La inconcreción del lenguaje matemático en los primeros años de escolarización

Fidela Velázquez

«La filosofía está escrita en este gran libro -quiero decir el Universo- que permanece continuamente abierto a nuestra vista, pero no puede entenderse a menos que uno aprenda primero la lengua e interprete los caracteres en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él; sin ellas uno vagabundea en un oscuro laberinto».

Galileo Galilei.

«Los matemáticos son como los franceses: cuando les hablas trasladan lo dicho a su propio lenguaje, e inmediatamente se convierte en algo completamente distinto».

Johann von Goethe.

Sobre el papel del lenguaje en la adquisición de conceptos matemáticos existen diversos cuerpos de teorías, en algunos casos contrapuestas. Así, todas las **teorías conductistas** ponen el énfasis en la naturaleza verbal del pensamiento, esto es, la necesidad del lenguaje para su desarrollo (para ellos, el pensamiento supone un «habla no vocalizada»).

En el otro extremo, **Piaget** considera que el pensamiento es básicamente espacial, esto es, consiste en acciones internalizadas, con lo cual el lenguaje es sólo un reflejo del pensamiento cognitivo. Esta interpretación no es nueva; ya **Aristóteles**, en su obra «Sobre la interpretación», decía: «El habla es la representación de la mente, y la escritura lo es del habla».

No obstante, algunas teorías no son tan exclusivistas al señalar una interdependencia más o menos estrecha entre lenguaje y desarrollo conceptual. Así, **Choat** (Mathematics Teaching, 1974) dice: «Aunque el sujeto que aprende interactúe con los aspectos materiales de la situación de aprendizaje, el elemento verbal es necesario tanto como medio de comunicación cuanto como instrumento de representación individual... en la adquisición de conocimiento matemático, un concepto nuevo trae consigo una palabra nueva. Falto del concepto, el niño no comprenderá la palabra; carente de la palabra, no podrá asimilar y acomodar el concepto con la misma facilidad».

Esta interdependencia es señalada, asimismo, por **Vigotsky**; e incluso **Piaget**, en su última época, admite el desarrollo paralelo de las áreas lingüística y cognitiva.

Lo que sí está claro es que la adquisición de lenguajes y de conceptos es un proceso dinámico, por lo que resulta fundamental que analicemos conjuntamente con los niños los diversos significados e interpretaciones de las palabras y frases, de forma que se elimine, en lo posible, la ambigüedad en la comunicación matemática. Este análisis podría comenzar con una negociación de significados expresados en lenguaje natural (frases descriptivas que reemplacen, en un primer estadio, ciertos términos técnicos propios de las Matemáticas) para irlos sustituyendo por términos especializados que es necesario incorporar paulatinamente al aprendizaje y a la enseñanza de la disciplina. Este es un paso previo a la exigencia-necesidad de que los alumnos entiendan lo que leen. Hasta ahora, se enseña Matemáticas de manera ajena al lenguaje usado, cargando el acento fundamentalmente en los códigos escritos y, en algunas ocasiones y de manera tangencial, haciendo referencia a los significados. Esto ha ocurrido porque ciertos métodos de enseñanza no han posibilitado realmente ni el desarrollo del lenguaje ni la formación de conceptos, al usar muy limitadamente un vocabulario básico, específico y restringido. Ello ha contribuido a un trabajo matemático no derivado del lenguaje natural, sino relacionado artificialmente con connotaciones que el alumno deduce (a menudo de manera aleatoria) de los problemas a resolver.

En las actividades escritas, lo primero a lo que se enfrenta el alumno es a la lectura de la pregunta. En esta fase, hay dos elementos que afectan a que tal lectura se realice de un modo correcto: el reconocimiento de las **palabras** usadas y el de los **símbolos** usados (código específico matemático).

Respecto al primero, existen múltiples problemas. Así, algunas expresiones matemáticas pueden no ser reconocidas por el alumno, bien porque las lee incorrectamente, bien porque las confunde con otras. La lectura incorrecta de algunas palabras por desconocimiento de su significado matemático, da lugar a errores; por ejemplo, cuando al pedir a un alumno que dibuje una **cuerda**, toma la acepción de este vocablo en el lenguaje habitual, y no la geométrica. (**Balbuena, L.** y **de la Coba, Mª. D**).

Asimismo, y es muy importante tenerlo en cuenta en aquellas comunidades con lengua propia o con alumnos procedentes del extranjero, esta confusión semántica se produce de manera acusada entre alumnos cuya primera lengua no es el castellano. Así, por ejemplo, un alumno de origen alemán, que resultó finalista en el III Torneo de Matemáticas organizado por la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, tuvo problemas con el siguiente enunciado:

«Imagínate que estás viendo un cubo:
- **a) ¿Cuántas caras puedes ver simultáneamente? Haz un dibujo en cada caso.**
- **b) ¿Cuál es el máximo número de caras que puedes ver simultáneamente?. Razona la respuesta».**

El alumno, tras una lectura detenida del problema, preguntó a la profesora encargada: «Pero, ¿cubo de figura matemática o cubo de echar agua?». Evidentemente, para alguien no castellano-hablante, tiene que resultar absolutamente contradictorio el que se llame coloquialmente **cubo** lo que matemáticamente es un **tronco de cono**.

En este aspecto, y a medida que vayan apareciendo términos específicos matemáticos, convendría ir recordando a los alumnos que, a menudo, el término habitual *no tiene* relación con el término matemático. En algunos casos, ni siquiera a cualquiera de los dos niveles en que se produce la sinonimia. En efecto, dos términos pueden ser sinónimos a nivel total o a nivel parcial. Se produce sinonimia entre A y B a nivel total, cuando A=B. La sinonimia entre A y B es parcial, si A incluido en B implica que A es B.

También dentro de esta fase referida a la capacidad de lectura, aparece el papel de la lengua como decodificadora del lenguaje matemático, esto es, el reconocimiento de símbolos específicos. Dentro de esta línea se encuentran confusiones habituales, tales como identificar el signo $<$ con el signo $>$, o bien, identificar la expresión **m.c.d.** con el mínimo común múltiplo, o viceversa. La extensión de ciertas propiedades hacia campos conceptualmente inapropiados podría encuadrarse dentro de este mismo apartado. Por ejemplo, la extensión de la distributividad de la potenciación respecto a la multiplicación, a la adición: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Asimismo, ciertos errores de conceptualización, por los que se transforma una relación u operación matemática en una expresión numérica generalizada, para poder operarla por extensión, a continuación, mediante una distributividad: $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$.

El segundo aspecto al que se enfrenta el alumno, una vez superada la fase de lectura de la pregunta en cuanto a reconocimiento de palabras y símbolos, es la de la comprensión de la pregunta. La comprensión abarca dos aspectos fundamentales: uno, de **comprensión general** y el otro de **comprensión de símbolos y de términos específicos**. La comprensión general parece hacer referencia a lo que se conoce, con carácter general, por lectura comprensiva. Más específico es el aspecto que hace referencia a la comprensión de símbolos y de términos específicos. Este es un aspecto en el que nos gustaría incidir especialmente. En efecto, en las situaciones problemáticas al uso, aparecen algunas veces significantes que matemáticamente tienen el significado de una determinada operación, cuando la lectura y comprensión del mismo por los alumnos de corta edad les puede inducir a entender justamente la operación contraria. Así, los términos «robar», «quitar», «coger» o «tomar», que usualmente tienen el significado de sustracción, en determinados contextos significan justamente lo contrario: la adición.

A este respecto, el **Informe Cockcroft** dice:

«Es muy importante advertir la gran variedad de formas lingüísticas que se aplican para indicar a los niños las operaciones matemáticas que han de realizar. Por ejemplo, las intrucciones <<suma 3 y 5>>, <<calcula 3 más 5>>, <<haz la suma de 3 más 5>> o <<halla el número que es 3 unidades mayor que 5>> requieren todas ellas la realización de una misma operación matemática. Se trata sólo de cuatro de las muchas formas en que puede estructurarse la instrucción; la estructura verbal que se emplea con mayor frecuencia es la que surge de forma natural en el contexto del momento. Los niños han de interpretar estas instrucciones, sólo en apariencia discrepantes, emplearlas en su propio lenguaje y pensamiento y, en un momento posterior, asignar a todas ellas la forma simbólica 5 + 3. A no ser que se familiaricen con las muchas formas en que puede expresarse una misma idea matemática y sepan reconocerla pese a sus diversas formulaciones, no sólo experimentarán dificultades al enfrentarse a ejemplos del tipo citado, sino también al solucionar problemas expresados en palabras».

Esto último ocurriría, por ejemplo, en los siguientes ejercicios sacados de libros de texto al uso:

* **«En un cajón hay 23 libretas. Yo cojo 6 y Enrique 8. ¿Cuántas libretas quedan en el cajón?»**
* **«Un repartidor lleva 12 paquetes. Deja 4 en una casa y 6 en otra. ¿Cuántos paquetes le quedan?».**
* **«Yo tenía 827 pesetas. Me gasté 57 y perdí 32. ¿Cuántas me quedan?».**
* **«Pedro tiene 48 caramelos. Da 13 a Jorge y 14 a Rosa. ¿Cuántos le quedan?».**
* **Jorge tenía 12 caramelos. Ha dado 2 a su hermana, 3 a un amigo y él se ha comido 4. ¿Cuántos caramelos le quedan?».**

Los términos «coger»,» dejar», «dar», «comer» y «quedar» tienen que ver con el significado de restar. Pero en estas actividades, el camino usual es sumar los elementos en los que el total se va reduciendo. Es decir, coger o dejar una cantidad y luego coger o dejar otra, es coger o dejar en total la suma de ambas, lo que tiene que ver más con la operatoria con números negativos que con la de números naturales. Esta confusión de ciertos significantes que son tomados por los alumnos por el significado inverso al verdadero está relacionada, a nuestro entender, con ambos aspectos de la comprensión: la comprensión de términos específicos, que son confundidos (tal vez porque su formulación resulta confusa), o bien porque los contenidos, como hemos dicho, pertenecen a un dominio matemático que trasciende la edad de los alumnos y cuya comprensión les resulta dificultosa, sobre todo a los alumnos rezagados de la clase.

Respecto a otras operaciones existe también un divorcio entre el significado matemático de los términos empleados y el sentido habitual de los mismos. Por ejemplo, una de las equivocaciones más habituales de los alumnos al trabajar la multiplicación consiste en traducir el «más» de la expresión «tres veces más» por una suma. Este error se prolonga incluso durante la enseñanza secundaria. Ejemplo:

«Una niña tiene 87 pesetas. Su hermana tiene tres veces más. ¿Qué cantidad de dinero tiene su hermana?»

Respuesta incorrecta habitual: 87 + 3 = 90.

«Pedro y María suman entre los dos 52 años. Pedro tiene tres veces más años que María. ¿Qué edad tiene cada uno?

Respuesta incorrecta habitual:
Edad de María: X
Edad de Pedro: X + 3

Planteo de la ecuación: X + X + 3 = 52

(En ambos casos, el alumno se centra en la lectura del «más» identificándolo con una operación conocida y omitiendo la lectura del término «veces» que sigue a «tres»).

Errores similares -agravados con las dificultades algebraicas y la persistencia de un cierto pensamiento aditivo en los alumnos, cuyo tránsito al pensamiento multiplicativo se caracteriza, como todas las adquisiciones conceptuales, por avances y retrocesos, a lo largo de los cuales se producen las acomodaciones previas a las adquisiciones- se dan en la lectura de ejercicios como los que siguen:

* **Si al duplo de un número se le suman 21 unidades, se obtiene un número que es cinco veces mayor que el primero. ¿Cuál es este número?**

* **Reparto 32 pts. entre 2 niños de modo que uno reciba tres veces más que el otro? ¿Cuánto le toca a cada uno?**
* **La edad de un padre es actualmente siete veces la de uno de sus hijos. Dentro de 2 años, la edad del padre será sólo cinco veces mayor? ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?**

Otro aspecto a considerar es el referido a las dificultades en la comprensión general de actividades que hacen referencia a la inversión de operaciones. En efecto, el origen de esta dificultad estriba, a nuestro entender, tanto en la comprensión del sentido de la inversa de una operación (fundamentalmente por la asimetría del tratamiento de la reversibilidad del pensamiento en las actividades habituales del área), como en la comprensión general de los enunciados correspondientes, cuyo origen puede ser común a lo anteriormente descrito. Por ejemplo, actividades del siguiente tipo:

* **«¿Qué número debo añadir al 46 para obtener el 142?».**
* **Resulta que la cuarta parte de los árboles de un parque son 248 árboles. ¿Cuántos árboles hay en el parque?**

El **Informe Cockcroft** aborda el tema de los errores cometidos por los alumnos en ejercicios del tipo de los descritos, de la siguiente manera:

«Los alumnos cuyo dominio del lenguaje es vacilante, suelen soslayar sus problemas fijándose en el empleo de palabras como «más» o «menos», y considerarlas como «indicios verbales» que, en su opinión, reflejan la operación que se les pide. Sin embargo, con eso no resuelven el problema.

Véanse los dos ejemplos siguientes:

Janet tiene 5 peniques y John tiene tres peniques *más*. ¿Cuánto dinero tiene John?

Janet tiene 5 peniques y John 3. Averigua cuánto dinero tiene Janet *más* que John.

Ambos problemas contienen la palabra *más*, pero para resolver el primero hay que sumar, y para el segundo restar. En estos casos, el lenguaje sirve de puente entre la situación real (comparar monedas) y las operaciones aritméticas que han de realizarse para hallar la respuesta. No obstante, el lenguaje más bien estilizado que suele emplearse en los «problemas expresados en palabras» puede dificultar la evocación de las imágenes mentales precisas y la elección de la operación aritmética correcta, a los niños cuyas destrezas de lenguaje y lectura no sean muy sólidas. Por ellos se ven obligados a recurrir a los «indicios verbales», y los profesores han de ser conscientes de ello».

Todo este cúmulo de ejemplos es designado por diversos autores como aspectos relacionados con el meta-lenguaje y las meta-notaciones matemáticas.

Actividades similares a la que se pasa a describir (donde no incluimos las figuras que el profesor va mostrando), podrían ayudar a los alumnos a realizar elaboraciones conceptuales y ajustes mentales de los términos que definen o describen situaciones a elementos matemáticos:

Profesor al alumno:

«Describe un cuadrado»

Alumno:

«Es una figura con cuatro lados»

Profesor:

¿Esto?

Alumno:

«No. Es una figura *cerrada* con cuatro lados»

Profesor:

¿Esto?

Alumno A:

«No, es una figura cerrada con cuatro lados *iguales*»

Profesor:

¿Esto?

Alumno A:

«No, es una figura cerrada con cuatro lados iguales *y cuatro ángulos iguales (o rectos)*».

Alumno B:

«No, es una figura cerrada con cuatro ángulos *iguales (ó rectos)* y cuatro lados».

Profesor:

¿Esto?

Alumno B:

«No, es una figura cerrada con cuatro ángulos iguales (o rectos) y cuatro lados *iguales*».

Mucho más poéticamente, **Jorge Luis Borges**, en «Prólogos», dice así:

«El empleo de cualquier vocablo presupone una experiencia compartida, de la que el vocablo es el símbolo. Si nos hablan del sabor del café, es porque lo hemos probado, si nos hablan del color amarillo, es porque ya hemos visto limones, oro, trigo y puestas de sol.»

Uno de los orígenes de la última categoría de problemas de comprensión descritos anteriormente, podría estar en la enseñanza prematura (o exclusiva) de las operaciones a través de los algoritmos directos. Así, se produciría una identificación unívoca, no razonada, del término que determina el signo de la operación (por ejemplo, «más»), que contextualmente pudiera significar otra cosa distinta, con la operación que simboliza. No parece ser esta la línea que los actuales currículos pretenden hacer seguir a la enseñanza de las Matemáticas. En efecto, la pretensión de los programas que en la actualidad se están implementando es la de una enseñanza comprensible de las Matemáticas, trascendiendo de la comprensión instrumental que venía siendo habitual (saber aplicar reglas sin comprender su funcionamiento) hacia aspectos de comprensión relacional (saber qué ha de hacerse en los casos concretos y estar en condiciones de relacionar estos procedimientos con conocimientos matemáticos más generales, como podrían ser las propiedades de la numeración de posición y de las distintas propiedades de las operaciones: asociativa, conmutativa, distributiva, ...) e incluso, si procediera, de comprensión integral (reconstrucción del camino que conduce al resultado, conociendo las razones de los pasos que se siguen).

El problema estriba en los hábitos de enseñanza-aprendizaje adquiridos. Nuestro aprendizaje de las operaciones (y que transmitimos a los alumnos) está tan ligado a su algoritmo, que se suele confundir la operación con el algoritmo que la resuelve, porque el algoritmo introducido a edades muy tempranas sitúa el énfasis en la obtención correcta y rápida del resultado. Así, se da prioridad al automatismo en detrimento de la comprensión. En este sentido, la finalidad de la enseñanza de los algoritmos pasa de ser la operación algoritmizada a situar el objetivo en el propio algoritmo.

Una enseñanza fundada en los algoritmos al uso:
a) Tiene como objetivo el propio algoritmo.
b) Los problemas que se proponen son ejercicios para practicar.
c) Son más fáciles y rápidos de enseñar.
d) Es un camino firme y seguro para el profesor, porque reproduce su propia experiencia de alumno.

No obstante, y lo que produce aprendizajes significativos, es una enseñanza comprensiva en sentido amplio, que
a) utilice el algoritmo como herramienta,
b) sea la respuesta a situaciones problemáticas y no al revés,
c) evite los males producidos por la no comprensión de lo que ocurre, esto es:
- Idea equivocada de cómo es y cómo funciona la matemática.
- Menosprecio a la inteligencia de los alumnos.
- Fuente de errores.
- No hay recuerdo posterior para reconstruir pasos.
- Falta de flexibilidad.

David Fielker lo expresa muy adecuadamente así:

«No voy a decir que los algoritmos de lápiz y papel no deberían enseñarse, pero sí diré que solamente deberían enseñarse como parte del arsenal de técnicas de que disponemos para ayudar a comprender los números y no porque sean útiles».

Un ejemplo, y una cuestión abierta es la necesidad de explicar el algoritmo tradicional de la multiplicación por medio de la propiedad distributiva (o doblemente distributiva) del producto. El problema es, de un lado, cuál de las distributividades es la más adecuada, y del otro, cuándo introducir el producto así, de manera que se convierta en el referente posterior de la distributividad aplicada al ámbito algebraico.

Las posibilidades entre las que optar serían las siguientes:

* Multiplicación tradicional justificada:

$$26 \times 34 = 26 \times (4 + 30) = 104 + 780 = 884$$
$$26 \times 34 = 26 \times (30 + 4) = 780 + 104 = 884$$

La anticipación algebraica a que da lugar es del tipo

$$a \times (b + c) = a \times b \; + \; a \times c$$

* Multiplicación posicional absoluta (con todas las variantes posibles):

$$26 \times 34 = (20 + 6) \times (30 + 4) =$$
$$20 \times 30 + 20 \times 4 + 6 \times 30 + 6 \times 4 = 884$$

Esta variante da lugar a la anticipación algebraica

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

* Multiplicación posicional absoluta de **Freudhental** (para Freudhental, la imagen natural es la distribución bidimensional, la tabla de doble entrada):

	20 + 6	
30 + 4	**30 x 20**	**30 x 6**
	4 x 20	**4 x 6**

Este paso gradual del dominio de los números al álgebra es uno de los aspectos más abandonados de las Matemáticas. El resultado es doble: De un lado, ciertos alumnos se algebrizan en exceso, con lo cual se produce un menoscabo de la comprensión numérica en general. De otro, una vez introducido el álgebra, ciertos alumnos con capacidades formales poco desarrolladas, evitan todo trabajo matemático al no considerar la posibilidad de seguir trabajando numéricamente muchos aspectos abordados innecesariamente a través del álgebra. Así, el siguiente problema (ANAYA 1. Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador) fue resuelto como se describe por Victoriano, un alumno con un extraordinario razonamiento aritmético, pero (o tal vez por eso), resistente a ser «algebrizado»:

Problema

«Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones sencillas tiene? ¿Cuántas dobles?.

Respuesta

Cada habitación tiene al menos una cama. Por tanto, se necesitan 50 camas para 50 habitaciones con una cama. Nos sobran 37 camas que colocar, que se pondrían en las habitaciones que van a ser dobles. Por lo tanto, habrá 37 habitaciones dobles y 50 - 37 = 13 habitaciones sencillas.

Como dice **Eisner**, «Cada situación educativa en la que se toman decisiones es significativamente única, no sólo en el sentido temporal y espacial, pues todas las situaciones son únicas por esas circunstancias, sino en tanto que las metas, métodos, personas y contexto difieren de una a otra significativamente y deben ser tratadas en función de esas diferencias si se quiere ser efectivo».

Así, y en aras de la comprensión, los problemas de Manolito serían menos porque asumiríamos, con **Bruner**, que:

«Cualquier materia puede ser enseñada efectivamente *en alguna forma honradamente intelectual* a cualquier niño en cualquier fase de su desarrollo» (Bruner, J.- «El proceso de la educación»).

Las Matemáticas, en suma, podrían ofrecer a todos los niveles, uno de los aspectos más motivantes de las mismas y que tiene que ver con su comprensibilidad: «ver» un concepto, un elemento, un problema matemático con los sentidos e intelectualmente, y compartir con los demás tal visión proporcionará (acorde a cada nivel) una expresión de placer similar a la que tenía el rostro de **Andrew Wiles** al ofrecer a sus colegas, al mundo y a sí mismo, la demostración del **Ultimo Teorema de Fermat**. Tan sólo por la expresión de placer que reflejaba la cara del matemático en ese momento, merecería que tal demostración fuese la correcta.

Bibliografía

* BALBUENA ,L. y de la COBA, Mª D.: **Una investigación sobre los contenidos conceptuales de los alumnos que acceden a 1º de BUP** (en prensa).

* BRUNER, J.: **El proceso de la educación**. UTEHA. México.

* CASTRO, E.; RICO, L. y CASTRO, E.: **Números y operaciones**. Ed. Síntesis. Madrid 1987.

* DICKSON, BROWN y GIBSON.: **El aprendizaje de las Matemáticas**. Ed. Labor - MEC. Madrid. 1992.

* Informe COCKCROFT. **Las Matemáticas sí cuentan**: MEC. Madrid. 1985.

* GÓMEZ ALFONSO, Bernardo.: **Numeración y Cálculo**. Ed. Síntesis. Madrid 1988.

* PIMM, D.: **El lenguaje matemático en el aula**. Ed. Morata - MEC. Madrid 1990.

* PUIG, L.; CERDÁN, F.: **Problemas aritméticos escolares**. Ed. Síntesis. Madrid 1988.

Fidela Velázquez
S.C. "Isaac Newton" P.M.