

La expresión oral y escrita en las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria: Una experiencia de trabajo en el aula

Amalia Sánchez Benito

Necesidad de trabajar aspectos lingüísticos en clase de Matemáticas

A) Planteamiento del problema

Las áreas que merecen un tratamiento específico, dada su importancia para la preparación de los alumnos con vistas a su incorporación a una sociedad en continuo estado de evolución, son el lenguaje y las matemáticas.

Hay, pues, que buscar una interconexión entre ambas áreas, que aunque tratadas como unidades independientes de contenido, se complementan para lograr una formación en la que los conocimientos adquiridos puedan ser trasvasados de una a otra, permitiendo una fácil asimilación y comprensión.

Los problemas que conlleva aprender a usar las matemáticas como un medio de comunicación no son los mismos que los de aprender el uso de la lengua materna. A diferencia de ésta, las matemáticas no se adquieren de modo natural, no se usan constantemente, tienen que aprenderse y practicarse. Expresan la información de un modo más preciso y concreto de lo que requieren normalmente los mensajes «gramaticales» expresados en la lengua materna habitualmente, razón también por la que los errores tienen mayores consecuencias.

Sin embargo, el lenguaje matemático y su dominio sólo son posibles cuando se conoce y utiliza de manera adecuada la lengua materna, ya que la información matemática en la mayoría de las ocasiones nos llega mediante el lenguaje oral o gráfico, a la vez que los

datos obtenidos al resolver una situación problemática se suelen transmitir por los mismos medios.

No obstante, el hecho de que las matemáticas se encuentren en los planes de estudio se debe, fundamentalmente, no a su «utilidad» para la vida, sino y sobre todo, a que poseen, indudablemente, valores formativos y complementarios de la personalidad.

Tradicionalmente, al evocar «los contenidos de matemáticas» siempre se hacía referencia a conceptos y destrezas, quizás por ser más fáciles de evaluar. Es innegable, que en la actividad matemática deben estar presentes los contenidos conceptuales (hechos, conceptos y principios), pero no son los únicos que hacen mover esta actividad. A veces, lo esencial puede ser el promover el gusto por las matemáticas, saber tomar decisiones, discutir conceptos previos que tiene el alumnado al comienzo de un tema, etc. Por estas razones, se establecen otros contenidos matemáticos: los procedimentales y los actitudinales (actitudes, valores y normas).

Si atendemos a los objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en el área, los contenidos procedimentales tienen en cuenta la importancia que de los distintos tipos de lenguajes matemáticos (numérico, gráfico, algebraico, probabilístico, etc.) puede y debe darse para alcanzar los objetivos propuestos, haciendo referencia a su comprensión y uso, tanto en su expresión oral como escrita. Igualmente, aparecen términos más generales tales como sintetizar, valorar, criticar, decidir, planificar, comprobar, etc., que requieren la utilización de un lenguaje estructurado y claro, y que forman parte de estrategias heurísticas, propias de la resolución de problemas.

Existe una estrecha relación entre los **objetivos generales de la E.S.O.** y los **objetivos generales del área de matemáticas**, que pone de manifiesto el carácter eminentemente formativo de su enseñanza en dicha etapa, contribuyendo a la formación integral del alumno, y que, por tanto, no puede dissociarse del conocimiento de la propia lengua.

Esta relación se pone de manifiesto en el siguiente listado de objetivos generales de los **Diseños Curriculares de Canarias - ESO - Matemáticas** (en adelante, **DCC**).

La necesidad de la utilización correcta del lenguaje se pone nuevamente de manifiesto en los DCC, que muestran la interrelación existente entre los contenidos curriculares de matemáticas, y donde puede observarse que los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales confluyen en la resolución de diferentes situaciones problemáticas. Parece, pues, evidente, la necesidad de conseguir que nuestros alumnos de Secundaria resuelvan problemas de matemáticas.

OBJETIVOS GENERAL DE ETAPA

- a) Conocer y comprender los aspectos básicos del funcionamiento del propio cuerpo y de las consecuencias para la salud individual y colectiva de actos y decisiones personales, y valorar los beneficios que suponen los hábitos del ejercicio físico, de la higiene y de la alimentación.
- b) Formarse una imagen ajustada de sí mismo, de sus características y posibilidades, y desarrollar actividades de forma autónoma y equilibrada, valorando el esfuerzo y la superación de las dificultades.
- c) Relacionarse con otras personas y participar en actividades de grupo adoptando actitudes flexibles, solidarias y tolerantes, superando inhibiciones y prejuicios y rechazando todo tipo de discriminaciones debidas a la raza, sexo, clase social, creencias y otras características individuales y sociales.
- d) Analizar los mecanismos y valores que rigen el funcionamiento de las sociedades, en especial los relativos a los derechos y deberes de los ciudadanos, elaborar juicios y criterios personales y actuar con autonomía e iniciativa en la vida activa y adulta.
- e) Analizar los mecanismos básicos que rigen el funcionamiento del medio físico, valorar las repercusiones que sobre él tienen las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo como elemento determinante de la calidad de vida.
- f) Conocer y valorar el desarrollo científico y tecnológico, sus aplicaciones y su incidencia en su medio físico y social.
- g) Conocer, apreciar y disfrutar el patrimonio cultural y contribuir activamente a su conservación y mejora, entendiendo la diversidad lingüística y cultural como un derecho de los pueblos y de los individuos, y desarrollando una actitud de interés y respeto hacia el ejercicio de este derecho.
- h) Comprender y producir mensajes orales y escritos con propiedad, autonomía y creatividad en castellano y, en su caso, en la lengua propia de la Comunidad Autónoma, y al menos en una lengua extranjera, utilizándolos para comunicarse y para organizar los propios pensamientos, y reflexionar sobre los procesos implicados en el uso del lenguaje.
- i) Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos, y técnicos, articulándolos con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionando sobre los procesos implicados en el uso del lenguaje.
- j) Elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso segundo.
- k) Obtener y seleccionar información utilizando las fuentes en que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla de manera organizada e inteligible.
- l) Obtener el conocimiento indispensable de las creencias, actitudes y valores propios del patrimonio cultural y de la tradición de nuestra sociedad, a fin de poder valorarlos críticamente y de realizar aquellas opciones de valor o sentido que mejor favorezcan su propio desarrollo integral como personas.

OBJETIVOS GENERALES DE MATEMÁTICAS

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, algebraica) con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, realizando medidas, utilizando distintas clases de números para recoger y tratar la información y realizando los cálculos pertinentes mediante los algoritmos apropiados a cada situación.
4. Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, valorando la conveniencia de las estrategias en función del análisis de los resultados.
5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
6. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la naturaleza, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y disfrutando de la belleza de generar.
7. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista-aleatorio, finito-infinito, exacto-aproximado, etc.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones como instrumento y modelo para conocer la realidad y para una mejor comprensión de los mensajes.
9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con formas propias de la actividad matemática tales como la exploración sistemática de alternativas, la necesidad de precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, etc.
10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar sin inhibiciones las situaciones que requieran su empleo, disfrutando con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										A
c	C								B	
d								C		
e						B		B		C
f		B	B	B			C	B		
g										
h	A									
i	A	B	A							
j	B	A		A					A	
k	C	C	B							
l										

El célebre matemático G. POLYA, en su libro **Cómo plantear y resolver problemas**, nos proporciona unas pautas para la resolución. El cuadro que exponemos a continuación está basado en Polya y otros autores como BURTON, MASON y STACEY, así como en algunas orientaciones de SCHOENFELD.

ABORDAJE

1. Comprender el problema

- * Lee el problema despacio.
- * ¿Cuáles son los datos? (lo que conoces) ¿Cuál es la incógnita? (lo que buscas).
- * Trata de encontrar la relación entre los datos y la incógnita.
- * Si puedes, haz un esquema o dibujo de la situación.

2. Concebir un plan

- * ¿Se parece este problema a otro que conozcas?
- * ¿Podrías plantear el problema de otra forma?
- * Imagínate un problema parecido, pero más sencillo.
- * Supón que has resuelto el problema. ¿Cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?

ATAQUE

3. Llevar a cabo el plan

- * Al ejecutar el plan, comprueba cada uno de los pasos.
- * ¿Tienes la seguridad de que los pasos dados son correctos?
- * Antes de hacer algo, piensa: ¿para qué hago esto?
- * Acompaña cada paso con una explicación que indique lo que haces y para qué lo haces.
- * Si no puedes encontrar la solución, prueba de nuevo desde el principio, reordena las ideas, vuelve a intentarlo.

REVISIÓN

4. Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan.

- * Examina la solución obtenida. ¿Te parece lógica?
- * ¿Puedes comprobar la solución?
- * ¿La solución es única? ¿Puedes hallar alguna otra?
- * Explica claramente tu solución, así como el proceso seguido para calcularla.

El primer paso, esencial sin lugar a dudas, plantea serias dificultades a gran parte del alumnado. Las mayores dificultades con las que se encuentra son casi todas de origen extramatemático: incompreensión del enunciado, inseguridad o ansiedad ante la materia, miedo a arriesgarse utilizando métodos no habituales... Otras se refieren a la parte heurística del problema, esto es, a la fase que va desde la lectura del enunciado hasta la concepción de un plan de resolución; por no hablar de la última parte, en que se pide al alumno que explique el proceso seguido, así como los pasos intermedios para la resolución del problema.

Quizá los programas excesivos y a veces ilógicos, la prisa por poderlos terminar («mis alumnos no van a ser los peores») y la propia ansiedad del profesorado ante estas situaciones, ha hecho que la fase de revisión sea, la mayoría de las veces, la menos trabajada en clase.

¿Es posible motivar al alumno con unas matemáticas más atractivas, participativas, inteligibles, sin olvidar los aspectos informativos y del currículo? Creemos que sí. Y este es el punto de partida de este trabajo.

B) Utilización de textos matemáticos

Un currículo en el que se consoliden la reflexión y el pensamiento, partiendo de la observación, de la práctica, de la exploración y la experimentación, exige disponer de materiales variados. Se necesitan recursos que reflejen ampliamente los fines, objetivos, contenidos y métodos de enseñanza. Esto debe incluir un amplio abanico de materiales impresos; no sólo libros de texto y fichas de trabajo, sino material de referencia, libros sobre temas particulares y «material real» (folletos, hojas de publicidad, impresos, letras de cambio, etc.), que es útil para relacionar las matemáticas con la vida actual.

Existen diversos criterios para clasificar textos. Pueden utilizarse criterios extralingüísticos, tales como la intención comunicativa, el tipo de destinatario y el lugar social del texto; y criterios lingüísticos, en los que no vamos a entrar. Nos centraremos en un criterio para su clasificación: el de su intención comunicativa. La clasificación obtenida así, queda reflejada en la siguiente tabla:

TIPO DE DISCURSO	INTENCIÓN COMUNICATIVA	TEXTOS QUE CONCRETAN EL TIPO DE DISCURSO
INFORMATIVO	Transmitir al destinatario un dominio del saber social	Noticia, reportaje, crónica, documental, artículo de enciclopedia, informe, memoria, documento histórico, diagrama, cartel cultural, itinerarios, descripciones,...
EXPLICATIVO	Lograr que el destinatario comprenda	Exposición didáctica, informe explicativo; artículos y textos de manuales que describen un mecanismo o procedimiento, interpretan un fenómeno, desarrollan un proceso de razonamiento, modifican el conocimiento acerca de una determinada realidad.
PERSUASIVO	Convencer al destinatario, persuadirle acerca de algo	Anuncio publicitario en prensa escrita, radio, televisión, cartel publicitario, carta de solicitud, artículo crítico, coloquios, debates,...
PRESCRIPTIVO	Lograr que el destinatario realice una acción o tenga un determinado comportamiento social	<i>De instrucciones:</i> Consignas, avisos, recetas de cocina, instrucciones sobre el funcionamiento de objetos (calculadora), reglas de juego, etc. <i>Normativo:</i> Disposiciones legales, contratos, resoluciones.....
CONATIVO	Contactar con el destinatario	Diálogo, conversación, entrevista, tertulia, coloquio, mesa redonda.
ESTÉTICO Y LÚDICO	Recrear al destinatario, divertirlo, desarrollar su fantasía	Cuento fantástico, leyenda, cuento de humor, relato de ciencia-ficción, juegos de lógica, etc.

De la observación del cuadro anterior, puede deducirse que todos los tipos de textos citados pueden ser abordados en clase de matemáticas; de hecho, casi todos los profesores los hemos trabajado, con mayor o menor intensidad, al proponer a nuestros alumnos diferentes tipos de actividades. No se trata, por tanto, de trabajar algo nuevo o revolucionario; se trata, simplemente, de reflexionar sobre la importancia de la comprensión oral y escrita de los textos y no sólo del aspecto matemático de los mismos, al cual el alumno no podrá acceder de manera adecuada si no ha realizado aquellas actividades.

Al final de este trabajo, se presentan varias actividades trabajadas en el aula, en las que la lectura y la síntesis son prioritarias en el trabajo del alumno. Sin ellas, las actividades podrían resultar, en ocasiones, demasiado mecánicas o elementales para el nivel 14-16.

Otra posibilidad de trabajar estos aspectos en el aula es el **Comentario de textos matemáticos**, dentro del cual podemos incluir cualquiera de los tipos de textos citados anteriormente. Tiene, como principales objetivos, los que siguen:

- * Adiestrar al alumno en el conocimiento de su propia lengua.
- * Introducirle en el dominio de un vocabulario matemático básico.
- * Ayudarle en la interpretación de conceptos y símbolos matemáticos.
- * Proporcionarle información y documentación.
- * Proporcionarle habilidad para expresar por escrito sus ideas matemáticas.
- * Ejercitarle en la interdisciplinariedad.
- * Ayudarle en la elaboración de juicios críticos y opiniones positivas.
- * Desarrollar la capacidad de abstracción y síntesis sobre los elementos que aparecen en el texto y expresarlos en pocas palabras.
- * Conseguir una actitud positiva y activa hacia el texto matemático.
- * Motivar al alumnado: Todos los alumnos pueden y saben hacer algo.
- * Proporcionar al profesor una vía de trabajo para tratar la diversidad en el aula: No todos los alumnos quieren ni pueden hacer lo mismo.
- * Permitir la posibilidad de trabajar áreas transversales.
- * Favorecer la autonomía de aprendizaje del alumnado.

Experiencia realizada en el aula

El I.B. «Pérez Galdós» de Las Palmas de Gran Canaria está situado en la zona centro de la ciudad. Cuenta con 2.500 alumnos, distribuidos en turnos de mañana, tarde y noche, y con unos 140 profesores, de los cuales 70 están implicados en la E.S.O.

En este Centro, en el que se trabaja desde hace diez años la Reforma de la Enseñanza, la mayoría del profesorado que la imparte lo hace de forma voluntaria.

En el curso escolar, 1992 - 1993, se estuvo trabajando en la anticipación de la L.O.G.S.E., con un total de 40 profesores, 4 de ellos- entre los cuales me encuentro- del Seminario de Matemáticas. En el curso académico 1993-1994, se imparten 10 cursos de 3º y 4 de 4º de E.S.O.

Durante el curso pasado, con la colaboración de todo el profesorado implicado, se trabajaron los recursos de evaluación del alumnado, llegando a unos acuerdos de Centro. Uno de estos recursos, y quizá uno de los más trabajados, es la observación del cuaderno del alumno.

Esta observación precisa unas pautas tales como: correcciones y autocorrecciones, resultados, conclusiones, reflexión personal (notas, aclaraciones, síntesis, conclusiones), recopilar y utilizar adecuadamente el vocabulario específico de cada materia, utilizar gráficas y símbolos específicos de la materia, creatividad (observando si añade o no información por cuenta propia), etc. Por otra parte, y también a nivel de Centro, se acordó trabajar, como objetivo prioritario para la elaboración del Proyecto Curricular de Centro, la comprensión y expresión oral y escrita.

Metodología seguida

Ya hemos comentado algunos de los aspectos a observar en el Cuaderno del alumno, un poderoso recurso de evaluación gracias al cual puede observarse su método de trabajo, y sus progresos y deficiencias en actitudes, procedimientos y conocimientos conceptuales.

Las dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de los enunciados, así como las que encuentran cuando tienen que explicar los pasos que realizan y por qué en la resolución de un problema, así como la elaboración de resúmenes de clase, ejercicios de síntesis, etc., quedan al descubierto cuando observamos sus cuadernos.

Todos sabemos que en muchas ocasiones lo más importante de una determinada actividad no es el desarrollo aritmético o procedimental de la misma, sino las ideas o contenidos conceptuales que el alumno pueda abstraer de ella. Nuevamente, la observación de estas conclusiones, resúmenes o síntesis - algunas de las cuales comentaré después, por lo que tienen de anecdóticas - parece indicar que, o bien el alumno no ha entendido nada, o bien no sabe expresar aquello que ha entendido o aprendido. ¡Cuántas veces la famosa frase «o sea...», con la que quiere explicar alguno de sus conocimientos o resultados, contradice aquello que acaba de escribir o de obtener correctamente!

Por otra parte, para el alumno es importante interiorizar y manifestar oralmente o por escrito aquello que ha aprendido o lo que no ha aprendido. Sólo de esta manera, será capaz de plantear y resolver sus dudas, así como valorar positivamente lo que acaba de asimilar, para así motivarse a sí mismo para sucesivos aprendizajes o, lo que es lo mismo, aumentar su autoestima.

La metodología seguida ha sido la de buscar, seleccionar y diseñar actividades en las que, sin abando-

nar los contenidos conceptuales, se trabajase fundamentalmente la lectura y la síntesis de textos matemáticos, elaborados con el fin de motivar al alumno a la lectura del texto o a la resolución del ejercicio que plantea bajo títulos sugerentes o atractivos, en la medida de lo posible. Empleándolos una vez como introducción a un tema, tal como ocurre con determinados textos explicativos, como, por ejemplo, la actividad titulada **La música pitagórica**, en la que se pide al alumno una ficha monográfica sobre el teorema de Pitágoras, además de la correspondiente síntesis del texto, etc.; o en **Los números: ¿familia o sólo amigos?**, donde, además, se dan a conocer determinados aspectos anecdóticos de la historia de las matemáticas. Otras veces, invitando a la resolución de un problema matemáticamente fácil, pero cuya lectura implica cierta dificultad, aunque su título y contenido anima al alumnado a su resolución (**Rarezas de extraterrestres, Misiones peligrosas**,... Y, otras, a través de juegos de lógica, en los que no sólo tienen que entender en qué consiste el juego, sino criticar los resultados por ellos obtenidos, o explicar el procedimiento utilizado para su resolución, bien sea oralmente o por escrito.

Los textos de tipo prescriptivo son utilizados en algunas ocasiones. Por ejemplo, para trabajar actividades con la calculadora, se les facilitaron dos páginas con las instrucciones y utilidades de las teclas más utilizadas, en las calculadoras más comunes. Aquellos alumnos que disponían de calculadoras diferentes, debían escribir y describir cómo trabajaba la suya aquellas funciones en las que se manifestaba la diferencia de comportamiento. Otros textos de este tipo pueden considerarse los destinados a explicar cómo se resuelven determinados tipos de juegos lógicos.

Algunos textos de carácter informativo (actividad titulada **La Biblia y el número π**), cuya lectura, aparentemente fácil les crea conflictos, ya que están habituados a utilizar todos los datos que se les da en los problemas para su resolución, y no entienden el significado de «codos», «estimación», etc.

Además de los juegos de lógica, podemos hacer uso de textos recreativos o lúdicos para conseguir reforzar algunos conceptos matemáticos, como el de semejanza o el de proporcionalidad (**Un viaje a Lilliput**), animando al alumno a la lectura, a la reflexión y al trabajo en grupo.

El lenguaje algebraico se ha trabajado a través de actividades como la **Historia de Diofanto**, presentada de forma que el alumno puede observar la utilidad del esquema en la resolución de un problema, y de frases

más o menos largas, algunas de las cuales, cuya escritura en lenguaje vulgar es parecida, son claramente diferentes al escribirlas en forma algebraica. Por ejemplo: la sexta parte de un número aumentado en 6 unidades, y la sexta parte de un número aumentada en seis unidades, etc.

La lectura e interpretación de gráficas de funciones se trabajó a través de múltiples ejemplos sobre la vida real; por ejemplo, un viaje en moto.

No siempre es exigible en matemáticas un lenguaje preciso y riguroso. Así, en las actividades relacionadas con la estimación, en las que el alumno puede dar varias respuestas y, por tanto, no existe una solución única y tampoco una estimación es necesariamente más correcta que otra, conviene emplear el trabajo oral y la discusión en grupo. Expresarse oralmente ayuda a los alumnos a emplear la estimación y disminuye su intransigencia por los datos que quedan escritos. Cuando los alumnos deben compartir su información y justificar cómo han llegado a obtenerla, mejoran su comprensión de los procedimientos para valorar numéricamente una cantidad y perfeccionan sus técnicas para hacer cálculos mentales. La tolerancia para el error es una consecuencia importante que debe aprenderse, a lo cual contribuye considerablemente la capacidad para transmitir estimaciones y justificar su obtención.

Otras veces, el lenguaje vulgar y el de la matemática son totalmente contrarios. Así, por ejemplo, en el lenguaje ordinario, ordenar una habitación puede ser agrupar los objetos según su utilidad, por ejemplo la ropa en un sitio, los libros en otro, los juguetes en otro, etc. Esto sería, matemáticamente, una clasificación. Igualmente, también se da confusión al contrario; así, en las páginas deportivas de cualquier periódico, se puede ver el lunes una tabla con los equipos de fútbol que es meramente ordenatoria y no clasificatoria.

Otra interferencia importante entre ambos lenguajes, puede estar en la utilización del término «semejante», utilizado en el lenguaje vulgar, como sinónimo de «parecido» e incluso como «igual», mientras que en matemáticas ese término tiene un significado más preciso. Esto suele dar lugar en ocasiones a problemas en la comprensión de algunos conceptos y es conveniente trabajar en clase la utilización e interpretación de ambos lenguajes.

Autoevaluación y evaluación

El trabajo de síntesis es un importante recurso de evaluación y autoevaluación del alumno y el profesor.

Partiendo de algunas de las actividades trabajadas en el aula, observamos las siguientes respuestas del alumnado:

En la actividad titulada **La Biblia y el número π** , algunos de los resúmenes de los alumnos fueron:

«Los antiguos no medían, aproximaban».

«Los israelitas creían que π valía 3».

«Hoy hemos aprendido que «codos» es igual que «pies», etc.

Sólo un alumno del curso mencionó en su resumen de clase que había trabajado intervalos en la recta real y que había aprendido a aproximar números por exceso y por defecto. Ninguno hizo alusión al hecho de que se pudiesen emplear términos matemáticos en La Biblia. Tampoco, al hecho de que la estimación es importante en muchas ocasiones en las que no es necesario o posible medir con exactitud.

Cuando trabajamos la división entera con la calculadora:

«Hoy hemos aprendido a dividir sin la tecla de dividir».

«Hoy hemos aprendido que dividir es restar».

En el comentario de texto titulado «**La música pitagórica**» no resumen el texto, se limitan a numerar las líneas y contestar con diez números. No elaboran la ficha sobre el teorema de Pitágoras. Simplemente escriben la expresión matemática del teorema.

Tras estas observaciones, llega el momento de retomar la situación. ¿Dónde está el fallo? No podemos pedir a los alumnos que resuman, si antes no los enseñamos a resumir. ¿Qué debe contener un resumen de clase; qué, el resumen de una actividad? ¿Qué es lo más importante de un texto? ¿Cuál es el contenido indispensable para transmitir la idea principal?...

Los alumnos que no cuentan en su resumen de la actividad referente a La Biblia que trabajaron con intervalos en la recta real, dejaron de hacerlo porque: a) no saben tomar apuntes; b) no saben concretar lo que aprendieron o, quizá, no entendieron la idea de intervalo; c) no les pareció importante; d) otras causas. Lo que si es cierto es que sólo cuando se haya interiorizado y se sea capaz de resumir esta idea, podrá decirse que el alumno la ha asimilado. «Sólo se puede decir o escribir algo de aquello de lo que se sabe algo».

Por otra parte, el objetivo antepenúltimo del trabajo de comentario de texto, hace referencia a la posibilidad de trabajar la diversidad en el aula. Efectivamente, hay alumnos que, bien por sus capacidades o bien por encontrarse especialmente motivados, desarrollan un trabajo monográfico cuya calidad y contenido es eminentemente superior al de otros. La capacidad de abstracción y síntesis, también lo es, etc. Este hecho nos da la posibilidad de trabajar en el aula las mismas fichas o actividades con distintos niveles de alumnos, permitiendo de esta forma que cada alumno llegue hasta dónde le es posible o quiere, pero no hay ningún alumno que no pueda hacer algo.

Finalmente, ¿qué evaluar en el trabajo de los alumnos, y cómo hacerlo?

1º. Se pretende que el alumnado sea consciente de los aspectos que caracterizan las situaciones problemáticas: pregunta o preguntas, datos o condiciones y contexto en el que se presentan.

2º. Método de trabajo.- Este criterio lleva consigo la observación del trabajo en cuanto a orden, organización, sistematización, respeto a las normas inherentes al trabajo de grupo, cómo son las opiniones e ideas de los demás, solidaridad y colaboración en las tareas y aceptación de los juicios críticos sobre sus propios razonamientos.

3º. Capacidad para describir el proceso de resolución de problemas desde una perspectiva global, apreciando las diferentes fases que se atraviesan, y usando para ello la práctica, la reflexión y el análisis de sus propios mecanismos de resolución.

4º. Intervenciones.- Apreciar y valorar convenientemente el uso de preguntas hacia sí mismo y hacia los demás. Comprobar si aumenta su capacidad para tomar decisiones, a la vista de una determinada situación y de las variables que intervienen.

5º. Evolución del alumnado en cuanto a su capacidad, habilidad y recursos para la resolución de situaciones problemáticas.

6º. Crítica de los resultados obtenidos, valorando no tanto los resultados finales como la crítica que el propio alumno haga de ellos.

Valoración de la experiencia

La valoración de la experiencia es muy positiva. Por una parte encontramos un alumnado muy motivado

ante la asignatura, entiende lo que hace, siempre puede hacer algo, lo encuentra útil o curioso, no se aburre. Por otra, sus padres han colaborado estrechamente con ellos en algunas actividades, lo que también les ilusiona. Por ejemplo, en **Juegos lógicos**, en la actividad titulada «**Saber utilizar la luz con inteligencia**», etc.

Como resultado de esta motivación positiva, los alumnos trabajan en clase con ilusión, y piden, cuando acaban su trabajo, un nuevo juego o actividad. Su actitud en clase es activa y participativa.

Algunas de las actividades propuestas

Sólo expondremos algunas de las realizadas en clase.

La música pitagórica

La indiferencia por el tema de las estrechas relaciones existentes en la Antigüedad entre la música y las matemáticas es, incluso en el mundo de la música, poco y pocas veces apreciada. Esta estrecha unión se inició muy pronto en las culturas caldea, egipcia, babilónica y china; pero fueron los pitagóricos los que con las cuerdas vibrantes unieron irrevocablemente la música y las matemáticas. La forma más sencilla de la doctrina pitagórica que asociaba la música a los números, puede ser descrita como sigue:

Si se fija uno de los extremos de una cuerda tensa y se hace vibrar, emitirá un sonido de un tono. Si se hace vibrar la mitad de la cuerda, el tono aumentará un octavo. Si vibran los dos tercios de la cuerda, el tono estará $1/5$ por encima del que produjo la cuerda entera.

Estos resultados (y los intermedios) fueron utilizados por los pitagóricos para construir escalas. Poco a poco, la relación entre la porción vibrante de una cuerda y la cuerda entera fue expresándose en términos de razones. Por ejemplo, $2:3$ (la quinta) era más armoniosa que $8:9$ (la separación entera). Según Pitágoras, los sonidos armoniosos son producidos por razones expresadas como números enteros y, cuanto más sencilla es la razón, esto es, cuanto más pequeños son los números que la expresan, mejor es la armonía. Así, la octava, la quinta y la cuarta fueron consideradas, desde el punto de vista de la música, superiores a otros intervalos.

1. ¿En qué líneas del texto se encuentran ideas fundamentales?

2. Haz una ficha: El teorema de Pitágoras
3. Inventa otro título para el texto.
4. Reproduce en diez líneas todo el texto.
5. ¿Recuerdas algún teorema que haga referencia a la proporcionalidad de dos o más magnitudes?. Cítalo. Pon ejemplos.

Los números: ¿familia o amigos?

*Los números que tienen factores tales como 2, 3, 5, 11, 13... y así sucesivamente, se llaman «**números primos**» o, simplemente, «**primos**», derivándose este nombre de una palabra que significa «primero».*

Para la gente que ve valores misteriosos en los números, parecería como si los números primos pudieran haber existido primero, mientras que los números compuestos pudieran haber sido contruidos después, sacándolos de los primos. En otras palabras, una vez que existieron los números 2, 3, y 5 pudo formarse el 60 por multiplicación de $2 \times 2 \times 3 \times 5$.

*El primer esquema para conocer los números primos, se conoce con el nombre de su autor, **Criba de Eratóstenes**. Es simplemente un cuadrado donde aparecen los 100 primeros números y, siguiendo un procedimiento que estudiarás pronto, se van tachando los números que no son primos.*

***Euclides**, matemático griego, descubrió hace 2.200 años que no existe el número primo más alto.*

*Los griegos se entretenían jugando con los factores de los números (incluyendo el número 1 pero excluyendo el propio número para ver qué pasaba). Algunas veces, los factores de un número sumaban menos que el propio número. Por ejemplo, los factores de 10, suman sólo 8. Al número 10 lo llamaban, por esto, **número deficiente**. Los factores del 12, es decir, 1, 2, 3, 4 y 6, suman 16; por esto, al número 12 lo llamaban **número abundante**. Por el contrario, los tres factores del 6, suman 6, y los cinco de 28, suman 28, razón por la que a números como estos los llamaban **números perfectos**. Encontraron aún más relaciones curiosas. Así, por ejemplo, decían: «dos números son **amigos**, cuando la suma de los divisores propios de uno es igual al otro y recíprocamente. Los números 220 y 284, ya conocidos por los pitagóricos, son **amigos**. **Pierre Fermat** descubrió el par de amigos 17296 y 18416. **Descartes** encontró un tercer par: 9.363 584 y 9.437 056. Más recientemente, **Paganini** descubrió la pareja 1184 y 1210. Actualmente se conocen más de 1000 pares de números amigos. No se conoce ninguna fórmula para determinar este tipo de números.*

1. ¿En qué líneas del texto se encuentran ideas fundamentales?
2. Haz una ficha: La Criba de Eratóstenes.
3. Inventa otro título para el texto.
4. Reproduce en diez líneas todo el texto.
5. Escribe en lenguaje matemático: «Los factores del 12, (1, 2, 3, 4 y 6), suman 16».

Rarezas extraterrestres

Objetivos de la actividad:

1. Identificar las ideas fundamentales del texto.
2. Trabajar la comprensión lectora.
3. Agilizar el cálculo numérico.
4. Saber evaluar los datos.

En un planeta muy extraño, la «gente» crece a brincos duplicando su estatura. Los bebés, llamados CONGOS, se alargan de repente al doble y se vuelven niños. Igualmente, los niños, llamados MONGOS, se alargan al doble pasando a adultos, los cuales son llamados ELONGOS.

En otro planeta vecino del anterior, aún más extraño, pasa lo contrario. Los bebés, llamados TRUNCOS, se achican a la mitad al volverse niños; y los niños, llamados SUNCOS, se encogen a la mitad otra vez al pasar a ser adultos, a los cuales se les llama DUNCOS.

Un día, un mongo fue de visita al otro planeta y, jugando con suncos, se dio cuenta de que tres suncos subidos uno encima de otro igualaban su estatura.

Relaciona las alturas de:

- a) Un congo y un elongo.
- b) Un trunco y un dunco.
- c) Un elongo y un dunco.
- d) Un congo y un trunco.

Si un mongo se sube a la cabeza de un trunco, ¿cuántos truncos, uno encima de otro, se necesitarán para igualarlos?

¿Se puede hacer el problema con los datos dados?. En caso afirmativo, explica el porqué. En caso negativo, ¿qué necesitarías saber?

Misiones peligrosas

Objetivos de la actividad:

1. Motivar al alumno con la presentación de un ejercicio formulado en términos que le produce curiosidad, por su desenlace.

2. Trabajar la comprensión lectora.
3. Repasar operaciones y propiedades de los números enteros y racionales.

1) La persona que envía el mensaje $\{-1, 2, -15, 6, -10, 7, 3, -8\}$ es una mujer, si la suma de estos números es un entero positivo; y es un hombre, si es un entero negativo. Su edad viene dada por la suma de los valores absolutos de estos números. Obtén, con estos datos, toda la información posible del mensaje.

2) El contenido del mensaje $\{-3, 4, -5, 8, -1, 10, -7, 7, -2, 9\}$ es una afirmación, si el producto de los números positivos, dividido por el valor absoluto del producto de los negativos, es un cociente exacto de números enteros. En caso contrario, el contenido es una negación. ¿De qué tipo es el contenido del mensaje?.

3) Se recibe el mensaje

$$3.[5 - (1 - 6)] + 2.[(1 - 5) + (5 - 1)] - [(4 - 8) - (1 - 3)].$$

La primera cifra del resultado de esta expresión indica el día en que se envió; la segunda, el mes. Calcula la fecha de emisión del mensaje.

4) Para averiguar el día en que se envió el mensaje de la actividad anterior, hay que sumarle 2 al opuesto del resultado, y dividir por -6 el número obtenido. ¿Qué día se ha recibido el mensaje si el mes es el mismo que el de la emisión?

5) En el mensaje cifrado

$$\frac{-2}{-3 + 1} + \frac{-(7-1)}{-2} + [(-3 + 2) - (-1-6)] + \frac{-40}{-4}$$

el primer sumando indica el número de días que hace que se empezó una determinada misión. El segundo, el número de agentes que la llevan a cabo. El tercero, el número de objetivos de la misión. El cuarto, el número de minutos de que se dispondrá para abandonar el último objetivo. El resultado de la expresión, el número de días que se emplearán. ¿Cuánto hace que se empezó la misión? ¿Cuántos días dura en total? ¿Cuántos agentes la llevan a cabo? Si se necesitan 9 minutos para abandonar el emplazamiento del último objetivo, ¿se dispone del tiempo necesario para hacerlo? ¿Cuántos objetivos tiene la misión?.

Un viaje a Lilibut

Objetivos de la actividad:

1. Fomentar el gusto por la lectura.
2. Trabajar los conceptos de semejanza y proporcionalidad.

3. Identificar las ideas esenciales del texto.
4. Fomentar el trabajo en grupo.

Doscientas costureras fueron destinadas a hacerme camisas, manteles y ropa de cama, empleando las telas más fuertes, que, sin embargo, había siempre que doblar tres o cuatro veces, porque las más recias eran algunos puntos más suaves que el más fino lino. Sus piezas de tela suelen medir tres pies por tres pulgadas de anchura. Las costureras me tomaron medidas, para lo cual me tendí en el suelo, y una se situó junto a mi cuello y otra a media pierna, sosteniendo cada una los extremos de una cuerda fuerte, mientras una tercera, con una regla, de una pulgada de longitud, comprobaba la extensión de la cuerda. Luego les bastó medir mi pulgar derecho, ya que un cálculo matemático, fundado en que una muñeca tiene dos veces el perímetro del pulgar y la cintura dos veces el del cuello, les permitió, con ayuda de un exámen de mi vieja camisa extendida en el suelo, hacerme otras ajustadas a mi medida.

1. Indica, en unidades del sistema métrico decimal, cuáles eran las medidas de las piezas de tela que usaban las costureras liliputienses.
2. Comprueba, midiendo sobre tu propio cuerpo y el de algún compañero, si los cálculos que hicieron las costureras eran correctos.

3. Como sabes, las medidas de Gulliver eran doce veces las de los liliputienses. Recuerda que la razón de las superficies es el cuadrado de la razón de las longitudes, y que la razón de los volúmenes es el cubo.

4. Teniendo en cuenta que lo que comía Gulliver dependía de su capacidad (volumen), ¿sabes qué cálculos utilizaron los liliputienses para averiguar la comida que le correspondía?

5. Sabiendo que la longitud de los liliputienses era de 12 pulgadas, ¿cuál era la altura de Gulliver en unidades del sistema métrico decimal?

6. Suponiendo que el largo de los colchones de los liliputienses era, al menos, de su misma altura, y que lo mismo ocurría con la de Gulliver, ¿qué longitud tendría que tener su colchón y cuál debería ser su espesor? ¿Crees que Gulliver tenía derecho a quejarse?

Historia de Diofanto

Objetivo de la actividad:

Traducción del lenguaje ordinario al matemático

Diofanto fue un gran matemático griego. Todo lo que se conoce de él ha sido tomado de la inscripción que figura en su sepulcro y que a continuación se reproduce. Tú deberás pasarla a lenguaje matemático y responder a las preguntas que se te formulan.

Lenguaje ordinario	Lenguaje matemático
<i>!Caminante!, aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, !oh, milagro!, cuán larga fue su vida,</i>	
<i>cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.</i>	
<i>Había transcurrido, además, una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla.</i>	
<i>La séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.</i>	
<i>Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,</i>	
<i>que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.</i>	
<i>Y con profunda pena, descendió a la sepultura habiendo sobrevivido 4 años a la muerte de su hijo.</i>	

- ¿Cuántos años vivió Diofanto?
 ¿Cuántos años tenía cuando se casó?
 ¿A qué edad fue padre?
 ¿A qué edad perdió a su hijo?
 ¿Cuántos años tenía su hijo cuando murió?

La Biblia y el número π

Objetivo de la actividad:

Realizar estimaciones sobre valores desconocidos del pasado.

La descripción que da La Biblia de lo que fue el templo de Salomón hace pensar que al cronista no le preocupaba en exceso la exactitud de los datos, tal como hoy la concebimos. En el libro II de las Crónicas se describe el altar de bronce del templo, y se hace la descripción en lo que hoy llamamos «números redondos»: Tenía veinte codos de largo, veinte de ancho y diez de alto. Los sacerdotes se lavaban en una especie de piscina de fundición «que tenía diez codos del uno al otro borde, enteramente redonda; su altura era de cinco codos y un cordón de treinta codos la ceñía en derredor».

a) Suponiendo que fuesen exactos los datos que da el cronista, ¿cuál es el valor aproximado de π que usaban los israelitas?

b) Puesto que los datos que utiliza el cronista son datos redondeados a números enteros de codos, este texto nos lleva a pensar que el diámetro de la piscina podría estar comprendido entre 9,5 y 10,5 codos. Si utilizamos $\pi = 3,14$, ¿entre qué valores estará comprendido el perímetro de la piscina?

c) Haz una estimación razonable de la capacidad de la piscina. ¿Qué sería más prudente, dar un resultado único o un intervalo posible de valores?

Adivina el número (Juego de Lógica)

Objetivos de la actividad:

1. Potenciar y estimular el trabajo en grupo.
2. Observar las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en resolución de problemas.
3. Fomentar en el alumno la evaluación de resultados.
4. Desarrollar el pensamiento lógico.
5. Motivar al alumno.

En el siguiente cuadro podrás observar un número de pistas a partir de las que podrás

deducir un número de cuatro cifras distintas (elegidas del 0 al 9), que no empieza con 0. En la columna C (correcto), se indica cuántos dígitos hay allí en común con el número buscado y en la misma posición. En la columna R (regular), se indica la cantidad de dígitos de la fila en común con el número buscado, pero en otra posición diferente. Adivina el número.

				C	R
				4	0
8	2	3	0	1	0
6	3	9	8	1	0
5	6	9	0	0	2
2	7	5	4	0	2

Saber utilizar la energía eléctrica con inteligencia

Objetivo de la actividad: Realizar estimaciones en situaciones reales, que proporcionen un margen de seguridad.

Información:

Cada aparato eléctrico tiene una determinada potencia. Puede verse escrita en watios en las bombillas, en las placas de características técnicas de los electrodomésticos y en los folletos y manuales de uso que entrega el fabricante. Para calcular la potencia a contratar conviene seguir los siguientes pasos:

Primero: Suma la potencia de todos los electrodomésticos que vayan a funcionar habitualmente al mismo tiempo.

Segundo: Una vez obtenida la suma total, fíjate en la tabla que da la escala de potencias normalizadas y elige, como potencia a contratar, la inmediata superior a la cantidad que hayas obtenido. Esto se debe a que el usuario no puede contratar cualquier potencia, sino que tiene que atenerse a la siguiente escala normalizada, expresada en kilovatios (kw):

0,03; 0,06; 0,77; 1,10; 2,20; 3,30; 4,40; 5,50; 6,60; 7,70; 8,80; 9,90; 11,00; 13,06

Ejercicio

«Hemos comprado un apartamento en la playa que consta de comedor, tres dormitorios, cocina y cuarto de baño.

Estima la potencia que debemos contratar si disponemos de lavadora, frigorífico, horno eléctrico, televisión, plancha eléctrica y las luces correspondientes en cada habitación».

ELECTRODOMÉSTICO	CONSUMO (w)
Lavadora _____	300 w (Mínimo) 2.300 w (Máx.)
Televisión _____	165 w
Plancha eléctrica _____	1.000 w
Horno eléctrico _____	2.000 w
Frigorífico _____	200 a 300 w
Bombilla _____	60 w

Escribe sí o no a continuación de cada pregunta.

Si contratamos una potencia de 2,20 kw, ¿podrán funcionar a la vez?:

- El horno y la lavadora
- Luces, frigorífico y TV
- Lavadora y plancha
- Horno, frigorífico, TV y luces
- Luces, plancha, frigorífico y TV

Bibliografía

- * DE GUZMÁN, M. COLERA, J. SALVADOR, A.: **Matemáticas 1º de B.U.P.**, Ed. Anaya, Madrid 1987.
- * DAVIS, PHILIP J., HERSH REUBEN: **Experiencia Matemática**. 1ª ed. Ed. Labor, Barcelona 1988.
- * COCKCROFT, W.H. (Informe): **Las Matemáticas sí cuentan**, 1ª ed., Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid 1985.
- * LAFOURCADE, PEDRO D.: **Evaluación de los Aprendizajes**. Ed. Cincel, Madrid 1977.
- * UDINA I ABELLÓ, FREDERIC. **Aritmética y Calculadora**. Ed. Síntesis. Madrid 1989.

* SEGOVIA, ISIDORO; CASTRO, ENRIQUE; CASTRO ENCARNACIÓN; RICO, LUIS: **Estimación en cálculo y medida**. Ed. Síntesis, Madrid 1989.

* GRUPO BETA: **Proporcionalidad. Geometría y Semejanza**. Ed. Síntesis, Madrid 1990.

* VIZMANOS, J.R., ANZOLA, M.: **Matemáticas. Algoritmo 1**. B.U.P. Ed. S.M., Madrid 1991.

* SWIFT, JONATHAN: **Los viajes de Gulliver**. Ed. Susaeta, Madrid 1991.

* GARCÍA JIMÉNEZ, J.E.: **Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas**. «AULA», 6 (1992), pp. 14, 15.

* GRUPO DECA: **Diseño Curricular del «Curso Taller de Resolución de Problemas»**. «AULA», 6 (1992), pp. 31, 32.

* PROYECTO ARIADNA: **Matemáticas 1º de B.U.P.** Ed. Akal. Madrid, 1985.

* MARTÍNEZ UGARTEMENDÍA, J.: **Cálculo 7º**. Ed. S.M., Madrid 1990.

* MANSILA ROMO, BUJANDA JÁUREGUI: **Pitágoras 7**. Ed. S.M., Madrid.

* MARTÍNEZ UGARTEMENDÍA, J.: **Cálculo 8º**. Ed. S.M. Madrid, 1990.

* MANSILA ROMO, BUJANDA JÁUREGUI: **Pitágoras 8**. Ed. S.M. Madrid, 1990.

* COLETTE, JEAN-PAUL.: **Historia de las Matemáticas**. 1ª Ed. Ed. Siglo XXI de España. Madrid, 1985.

* EQUIPO SIGNO: AZIMUT. **Matemáticas 8º**. E.G.B. Ed. Anaya.

* BARRIENTOS, CARMEN: **La diversidad de los discursos como eje de secuenciación**. «AULA» 14, 1993, pg. 11.

* FUENTE GONZÁLEZ: **El Departamento de Matemáticas**. Ed. Anaya/2. Madrid 1978.

* «LOGIC». **Juegos lógicos**. Ed. Zugarto.

* GOBIERNO DE CANARIAS: DISEÑOS CURRICULARES. (E.S.O.). MATEMÁTICAS.

Amalia Sánchez Benito
S.C. "Isaac Newton" P.M.