todo trabajo matemático al no considerar la posibilidad de seguir trabajando numéricamente muchos aspectos abordados innecesariamente a través del álgebra. Así, el siguiente problema (ANAYA 1. Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador) fue resuelto como se describe por Victoriano, un alumno con un extraordinario razonamiento aritmético, pero (o tal vez por eso), resistente a ser «algebrizado»:

Problema

«Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones sencillas tiene? ¿Cuántas dobles?.

Respuesta

Cada habitación tiene al menos una cama. Por tanto, se necesitan 50 camas para 50 habitaciones con una cama. Nos sobran 37 camas que colocar, que se pondrían en las habitaciones que van a ser dobles. Por lo tanto, habrá 37 habitaciones dobles y 50 - 37 = 13 habitaciones sencillas.

Como dice **Eisner,** «Cada situación educativa en la que se toman decisiones es significativamente única, no sólo en el sentido temporal y espacial, pues todas las situaciones son únicas por esas circunstancias, sino en tanto que las metas, métodos, personas y contexto difieren de una a otra significativamente y deben ser tratadas en función de esas diferencias si se quiere ser efectivo».

Así, y en aras de la comprensión, los problemas de Manolito serían menos porque asumiríamos, con **Bruner**, que:

«Cualquier materia puede ser enseñada efectivamente *en alguna forma honradamente intelectual* a cualquier niño en cualquier fase de su desarrollo» (Bruner, J.- «El proceso de la educación»).

Las Matemáticas, en suma, podrían ofrecer a todos los niveles, uno de los aspectos más motivantes de las mismas y que tiene que ver con su comprensibilidad: «ver» un concepto, un elemento, un problema matemático con los sentidos e intelectualmente, y compartir con los demás tal visión proporcionará (acorde a cada nivel) una expresión de placer similar a la que tenía el rostro de **Andrew Wiles** al ofrecer a sus colegas, al mundo y a sí mismo, la demostración del **Ultimo Teorema de Fermat**. Tan sólo por la expresión de placer que reflejaba la cara del matemático en ese momento, merecería que tal demostración fuese la correcta.

Bibliografía

* BALBUENA ,L. y de la COBA, Mª D.: **Una investigación sobre los contenidos conceptuales de los alumnos que acceden a 1º de BUP** (en prensa).

* BRUNER, J.: **El proceso de la educación**. UTEHA. México.

* CASTRO, E.; RICO, L. y CASTRO, E.: **Números y operaciones**. Ed. Síntesis. Madrid 1987.

* DICKSON, BROWN y GIBSON.: **El aprendizaje de las Matemáticas**. Ed. Labor - MEC. Madrid. 1992.

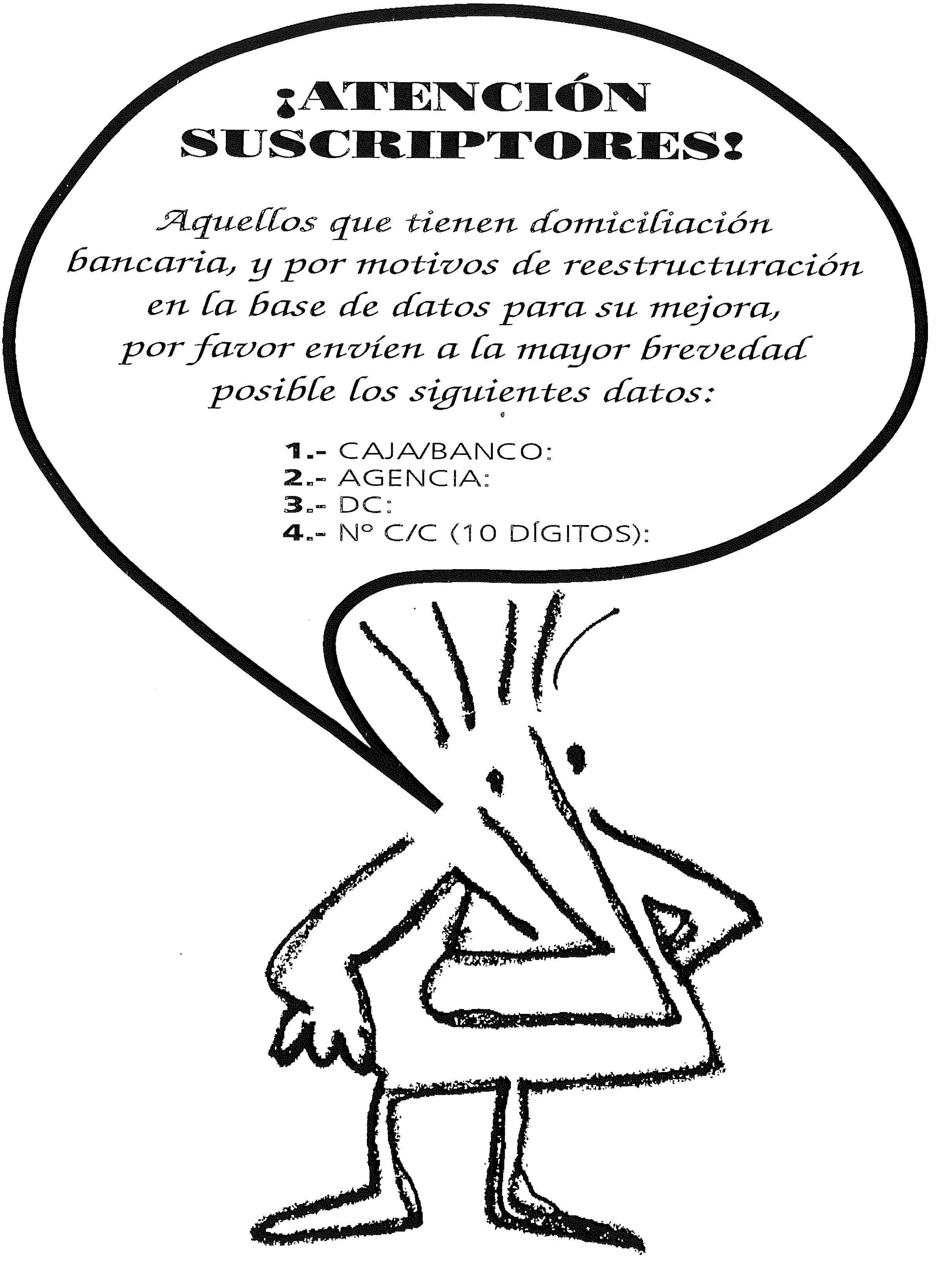
* Informe COCKCROFT. **Las Matemáticas sí cuentan**: MEC. Madrid. 1985.

* GÓMEZ ALFONSO, Bernardo.: **Numeración y Cálculo**. Ed. Síntesis. Madrid 1988.

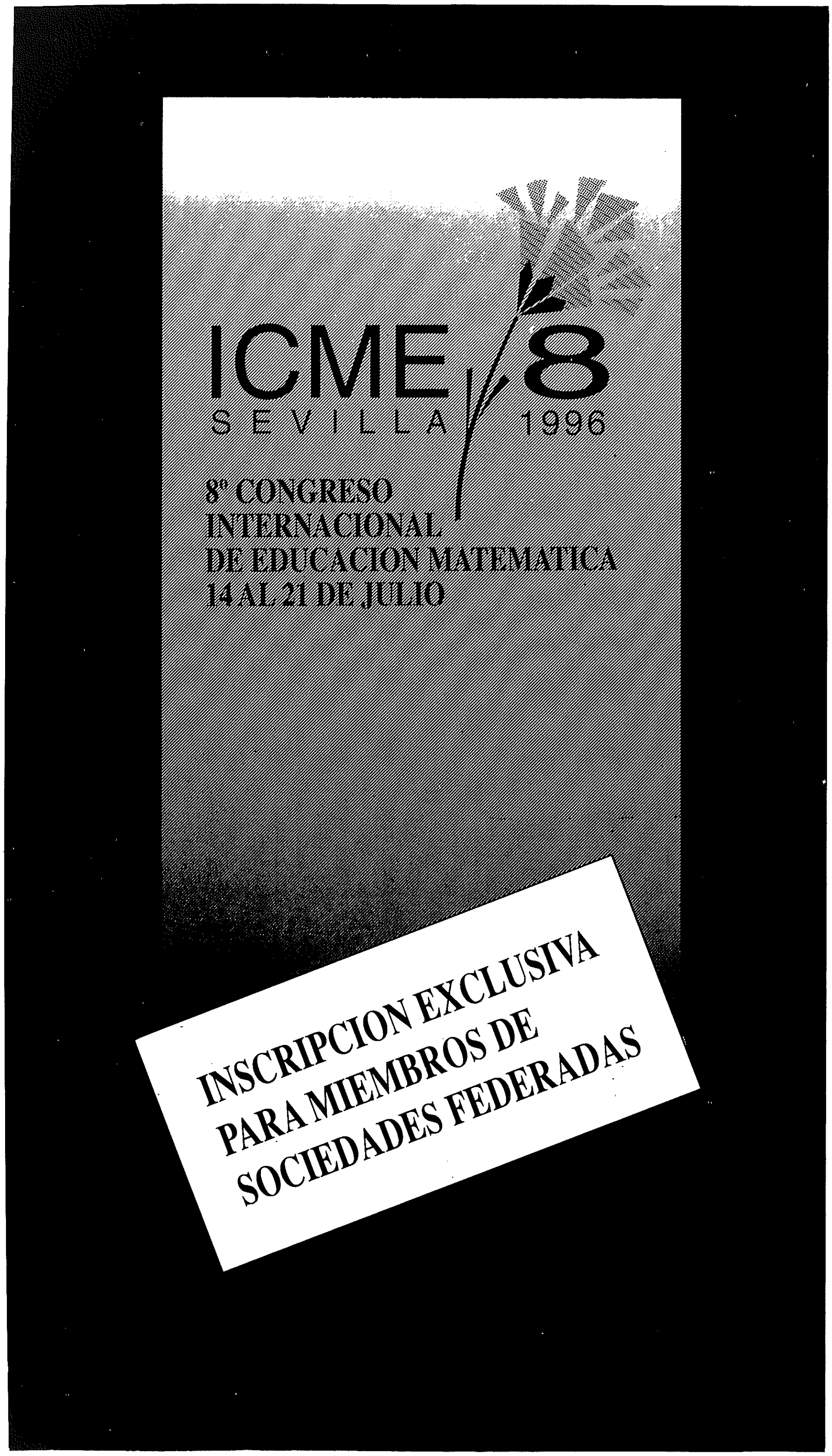
* PIMM, D.: **El lenguaje matemático en el aula**. Ed. Morata - MEC. Madrid 1990.

* PUIG, L.; CERDÁN, F.: **Problemas aritméticos escolares**. Ed. Síntesis. Madrid 1988.

Fidela Velázquez
S.C. "Isaac Newton" P.M.


¡ATENCIÓN SUSCRIPTORES!
Aquellos que tienen domiciliación bancaria, y por motivos de reestructuración en la base de datos para su mejora, por favor envíen a la mayor brevedad posible los siguientes datos:
1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS):

INFORMACION



El Presidente del Comité Nacional del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), en representación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), tiene el placer de anunciar que dicho Congreso tendrá lugar en Sevilla, España, del 14 al 21 de julio de 1996. Los anteriores ICME'S tuvieron lugar en Lyon (Francia), Exeter (Reino Unido), Karlsruhe (Alemania), Berkeley (U.S.A.), Adelaide (Australia), Budapest (Hungría) y Québec (Canadá) bajo los auspicios de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), una subcomisión de la Unión Matemática Internacional (IMU).

El ICME-8 pretende continuar esta serie de Congresos con el objetivo de ampliar el desarrollo de la educación matemática para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Le invitamos a participar en el ICME-8 en cuyo programa se incluirá una amplia variedad de actividades científicas y un vasto programa cultural y social para los congresistas y acompañantes y donde tendrá la oportunidad de intercambiar opiniones y discutir nuevas ideas sobre las claves de la educación matemática, dentro de un marco internacional.

ICME 8
SEVILLA 1996

8º CONGRESO
INTERNACIONAL
DE EDUCACION MATEMATICA
14 AL 21 DE JULIO

EXCLUSIVO PARA MIEMBROS DE SOCIEDADES FEDERADAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

ROGAMOS CUMPLIMENTAR A MAQUINA O MAYUSCULAS. BOLETIN VALIDO PARA UN SOLO PARTICIPANTE

PARTICIPANTE / Datos personales

APELLIDOS		NOMBRE
DOMICILIO	D.N.I.	TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA
NOMBRE SOCIEDAD FEDERADA		

PARTICIPANTE / Datos profesionales

CENTRO DE TRABAJO		N.R.P.
DOMICILIO		TELEFONO
CODIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA
NIVEL	☐ INFANTIL ☐ PRIMARIA ☐ SECUNDARIA ☐ ESCUELA UNIVERSITARIA ☐ UNIVERSIDAD	

CUOTA DE INSCRIPCION (válida solo hasta el 30 / 6 / 95)

☐ PAGO UNICO .... 30.000 pts. Antes del 30. 6. 95

☐ PAGO APLAZADO
primer plazo .... 10.000 pts. Antes del 31. 7. 94
segundo plazo.............. 20.000 pts. Antes del 30. 6. 95

ANULACIONES

Hasta 31.12.95 devolución del 100% del importe.

Desde el 1.1.96 de acuerdo con la norma general de inscripción al Congreso.

MEDIO DE PAGO

Exclusivamente mediante transferencia bancaria a nombre de:
ICME 8

EL MONTE CAJA DE HUELVA Y SEVILLA
Oficina Principal Sevilla
c/c. nº 009/1304718335
(Adjuntar comprobante de la transferencia)

IMPORTANTE:
Para esta inscripción no se considerará ningún otro medio de pago que no sea transferencia.

USO EXCLUSIVO SECRETARIA TECNICA
FECHA DE RECEPCION: ----------------------
REGISTRO NUMERO: ------------------------

ROGAMOS REMITIR ESTE BOLETIN A:
ICME 8
Apartado de correos 4172
41080 Sevilla

FECHA: -------------------------

FIRMA: -------------------------

NOTA:
La inscripción no será considerada definitiva en tanto no reciba confirmación escrita desde la Secretaría Técnica.

SECRETARIA TECNICA: BOREAL S.A.

F. Sánchez Bedoya, 7-2º - Tlfnos: (95) 421 89 84 / 421 89 85 - Fax: (95) 421 83 34 - Télex: 72522 - 41001 SEVILLA

UPC
Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtica Aplicada II

TEMU-95

Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad

Segundo Anuncio

Barcelona, 16, 17 y 18 de febrero de 1995

Tema de las Jornadas

El objetivo fundamental es poner en común las experiencias innovadoras que se vienen realizando en la universidad sobre la utilización de nuevos recursos, especialmente informáticos, en la enseñanza de las Matemáticas.

Los temas centrales de las jornadas son: Cálculo Simbólico, Álgebra Computacional, Cálculo Numérico y Software Matemático.

Conferencias y Comunicaciones

Las jornadas se estructurarán en conferencias invitadas y comunicaciones.

Conferenciantes invitados: Claudi Alsina (Universitat Politècnica de Catalunya), Keith Devlin (Saint Mary's College, Moraga, California), Jacques Morgenstern (Université de Nice, Sophia Antipolis), Jordi Saludes (Universitat Politècnica de Catalunya), Steve Skiena (State University of New York at Stony Brook), Tomás Recio (Universidad de Cantabria), Sebastià Xambó (Universitat Politècnica de Catalunya).

Presentación de comunicaciones: Las comunicaciones deberán presentarse en su versión definitiva antes del 30 de septiembre de 1994, para su examen por el Comité Científico. Las comunicaciones aceptadas se incluirán en las Actas de las Jornadas, que serán entregadas al inicio del TEMU-95.

El texto de las comunicaciones no deberá sobrepasar las diez hojas y la duración de la presentación será de veinte minutos. Las normas precisas referentes a formato se enviarán aparte a quienes deseen presentar comunicación y las soliciten.

TEMU-95

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

Inscripción

Nombre y Apellidos: ....

Dirección profesional:

Universidad: ....

Centro: ....

Departamento: ....

Dirección: ....

Código-ciudad: ....

Teléfono profesional: ....

Correo electrónico: ....

Fax: ....

Situación profesional: ....

¿Presentará comunicación? ☐ Sí ☐ No

Importe inscripción (20.000 Pts.) ....

Importe cena social (5.500 Pts./pers.) ....

Total abonado ....

Forma de pago: ☐ Talón ☐ Transferencia

Alojamiento

¿Reserva alojamiento? (antes del 30-11-94) ☐ SÍ ☐ No

Día de llegada.......................... Día de salida ....

Zona preferente del hotel: ☐ Campus ☐ Centro Ciudad

Habitación: ☐ Individual ☐ Doble

Si es doble, especificar el nombre y apellidos de la segunda persona

....

Observaciones: ....

Enviar a Secretaría de TEMU-95. Adjuntar talón o fotocopia de transferencia.

Comités

Comité Científico: Josep Grané (U.P. Catalunya) (coordinador), Alfonsa García (U.P. Madrid), José Luis Hueso (U.P. Valencia), Celestino Montes (U. Sevilla), Marc Noy (U.P. Catalunya), Eugenio Roanes (U. C. Madrid).

Comité Organizador: Antonio Montes (coordinador), Albert Avinyó, Josep Ma. Brunat, Ferrán Hurtado, Montserrat Maureso, José Luis Ruiz, Vera Sacristán, Pilar Sobrevilla.

Inscripción

El precio de la inscripción es de 20.000 Pts. Incluye las Actas de las Jornadas y los almuerzos de jueves y viernes. La cena social (opcional)tendrá lugar el viernes y tiene un coste adicional de 5.500 Pts./pers.

La inscripción puede hacerse efectiva enviando talón nominativo a nombre del Departamento de Matemática Aplicada II (U.P.C.), o por transferencia bancaria a la cuenta Num. 2100-3648 # 25-011204-62 de "la Caixa", Agencia 3648, Av. Diagonal 647, 08028 - Barcelona, en cuyo caso se ruega enviar fotocopia a la Secretaría de TEMU-95 en previsión de confusiones o extravíos.

Secretaría de TEMU-95

Universitat Politècnica de Catalunya
Tel: (93) - 401 69 22

Departament de Matemàtica Aplicada II
Fax: (93) - 401 70 40

Edifici U
c/ Pau Gargallo, 5
08028-Barcelona

E-mail: temu95@ma2.upc.es

Alojamiento

Disponemos de una interesante oferta de alojamiento por parte de la prestigiosa cadena NH al precio aproximado de 4.000 Pts. por persona en habitación doble compartida y de 7.000 Pts. en habitación individual. Los hoteles son RALLIE*** y LES CORTS***, cercanos al Campus, y CALDERON**** y PODIUM****, en el centro de la ciudad. Si desea que le reservemos alojamiento, indíquelo en la hoja de inscripción y envíela antes del 30-11-94.

Fechas Clave

30-9-94	Límite de recepción de las comunicaciones.
1-11-94	Notificación de aceptación de las comunicaciones.
30-11-94	Límite para inscripción con reserva de alojamiento.
10-1-95	Fecha límite de inscripción a tarifa normal.
16-2-9	Celebración de las Jornadas.

Convocatorias

Secretaría General de la Federación
Dirección de la Revista SUMA
Editor del Servicio de Publicaciones de la Federación

En marzo de 1995 se cumplen los cuatro años desde que fueron elegidos el Secretario General de la Federación y el Director de la Revista SUMA, por tanto, según señalan nuestros Estatutos y su Reglamento, llega la hora del relevo.

La Junta de Gobierno de la Federación, en su reunión de San Martín de Castañeda, decidió proceder a la convocatoria para cubrir estos cargos unipersonales. Reproducimos a continuación los artículos de los Estatutos y del Reglamento que rigen dicha elección:

Estatuto

Art. 14. El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años.

Art. 15. Son funciones del Secretario General:

a) Actuar como secretario en la Comisión Permanente y en la Junta de Gobierno, custodiando sus actas.
b) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno del Presidente.
c) Ordenar gastos.
d) Informar a los asociados de las actividades de la Federación.
e) La Coordinación general de las actividades de la Federación.
f) Organizar la elaboración de estudios y trabajos que redunden en beneficio de la Federación y que hayan sido aprobados en la Comisión Permanente o en la Junta de Gobierno.
g) Llevar la correspondencia de la Federación.

Reglamento

Art. 9. El Secretario General de la Federación será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años y rendirá cuenta de su gestión anualmente ante la Junta de Gobierno.

Art. 10. Podrá ser candidato cualquier socio de las Sociedades federadas. La solicitud, dirigida al Presidente de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste que es socio activo.
b) Una memoria de un máximo de tres folios, a doble espacio y por una cara, en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General, así como los contenidos de las tres vocalías previstas.

Art. 11. La Junta de Gobierno convocará el puesto de Secretario General mediante la comunicación a las Sociedades federadas, dos meses antes de finalizar su mandato o, en el caso de haber presentado su dimisión, dando un plazo mínimo de dos meses para la presentación de candidaturas.

Art. 12. El Presidente convocará una reunión de la Junta de Gobierno para proceder a la designación del Secretario General entre los candidatos presentados. Una vez decidida la designación lo comunicará a las Sociedades federadas.

Art. 13. Si no se presentara ningún candidato a Secretario General, o ninguno de los presentados recibiera la confianza de la Junta de Gobierno, ésta quedará facultada para designar a un socio que ocupará el cargo accidentalmente y por un plazo no superior a dos años dentro de los cuales realizará una nueva convocatoria.

Por lo que se refiere al Director de la Revista SUMA, el Reglamento dice lo siguiente:

Art. 14. La Revista SUMA la edita la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Su Director será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años y rendirá cuentas anualmente de su gestión ante la Junta de Gobierno.

Art. 15. Podrá ser candidato a Director de la Revista SUMA cualquier socio de cualquiera de las Sociedades Federadas. La solicitud, dirigida al Presidente de la Federación, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado en el que conste que es socio activo.
b) Un proyecto en el que se exponga su línea editorial, las características técnicas de la revista y un presupuesto económico de ingresos y gastos.
c) Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la Revista.

Art. 16. La Junta de Gobierno convocará el puesto de Director de la Revista mediante la comunicación a las Sociedades federadas dos meses antes de finalizar su mandato, o en caso de dimisión, dando un plazo mínimo de dos meses para la presentación de candidaturas.

Art. 17. La Junta de Gobierno nombrará un miembro del Consejo Editorial por cada una de las Sociedades federadas a propuesta de las mismas, mediante certificación de su correspondiente Junta Directiva. Los grupos de renovación, investigación y otras instituciones relacionadas con la Educación Matemática propondrán miembros de sus colectivos para cubrir cinco puestos en el Consejo Editorial; la Junta de Gobierno designará a cinco personas entre los candidatos presentados. La convocatoria para esta elección se realizará obligatoriamente junto con la del Director de la Revista.

Art. 18. El Presidente convocará una reunión de la Junta de Gobierno para proceder al nombramiento del Director de la Revista SUMA y a la elección de los miembros del Consejo Editorial entre los candidatos presentados. Una vez decidida la designación lo comunicará a las Sociedades federadas.

Art. 19. Si no se presentara ningún candidato a Director de la Revista SUMA, o a puestos del Consejo Editorial, o los presentados no recibieran la confianza de la Junta de Gobierno, ésta quedará facultada para designar a un socio que ocupará el cargo correspondiente accidentalmente y por un plazo no superior a dos años entro de los cuales realizará una nueva convocatoria.

El Servicio de Publicaciones fue creado por la Junta de Gobierno en septiembre de 1993. Las bases para la designación del Editor responsable de este Servicio son:

El Servicio de Publicaciones será coordinado por un Editor que deberá ser un socio propuesto por su Sociedad Federada. Será elegido por la Junta de Gobierno de la Federación, nombrado vocal ad hoc de la misma y será asesorado por un Comité Editorial.

Son funciones del Editor las siguientes:

a) Proponer a la Junta de Gobierno para su aprobación, la composición de un Consejo Editorial de no más de cuatro personas (excluido el Editor).
b) Elaborar su proyecto bianual de publicaciones que presentará a la Junta de Gobierno para su aprobación. Dicho proyecto deberá:

- Incluir las propuestas de publicaciones que reciba de las distintas Sociedades, debidamente informadas por el Comité Editorial.
- Contener publicaciones que a juicio del Comité Editorial puedan resultar convenientes.
- Especificar las características, interés y viabilidad económica de cada publicación, así como, los mecanismos de edición y distribución.

c) Colaborar con los Servicios de Publicaciones de las distintas Sociedades Federadas.
d) Establecer canales de colaboración con otras entidades públicas o privadas que puedan favorecer el desarrollo del Servicio de Publicaciones.

Plazos

Quienes deseen presentarse a alguno de esos puestos convocados, deberá enviar a la Secretaría General los documentos que se solicitan, antes del 30 de enero de 1995.

Designación

La Junta de Gobierno se reunirá entre los meses de febrero y marzo de 1995 para proceder a designar al responsable de cada puesto convocado entre quienes se hayan presentado, o en su defecto, actuar como indican los Estatutos.

SUMA

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C.P.: ________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) ________

CIF/NIF: ________________ Centro de Trabajo ________

Firmado: ______________________ Fecha: ________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ________________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº________ Fecha ____________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: ________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: ________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: ________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

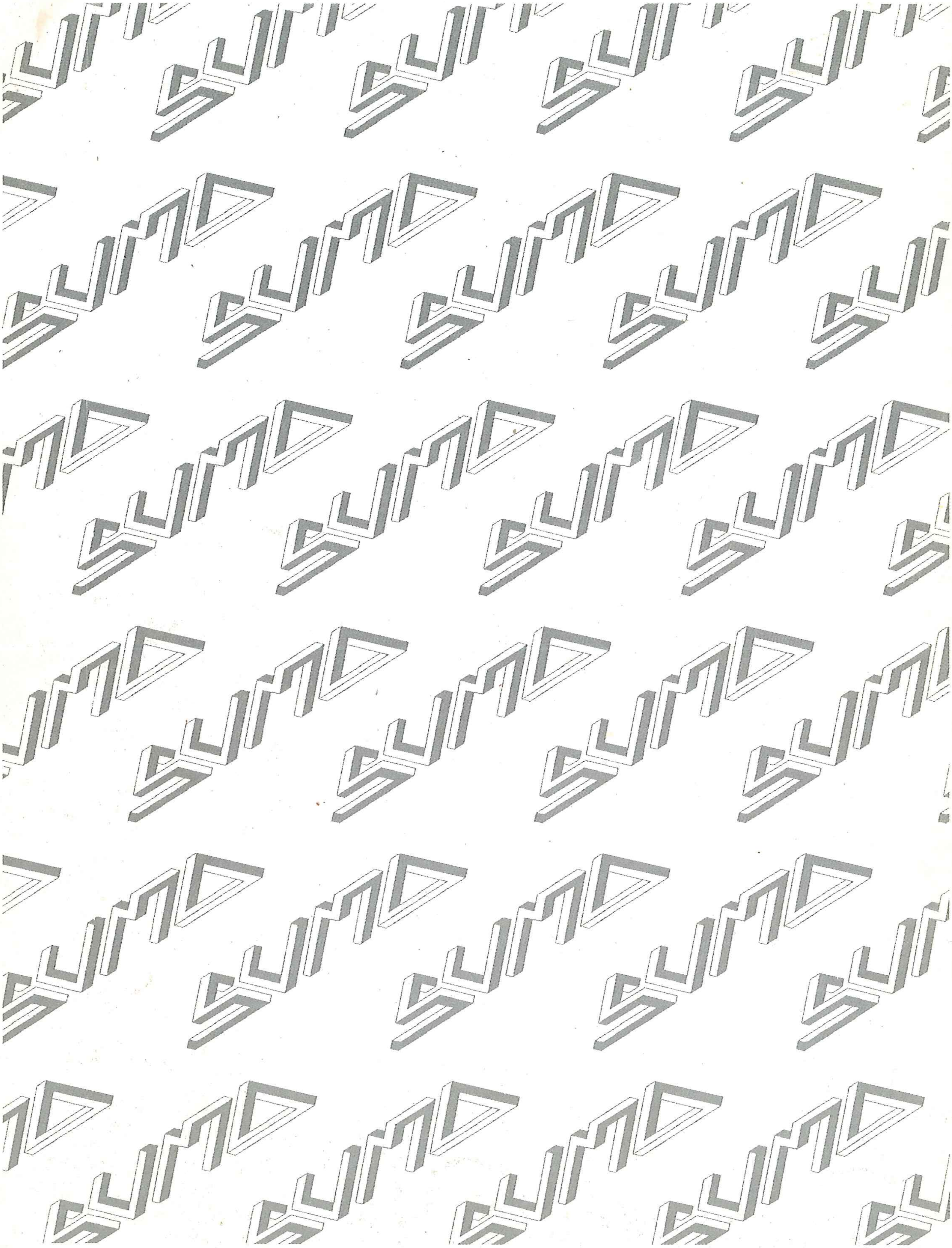
Revista SUMA, Aptdo. 1304. 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

¡ATENCIÓN SUSCRIPTORES!

Aquellos que tienen domiciliación bancaria, y por motivos de reestructuración en la base de datos para su mejora, por favor envíen a la mayor brevedad posible los siguientes datos:

1.- CAJA/BANCO:
2.- AGENCIA:
3.- DC:
4.- Nº C/C (10 DÍGITOS):



PARA COLECCIONAR

SUMA

Nº 7

El *Calendario Matemático* se realiza para proporcionar a los profesores un instrumento que sirva para animar a los estudiantes a la resolución de problemas matemáticos, plantear retos a sus capacidades, presentar curiosidades, proponerles que indaguen en la historia de los matemáticos, suscitar la curiosidad por las relaciones numéricas y las formas geométricas y relacionar las matemáticas con otras manifestaciones culturales.

La selección de las propuestas se realiza para que tengan cabida en las matemáticas de los últimos cursos de E.G.B. y los primeros de B.U.P. o F.P., los estudiantes que en un futuro próximo cursarán la etapa de Secundaria Obligatoria. Los problemas se pueden aprovechar para complementar, profundizar o reforzar la programación de la asignatura.

En lo referente a los contenidos hemos considerado interesante diversificar los contenidos del calendario en una serie de secciones que intentamos mantener fijas.

* La parte central la constituye una colección de problemas matemáticos: geométricos, numéricos, algebraicos, y probabilísticos, muchos de ellos sacados de los libros de matemática recreativa y otros de los libros de matemática escolar. El enunciado suele ser conciso e intenta atraer a los estudiantes hacia su resolución.
* Análisis geométrico de obras de arte: pintura, escultura, arquitectura, etc. Mosaicos y diseños tanto actuales como de la antigüedad.
* Diseños geométricos en la naturaleza y en objetos realizados por distintas culturas: simetría, crecimiento, etc.
* Figuras y objetos imposibles, ilusiones ópticas y figuras indecibles.
* Hechos históricos interesantes ocurridos a matemáticos célebres. Anécdotas, sucedidos, chistes o chascarrillos que tengan que ver con las matemáticas.

Actualmente se publica mensualmente en los suplementos de educación de los diarios Información de Alicante y Levante de Valencia.

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khwārizmī"

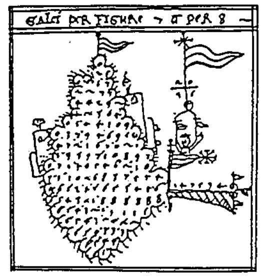
CENTRES DE PROFESSORS

Abril 94

Calendario Matemático - 15

Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes | Sábado | Domingo

1 DIVISIÓN por el método de LA GALERA. Siglo XVI

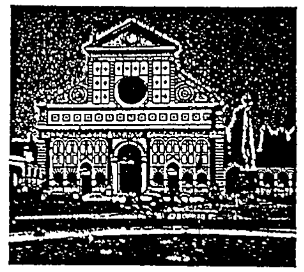


2 DESPIDO

Un amo promete darle a su sirviente al cabo de año 10 monedas de oro y una capa. Al terminar el séptimo mes le da la capa y dos monedas de oro.

¿Cuál es el valor de la capa?.

3 SANTA MARÍA DE NOVELLA



4 ¿CÓMO LO EXPLICAS?

Cinco por cuatro veinte, más dos, igual a 23.

¿Cómo puede ser eso cierto?.

5 LA DERIVADA

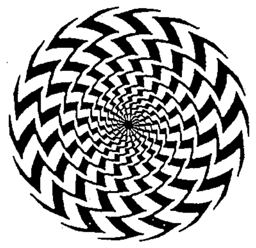
¿Qué tiene que ver la siguiente frase con el concepto matemático de derivada?

"Vamos mejorando, el ritmo de empeoramiento es cada vez menor"?.

6 PESADAS

Disponemos de 9 bolas exactamente iguales en apariencia, pero una pesa algo más. Con una balanza de dos platillos, busca un procedimiento para averiguar en dos pesadas cuál es la que pesa más.

7 NICHOLAS WADE. Spiral



8 SERIE I

Continúa la serie siguiente teniendo en cuenta que para ello no hace falta saber sumar:

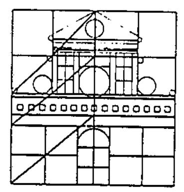
1
11
21
1211
111221

9 SERIE II

¿Aparecerá alguna vez el número 4 en la serie anterior?

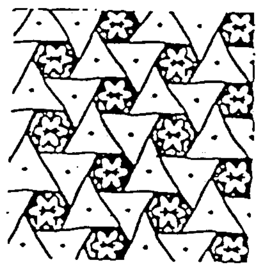
¿ 4 ?

10



Las proporciones en Santa María de Novella

11 MOSAICO PERSA



12 CALCETINES

¿Cuántos calcetines deben prepararse para una población en la que la tercera parte de los habitantes tienen un solo pie y la mitad de los restantes prefieren ir descalzos?

13 DIAGONALES

Hemos contado las diagonales de un polígono regular y salen 29, pero estamos convencidos de haber contado alguna de menos.

¿En cuánto nos hemos equivocado?.

14 LA MONEDA ANTIGUA

Alicia encontró una moneda del emperador Augusto junto a una fecha, el año 27 antes de cristo (27 a.c.). Para calcular su valor, se la llevó al anticuario que, tras una rápida mirada, se la devolvió diciendo: "No hay duda de que es falsa".

¿Cómo lo supo con tanta facilidad?.

15 REGLA

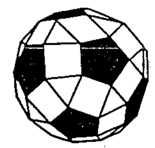
Una regla que supuestamente debe medir 12 cm. de largo, se ha deformado y actualmente mide 11.5 cm. Si mides una cuerda de 4 metros con esta regla. ¿Cuánto medirá la cuerda realmente?.

16 EL BALÓN DE FÚTBOL

Cuanto mayor es el número de caras de un balón, mejor se adaptará a la superficie de la esfera.

El icosaedro truncado tiene 32 caras: 12 pentágonos y 20 hexágonos y ocupa el 87.74% de la esfera.

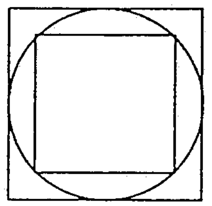
17



El rombicosidodecaedro tiene casi el doble de caras, 62, distribuidas en 12 pentágo-nos, 30 cuadrados y 20 triángulos y ocupa el 94.32%.

18 CUADRADOS

El cuadrado grande tiene una superficie de 60 cm². ¿Cuál es la superficie del cuadrado pequeño?.



19 EL RUMOR

Un pueblo tien 2550 habitantes. A las 8 de la mañana tres personas se enteran de una noticia. Cada persona, al cabo de media hora habrá comunicado la noticia a 3 nuevas personas.

¿A qué hora sabrá todo el pueblo la noticia?.

20 RELOJES DE ARENA

Solo disponemos de dos relojes de arena capaces de medir 7 y 11 minutos respectivamente.

¿Cómo podrías medir 15 minutos?

21 NÚMEROS PARECIDOS

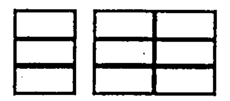
Si tenemos dos números:

$$x = a^n(a+1)^{n+1}$$
$$y = a^{n+1}(a+1)^n$$

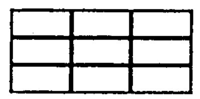
¿Cuál de los dos es mayor?. Calcula x/y

22 RECTÁNGULOS

En las siguientes figuras hay 6 y 18 rectángulos:

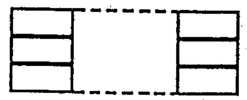


¿Cuántos hay en ésta?.



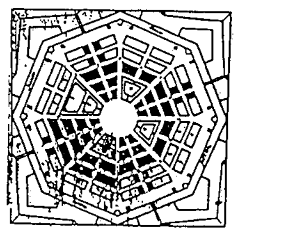
23 MÁS RECTÁNGULOS

(viene del problema anterior). Si n es el número de columnas de rectángulos de la figura y hay siempre tres filas, busca una expresión para el número total de rectángulos de todos los tamaños.



24 CIUDAD IDEAL

Daniel Spekle



25 EL NUEVE

Cuando escribes los números del 1 al 100. ¿Cuántas veces empleas la cifra 9?

¿Y al escribir los números del 1 al 1000?.

¿Cuántas veces empleas la cifra 0 para escribir los números del 1 al 1000?.

26 NÚMERO

¿Qué número de dos cifras es igual al doble del producto de éstas?

27 EL PASTOR

-Buenos días, señor pastor de 20 ovejas.
-Se equivoca. Con éstas, otras tantas como éstas y la mitad de éstas, seré pastor de 20 ovejas.

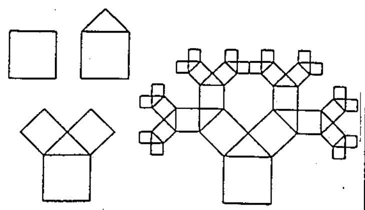
¿Cuántas ovejas tenía el pastor?.

28 CHORIZOS

Unos amigos se reunen para merendar. Si cada uno come 6 chorizos, sobran 5, pero si quieren comer 7 chorizos, faltarán 8.

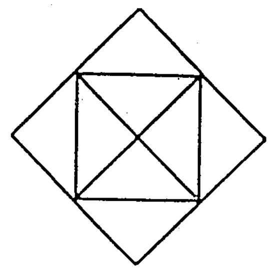
¿Cuántos amigos se han juntado?.

29 ÁRBOL PITAGÓRICO



30 CIFRAS

Coloca las cifras del 1 al 8 en cada uno de los triángulos de la figura adjunta de manera que no haya cifras consecutivas en casillas adyacentes.



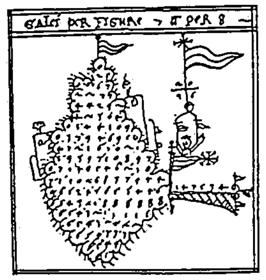
Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khowarizmi"

Abril 94

Calendari Matemàtic - 15

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

1 DIVISIÓ pel mètode de LA GALERA Segle XVI



2 LA CAPA

Un senyor promet donar al seu servent en acabar l'any 10 monedes d'or i una capa. En finalitzar el sèptim mes li dóna la capa i dues monedes d'or.

Quin és el valor de la capa?.

3 SANTA MARIA DE NOVELLA

4 COM HO EXPLIQUES?

Cinc per quatre vint, més dos, igual a 23.

Cóm pot ser això cert?.

5 LA DERIVADA

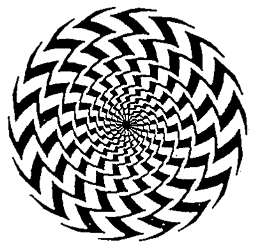
Trobes alguna relació entre la següent frase i el concepte matemàtic de **derivada**:

"Anem millorant, el ritme de l'empitjorament és cada volta menor"?.

6 PESADES

Disposem de 9 boles exactament iguals en aparença, però una pesa un poc més. Amb una balança de dos platets, troba un procediment per conéixer en dues pesades quina és la que pesa més.

7 NICHOLAS WADE. Spiral



8 SÈRIE I

Segueix la sèrie següent tenint en compte que per a això no cal saber sumar:

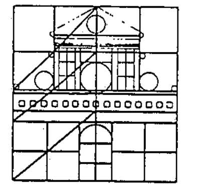
1
11
21
1211
111221

9 SÈRIE II

Tindrem alguna vegada el número 4 en la sèrie anterior?

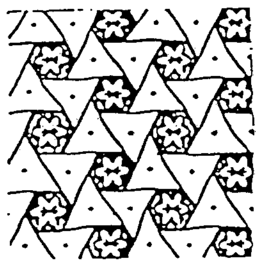
¿ 4 ?

10



Les proporcions en Santa Maria de Novella

11 MOSAIC PERSA



12 CALCETINS

Quants calcetins hem de preparar per a una població, la tercera part de la qual té un peu solament i la meitat de la resta prefereixen anar descalços?.

13 DIAGONALS

Hem comptat les diagonals d'un polígon regular i tenim 29, però estem convençuts d'haver-ne comptat de menys.

En quantes ens hem enganyat?.

14 LA MONEDA ANTIGA

Alicia va trobar una moneda de l'emperador August junt a una data, l'any 27 abans de crist (27 a.c.). Per calcular la seua vàlua, la va portar a l'antiquari que, després d'una ràpida ullada, se la va tornar dient-li: "No hi ha cap dubte, és falsa".

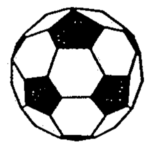
Com ho va saber amb tanta facilitat?.

15 REGLA

Una regla que suposadament ha de mesurar 12 cm. de llargària, s'ha deformat i, actualment mesura 11.5 cm. Si has mesurat una corda de 4 metres amb aquesta regla. Quant mesurarà la corda realment?.

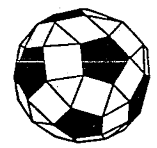
16 EL BALÓN DE FÚTBOL

Quant major és la quantitat de cares d'un baló, millor s'adaptarà a la superfície de l'esfera.



L'icosaedre truncat té 32 cares: 12 pentàgons i 20 hexàgons i ompli el 87.74% de l'esfera.

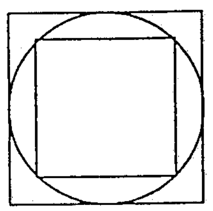
17



El rombicosidodecaedre té quasi el doble de cares, 62, distribuides en 12 pentàgons, 30 quadrats i 20 triàngles i ompli el 94.32%.

18 QUADRATS

El quadrat gran té una superfície de 60 cm². Quina és la superfície del quadrat xicotet?.



19 EL RUMOR

Un poble té 2550 habitants. A les 8 del matí tres persones s'assabenten d'una notícia. Cada persona, al cap de mitja hora, haurà comunicat la notícia a 3 noves persones.

A quina hora sabrà tot el poble la notícia?.

20 RELLOTGES DE SORRA

Tan sols disposem de dos rellotges de sorra capaços de mesurar 7 i 11 minuts cadascú.

Com podries mesurar 15 minuts?

21 NOMBRES PAREGUTS

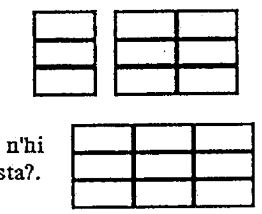
Si tenim dos nombres:

$$x = a^n (a+1)^{n+1}$$
$$y = a^{n+1} (a+1)^n$$

Qual dels dos és major?.
Calcula x/y

22 RECTANGLES I

En les següentes figures hi ha 6 i 18 rectangles:

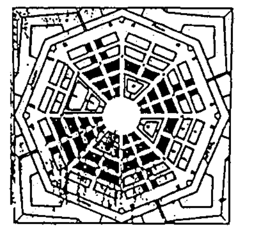


Quants n'hi ha en aquesta?.

23 RECTANGLES II

(ve del problema anterior). Si **n** és el nombre de columnes de rectangles de la figura i hi ha sempre tres files, troba una expressió per al nombre total de rectangles.

24 CIUTAT IDEAL Daniel Speckle



25 EL NOU

Quan escrius els nombres de l'1 al 100. Quantes vegades fas servir la xifra 9?

I si escrius els nombres de l'1 al 1000?.

Quantes vegades fas servir la xifra 0 per escriure els nombres de l'1 al 1000?.

26 EL NOMBRE

Quin nombre de dues xifres és igual al doble del producte d'aquestes?

27 EL PASTOR

-Bon dia, senyor pastor de 20 ovelles.
-S'enganya. Amb aquestes, altres tantes com aquestes i la meitat d'aquestes, seré pastor de 20 ovelles.

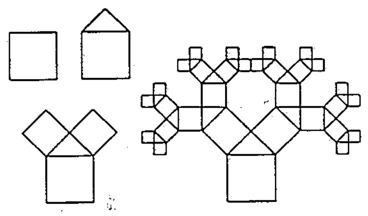
Quantes ovelles tenia el pastor?.

28 XORIÇOS

Uns amics s'ajunten per a berenar. Si cadascú menja 6 xoriços, sobren 5, però si volen menjar 7 xoriços, falten 8.

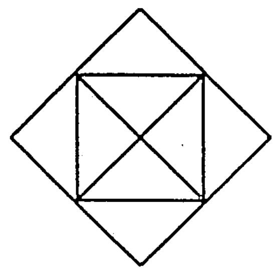
Quants amics s'hi han ajuntat?.

29 ARBRE PITAGÒRIC



30 XIFRES

Col.loca les xifres de l'1 al 8 en cadascú dels triangles de la figura sense posar xifres consecutives en caselles adjacents.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant

Traducció: María Teresa Gómez Arnau i Leandre Iborra i Polo

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khowarizmi"

CENTRES DE PROFESSORS

Mayo 94

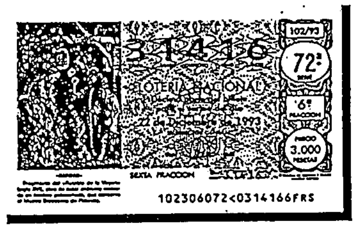
Calendario Matemático -16

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 — π

El calendario del mes de mayo se dedica a la antigua Grecia, a uno de los matemáticos más importantes de la antiguedad, Pitágoras, y a un número al que los matemáticos le tienen gran afecto, es π. Tanto es así, que los miembros de la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante jugábamos estas Navidades al número que ves a la derecha que contiene las cinco primeras cifras de π.

Los matemátics teníamos duda entre el número 31.416 y el formado por las cuatro primeras cifras de otro número importante, e: 2.178. El secretario de la Sociedad nos convenció de que con π era más probable que nos tocara el gordo porque hay muchos más números de cinco cifras que de cuatro. ¿Qué opinas?

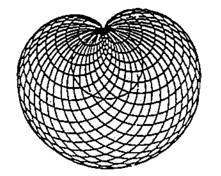


2 EL BARBERO

En un pueblo hay un único barbero, que siempre va pulcro y bien afeitado. Este hombre afeita a todos aquellos vecinos del pueblo que no se afeitan a sí mismos. Pero, ¿quién afeita al barbero?

3 CARDIOIDE

Dibuja una circunferencia. Fija uno de sus puntos. Situándote sobre distintos puntos de ella, dibuja otras circunferencias que pasen por ese punto.



4 CUATRO

Para los pitagóricos el 4 simboliza la Justicia, por ser producto de dos factores iguales.

¿Qué número resulta de hacer cuatro veces, cuatro veces cuatro por cuatro?

5 CINC

El cinco simboliza el matrimonio, por ser la suma del 2 (primer par que representa lo masculino) y el 3 (el primer impar que simboliza lo femenino).

¿Cuántos cincos hay en los 1000 primeros números naturales?

6 EL CABALLO Y LA MULA

Un caballo y una mula caminaban juntos llevando cada uno algunos sacos pesados. El caballo se quejaba de la carga y la mula le dice: "¿De qué te quejas? Si yo cargara con uno de tus sacos mi carga sería doble que la tuya. En cambio, si tu cargas con uno de los mios tu carga sería igual que la mia. ¿Cuántos sacs llevaba cada uno?.

7 π

El número pi viene de la palabra griega "periphereia" que, per ser griega, comienza per la letra π, equivalente a nuestra P. La palabra significa circunferencia (periferia del círculo), pero este nombre, π, no lo pusieron los griegos, el primero en usarlo fué Euler en el siglo XVII.

8 LES BICICLETES

En un almacén hay 4.000 bicicletas. Se venden un cierto número de ellas y, de las que quedan, sabemos que el 63.636363...% son plegables y que el 22.2297297...% no son de carreras.

¿Cuántas bicicletas se vendieron?

9 HIPÓTESIS DE GOLDBACH

La hipótesis de Goldbach dice:

Todo número par es suma de dos números primos.

Investiga si se cumple.

10 DIEZ

Para los pitagóricos, el 10 era la Tetractys, el número más perfecto, como síntesis de la perfección de los quatre primeros números. Estaba representada en forma de triángulo y en su interior diez puntos dándole sentido mágico, por ello llevaban amuletos con este diseño.

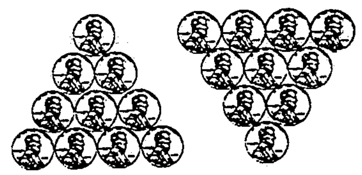
11 ONCE

Sea N=aabb un número natural de cuatro cifras no nulas. Prueba que N es múltiplo de 11 y calcula el cociente de dividir N entre 11.

aabb   11

12 INVERSIÓN

¿Cómo invertirías el triángulo pitagórico moviendo tres monedas?

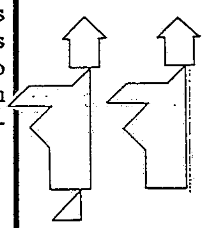


13 TRECE

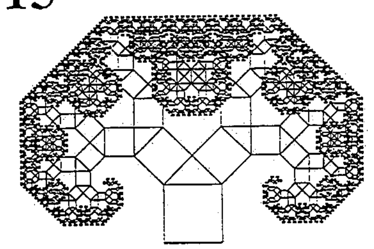
Todos sabemos que hay años que tienen "martes 13". Pero, ¿todos los años tienen?. ¿Habrá algún año que no?. ¿Cuántos "martes 13" pueden haber como máximo en un año, bisiesto o no?

14 PARADOJA

Paradoja con el Tangram. Con las siete piezas del tangram podemos construir estas dos figuras idénticas en todo salvo en que una tiene pie i la otra no. ¿Dónde está el truco?



15 EL ÁRBOL DE PITÁGORAS



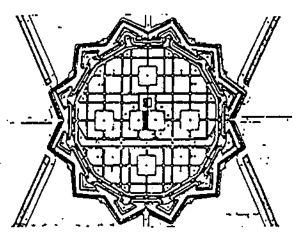
16 MEDIDAS TRADICIONALES

¿Qué es una arroba?, ¿cuantos kilos son?. ¿Y una fanegada de terreno?, ¿cuántos metros cuadrados?.

Investiga las medidas populares de tu comarca. Pregunta a tus padres i abuelos. Estudia la equivalencia con el sistema métrico.

17 CIUDAD IDEAL

Vicenzo Scamozzi. 1615



18 EDAD

Una persona a la que le preguntaron la edad contestó: "Toma tres veces los años que tendré dentro de tres años, réstale tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora".

¿Cuántos años tiene esta persona?

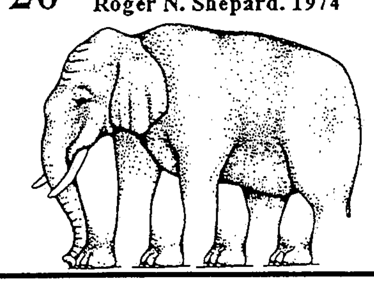
19 PRIMOS DE MERSENNE

El mayor número primo conocido es $2^{21701}-1$ que se escribe con 6533 cifras en la numeración decimal.

¿Siempre ocurre que $2^n - 1$, donde n es un número natural, es un número primo?. ¿En qué casos no se cumple?

20 ELEFANTE. Visión anómala

Roger N. Shepard. 1974

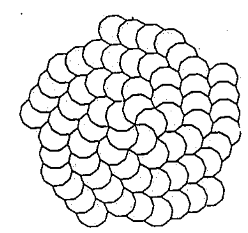


21 SRINIVASA RAMANUJAN

Matemático indio que descubrió una fórmula en la que se basa el siguiente truco: Divide 2143 (los cuatro primeros números naturales) por 22. Calcula la raiz cuadrada y obtendrás π con 8 decimales correctos.

Calcula $22 \times \pi^4$

22 MOSAICO EN ESPIRAL



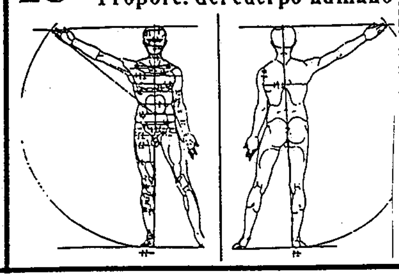
23 EL CUMPLEAÑOS — 24 — 30 — 31

¿Cuál ha de ser el menor tamaño de un grupo de personas para que la probabilidad de que al menos dos de los integrantes del grupo hayan nacido el mismo dia del año sea mayor que 1/2?

Para tener la seguridad necesitamos evidentemente 366 personas, pero ¡para que la probabilidad sea 1/2 no es preciso que el grupo tenga 183 personas. es suficiente con muchas menos!. ¿Cuál es el mínimo?

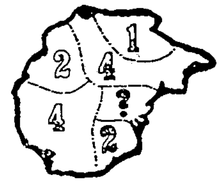
25 ALBERTO DURERO

Proporc. del cuerpo humano



26 PAÍSOS NUMERATS

¿Cuál es el número que pondrías en el interrogante?

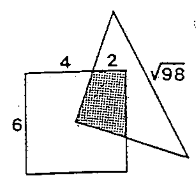


27 ENTERO

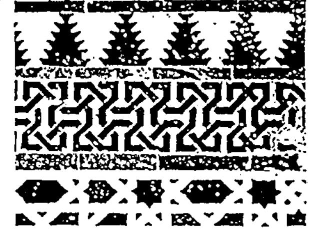
Un número entero es tal que la cifra de las decenas de su cuadrado es impar. ¿Cuál es la cifra de las unidades de ese número?.

28 SOMBRA DESCONOCIDA

Cuál es la superficie de la zona de sombra teniendo en cuenta que el triángulo es rectángulo y su vértice está situado en el centro del cuadrado?



29 LA ALHAMBRA. Granada



Sala de los embajadores (detalle)

Coordinación: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant

Selecció de problemes: Tomàs Queralt i Llopis. CEP de Sagunt

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khowarizmi"

CENTRES DE PROFESSORS

Maig 94

Calendari Matemàtic -16

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

π

El calendari del mes de maig es dedica a l'antiga Grècia, a un del matemàtics més importants de la antiguitat, Pitàgores, i a un número al que els matemàtics li tenen molt afecte, és π. Tant és així que els membres de la Societat de Professors de Matemàtiques d'Alacant jugavem aquest Nadal al número que veus a la dreta.

Els matemàtics teniem dubte entre el número 31.416 i el format per les primeres xifres d'un altre número important, e: 2.178. El secretari de la Societat ens va convéncer de que amb π era més probable que ens tocara la grossa de Nadal perquè hi ha molts més números de cinc xifres que de quatre. I tu, què opines?.

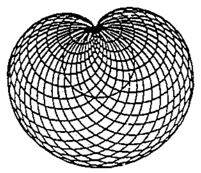
1

2 EL BARBER

En un poble hi ha un únic barber, que sempre va pulcre i ben afaitat. Aquest home afaita a tots aquells veïns del poble que no s'afaiten a ells mateixos. Però, qui afaita el barber?

3 CARDIOIDE

Dibuixa una circumferència. Fixa un dels seus punts. Situant-te sobre distints punts d'ella, dibuixa altres circumferències que passen per eixe punt.



4 QUATRE

Per als pitagòrics el 4 simbolitza la Justícia, per ser producte de dos factors iguals.

Quin nombre resulta de fer quatre vegades, quatre vegades quatre per quatre?

5 CINC

Simbolitza el matrimoni, per ser la suma del 2 (primer parell que representa allò masculí) i el 3 (el primer senar que simbolitza allò femení).

Quants cincs hi ha en els 1000 primers nombres naturals?

6 EL CAVALL I LA MULA

Un cavall i una mula caminaven junts portant cadascun alguns sacs. El cavall es queixava de la càrrega i la mula li diu: "De què et queixes? Si jo carregara amb un dels teus sacs la meua càrrega seria doble de la teua. En canvi, si tu carregues amb un dels meus la teua càrrega seria igual que la meua. Quants sacs portava el cavall i la mula?

7 π

El número pi ve de la paraula grega "periphereia" que, per ser grega, començа per la lletra π, equivalent a la nostra P. La paraula significa circumferència (perifèria del cercle), però aquest nom, π, no el van posar els grecs, el començà a gastar Euler en el segle XVII.

8 LES BICICLETES

En un magatzem hi ha 4.000 bicicletes. Es venen un cert nombre d'elles i, de les que queden, sabem que el 63.636363...% són plegables i que el 22.2297297...% no són de carreres.

Quantes bicicletes es vengueren?

9 HIPÒTESI DE GOLDBACH

La hipòtesi de Goldbach diu:

Tot nombre parell és suma de dos nombres primers.

Investiga si es compleix.

10 DEU

Per als pitagòrics, el 10 era la Tetractys, el nombre màximament perfecte, en quant a síntesi de la perfecció dels quatre primers. Estava representada en forma de triangle i al seu interior deu punts, donant-li sentit màgic per la qual cosa portaven amulets on estava dissenyada.

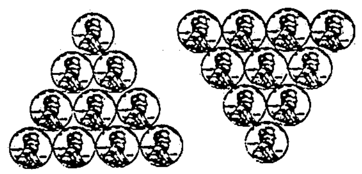
11 ONZE

Siga N=aabb un nombre natural de quatre xifres no nul.les. Provar que N és múltiple de 11 i calcular el cocient de dividir N entre 11.

aabb 11

12 INVERSIÓ

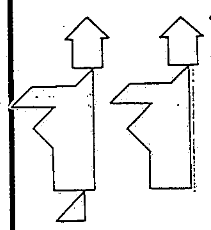
¿Com invertiries el triangle pitagòric movent tres monedes?



13 TRETZE

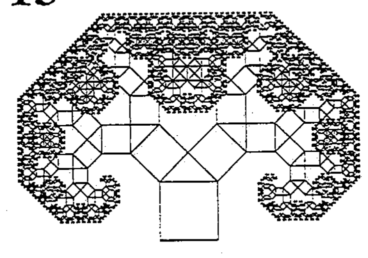
Tots sabem que hi ha anys que tenen "dimarts 13". Però, tots els anys ho tenen?. Hi haurà algun que no?. Quants "dimarts 13" poden haver en un any, bixest o no?

14 PARADOXA



Paradoxa amb el Tangram. Amb les set peces del tangram podem construir aquestes dues figures idèntiques llevat que una té peu i l'altra no. On està el truc?

15 L'ARBRE DE PITÀGORAS

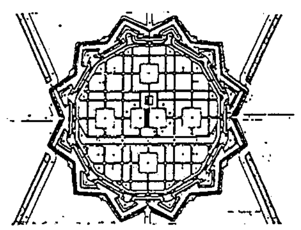


16 MIDES TRADICIONALS.

Què és una arrova, quants quilos són?.I una fanecada de terreny, quants metres quadrats?.

Investiga les mides populars de la teua comarca. Pregunta-li als teus pares i avis. Estudia l'equivalència amb el sistema mètric.

17 CIUTAT IDEAL
Vicenzo Scamozzi. 1615



18 EDAT

Una persona a la que li preguntaren l'edat contestà: "Agarreu tres vegades els anys que tindré d'ací tres anys, resteu-li tres vegades els anys que tenia fa tres anys i resultarà exactament els anys que tinc ara".

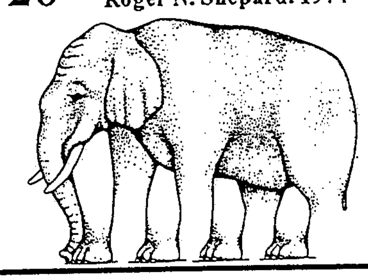
Quants anys té esta persona?

19 PRIMERS DE MERSENNE

El major nombre primer conegut és $2^{21701}-1$ que s'escriu amb 6533 xifres en la numeració decimal.

Sempre ocurreix que $2^n - 1$, on n és un nombre natural, és un nombre primer?. En quins casos no es compleix?

20 ELEFANT. VISIÓ ANÒMALA
Roger N. Shepard. 1974

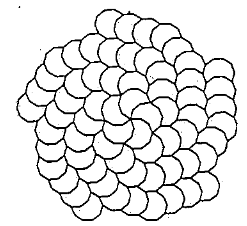


21 SRINIVASA RAMANUJAN

Matemàtic indi que va descobrir una fórmula en la que es basa el següent truc: Divideix 2143 (els quatre primers números naturals) per 22. Calcula l'arrel quadrada i obtindràs π amb 8 decimals correctes.

Calcula $22 \times \pi^4$

22 MOSAIC EN ESPIRAL



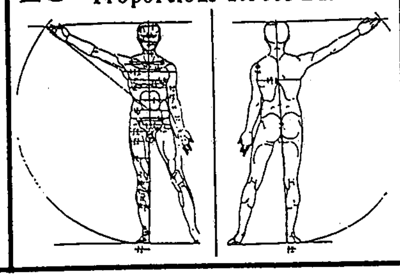
23 L'ANIVERSARI 24

Quin ha de ser el menor tamany d'un grup de persones per a que la probabilitat de que al menys dos dels integrants del grup hagen nascut el mateix dia de l'any siga major que 1/2?

Per a tindre la seguretat necessitem evidentment 366 persones, però ¡per a que la probabilitat siga 1/2 no és precís que el grup tinga 183 persones. en són suficients moltes menys!. Quin és el mínim?

30 31

25 ALBERTO DURERO
Proporcions del cos humà



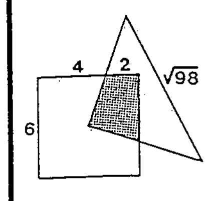
26 PAÏSOS NUMERATS

Quin és el nombre que posaries en l'interrogant?

27 ENTER

Un número enter és tal que la xifra de les desenes del seu quadrat és senar. Quina és la xifra de les unitats d'eixe número?.

28 L'OMBRA DESCONEGUDA



Quina és la superfície de la zona d'ombra tenint en compte que el triangle és rectangle i el seu vèrtex cau en el centre del quadrat?

29 L'ALHAMBRA. Granada

Sala dels embalxadors (detall)

Coordinació: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant

Selecció de problemes: Tomàs Queralt i Llopis. CEP de Sagunt

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khwārizmī"

CENTRES DE PROFESSORS

Junio 94

Calendario Matemático -17

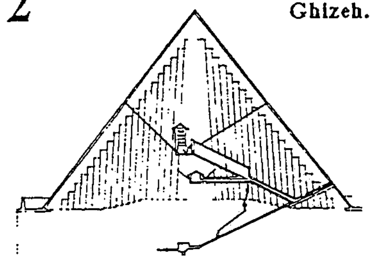
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 POTENCIAS

Utilizando tres veces la cifra 1 podemos escribir los números 111, 11^1 i 1^{11}, de los cuales, evidentemente, el primero es el mayor.

Estudia qué ocurre con las cifras 2, 3, 4, ...

2 PIRÁMIDE DE KEOPS. Ghizeh.

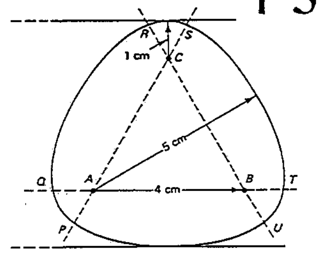


3 CAMPANADAS

Desde que comienza a oirse la primera de las campanadas con que un reloj anuncia las 2, hasta que deja de oirse la segunda, pasan 2 segundos. ¿Qué duración tendrá el toque de las 3?.

4 LA RUEDA

¿Se podría utilizar para hacer rodes de vehiculos?.



5

Esta curva se forma uniendo arcos de circunferencia con centros en los 3 vértices del triángulo, y tiene una propiedad común con la circunferencia: su amplitud es constante. Cuando rueda sobre una superficie horizontal, el punto más alto se encuentra siempre a la misma altura.

6 FERMAT REVISADO

$$40^2 + 80^2 = 20^3$$

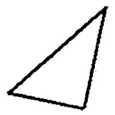
Este es un ejemplo de igualdad del tipo:

$$a^2 + b^2 = c^3$$

Investiga.

7 ROMPER PALILLOS I

Rompemos un palillo en tres trozos. ¿En qué condiciones formarán un triángulo?. ¿Cuál es la probabilidad de que eso ocurra?

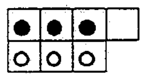


8 ROMPER PALILLOS II

Ahora rompemos el mismo palillo en cuatro trozos. ¿Cuál es la probabilidad de que formen un cuadrilátero?

9 FICHAS

El único movimiento que se permite es llevar una ficha a una casilla vacía adyacente (incluido en diagonal). ¿Cuál es el mínimo número de movimientos para intercambiar blancas i negras?.



¿Y con n fichas?.

10 CUBOS

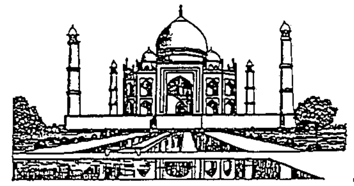
¿Cuántos cubos diferentes podemos construir con 26 cubitos transparentes i uno de color?.

¿Y con n^3-1 transparentes y uno de color?.

11 MONEDAS

Si hacemos rodar la moneda de la izquierda a lo largo de la circunferencia de la otra una vuelta entera, la volveremos a ver en la misma disposición que al principio. ¿Qué pasa si damos solamente media vuelta?. Piénsalo primero i después compruébalo.

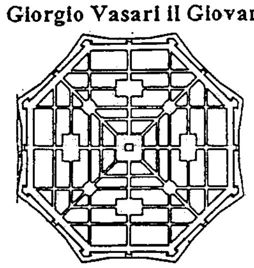
12 LA SIMETRÍA
Taj Mahal. Agra. 1632-1653



13 CUADRILÁTEROS

Utilitzando para los lados segmentos de, como máximo, dos longitudes diferentes, estudia qué cuadriláteros se pueden formar.

14 CIUDAD IDEAL
Giorgio Vasari il Giovane

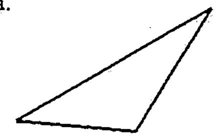


15 CARA (C) Y CRUZ (+)

Se lanza una moneda. El primer jugador obtiene 1000 pts. si en las dos primeras jugadas sale CX ó XC. Si es en la tercera (CCX ó XXC) no gana nadie. A partir de aquí, el segundo jugador recibe 1000 pts. por cada tirada necesaria para llegar a CX ó XC. ¿Es justo el juego?.

16 TRIÁNGULOS

Dado un triángulo cualquiera, encuentra diferentes formas de dividirlo en tres triángulos de igual área.



17 PARTE ENTERA

La notación [ ] significa "parte entera de". Por ejemplo, [2,7]=2, [π]=3, [12]=12.

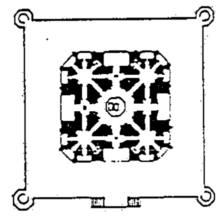
0,0,1,2 són els quatre primers términos de la forma [3n/4] para n=0,1,2,3,...Continúa la sucessión. ¿Puedes anticipar qué ocurre?. ¿Y con a y b en lugar de 3 i 4?.

18 FERMAT

Fermat descubrió que exactamente la mitad de los números primos son suma de dos cuadrados perfectos. Por ejemplo, $13 = 2^2+3^2$.

Investiga

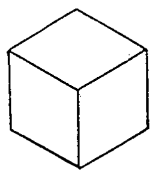
19



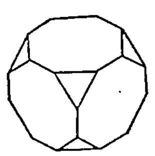
Planta del mausoleo

20 CORTAR ESQUINAS **21**

Un cubo tiene:
... caras
... vértices
...aristas



Si cortamos las esquinas obtenemos un cubo truncado con
... caras
... vértices
...aristas



Investiga los efectos al truncar otros sólidos

22 LA PARADOJA DE PETERSBURGO

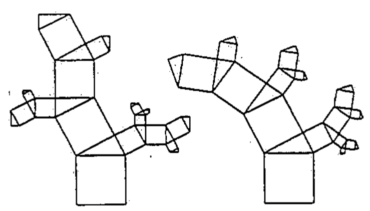
Pedro pagará a Pablo 1 pta. si sale cara en el primer lanzamiento de una moneda, 2 si no aparece hasta el segundo lanzamiento, 4 si sale al tercero, 8 al cuarto, ... ¿Cuánto dinero ha de apostar Pablo para que el juego sea justo?.

23 ¿BARBARIDAD?

2+2=5

(para valores muy grandes de 2)

24 ÁRBOL DE PITÁGORAS
Con triángulos isósceles



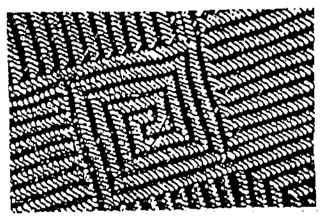
25 LAS FICHAS DEL DOMINÓ **26**

Hemos colocado las 28 fichas del dminó sobre la mesa, formando un gran rectángulo. Si nos olvidamos de las líneas de separación y tenemos en cuenta únicamente los números, se ve así:

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

¿Puedes reconstruir las líneas de separación de las piezas?.

27 CESTO. *Indios del Rio Negro y Atabapo (Brasil-Venezuela)*



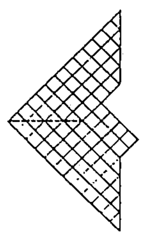
28 PARALELOGRAMOS

Estudia el área de los paralelogramos de 20 cm. de perímetro y 6 cm. de base.

Halla el de área máxima.

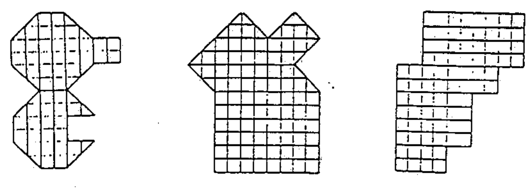
29 CORTES

Esta figura ha sido dividida en dos partes de igual forma y superficie; esto no habría sido posible con un corte recto:



30

¿Podrias cortar las siguientes figuras en dos partes que tengan igual forma y superficie?



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant

Selección de problemas: Fernando Juan García. CEP de Gandia

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khowarizmi"

Juny 94

Calendari Matemàtic -17

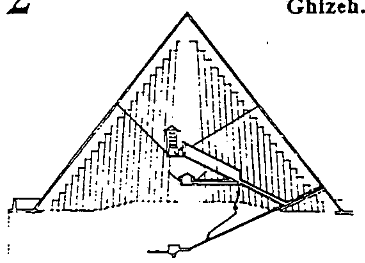
Dilluns | Dimarts | Dimecres | Dijous | Divendres | Dissabte | Diumenge

1 POTÈNCIES

Utilitzant tres vegades la xifra 1 podem escriure els nombres 111, 11^1 i 1^{11}, dels quals, evidentment, el primer és el major.

Estudia què ocorre amb 2, 3, 4, ...

2 PIRÀMIDE DE KEOPS. Ghizeh.

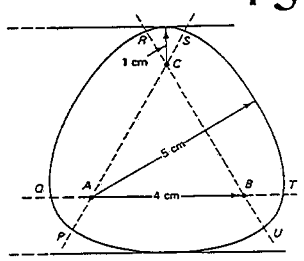


3 CAMPANADES

Des que comença a sentir-se la primera de les campanades amb què un rellotge anuncia les 2, fins que deixa de sentir-se la segona, passen 2 segons. Quina durada tindrà el toc de les 3?.

4 LA RODA

Es podria utilitzar per fer rodes de vehicles?.



5

Aquesta corba es forma unint arcs de circumferència amb centres en els 3 vèrtex del triangle, i té una propietat comuna amb la circumferència: la seua amplària és constant. En rodar sobre una superfície horitzontal, el punt més alt es troba sempre a la mateixa altura

6 FERMAT REVISAT

$40^2 + 80^2 = 20^3$

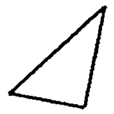
Aquest és un exemple d'igualtat del tipus:

$a^2+b^2=c^3$

Investiga.

7 TRENQUEM PALETS I

Trenquem un palet en tres trossos. En quines condicions formaran un triangle?. Quina és la probabilitat que això ocòrrega?



8 TRENQUEM PALETS II

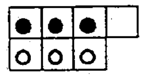
Ara trenquem el mateix palet en quatre trossos. Quina és la probabilitat que formen un quadrilàter?

9 FITXES

L'únic moviment que es permet és portar una fitxa a una casella buida adjacent (fins i tot, en diagonal).

Quin és el mínim nombre de moviments per intercanviar blanques i negres?.

¿I amb n fitxes?.



10 CUBS

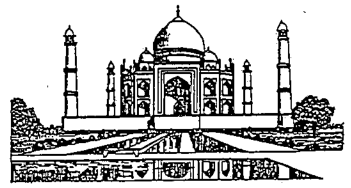
Quants cubets diferents podem construir amb 26 cubets transparents i 1 de color?.

¿I amb n^3-1 transparents i 1 de color?.

11 MONEDES

Si fem rodar la moneda de l'esquerra al llarg de la circumferència de l'altra, una volta sencera, la tornarem a veure en la mateixa disposició que inicialment. Què passa si fem només la meitat de la rotació?. Pensa-ho primer i després comprova-ho.

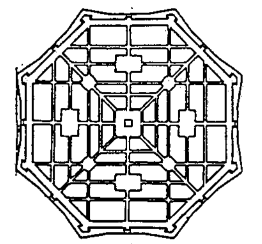
12 LA SIMETRIA Taj Mahal. Agra. 1632-1653



13 QUADRILÀTERS

Utilitzant per als costats segments de, com a màxim, dues longituds diferents, estudia quins quadrilàters es poden formar.

14 CIUTAT IDEAL Giorgio Vasari il Giovane

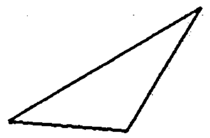


15 CARA (C) I CREU (X)

Es llança una moneda. El primer jugador obté 1000 ptes. si en les dues primeres jugades ixen CX ó XC. Si és en la tercera (CCX ó XXC) no guanya ningú. A partir d'ací, el segon jugador rep 1000 ptes. per cada tirada necessària per a arribar a CX o XC. És just el joc?.

16 TRIANGLES

Donat un triangle qualsevol, troba diferents formes de dividir-lo en tres triangles d'igual àrea.



17 PART ENTERA

La notació [ ] significa "part entera de". Per exemple, [2,7]=2, [π]=3, [12]=12.

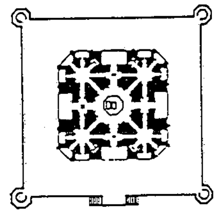
0,0,1,2 són els quatre primers termes de la forma [3n/4] per a n=0,1,2,3,...Continua la successió. ¿Pots anticipar què ocorre?. I amb a i b en comptes de 3 i 4?.

18 FERMAT

Fermat va descobrir que exactament la meitat dels nombres primers són suma de dos quadrats perfectes. Per exemple, $13 = 2^2+3^2$.

Investiga

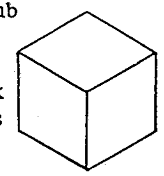
19



Planta del mausoleu

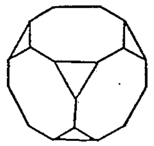
20 TALLAR CANTONS

Un cub té:
... cares
... vèrtex
...aristes



Si tallem els cantons obtindrem un cub truncat amb:
... cares
... vèrtex
...aristes

21



Investiga els efectes al truncar altres sòlids

22 LA PARADOXA DE PETERSBURG

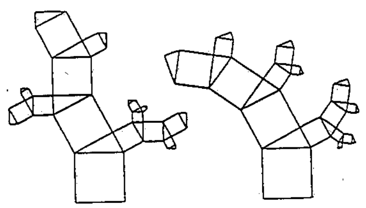
Pere pagarà a Pau 1 pta. si ix cara en el primer llançament d'una moneda, 2 si no apareix fins al segon llançament, 4 si és al tercer, 8 al quart, ... Quants diners ha d'apostar Pau per tal que el joc siga just?.

23 BARBARITAT?

2+2=5

(per a valors molt grans de 2)

24 ARBRE DE PITÀGORES Amb triangles isòsceles



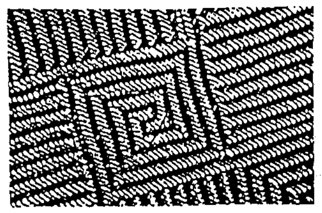
25 LES FITXES DEL DÒMINO **26**

Hem posat les 28 peces del dòmino damunt la taula, formant un gran rectangle. Si ens oblidem de les línies de separació i tenim en compte únicament els números, es veu així:

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

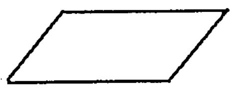
Pots reconstruir les línies de separació de les peces?.

27 CISTELLA. *Indis del Riu Negre i Atabapo (Brasil-Veneçola)*



28 PARAL.LOGRAMS

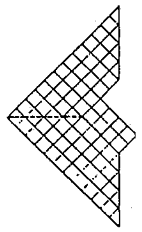
Estudia l'àrea dels paral.lelograms de 20 cm. de perímetre i 6 cm. de base.



Busca el d'àrea màxima.

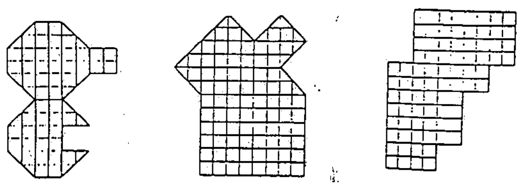
29 TALLS

Aquesta figura ha sigut dividida en dues parts d'igual forma i superfície; cap tall recte ho haguera lograt:



30

Podries tallar les següents figures en dues parts d'igual forma i superfície?



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant. Avda. de Aguilera, 1 - 2ª Pl. 03007 - Alacant

Selecció de problemes: Fernando Juan Garcia. CEP de Gandia