Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna

Introducción

La resolución de problemas de Matemáticas es y ha sido un tema de fructíferas líneas de investigación. Distintas revisiones sobre el mismo hablan de miríadas de artículos. Se trata de un tema suficientemente amplio y que ha sido estudiado desde distintos ángulos.

Los primeros estudios se encaminaron a analizar aspectos referidos al problema en sí: enunciado, aspectos lingüísticos, tamaño de las cantidades que intervienen, contexto, etc.; o bien, a las habilidades específicas del resolutor («buenos» y «malos» resolutores). Posteriormente, y tomando como base los trabajos de **POLYA**, en especial su libro **«How to solve it»**, muchos investigadores se centran en el estudio de las variables relativas al proceso.

En este trabajo pretendemos comunicar la reflexión que hemos realizado con el objetivo de diseñar un modelo de competencia para la resolución de problemas **aritméticos verbales.**

En primer lugar, expondremos algunos de los principales modelos propuestos por diversos autores, analizando más detenidamente el de **GOLDIN**, basado en los sistemas de representación. Posteriormente analizaremos algunos modelos específicos para la resolución de problemas verbales aritméticos, y terminaremos proponiendo nuestro modelo de competencia.

La resolución de problemas en general, y la búsqueda de un modelo que ayude a las personas en dicho proceso de solución, ha sido un tema investigado, tanto por parte de matemáticos como de psicólogos. Desde el punto de vista de la Psicología, diversas han sido las aportaciones más significativas a la resolución de problemas. El cuadro siguiente muestra algunos nombres importantes que se han ocupado del tema:

PSICOLOGÍA	MATEMÁTICAS
Dewey (1888)	
Asociacionismo	
Gestaltismo:	
Wallas (1926)	
Duncker (1945)	Polya (1945,1957)
Wertheimer (1945)	
Procesamiento de la información:	
Newell y Simon (1972)	
Mason, Burton y Stacey (1982)	
Mayer (1983)	
Bransford - Stein (1984)	Schoenfeld (1985)
	Goldin (1985,1987)
	Guzmán (1991)

Enfoques desde la Psicología

DEWEY, psicólogo y pedagogo **funcionalista**, que destaca por su «teoría del interés», presentó, a finales del siglo pasado, un modelo para resolver problemas (citado por PUIG y CERDAN, 1988), con las seis fases siguientes:

1. Identificación de la situación problemática.

2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

En este modelo, enfocado hacia problemas en general, podemos encontrar una secuencia que se va a repetir sin cambios significativos.

Los **asociacionistas** no aportaron grandes cosas sobre modelos, ya que entendían que en la resolución de problemas sólo interviene el empleo, más o menos mecánico, de la experiencia pasada.

Los **gestaltistas**, por el contrario, sí influyen fuertemente en las teorías actuales. Explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y es capaz de establecer la relación de las partes con dicho todo.

En «**The Art of Thought**» de **WALLAS** (1926) aparece un modelo para resolver problemas con cuatro fases:

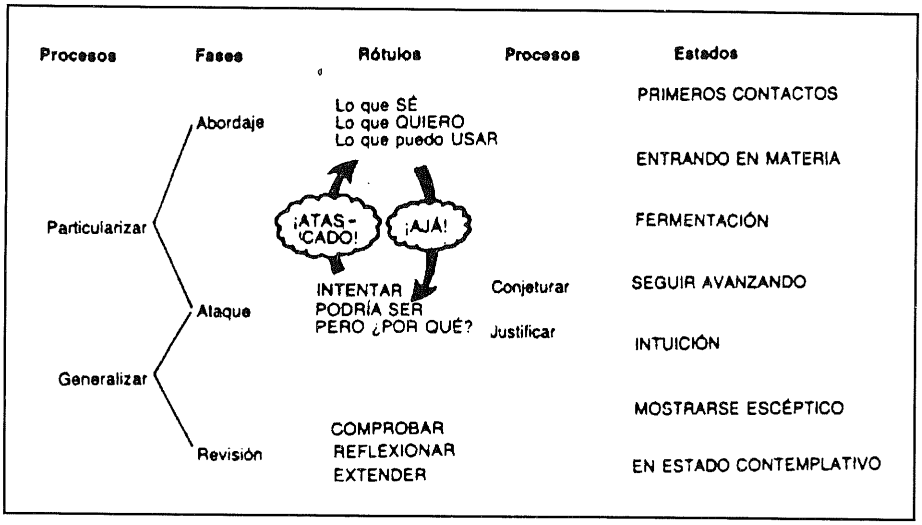
1. Preparación: Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación: Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir.
3. Iluminación: Aparece la clave para la solución (aquí es donde se produce el destello de «insight» o el «ajá»).
4. Verificación: Se comprueba la solución para estar seguros de que funciona.

WERTHEIMER y **DUNCKER** siguieron trabajando sobre este tema:

Wertheimer intentó demostrar que la aprehensión de las estructuras subyacentes lleva al pensamiento productivo y a la resolución elegante de los problemas.

Los trabajos de Duncker van encaminados a cómo orientar el proceso para conseguir el «insight». Insiste en el doble proceso que hay que realizar para resolver un problema: el procesamiento desde arriba, que parte del análisis de los objetivos y del replanteamiento del problema; y el procesamiento desde abajo, que parte del análisis de los elementos para llegar al objetivo del problema.

MASON, **BURTON** y **STACEY** proponen un modelo que no pretende ser un instrumento de estudio o de análisis, sino una ayuda para la instrucción. En su obra «**Pensar matemáticamente**» lo esquematizan así:



El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo atacarlo de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de **POLYA** y **SCHOENFELD** (ver más adelante). Un aspecto a destacar en su modelo es la utilización, para diferenciar las fases, de lo que siente el resolutor, esto es, de sus estados afectivos.

El método **IDEAL** es otro modelo de resolución de problemas, creado por **BRANSFORD** y **STEIN**. Las letras de la palabra IDEAL indican los elementos del método. Está concebido, como ellos afirman, «con la finalidad de facilitar la identificación y reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas». Entre los autores que han inspirado este modelo se encuentra también POLYA.

Sus fases son:

I: Identificación de los problemas.

D: Definición y representación del problema.
E: Exploración de posibles estrategias.
A: Actuación, fundada en una estrategia.
L: Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

La primera fase pretende ayudar a identificar problemas. En general, los libros pasan por alto esta fase y cargan el acento en la resolución de problemas prefabricados, en lugar de detectar y utilizar problemas cotidianos.

El segundo aspecto consiste en definir y representar el problema con toda la precisión y cuidado que sea posible.

El tercero, se dirige a la exloración de distintas vías o métodos de resolución, lo que requiere analizar cómo estamos reaccionando en ese momento ante el problema y la consideración de qué otras estrategias podrían valernos. En esta etapa, el resolutor puede valerse de estrategias heurísticas tales como simplificar, empezar desde atrás, etc.

Las dos últimas fases son las que permiten al resolutor actuar y comprobar los logros alcanzados.

En las teorías basadas en el **procesamiento de la información**, se distinguen tres fases en la resolución de un problema: Preparación, producción y enjuiciamiento.

La preparación supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones. Además, una identificación del criterio de solución (comprender y concebir un plan).

La fase de producción comprende un conjunto de operaciones diversas que están relacionadas con la recuperación y el almacenamiento y la exploración y transformación de información hasta alcanzar una solución (ejecutar un plan).

Durante el enjuiciamiento se evalúa la solución generada, contrastándola con el criterio de solución (comprobar el resultado).

Los trabajos de **NEWELL** y **SIMON** (1972) sobre resolución de problemas han significado un impulso considerable dentro de este paradigma.

MAYER (1983), desde la óptica del procesamiento de la información, analiza los conocimientos necesarios para la resolución de problemas matemáticos. Considera dos estadios y, en cada uno de ellos, explicita los conocimientos necesarios.

Estadio	Tipo de conocimiento
Traducción	Lingüístico Semántico Esquemático
Solución	Operativo Estratégico

- Conocimiento lingüístico o conocimiento de la lengua en que está redactado el problema.

Conocimiento semántico: conocimiento del significado de las palabras.

Conocimiento esquemático: conocimiento de los distintos tipos de problemas.

Conocimiento operativo: conocimiento sobre las operaciones, ecuaciones, etc.

Conocimiento estratégico: saber técnicas heurísticas o tener habilidades para saber utilizar los conocimientos disponibles para resolver un problema.

También **KULM** (1979), a partir de la clasificación sobre variables de la tarea hecha por **KILPATRICK**, creó una clasificación, similar a la de Mayer, de las variables que influyen en el proceso de resolución de un problema:

1. Variables **sintácticas**, que describen la estructura gramatical y la complejidad del enunciado del problema.

2. Variables **de contenido y de contexto**, que engloban todos los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos.

3. Variables **de la estructura**, que describen las características de la representación formal del problema y los procedimientos algorítmicos.

4. Variables **de la conducta heurística**, que incluyen los procesos heurísticos que son aplicables al problema y las consecuencias de aplicarlos.

Enfoques desde las Matemáticas

Entre los modelos propuestos por matemáticos destaca el de **POLYA**, que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Se basó en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas y en la obra de los gestaltistas, aunque también podemos encontrar coincidencias con el modelo de **DEWEY**. Sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Este modelo consta de cuatro fases que, a su vez, tiene otras subfases, y que él explica así:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan. Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares. Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Estos preceptos los descompone después a nivel molecular. Se sugiere en ellos estrategias individuales (considerando la estrategia como una técnica general para resolver problemas, que no garantiza que se encuentre la solución, pero constituye una guía para resolver el problema) a las que se podría recurrir en momentos adecuados, como:

* Si no es posible resolver el problema propuesto, búsquese un problema similar apropiado, que sí sepa resolver.
* Dé el problema por resuelto y trate de desandar el camino.
* Trate de avanzar.
* Restrinja las condiciones.
* Busque un contraejemplo.
* Tantee.
* Divida y vencerá.
* Cambie el enfoque conceptual.

El modelo de Polya se basa, como afirman Puig y Cerdán (1988) en la idea del resolutor ideal, esto es, la persona que al resolver un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en todo momento qué hace y por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce.

SCHOENFELD (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: **análisis**, **exploración**, **ejecución** y **comprobación** de la solución obtenida. Para ellas ha preparado una tabulación de los principios heurísticos más frecuentemente utilizados en las Matemáticas de nivel universitario:

Análisis

1) Trazar un diagrama, si es posible.

2) Examinar casos particulares:
a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema y «adquirir mano».
b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1, 2,... y buscar una pauta inductiva.

3) Probar a simplificar el problema:
a) sacando partido de posibles simetrías, o
b) mediante razonamientos «sin pérdida de generalidad» (incluidos los cambios de escala).

Exploración

1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:
a) por sustitución de las condiciones por otras equivalentes,
b) por recombinación de los elementos del problema de distintos modos,
c) introduciendo elementos auxiliares,
d) replanteando el problema mediante
  * cambio de perspectiva o de notación,
  * considerando el razonamiento por contradicción o el contra-recíproco,
  * suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

2) Examinar problemas ligeramente modificados:
a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones).
b) Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
c) Descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.

3) Examinar problemas ampliamente modificados:
a) Construir problemas análogos con menos variables.
b) Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efecto tiene esa variable.
c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida:

1) ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes?:
a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?:
a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Basándose en las variables que señala Kulm, GOLDIN (85, 87) presenta un modelo de competencia en resolución de problemas matemáticos basado en los **sistemas de representación**. (La palabra competencia describe las capacidades del individuo para ejecutar con éxito una clase de tareas, en este caso, la resolución de problemas matemáticos).

Este modelo, como él justifica, está basado en la teoría del **procesamiento de la información**, y se apoya en la idea de considerar una simulación del pensamiento humano basado en altos niveles de representación y no en un nivel de lenguaje de máquina producido por conexiones neurales.

Los sistemas de representación que utiliza son los siguientes:

1) un sistema verbal-sintáctico

2) sistemas no verbales para el procesamiento de las imágenes.

3) sistemas de notación formal

4) sistema de planificación

5) sistema afectivo

El procesamiento verbal y sintáctico es el primer sistema de representación: los alumnos parten de un enunciado, oral o escrito, que deben entender. Muchos alumnos pasan directamente de este nivel a una operación o una ecuación y, con frecuencia, utilizan para ello «palabras claves», sin comprender la situación del problema.

Un procedimiento alternativo sería transformar el enunciado verbal en una configuración de imágenes, con lo cual estarían utilizando un sistema de representación basado en el procesamiento de imágenes.

Todos sabemos que muchos alumnos necesitan «imaginar» la situación del problema para poderlo resolver. Goldin utiliza la palabra «imagen» para referirse no sólo a imágenes visuales, sino también a imágenes de palabras.

A partir de aquí el alumno estaría en mejores condiciones para pasar a un sistema de representación apoyado en el procesamiento de la notación formal.

Una gran parte del aprendizaje de Matemáticas va encaminado al dominio de una notación formal. Ahora bien, si los alumnos utilizan simultáneamente los anteriores sistemas de representación, aumenta la comprensión de los conceptos matemáticos.

El sistema de planificación comprende todos los procesos heurísticos usados por los alumnos. Algunos heurísticos han sido estudiados ampliamente y pueden mejorar los procedimientos utilizados por el alumno durante la resolución, sin embargo, tenemos dificultades para observar y comunicar como se producen estos procesos de planificación y ejecución durante la resolución de un problema.

El sistema afectivo juega un importante papel cognitivo. Comprende algo más que aspectos tales como las actitudes hacia las Matemáticas o la confianza del alumno en sí mismo como resolutor; abarca los sentimientos que experimenta una persona mientras resuelve un problema: ansiedad, frustración, placer, etc., que de alguna forma controlan su progreso a través del problema.

Uno de los últimos modelos publicados es el de **MIGUEL de GUZMÁN** (1991) que, sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor para que avance:

1. Familiarízate con el problema:
   * Trata de entender a fondo la situación
   * Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo
   * Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

2. Búsqueda de estrategias:
   * Empieza por lo fácil
   * Experimenta
   * Hazte un esquema, una figura, un diagrama
   * Escoge un lenguaje apropiado, una notación apropiada
   * Busca un problema semejante
   * Inducción
   * Supongamos el problema resuelto
   * Supongamos que no

3. Lleva adelante tu estrategia:
   * Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior
   * Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía. ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución. Revisa el proceso y saca consecuencias de él
   * Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?
   * Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona
   * Mira si encuentras un camino más simple
   * Mira hasta donde llega el método
   * Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

En la explicación de este modelo Guzmán insiste en que es necesario: tener una idea clara, un modelo, al que pensamos que nuestra forma de proceder se debe ajustar.

El modelo de Guzmán se basa en los modelos de Polya y Schoenfeld y en su propia introspección, introduciendo ampliamente refuerzos afectivos que ayuden a eliminar los bloqueos que a veces se producen.

Ahora bien, como dice **ALONSO** et al. (1988), la mayoría de estos modelos son modelos formales, construidos a expensas de un priori, que es el proceso ideal, conceptual o lógico, si se quiere, para resolver problemas.

Modelos sobre problemas aritmético-verbales

Los modelos que hemos indicado hasta ahora se refieren a problemas en general o a problemas matemáticos. Nuestra investigación está enfocada hacia la resolución de problemas **aritmético-verbales** por niños que cursan la Educación Primaria. Por ello, hemos analizado también dos modelos específicos para este tipo de problemas y dirigido a las edades mencionadas: El de **PUIG y CERDAN** y el de **De CORTE y VERSCHAFFEL**.

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritmético-verbales, que consta de las siguientes fases:

1. Lectura
2. Comprensión
3. Traducción
4. Cálculo
5. Solución
6. Revisión. Comprobación.

La fase «comprensión» de Polya la subdividen en dos etapas, **lectura y comprensión**, para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del enunciado.

La fase «elaboración de un plan» se llama aquí **traducción** y correspondería al paso del enunciado verbal a la operación u operaciones aritméticas correspondientes.

La fase **cálculo** corresponde a la de «ejecución del plan» y aquí intervienen las destrezas algorítmicas de los estudiantes.

Las últimas fases, de **revisión y comprobación** coinciden con la de «verificación del resultado» de Polya.

De Corte y Verschaffel (1989), basándose en las teorías del procesamiento de la información y en sus propias investigaciones, han presentado un modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales de sumas y restas, que comprende 5 etapas:

1. Partiendo del enunciado del problema, el alumno construye una representación interna del problema en términos de conjuntos y relaciones entre estos conjuntos.

2. Sobre la base de esta representación, el resolutor elige la operación formal apropiada o la estrategia informal con el fin de encontrar el valor desconocido en la representación del problema.

3. Ejecuta la operación o acción seleccionada.

4. El resolutor vuelve a la representación inicial del problema, sustituye el elemento desconocido por el resultado que ha obtenido y formula la respuesta.

5. Se verifican las acciones realizadas con el fin de garantizar la corrección de las soluciones encontradas en la fase precedente.

La primera etapa es la que consideran fundamental, y a ella han dirigido gran parte de sus investigaciones. La representación del problema es considerada como el resultado de interacciones complejas entre el análisis superficial y profundo del problema, contribuyendo a ello los esquemas cognitivos del sujeto.

Las dos categorías principales de esquemas cognitivos que distinguen son: el esquema semántico (cambio, comparar,...) y el esquema de los problemas verbales, el cual implica el conocimiento de la estructura de estos problemas verbales.

Nuestro Modelo

Presentamos, finalmente, nuestro modelo para resolver problemas verbales aritméticos dirigido a los alumnos de Educación Primaria. Está inspirado, como la mayoría de los anteriores en el modelo de Polya, pero hemos añadido algunos aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin.

Consta de las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado.
2. Comprensión
3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica
4. Representación, ejecución y solución formal
5. Soluciones.
6. Comprobación.

Partimos de la **lectura del enunciado**, en la cual ya se empiezan a detectar las primeras dificultades, ajenas a la propia Matemática, debidas a una falta de comprensión lectora. Generalmente, los niños necesitan leerlo unas dos veces como mínimo; la primera vez tratan de obtener una idea más global y en las siguientes van precisando los diferentes aspectos del problema.

En esta etapa de **comprensión**, les sugerimos que intenten hacer un dibujo que represente la situación, guiándolos hacia una representación más esquemática y que, prescindiendo de los detalles, se centre en los datos fundamentales del problema y posteriormente, que escriban con palabras los datos que les dan y lo que le piden calcular. En este momento ya están en condiciones óptimas para distinguir los elementos de problema y para bosquejar un camino para resolverlo. Intentamos evitar que los niños pasen directamente de la lectura, esto es, de un sistema de representación verbal a una operación aritmética (sistema de representación formal), paso que muchas veces realizan casi por azar. Durante el análisis del enunciado, se desarrolla en el niño un gestor que controla su propio avance (sistema de planificación y control) y la sensación de poder hacer, al menos, un dibujo de la situación, le produce una situación afectiva positiva (sistema afectivo).

La siguiente etapa, que no existe en los modelos anteriormente analizados, pretende que el niño, en un sistema de representación de imágenes, represente, ejecute y revise la solución obtenida mediante el uso de **representaciones visual-geométricas**. En un trabajo nuestro previo (**Socas y Hernández, 1991**) detectamos que algunas personas muestran una preferencia por utilizar aspectos de tipo gráfico-geométrico más que de tipo algebraico, tal como se refleja en los trabajos de **Krutetskii** (1976). Queremos hacer hincapié en que la utilización de diagramas no es simplemente un apoyo visual, sino otra alternativa válida para resolver problemas.

Esta fase, sin embargo, ha entrañado dificultades, por diferentes razones, al llevarla al aula (**Socas y Hernández, 1986**). Los niños, acostumbrados a un lenguaje formal, veían estos diagramas como un apoyo gráfico y no les parecía correcta la resolución de los problemas de esta forma. Existe la idea, casi generalizada, de que el objetivo de un problema es lograr una representación y resolución formal, y que, por tanto, el fin último es encontrar la operación adecuada. También hemos encontrado que la representación y solución de forma gráfica tiene una sintaxis compleja, que es necesario trabajar y comprender.

La siguiente fase es la tradicional, esto es, la **resolución** mediante la operación adecuada, cuya elección viene sugerida por el apartado anterior.

Las últimas fases, **solución** y **comprobación,** coinciden en todos los modelos, y lo que intentan es que el alumno compruebe que los resultados obtenidos son los correctos, contrastándolos con el enunciado y los datos del problema.

Nuestras fases contemplan explícitamente los sistemas de representación señalados en el modelo de Goldin. Esta presencia no es lineal, como tampoco lo es el alumno al resolver un problema, sino que intentamos que se mueva de un tipo de representación a otra, para que de esta forma al estar utilizándolas obtenga una representación mental de la situación más completa y pueda descubrir el camino para hallar la solución del problema, así como ejecutarla y comprobarla.

En el siguiente cuadro podemos comparar los tres modelos sobre resolución de problemas aritmético-verbales:

Nuestra investigación, actualmente, está centrada en el desarrollo de un diseño de instrucción en el aula para la etapa Primaria, tratando de descubrir las dificultades que se producen, las preferencias de los niños por los distintos sistemas de representación y el bloqueo que en algunos momentos se da debido a las concepciones del profesorado sobre las Matemáticas y su enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía

* ALONSO, V.; GONZÁLEZ, A.; SÁENZ, O. (1988): **Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el Ciclo Medio de la E.G.B.** Enseñanza de las Ciencias. V. 6 (3), pp. 251-264.

* BRANSFORD, J.D.; STEIN, B.S. (1987): **Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear.** Barcelona. Ed. Labor.

* DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L. (1989): **Teaching word problems in the Primary School: What research has to say to the teacher**, in Greer & Mulhern (Eds): New Directions in Mathematics Education». London. Routledge.

* GOLDIN, G.A.; MCCLINTOCK, C.E. (Eds) (1984): **Task variables in Mathematical Problem Solving** Philadelphia. The Franklin Institute Press.

Puig y Cerdán (88)	**Hernández y Socas**	**De Corte y Verschaffel** (89)
1. Lectura	1. Lectura	1. Lectura y representación
2. Comprensión	2. Comprensión	2. Elección de operaciones
3. Traducción	3. Representación-ejecución y solución visual-geométrica	3. Ejecución
4. Cálculo	4. Representación-ejecución y solución formal	4. Solución
5. Solución	5. Solución	5. Verificación
6. Revisión	6. Comprobación	

* GOLDIN, G.A. (1985): **Thinking scientifically and Thinking Mathematically**. En Silver (Ed.): «Teaching and Learning Mathematical Problem Solving». Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

* GOLDIN, G.A. (1987): **Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving**, en Janvier, C. (Ed): «Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics». Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

* GUZMÁN, M. DE (1991): **Para pensar mejor**. Barcelona. Ed. Labor.

* KULM, G. (1984): **The clasification of Problem Solving Research variables**. In Goldin & McClintock (Ed): Task variables in Mathematical Problem Solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia.

* MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): **Pensar matemáticamente**. Barcelona. M.E.C. y Ed. Labor.

* MAYER, R.E. (1986): **Pensamiento, resolución de problemas y cognición**. Barcelona, Ed. Paidós Ibérica S.A.

* POLYA, G. (1957): **How to solve it**. (Traducción española: **Cómo plantear y resolver problemas**. México. Ed. Trillas. 1976).

* POLYA, G. (1962): **Mathematical discovery**. New York. Wiley.

* PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988): **Problemas aritméticos escolares**. Madrid. Editorial Síntesis.

* SCHOENFELD, A. (1985): **Mathematical problem solving**. New York. Academic Press.

* SOCAS, M., HERNÁNDEZ, J. (1991): **Analogías y diferencias observadas entre buenos y malos resolutores de problemas matemáticos**. V JAEM (en prensa).

* SOCAS, M., HERNÁNDEZ, J. et al. (1986): **Propuesta didáctica sobre resolución de problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la E.G.B.** Revista NÚMEROS, 13. Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas. Apdo. 329 La Laguna - Tenerife.

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna
Univ. de La Laguna.
Área de Didáctica de las Matemáticas
S.C. «Isaac Newton» P.M.