Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico

Mª Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

Introducción

En este trabajo se presentan los resultados de una revisión de investigaciones relacionadas con los procesos cognitivos integrados en el aprendizaje del álgebra. Nos ocupamos especialmente de los obstáculos que frenan el progreso del conocimiento del alumno y que son inherentes al aprendizaje de conceptos y procedimientos en el inicio del acercamiento al álgebra, o sea, tipos de dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el comienzo de su aprendizaje.

Sabemos que los conceptos matemáticos vinculados con el álgebra y su operatoria muestran, con frecuencia, dificultades y conflictos para los estudiantes. En este sentido se expresa D. TALL (1989) cuando indica que concebir una expresión algebraica como un objeto matemático, más que como un proceso, puede, manipulando algebraicamente, ser una fuente de conflicto.

Nuestro interés se centra en el estudio de posibles obstrucciones al aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos que presentan dificultades para el alumno, en particular aquellos relacionados con el lenguaje algebraico, con el objeto principal de intentar entender lo mejor posible el proceso cognitivo del estudiante con respecto a conceptos relacionados con el álgebra escolar, buscando así ganar evidencia o clarificar algunos esquemas de respuesta que presentan ya cierta estabilidad y que, por ello, adquieren interés para su estudio. Pretende proporcionar una perspectiva para entender e interpretar las investigaciones cognitivas existentes en la relación del álgebra y el aprendizaje inicial de la misma.

Nuestro análisis presupone que nuestro interés educativo es ayudar a los estudiantes a resolver sus dificultades y motivar a sus profesores a investigarlas.

Obstáculo cognitivo y error

Nuestra revisión de la literatura relevante sobre el tema se centró primeramente en el análisis de estudios de investigación cognitiva en general, para caracterizar e identificar más tarde la distinción entre ***obstáculo cognitivo*** y ***error***.

Las metas de la investigación han sido, en general, el análisis cuantitativo y, a veces, cualitativo, de errores cometidos por los estudiantes, con escasa distinción entre los diferentes tipos de causas que los provocan.

Es cierto que se ha investigado sobre las razones por las que un alumno se expresa o reacciona de una u otra manera, pero también es cierto que no se ha diferenciado profundamente la distinta naturaleza causal. No aparece realmente diferenciada la idea de *obstáculo cognitivo y* la de *error,* ya que se llega a expresar que los obstáculos se manifiestan por los errores, cuando éstos no se deben al azar, sino que son persistentes y reproductibles, y afloran cuando los estudiantes se enfrentan de nuevo a situaciones similares a aquellas en que se observan por primera vez y que se producen según una «lógica» de los alumnos.

Existe poca diferenciación respecto a los obstáculos cognitivos encontrados por los estudiantes y los errores que ellos cometen. Esta correspondencia no debe tomarse demasiado literalmente refiriéndonos al lenguaje algebraico, ya que se podrían identificar dificultades de aprendizaje que no son, estrictamente, de la misma naturaleza.

Nuestra propuesta es, por el contrario, que, desde el punto de vista del investigador, son distintos, ya que puede haber errores que sí son debidos a obstáculos cognitivos; otros, a falsas y prematuras generalizaciones y, otros,al mal uso de propiedades o características propias del lenguaje algebraico que no lo son de la aritmética.

Noción de obstáculo. Obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos

Para una mayor comprensión de nuestra idea, parece conveniente hacer algunas consideraciones relativas a la concepción de **obstáculo** en distintos autores.

Comenzamos indicando que, según nuestra revisión bibliográfica, la primera idea de **obstáculo** es la del filósofo francés BACHELARD (1938-1983), que está definida desde la perspectiva epistemológica y en relación al desarrollo del pensamiento científico. Identifica varias clases,según surjan desde:

* la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas,
* la tendencia a generalizar, que puede ocultar la particularidad de la situación, o
* el lenguaje natural.

Las define en el contexto del desarrollo del pensamiento científico en general, no en términos de experiencias de aprendizaje específicas, individuales. Para este filósofo, el conocimiento científico se edifica salvando obstáculos, no sólo de tipo externo, como los debidos a la complejidad de los fenómenos o a la debilidad de las facultades perceptivas humanas,sino también a los que se producen en el propio acto de conocer y que se manifiestan como una especie de inercia que provoca el estancamiento o, incluso, la regresión del conocimiento. Estos últimos son los que él denomina **obstáculos epistemológicos**.

Un trabajo sobre obstáculos relacionado con la Didáctica de las Matemáticas, nos lo encontramos en GLAESER, G. (1981), que recoge, en su ***«Epistemologie des nombres relatifs»***, la idea original de GASTON BACHELARD de obstáculo epistemológico definida a propósito de la Física, y la adapta a las Matemáticas, en especial al estudio de los números «enteros».

En 1983, el Profesor G. BROUSSEAU, en su artículo ***«Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques»*** considera ampliamente la idea de obstáculo epistemológico y su posible relación con la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Hace referencia explícita a los trabajos de BACHELARD (1938) y PIAGET (1975) y expresa que ellos muestran también que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que se quiere a veces que jueguen. «El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, que se cree en las teorías empiristas y behavioristas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus éxitos, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son intermitentes o imprevisibles, están constituidos en obstáculos».

Brousseau, que en este artículo reconoce que Bachelard es el primer autor que habla de obstáculos y que los estudia en ciencias físicas, manifiesta que la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: a Didáctica, a Psicología, a Psicofisiología, etc. Sus primeras referencias a la noción de obstáculo las manifiesta en el año 1976, en la exposición que realiza acerca de **«La problématique et l'enseignement des Mathématiques»**, en el CIEAEM de Louvain. Acuña el nombre de **obstáculos didácticos**, obstáculos que se dan en la construcción del conocimiento matemático por los alumnos. Indica que un obstáculo se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, no son fugaces, intermitentes, sino reproducibles, persistentes. Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre, para Brousseau, el fruto de una interacción del alumno con su medio y, más precisamente, con una situación que vuelve este conocimiento interesante.

Este autor clasifica los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico así:

* De origen ***ontogénico*** o ***psicogénico***, debidos a las características del desarrollo del niño.
* De orígen ***didáctico***, que resultan de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
* De origen ***epistemológico***, intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no quiere decir que se deba ampliar su efecto ni que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido.

HERSCOVICS, N. (1989), reconoce la introducción de la noción de *obstáculo epistemológico* por parte de Bachelard y su definición en el contexto del desarrollo del pensamiento científico (no menciona a Brousseau ni sus obstáculos didácticos). El denomina por primera vez la noción de **obstáculo** en la adquisición de esquemas conceptuales por el aprendiz y lo expresa en su trabajo ***«Cognitive Obstacles Encountered in the***

Learning of Algebra», en Wagner, S. - Kieran, C. (Ed. 1989). Expresa también que para que el obstáculo cognitivo sea construido como un suceso natural necesita relacionarlo con una Teoría del Aprendizaje y se provee de la Teoría de Piaget del equilibrio, desde la cual la adquisición del conocimiento es un proceso que contiene una interacción constante entre el sujeto que aprende y el medio ambiente, entre dos mecanismos indisociables: la **asimilación** de la experiencia a las estructuras deductivas (la integración de las cosas a ser conocidas en una estructura cognitiva existente) y la **acomodación** de estas estructuras a los datos de la experiencia (cambios de la estructura cognitiva del aprendiz precisada por la adquisición del nuevo conocimiento). En términos generales, la adaptación supone una interacción entre el sujeto y el objeto de forma tal, que el primero puede hacerse con el segundo teniendo un cuenta sus particularidades, y la adaptación será tanto más precisa cuanto más diferenciadas y complementarias, sean la asimilación y la acomodación.

Siguiendo con este análisis sobre las obstrucciones en el aprendizaje del álgebra, interesa destacar lo que indica D. TALL en su trabajo ***«Different Cognitive in a Tegnological Paradigm»***, en Wagner, S., Kieran, C. (Ed. 1989). El no hace distinciones entre los obstáculos; los llama simplemente **obstáculos cognitivos**, y distingue dos tipos:

a) Obstáculos **basados en la secuencia de un tema**, en que afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

b) Obstáculos **basados sobre casos simples**, posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un período sustanclal de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Observamos que la idea de obstáculo parte de la misma fuente: el «obstáculo epistemológico» de Bachelard.

Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como: **«aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas»**.

Podemos precisar expresando que:

- Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.
- Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.
- Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

Un enfoque del problema

Dentro de todo este contexto queremos señalar que optamos por considerar los **obstáculos basados en la organización curricular**. Esta organización lleva implícita reflexión epistemológica, psicopedagógica y social, o sea, que nos ocuparemos de los obstáculos relacionados con aspectos **epistemológicos** (propios de la disciplina) y **didácticos**, y prescindiremos de los ontogénicos.

Desde este punto de vista, es decir, admitiendo la idea de obstáculo de Bachelard, Brousseau y Herscovics, afirmamos, con D. TALL (1989), que **«se puede conjeturar que los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias»**.

Por otra parte, la propia organización curricular acepta el grado de complejidad de la Matemática e implica un orden.

En la línea de nuestra opción, queremos hacer una diferenciación dentro de lo que hasta ahora se ha considerado indistintamente como obstáculo cognitivo o error, y así distinguiremos:

A) Obstáculos cognitivos.
B) Errores del algebra que están en la aritmética.

C) Errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico.

A) Obstáculos cognitivos.- Son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a otros problemas.

Como ejemplo podemos citar el que indica COLLIS (1974) relacionando las dificultades que los niños tienen en el álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. El apuntó la idea de que los estudiantes principiantes de álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Por ejemplo, si se les requiere que dos números conectados por una operación sean reemplazados por el resultado de la operación, y posteriormente se les introduce al álgebra con expresiones tales como **X+7** y **3X** para ser reemplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden «cerrarse», son expresiones «incompletas», los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que «**no hay aceptación de la falta de clausura**».

DAVIS (1975), por su parte, también plantea algunas situaciones a los estudiantes en las que se le hace difícil dar respuestas «legítimas». Esta dificultad está relacionada con la distinción entre la **adición aritmética**, donde « **+** » es una pregunta o un problema (**3 + 7**) y la **adición algebraica**, como en **X + 7**, donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Esto necesita por parte de los alumnos un «reajuste cognitivo» y es lo que Davis ha llamado dilema **proceso-producto** donde, simultáneamente, se describe el proceso y se nombra la respuesta.

La «**concatenación**», esto es, la yuxtaposición de dos símbolos, es otra fuente de dificultad para el estudiante principiante de álgebra (HERSCOVICS, 1989). También MATZ (1979), había observado que, en aritmética, la concatenación denota adición implícita, como en la numeración de valor posicional y en la notación numérica mixta. Sin embargo, en álgebra, concatenación denota multiplicación. Esto explica por qué varios estudiantes cuando se les pidió sustituir **2** por **a** en **3a**, pensaron que el resultado sería **32**. Sólo cuando específicamente se les requirió responder «en álgebra» respondieron «**3 veces 2**» (CHALOUH Y HERSCOVICS, 1988).

B) Errores del álgebra que están en la aritmética.- El significado de los signos usados es el mismo en ambas ramas de las Matemáticas. El álgebra no está separada de la aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso, a veces las dificultades que los estudiantes encuentra en álgebra, no son tanto dificultades en el álgebral como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; por ejemplo en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc. Al respecto, dice BROUSSEAU: «Podríamos considerar que hay un cambio previo, natural, que es la Aritmética, el campo primero. El Algebra sería un medio de hablar de la Aritmética, de hablar de cosas aritméticas que pedirían un **contrato didáctico** un poco especial con los alumnos». Este es un punto de vista meta-aritmético.

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como éstos:

$$1/2 + 1/3 = 1/(2+3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 1/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 2/(2+3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 2/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 1/(2\cdot 3) \longrightarrow 1/x + 1/y = 1/(x\cdot y)$$

También surgen muchos errores en la suma o resta de fracciones. Por ejemplo, para calcular **3/28 + 8/35**, escriben

$$3/28 + 8/35 = (3+8) / (4\cdot 7\cdot 5)$$

que, traducido algebraicamente, da

$$x/(y\cdot z) + k/(y\cdot p) = (x+k) / (y\cdot z\cdot p)$$

Otras veces, con la preocupación de no olvidar los factores por los que hay que multiplicar los numeradores primitivos, omiten estos. Así

$$3/28 + 8/35 = (5+4) / (4\cdot 7\cdot 5)$$

Y, de forma análoga,

$$x/(y\cdot z) + k/(y\cdot p) = (z+p) / (y\cdot z\cdot p)$$

El signo « - » , sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores:

$$-(3+5) = -3+5 \rightarrow -(a+b) = -a+b$$

$$-(3+5)/4 = -3/4 + 5/4 \rightarrow -(a+b)/c = -a/c + b/c$$

El uso inapropiado de «fórmulas» o «reglas de procedimientos» también da lugar a errores de este tipo. Se debe a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un «puente» para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por falta de linealidad de estos operadores.

La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes independientemente. Un operador es empleado linealmente cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada parte y luego se combinan los resultados parciales. La linealidad es bastante natural para muchos alumnos, ya que sus experiencias anteriores son compatibles con hipótesis de linealidad. Entre los errores derivados, distiguimos:

I) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción), al caso de la multiplicación:

$$3\cdot(4+5) = 3\cdot4 + 3\cdot5 \rightarrow a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

$$3\cdot(4\cdot5) = 3\cdot4\cdot3\cdot5 \rightarrow a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b\cdot a\cdot c$$

b) La estructura $(a\cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, de un modo inconsciente, para los alumnos muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado. Es la misma situación que en el trabajo con números, aunque en el caso de la suma, y si se trata de númetros pequeños en valor absoluto, suelen resolver primero la suma.

c) De la misma forma que con las potencias sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad respecto a la adición o sustracción.

Otros errores,reseñados por el **Grupo Azarquiel** (1991), pueden ser también incluidos en este apartado:

$(3+4)/5 = 3/5 + 4/5$ se extiende a $3/(4+5) = 3/4 + 3/5$

Y, de manera análoga,

$(a+b)/c = a/c + b/c$ se extiende a $a/(b+c) = a/b + a/c$

Y, también:

$2^{2+3} = 2^2\cdot2^3$ a $2^{a+b} = 2^a + 2^b$ y su correspondiente traducción algebraica.

II) Errores relativos al uso de recíprocos

$$1/3 + 1/5 = 1/(3+5) \rightarrow 1/x + 1/y = 1/(x+y)$$

$$1/3 + 1/5 = 2/(3+5) \rightarrow 1/x + 1/y = 2/(x+y)$$

$$1/3 + 1/5 = 1/(3\cdot5) \rightarrow 1/x + 1/y = 1/(x\cdot y)$$

III) Errores de cancelación:

(Indicaremos sólo la versión algebraica).

$(x\cdot y)/(x\cdot z) = y/z$ se extiende a $(x+y)/(x+z) = y+z$

y también a:

$$(a\cdot x + b\cdot y) = a + b$$

$$(a\cdot x + b)/b = a\cdot x$$

$$(a\cdot x - b)/a = x - b$$

Los dos últimos se pueden obtener por analogía con

$$a/(a\cdot x) = 1/x$$

Estos tipos de errores parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas condiciones. Tanto los errores de cancelación como los cometidos al trabajar con recíprocos, se podrían haber evitado si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la nueva situación. Por ejemplo, para el error de recíprocos, la solución podría ser igualar una fracción a otra, encontrando el denominador común, y después expresando la suma de fracciones en una sola fracción.

C) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética.

Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo « = » en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal.

En el primero (sentido del signo =), aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como $\mathbf{4x - 3 = 2x + 7}$, que sólo es verdadera cuando $\mathbf{x = 5}$. A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen a la ecuación verdadera.

En el segundo (sustitución formal), queremos señalar que los procesos de sustitución que conducen de $\mathbf{3 \cdot 5 = 5 \cdot 3}$ a $\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$, son procesos formales, que no incluimos en la sustitución formal propiamente dicha, y que denominamos procesos de generalización, contemplados en el apartado **B**.

La sustitución formal se extiende más allá de la generalización. Por ejemplo, de la identidad $\mathbf{(a+ b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$, se obtiene, al reemplazar **a** por **a + c** y **b** por **b + d**, la igualdad

$$\mathbf{(a + c + b + d) \cdot (a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2}$$

donde, variables de una expresión, son sustituidas por expresiones más complejas, que son nuevamente variables.

Estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que está a mitad de camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado.

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización.

A modo de conclusión

Hemos presentado, de manera resumida, una serie de investigaciones con relación a obstáculos relacionados con el aprendizaje del álgebra escolar con distintos enfoques: epistemológico, didáctico y cognitivo.

Cabe destacar que los problemas que se han detectado sugieren que debieran considerarse desde la enseñanza.

Podríamos concluir con KIERAN - FILLOY (1989):

Hoy en día el álgebra no es meramente «dar significado a los símbolos» sino otro nivel más allá de eso, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos; por ejemplo manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, **«es lo que significa pensar algebraicamente».**

Los investigadores de la Psicología Cognitiva sobre la habilidad y destrezas algebraicas se han centrado sobre los aspectos prácticos de cómo los estudiantes **ejecutan** las tareas en lugar de los aspectos que en sí presentan mayor dificultad teórica, de cómo los estudiantes **se enfrentan** con el lenguaje algebraico y su uso.

CHAIKLIN, S. (1989) indica que estudios extensos han identificado y catalogado los errores que cometen los principiantes. Por ejemplo, al resolver ecuaciones algebraicas, CARRY LEWIS y BERNARD 1980; MATZ 1983 y SLEEMAN 1984, han encontrado que estos errores son frecuentemente sistemáticos, reflejando las creencias de los resolutores de tareas sobre lo que está por hacer. Por ejemplo, algunos estudiantes dan $\mathbf{a^2 + b^2}$ como solución de la expresión $\mathbf{(a + b)^2}$, lo que no es un error de descuido, sino que, más bien, refleja la creencia de parte de los estudiantes en procedimientos incorrectos.

Los estudios cognitivos del aprendizaje del álgebra pueden iluminar los procesos de aprendizaje de relaciones conceptuales y las dificultades particulares (individuales) a las que los estudiantes se enfrentan.

Hemos revisado una postura de diferenciación de obstáculo cognitivo y error en el uso del lenguaje algebraico y su comprensión que, a pesar de sus limitaciones, el nivel de discusión sobre la misma y el aprendizaje del álgebra, puede ser provechoso.

Hay que esperar que los educadores matemáticos puedan ser capaces de desarrollar una instrucción más efectiva para alcanzar sus metas educativas haciendo uso de los resultados proporcionados por la Psicología Cognitiva en relación a la naturaleza del aprendizaje del álgebra.

Habría que hacer una distinción entre la **dificultad cognitiva** de los estudiantes y la **cuestión pedagógica**, esto es, qué podemos hacer para ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas. Tendríamos que plantearnos el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales, identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso del álgebra. Por tanto, debemos diseñar unidades de estudio que correspondan a unidades manejables tanto por los maestros como por los estudiantes.

El tratamiento de los errores cometidos por los alumnos en el uso de expresiones algebraicas no puede ser general para todos ya que aceptan la clasificación propuesta.

El análisis de errores, como ya hemos indicado, tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza-aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores; de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. En este sentido, el profesor debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades del álgebra, que requiere un esfuerzo preciso en las dos direcciones apuntadas anteriormente, entendiéndose, obviamente, que: si al detectar un error, el alumno reconoce inmediatamente el fallo y lo corrige, aplicándolo a la generalidad de los casos, no será necesario ningún remedio; si, por el contrario, se produce con cierta frecuencia, implica que es algo más que un descuido que necesita una atención más precisa.

La superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje, que genera grandes dificultades. Las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación. Incluso, en muchos casos, parece que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos, con desilución, resurgir al poco tiempo. Por ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual de una parte del álgebra es incorrecta y darles entonces una explicación, es, a menudo, insuficiente para eliminar el error.

El estudiante debe participar activamente en el proceso de superar sus propios errores. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en su mente a partir de la inconsistencia de aquellos, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada. El profesor rara vez indica a los alumnos cuál es la respuesta correcta, sino que simplemente les pide comprobaciones y pruebas que intentan provocar contradicciones que resultan de los falsos conceptos de los estudiantes. Ellos están dirigidos a conseguir la resolución de la contradicción, mediante la solicitud de más comprobaciones y pruebas. El objetivo no es tanto hacer escribir a los estudiantes la fórmula o regla de procedimiento, como eliminar sus falsos conceptos de forma que no vuelvan a aparecer.

Otra ventaja de esta forma de tratar el problema, dado que es muy poco probable que toda la clase esté de acuerdo al mismo tiempo con la respuesta correcta, es que en la clase se generan discusiones que son excelentes, no sólo para mostrar los diferentes conceptos falsos que los estudiantes puedan tener, sino también para ayudarles a superarlos a través de sus propias interacciones.

Establecida la hipótesis de que «los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procedimiento interno de estas experiencias», concluimos con D. TALL (1989) que: una secuencia alternativa para el currículo, donde pueda llevarse a cabo, podría cambiar la naturaleza y comprensión y el tipo de obstáculo cognitivo que pueda surgir; por el contrario, si el diseño curricular se mantiene, es rígido, el tratamiento de los errores en el desarrollo del citado diseño ha de ser distinto.

Nuestro **Diseño Curricular** reconoce que cada alumno posee un determinado **nivel de competencia cognitiva general,** cuyo desarrollo, aunque guarda estrecha conexión con los conocimientos anteriores descritos, limita en algunos momentos la adquisición de otros.

Una buena didáctica presupone «una variedad de formas de actuación por parte del profesor». «La primera de ellas, por su importancia y por su eficacia, es el **conocimiento de los alumnos.** En la medida en que el profesor conozca mejor a cada uno de sus alumnos, podrá intervenir mejor en su aprendizaje».

También parece conveniente indicar que «**a través de la selección de actividades** puede conseguirse que los alumnos muy diferentes aprendan simultáneamente».

«Existe la posibilidad de plantear **actividades diferentes a distintos alumnos** o a distintos grupos de alumnos».

En relación a orientaciones sobre contenidos específicos hacemos referencia a algunas ideas expresadas en el Diseño Curricular referidas al lenguaje algebraico:

«El aprendizaje del álgebra representa un escollo importante para un buen número de alumnos. Algunas características del lenguaje algebraico, como el mayor grado de abstracción que requiere la utilización de símbolos, a menudo sin significado inmediato, lleva consigo **dificultades** insalvables para algunos alumnos», esto obliga a introducir el álgebra con gran cautela y en este nivel «pretender poco más que una **iniciación al lenguaje simbólico**».

Bibliografía

* AZARQUIEL, GRUPO (1991). **Ideas y actividades para enseñar álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje**. Ed. Síntesis. V. 33.

* BACHELARD, G. (1938). **La formation de l'esprit scientifique**. Paris Vrin 1975.

* BOOT, L.R. (1984): **Algebra: Children's strategies and errors**. Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.

* BROUSSEAU, G. (1983). **Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathematiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4,2.

* COLLIS, K. F. (1974, June). **Cognitive Development and Mathematics Learning**. Paper presented at the Psicology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

* CHAIKLIN, S. (1989). **Cognitive Studies of Algebra Problem Solving and Learning**. Research Agenda For Mathematics Education. Reseach Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner - Kieran Editors. N.C.T.M.

* CHALOUH, L. - HERSCOVICS, M. (1989): **Teaching algebraic expressions in a meaningful way**. In A. Coxford (E.), The ideas of algebra, K-12. (1988 Yearbook, pp. 33-42). Reston, VA: N.C.T.M.

* DAVIS, R.B. (1975): **Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations**. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1 (3), 7-35.

* FILLOY, E., RIOJANO T. (1985 A). **Obstructions to the Adquisition of Elementary Algebraic Concepts and Teaching Strategies**, Proceedings of the Ninth Anual Meeting of the PME, Utrech, Holanda, pp. 154-158.

* GALLARDO, A., ROJANO T. (1988). **Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9/2, 155-188.

* GLAESER, G. (1981). **Epistemologie des nombres relatifs**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 2, n°3.

* HERSCOVICS, N. (1989). **Cognitive obstacles Encounteres in the Learning of Algebra**. Research Agenda For Matematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.

* KIERAN, C. (1992). **The Learning and Teaching of School Algebra**. Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning. In D. Grouws (Ed).

* KIERAN, C. - FILLOY, E. (1989) **El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica** (traducido por Puig, L.). Enseñanza de las Ciencias, Vol.7 (3).

* PIAGET, J. Traducido al castellano por Francisco J. Fernández Buey. **Psicología y Pedagogía**. Ed. Ariel 7ª Ed. 1980. Barcelona-Caracas-México.

* SOCAS, M. M. y otros (1989) **Iniciación al Algebra**. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Ed. Síntesis. V. 23.

* SOCAS, M. M. y otros (1989). **Una clasificación de errores en Algebra**. XIV Jornadas Hispano-Lusas. Universidad de la Laguna.

* SOCAS, M.M. - PALAREA, M.M. (1991). **Enseñanza de resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas mediante la yuxtaposición de sistemas de representación**. Actas de la V JAEM (en prensa).

* TALL, D. (1989). **Different Cognitive Obstacles in a Tecnological Paradigm**. Reseach Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching for Algebra. Wagner - Kieran Editors. N.C.T.M.

Mª Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna
Univ. de La Laguna.
Área de Didáctica de las Matemáticas
S.C. «Isaac Newton» P.M.