

# Lenguaje verbal y matemáticas: separación sin relaciones. Estado de la investigación

Joaquín Giménez

## Introducción

El matrimonio lenguaje y matemáticas, a nivel de reflexión, investigación y preocupación curricular tiene bastantes años. Casi podríamos afirmar que, desde el momento en que se interpreta la matemática como un lenguaje y se plantea la reflexión didáctica sobre las dificultades de los alumnos, se inician unas relaciones.

En España, las relaciones se han centrado en la resolución de problemas y el lenguaje del álgebra. Entre los pocos artículos que sitúan el problema de forma general, citaremos el breve comentario de NORTES CHECA (1991) y el nuevo Currículo de Matemáticas en España (DCB, 1989), que incorpora reflexiones importantes. Se habla del uso de diversos lenguajes, del valor de la expresión, de la interrelación de representaciones, etc. También en el ámbito de la investigación surge una reflexión, fruto de la cual nace el Seminario en el que se enmarca este trabajo.

Esa «separación sin relaciones», como la he titulado, ha generado pocos hijos, siguiendo la metáfora. Mientras los postmodernos «métodos gráficos y problemas representacionales» ya han sido reconocidos como artículos, queda aún mucho por decir.

En lo que sigue, vamos a repasar ejemplos y situaciones de una pareja estable (lenguaje verbal - matemáticas), consumada en otros países. Trataremos fundamentalmente de mostrar, de forma sistemática, los tipos y evolución de los trabajos realizados, a grandes titulares, como si se tratara de un periódico sensacionalista, sin realizar un análisis pormenorizado que ejemplifique todos los resultados, lo que ocuparía más espacio. El objetivo general de estas líneas es, pues, ofrecer una síntesis del tipo de variables y problemas investigados en las relaciones lenguaje verbal- matemáticas con algunos de los resultados conocidos.

## ¿Por qué relaciones?

Las Matemáticas oficialistas han usado a menudo un lenguaje simbólico en el que el formalismo parece fundamental y el subjetivismo no debía ser un problema. Ahora bien, la consideración del valor social de las mismas y su enseñanza, exige elementos comunicativos, sujetos y colectividades que los usen. Desde este punto de vista, consideraremos que los problemas tratados en la investigación abordan cuatro grandes perspectivas desde el punto de vista de la función comunicativa:

- (1) elementos curriculares o superestructurales,
- (2) influencias interestructurales, en donde se incluye la comunicación,
- (3) de desarrollo e implementación, llamadas también investigaciones funcionales, que incluyen el uso de variables sintácticas, inferencias y elementos semánticos diversos,
- (4) análisis subestructurales, en donde se habla de contexto, epistemología y política y
- (5) reflexiones teóricas.

## Elementos curriculares

Ante todo, constatemos que la preocupación curricular en sentido amplio ha desatado muchas macroinvestigaciones en países donde el interés por los resultados es grande. Así, en los últimos seis años, casi 30 investigaciones en Estados Unidos hacen referencias explícitas a problemas comunicativos y de lenguaje en relación con matemáticas. Consideraremos aquí cuatro tipos de trabajos según los objetivos y planteamiento general curricular del hecho comunicativo:

(a) estudios sobre elementos de lenguaje en el currículo: uso de lenguaje en documentos oficiales, manuales escolares, perspectivas sobre la evaluación de los elementos específicos de lenguaje, etc.

(b) influencias del lenguaje como variable de ajuste en los resultados de rendimiento,

(c) análisis basados en la comunicación, observando implicaciones analíticas (en resolución de problemas), interacciones sociales y psicológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y

(d) estudios de carácter comparativo intercultural entre países.

**Lenguaje y Currículo.**

Los estudios de I. SANZ (1989, 1990) son de los pocos que se han realizado en el campo del análisis de

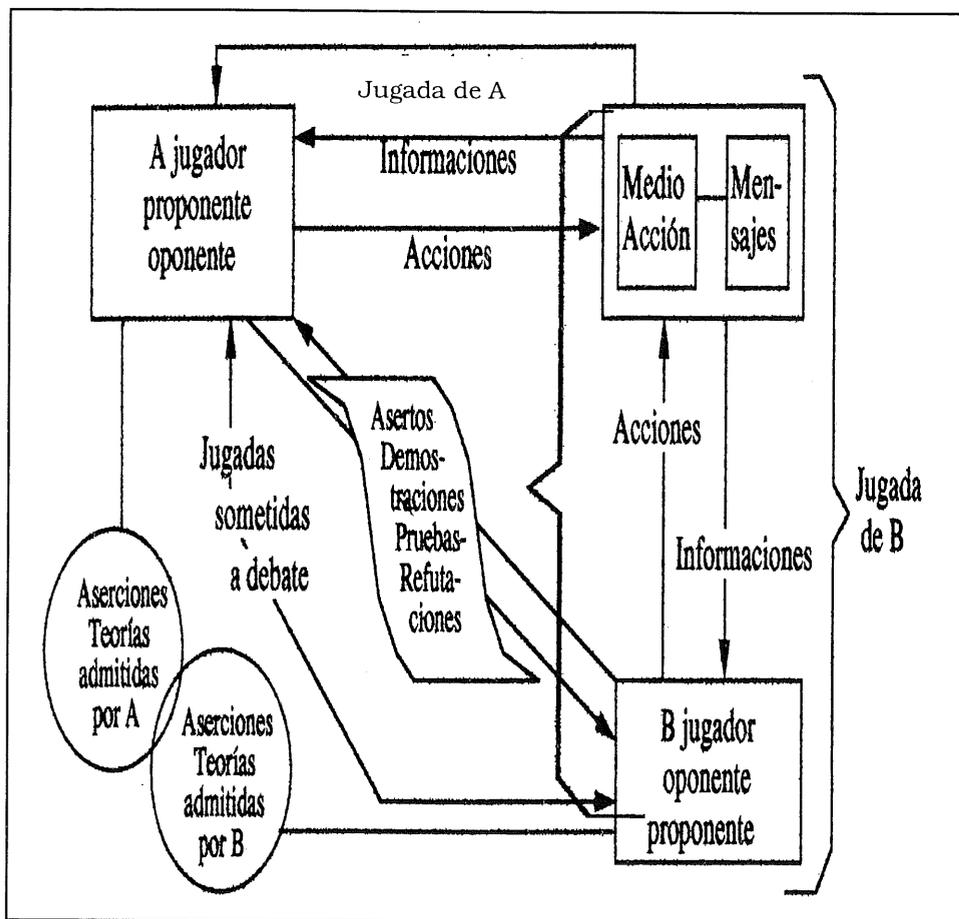
manuales escolares desde el punto de vista de la representación, simbolización y significatividad, basados en las ideas de significado y significante. Ahí se abordan problemas tan acuciantes como la conveniencia o no de determinadas ilustraciones en los manuales, versatilidad y sentido otorgado a las mismas, etc. La verbalización se asocia al marco de los procesos de aprendizaje como una «red de vehiculación de presentación» (ROMBERG, 1988). En la presentación del trabajo en el aula se manifiestan como variables intervinientes: contexto, forma, imágenes, parámetros de respuesta e imágenes en los manuales escolares. Las dependencias que se analizan a menudo en estos casos son: completitud, distractores y facilidad de lectura. Por último, nadie olvida incluir valoraciones sobre elementos comunicativos en actividades concretas y proyectos de evaluación. Listar aportaciones puntuales en ese último ámbito sería interminable.

**Lenguaje y rendimiento. Ajuste.**

Gran parte de los proyectos internacionales en enseñanza de las matemáticas toman el lenguaje como una de las variables de análisis en relación con el rendimiento escolar. En ellos, CSMS (Hart 1981), IAEP (Robitaille 1992), WISCONSIN (Romberg et al. 1991), OW & OC (Streefland 1993), etc. observan las dificultades de los alumnos, y se hacen propuestas de reflexión específicas que inciden en los elementos de lenguaje y las representaciones. Todos estos estudios contribuyen al ajuste global del proceso enseñanza-aprendizaje, y promueven reflexiones de tipo comparativo intercultural.

**Lenguaje en el contrato didáctico.**

Para BROUSSEAU (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo entre el sistema, el profesor, el estudiante y el medio, donde el juego es la clave de dicho proceso.



En esa visión paradigmática, el lenguaje se analiza siempre como variable interviniente. En una línea semejante se encuentra el trabajo de STEINBRING (1988) e, incluso, las reflexiones aplicadas a la multiplicación como construcción científica.

A todos esos elementos curriculares los llamaremos *superestructurales*, aunque los últimos citados quizás forman parte de los que se implican en el desarrollo. Los llamamos superestructurales porque contribuyen claramente a relacionar diversas variables internas con procesos de socialización externos al individuo y a la propia matemática.

### **Variables contextuales.**

En todas las investigaciones citadas y otras aportaciones teóricas, surgen normalmente variables «contextuales» en el sentido amplio de la palabra. Las más usuales son: elementos culturales, medios, estadios de evolución del entorno, alumnos específicos (ciegos, disléxicos, deficientes...), relaciones interculturales (distintos países, bilingüismo, etc.) y niveles de actuación (formación del profesorado, enseñanza a distancia, etc.).

### **Estudios interestructurales**

Los elementos estrictamente lingüísticos y de comunicación influyen claramente los contenidos. Para ver como son esas influencias, la preocupación clásica de los estudios de resolución de problemas de los años 60-70 se centró en observar *variables de contexto*, como número de palabras y tópicos usados, así como las variables que describen los elementos del problema, tales como: condiciones, información numérica, ayudas, expresiones que indican principios de información, objetivos de información, etc. También se ha analizado el uso e influencia del material instrumental necesario para el desarrollo de la tarea (compás, regla, escuadra, ordenador, etc).

Más recientemente, las investigaciones que estudian relaciones entre contenido y contexto (WEBB 1984) en el sentido matemático, han tomado un cariz interestructural, pues se producen no sólo en el interior de la búsqueda de lo matemático o lo lingüístico, sino como interacción entre ambos.

### **Comunicación: interacciones y reflexión lingüística.**

En otro lugar se tratará con mayor profundidad el tema de la comunicación como teoría, pero avancemos

ya que se da un conjunto de dificultades que surge de usos diversos de lenguaje (WITGESTEIN) y distintos niveles de funcionalidad del lenguaje en general. Por ejemplo, en la visión fenomenológica (FREUDENTHAL 1983) del reconocimiento de estructuras matemáticas en didáctica se observa un proceso de depuración del lenguaje natural, del que debe partirse (matematización horizontal, en expresión de TREEFERS & GOFRE 1985, 1987) para llegar al lenguaje matemático. Otros autores analizan esas dificultades en los usos de lenguaje como fuentes de conflicto cognitivo (léase HASEMANN 1986, para el caso de fracciones).

En los estudios españoles se han dado diversos ejemplos de comparaciones entre lenguaje natural y matemático. El estudio de CERDAN y PUIG (1988) y el del grupo AZARQUIEL (álgebra), abordan ya esa problemática y proponen diversas situaciones. En nuestra investigación sobre los racionales (GIMÉNEZ 1991), observamos diversas implicaciones de lenguaje de la calle, (GIMÉNEZ 1992), niveles de graficidad, imagen, etc. en las producciones de los alumnos (siguiendo a STREEFLAND). Estas y otras investigaciones parecen surgir de los análisis de BRUNER en cuanto «modos de iconicidad» (Bruner 1967), que dan lugar al llamado principio de variabilidad perceptual (DIENES 1970, BEHR et al. 1983).

Sin embargo, en muchas producciones de 1980 y siguientes, se observan mayores influencias de tipo semántico, influidas sin duda por los desarrollos de AUSUBEL en cuanto a la significatividad (Ausubel 1976). De ahí los trabajos de ROMBERG (1988) y otros.

En investigaciones de los «90» se recuperan muchos elementos comunicativos en el desarrollo e implementación curricular. Ello permite sistematizar situaciones y analizar problemas nuevos tales como: lenguaje matemático adquirido por alumnos con dificultades, análisis de interacciones en el aula, procesos de descripción, etc. Se reincorpora también el análisis sintáctico con un contenido semántico, como se ve en trabajos que analizan lo comunicativo en álgebra (HEALY, SUTHERLAND y HOYLES 1990, 1991) y en resolución de problemas (NESHER 1989, 1991).

Pueden encontrarse también aquí estudios sobre problemas verbales generales (PIMM 1987, TIROSH & GRAEBER 1989, entre otros) y consideraciones sociolingüísticas, como analizar posibles influencias de vivir en barrios periféricos (MORRIS 1978), variables afectivas (ZEPP 1989), e influencias del bilingüismo (MESTRE 1982, MESTRE et al. 1988).

## Estudios funcionales o de desarrollo

La actividad matemática en el aula usa gran cantidad de elementos del lenguaje, pero la resolución de problemas tiene específicamente el lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos. Así, también muchas otras tareas matemáticas (AIKEN 1972). Por lo tanto, una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática. De ahí que a las investigaciones sobre desarrollo e implementación en el aula las llamemos *visión funcional*. Los elementos metodológicos en dichas investigaciones se centran inicialmente en cuantificaciones y análisis de elementos propios de la tarea (GOLDIN 1984). En todo ello domina el interés por lo sintáctico (reglas, procedimientos algorítmicos, errores, etc.), pero evoluciona en estudios posteriores hacia los análisis de procesos de aula de tipo cualitativo centrados en lo epistemológico. De ahí, el uso de elementos teóricos de VIGOTSKY (1962) tales como zona de desarrollo proximal.

Por otra parte, diversos estudios tratan los problemas de los elementos referenciales. En efecto, las habilidades de lenguaje son vehículos a través de los cuales los estudiantes aprenden, aplican y son evaluados sobre conceptos matemáticos y sus habilidades (THORNDIKE 1912).

La discusión investigativa de los problemas de desarrollo se rige por el concepto de *registro lingüístico* (iniciada en HALLIDAY 1975 y MORRIS 1975). En efecto, el quehacer matemático otorga un registro específico al lenguaje habitual, que se distingue de él, pero en ocasiones se aprovecha del mismo.

Nuestra tipología de investigaciones, que acentúa lo que hemos llamado «elemento de implementación-desarrollo», considerará tres tipos de variables (modificando un poco un viejo esquema de MORRIS, 1955):

- (a) sintácticas;
- (b) inferenciales, que incluye lo que algunos llaman pragmáticas y
- (c) semánticas con las consiguientes relaciones epistemológicas.

### Sobre variables sintácticas.

Se analizan básicamente los tipos de lenguaje en matemáticas: verbal, escrito, algebraico, gráfico, de

computación, ... En los análisis sintácticos se estudian variables como las siguientes: palabras, expresiones, relaciones, secuencias y problemas de desarrollo conceptual. El análisis sintáctico se basa en la consideración del lenguaje matemático como «sistema» simbólico con características determinadas que debe ser imitado por su poder como notación (SKEMP 1982).

En los diversos *estudios sobre palabras y expresiones* se han puesto de manifiesto las dificultades en las comparaciones («tan ... como», «de la misma forma que») y paráfrasis lingüísticas, preposiciones («de», «para cualquier», «dividir entre») y oraciones pasivas («un libro fue dejado...», «n se define...»), como las más fundamentales. Ciertas estructuras verbales de ese tipo tienen un grado de complejidad que se relaciona mucho con los elementos conceptuales (KNIGHT-HARRIS 1977, MUNROE 1979). Los resultados de esas investigaciones han permitido -entre otras cosas- la reflexión sobre grados de dificultad en resolución de problemas de cálculo mental y el reconocimiento de dificultades en tratamiento de errores conceptuales.

Otro grupo de investigaciones ha examinado las *dificultades de elementos relacionales lógicos y sus influencias psicológicas*: componentes lingüísticos de conexión lógica (si y sólo si, cuando...entonces), procesos de reversibilidad (CRANDALL 1989, DOLCIANI & WOOTON 1970), etc. Hay multitud de estos ejemplos en los trabajos sobre álgebra (AZARQUIEL 1989, FILLOY y ROJANO 1988, GIMÉNEZ 1991b).

Se han observado muchos tipos de problemas vinculados al desarrollo, que han acentuado de formas diversas algunos *elementos de estandarización y anclaje conceptual* explicado por factores sintácticos. Aquí citamos los análisis estructurales de resolución de problemas que dan lugar a la construcción de numeración con los pequeños (GINSBURG 1977), confusiones potenciales con las cantidades (DURKIN 1986), estrategias de conteo (FUSON 1988), estructura de las operaciones en conjuntos numéricos (CARPRINTER & MOSER 1983, VERNAUG 1983, CERDAN y PUIG 1988). Numerosos estudios de álgebra se han centrado en los problemas de sintaxis (FILLOY y KIERAN 1989), analizando el uso de las letras en diversos contextos. Los procesos de resolución geométrica han desvelado también reflexiones sobre el lenguaje y las expresiones de los alumnos (GALLO 1982, MAIER 1991, D'AMORE 1993). Así, un largo etcétera. Las variables estructurales más usadas han sido: relaciones entre datos, explicitación, orden y complejidad.

En otros casos, se trata de observar *variables de la representación* e influencias negativas de las secuencias verbales. Ahí se han forjado expresiones como «colas verbales y perceptuales» (BEHR et al. 1985). En estos estudios se constata como los alumnos se dejan llevar por esas percepciones para no desarrollar los conceptos.

Todas estas referencias son claramente interestructurales por cuanto usan el registro matemático, pero se analizan desde la vertiente lógica estructural.

### Inferencias. Pragmatismos.

La investigación de los 80 ha encontrado implicaciones lingüísticas en los *procesos de construcción conceptual*. Así, el análisis de preconcepciones de los estudiantes tiene un tratamiento vinculado a elementos de lenguaje que no siempre puede ser considerado de naturaleza sintáctica o semántica (TALL y VINNER 1981).

Merecen citarse también en este bloque los análisis sobre las *dificultades* de algunos alumnos con problemas específicos de lenguaje (BISHOP 1991, SINCLAIR 1991) en la *interactuación* en el aula (sordos, discapacitados, etc.), y las búsquedas en cuanto a los llamados vacíos de experiencia (*lack of experience*) que promueven conflictos o contradicciones basados en problemas de tipo textual, que nacen de situaciones de interacciones y aprehensión de la realidad (SPANOS et al. 1988, 233ss).

### Elementos semánticos.

El contenido semántico se ha observado desde hace tiempo desde el punto de vista estructural con investigaciones sobre las palabras matemáticas (palabras asociadas a significados o acciones asociadas a operaciones o relaciones funcionales) que se usan en la resolución de problemas, y análisis sobre la terminología matemática en cuanto al significado otorgado. De hecho, las matemáticas ejercen numerosas demandas (requerir explicaciones, extensión, reflexión, precisión, transposición, recursión), que desembocan en la necesidad de significado (MURRAY 1985).

\*\* Acciones. Contenido semántico de palabras y/o expresiones.

Muchos artículos actuales siguen insistiendo en dificultades asociadas con las expresiones y pala-

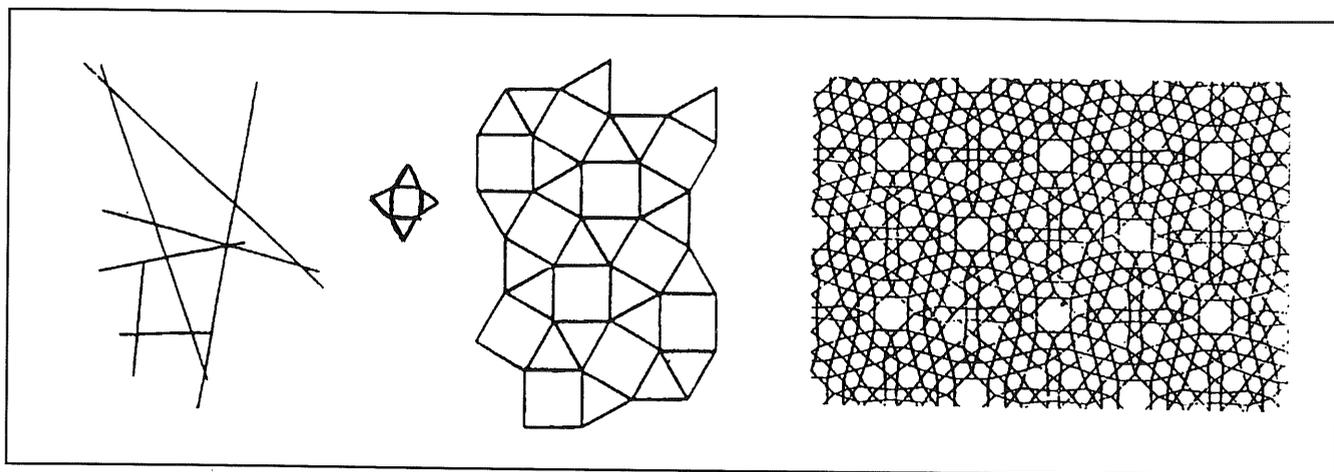
bras, aunque en ellos se ve un enfoque centrado en el análisis de los procesos de aprendizaje, y no tanto en la visión de los resultados de los alumnos. Se acentúa el interés en el estudio sobre *usos de las expresiones* (SKINNER 1980) y *funcionalidad de las palabras clave* (WILLIAMS 1982), más que en el índice de dificultad que representan. También en esos trabajos se dice que los cambios socioculturales de las expresiones ejercen una mayor influencia que los propios cambios de significado.

Otros análisis tratan de explicar las estructuras semánticas subyacentes a la construcción de representaciones y significados (De CORTE et al. 1985, 1990). En un estudio más reciente, ERIC LOVE y D. TATHA (1991) analizan el valor de descriptores (*etiquetas*) que se están usando ahora a nivel bibliográfico como: concepto, imagen, numeración, contar, número, modelo, práctico, estructura, descubrimiento, comprensión, proceso, etc. De ahí se discute cómo detrás de muchos nombres hay multitud de programas y «agendas» que no siempre se tienen en cuenta, y se contrastan las posibles ambigüedades que provienen de usos curriculares particulares. En todas estas observaciones se analiza fundamentalmente la claridad y grado de relación de las variables en juego.

\*\* Procesos reflexivos y léxicos. Terminología y lenguaje natural.

¿Existe una diferenciación entre un «lenguaje de razonar» y «lenguas para comunicar?» (GRIZE 1988). ¿Hasta qué punto los problemas terminológicos y de uso del lenguaje natural manifiestan dicha diferenciación? ¿Qué influencias hay entre ellos y los procesos reflexivos?

Vamos a centrar un poco nuestra atención en este tipo de recientes investigaciones. El análisis de ciertas palabras preocupa ahora en cuanto expresa los procesos de reflexión (*reflective thinking*) de los alumnos y el grado de profundización en la adquisición-concepción de elementos integradores del trabajo matemático. En ese aspecto, sigue habiendo una preocupación por investigaciones de tipo evolutivo. Así, por ejemplo, a la pregunta «¿qué es un modelo?» (ORTON 1993) hubo acuerdo general entre alumnos en el hecho de que no cualquier figura fuera un modelo (izquierda).



«No hay repetición», decían. «Eso es sólo un conjunto de líneas formando como un spaguetti». Otro dijo: «No sabemos si se repetirá o no. A lo mejor eso es un trozo de una salita, y continúa con los mismos triángulos y figuras». Los alumnos de 5 años señalaron características de unión, repetición, «es bonito», etc. y, curiosamente, ninguno evoca la simetría. A los 7 años, hay menciones de la simetría y teselado. Muchos alumnos de 9 años mostraron que la figura central es un modelo, pero los argumentos son de lo más exótico: «Las líneas se unen», «no quedan espacios vacíos», «es un teselado», etc. Junto a ello, había una mayor uniformidad en otras respuestas: «se repite», «tiene figuras regulares que se repiten».... En efecto, ORTON indica (y muchos hemos constatado) cómo alumnos de 9 años *distinguen entre figuras y modelos*. María dijo: «Sí, porque puedes ver cuadrados y triángulos así como sus combinaciones». Pero resaltemos cómo en la figura de la derecha, muchos alumnos no ven un modelo pues «no se repite la misma figura» y los de 11 años detallan más la expresión diciendo: «es un modelo de reflexión, figuras trasladadas, son triángulos y cuadrados girados, etc.».

El lenguaje natural y el matemático tienen distintos significados para análogas expresiones. Así, expresiones como modelo, racional, igual, denominador, coeficiente deben ser analizadas en las aulas explícitamente por causa de dichas diferencias (CRANDALL 1989). Los lenguajes matemáticos son un desafío mayor al lenguaje natural, y más aún cuando a menudo se establece la necesidad de codificación y decodificación entre ellos.

En otro orden de investigaciones-reflexiones, consideremos las que siguen la línea estructuralista,

recordando elementos y aspectos de la imprecisión en lenguaje natural, y recuerdan los requerimientos de la lingüística estructural (SPERANZA 1989).

\*\* Modificadores. Referenciales. Signos de valor.

Hay diversos elementos lingüísticos que pueden modificar o afectar las visiones conceptuales. Así, los artículos (considerados por los lingüistas como elementos pre-modificadores) ofrecen muchas dificultades a los estudiantes, en cuanto sirven de elementos de distorsión y provocan problemas de generalización cuando se usan muchos indeterminados (MASON 1989).

También es importante el análisis de elementos variables referenciales como el usual empleo abusivo de las metáforas, las dificultades en las descripciones, la inclusión de modelos y la inclusión de jergas específicas. Con posterioridad a todo eso, se manifiesta la influencia de los juicios, valoraciones e interpretaciones con los que se construyen justificaciones que son la base de la construcción de conocimiento (LINS 1993).

\*\* Construcción de significado. Funcionalidad.

En cuanto la construcción interna de significado, el problema más acuciante que se ha estudiado es el de la vaguedad. En efecto, ésta surge por homosemia, polisemia, o bien referencia contextual implícita (típica en la resolución de problemas). En la subdivisión actual entre el contenido procedimental y el hecho conceptual se ha generado buena parte del trabajo en psicología de educación matemática.

En esos trabajos sobre construcción de significado, el lenguaje aparece como una componente que otorga un significado a expresiones y relaciones. En cuanto a funcionalidad de los términos léxicos, es interesante constatar que se ven funciones distintas entre términos parecidos, como es el caso de las expresiones «menor» y «menor que». Ahora bien, en la construcción de muchos conocimientos tales como los que se dan en tareas de generalización, los estudiantes no usan lenguajes «oficiales» de las matemáticas, sino más bien el lenguaje natural (LABORDE 1982, LEE 1987).

En los últimos años, el tema de las interacciones y de la socialización da lugar a nuevos análisis que se centran en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje (PIRIE & SCHWAZENBERGER 1988, PIRIE 1991). Ese tipo de trabajos tiene una perspectiva funcional en el sentido que todos los estudios coinciden en la importancia que la verbalización tiene para el desarrollo constructivo general (BALACHEFF & LABORDE 1988, HOYLES 1991) de aprendizaje de códigos aritméticos (SAADA y BRUN 1984), códigos geométricos (GAULIN 1985, OSTA 1988), etc.

\*\* Uso de lenguajes gráfico-visuales.

En trabajos sobre el desarrollo, aunque no sea el objetivo específico de este artículo, debemos citar los análisis sobre lenguajes no verbales tales como: gráficos, esquemas, representaciones geométricas, etc. En dichos estudios se analizan básicamente elementos representacionales, de interpretación y, en general, de cambios representacionales (JANVIER 1987). Un análisis significativo reciente estudia las concepciones de alumnos frente a gráficas cartesianas (DEULOFEU 1993).

### **Análisis subestructurales**

Llamamos así a las situaciones de investigación en las que se tratan los problemas de fondo, previos a la reflexión lingüística, y reconocen diversas perspectivas de la misma. Entre ellos, los análisis de contexto, bases epistemológicas y etnopolítica.

#### **Análisis de contexto.**

La expresión contexto incluye aquí no sólo la interpretación individual de situaciones, sino también expectativas y obligaciones (COBB 1986). Las interacciones usuales en que el contexto se manifiesta es la diferenciación de roles profesor-alumno en el

diálogo de aula. El primero asume la reconducción y elabora descripciones en beneficio de otros, de tal forma que el alumno sólo interpreta la situación como simple suceso social (YACKEL 1993). En ese sentido, la expresión verbal es fundamental aunque el formato y las situaciones son elementos de dificultad que afectan a los conceptos en Secundaria, incluso en países como Japón (MINATO et al. 1993) en que la explicación verbal es muy usual (STIGLER 1986).

El lenguaje hablado se manifiesta de forma diferente según el papel de los interlocutores: (a) discurso exploratorio, en donde la planificación es lo importante (BARNES 1976, 1977); (b) hablar para uno mismo, reflexionando y organizando (PIMM 1987); (c) hablar para los demás centrado en la comunicación (SHANON-WEAVER 1949) y (d) discusión en grupo, reconceptualizando y reorganizando. En ese sentido, YACKEL (1993) ha mostrado que «la interpretación de una situación, las percepciones, expectativas y obligaciones, son más determinantes de la naturaleza de un discurso que la participación individual en tareas de clase o discusión en pequeño grupo».

Las tareas comunicativas de un proceso de desarrollo de aula pueden contemplar formas diferentes. Citemos dos esquemas distintos: el basado en las ideas de emisor y receptor (ROMISZOWSKY 1982) y el basado en las ideas más modernas de inteligencia artificial de información y control (FORTUNY 1990).

### **Epistemología**

Un conjunto de investigaciones tratan el lenguaje como un vehículo de análisis histórico-lingüístico con contenido epistemológico (CHEVALLARD 1991, BOSCH 1992, GIMÉNEZ 1993), que en muchos casos forma parte de una reflexión más amplia sobre la consecución de conceptos (AZCARATE 1991, FILLOY y ROJANO 1989,...).

TATHA (1988) apuntó que se daban en la historia diferentes dimensiones y usos de lenguaje. En todos ellos, la metáfora juega un papel importante. Así, algo es transferido a otro al que no se le aplica normalmente. El análisis del contraste entre el abacista y el algorítmico en la época medieval es un paradigma claro del uso metafórico, que diversos autores han revelado (BATESON 1988, MATURANA 1989). En esas concepciones se basa el proceso llamado de matematización (THOM 1981, GOFREE & TREEFERS 1985).

El proceso de generalización es uno de los elementos en los que se refleja la acción lingüística (WILDEN



tructural y teórico. Nadie pone en duda la necesidad de un mayor número de investigaciones en todos esos campos, pero nos atreveremos a manifestar, junto a las conclusiones, la necesidad de incidir más en algunas de ellas. En resumen, en todos los trabajos se pone de manifiesto la importancia de:

(a) Reconocer el valor curricular de nuestro DCB y adaptaciones autonómicas en cuanto transmitir el valor e importancia de tratar el paso del lenguaje natural a los diversos tipos de lenguajes en la educación matemática básica de los individuos. Nos parece que dichas formulaciones son más profundas que las propias aportaciones de los **Standards**. Además de promocionar dichas ideas, se requiere investigar más sobre las diferencias entre los «usos» de los diversos lenguajes y sus relaciones; implicaciones positivas o no de un uso más amplio del lenguaje natural para iniciar determinado trabajo. En ese sentido, lo ya conocido sobre el valor del lenguaje no debe aplicarse a la expresión verbal (AZZOLINO 1990), sino a todo símbolo visual (NORTES 1991) para: comprender, recordar, representar, comunicar, construir, generar y facilitar la creatividad, y reflexionar sobre lo ya realizado.

Consideramos que sería importante que los análisis estructurales (propios de la década pasada) se centraran en su integración en el proceso de aula, más que en análisis estáticos de un momento determinado. Así, aunque deben realizarse análisis de resultados de las aplicaciones curriculares, no deberían ser el centro de atención focal en los próximos años. En todo caso, precisamos reconocer las influencias que hay en cuanto «saber de esos análisis» para la formación del profesor.

(b) Valorar -como hacen los análisis recientes de la construcción de conocimiento matemático- el uso de metáforas y metonimias como imágenes de situaciones. Pero queda mucho por ver qué tipo de imágenes es el más adecuado para diversos elementos conceptuales. A ese respecto, pensamos que los estudios epistemológicos-históricos que se están realizando deben influir positivamente en dicha búsqueda y deben incrementarse.

(c) Manifestar el valor de los diversos modos de lenguaje no sólo como instrumento funcional de comunicación sino como valor clave del quehacer matemático. En ese sentido reconocer la existencia de muy diversos lenguajes actuales: esquemas, programación, grafos, etc. Debemos reconocer las concepciones de los alumnos sobre dichos lenguajes, su progresivo uso y reconocimiento como potenciales recursos de gran

valor comunicativo. También en ese punto precisamos reconocer más la influencia de implementar dichos modos en alumnos jóvenes. ¿Cuándo es el momento adecuado para introducir elementos de grafos? ¿Se puede hablar de generar la necesidad del uso de diagramas?

(d) Implementar, con mayor énfasis, actividades de generalización y análisis que no pierdan de vista el elemento comunicativo de lenguaje. Como se ha mostrado, las influencias analizadas han propiciado o remodelado «nuevas teorías sobre la construcción del conocimiento matemático». Pero, en el campo de lo semántico queda aún mucho por investigar.

(e) Reconocer la dimensión social del lenguaje y sus influencias, no sólo sobre los elementos conceptuales y procedimentales, sino también actitudinales y de construcción de valores.

(f) Saber que en una sociedad marcada por elementos tecnológicos, donde la comunicación juega un valor importante, no debe menospreciarse el uso de medios tecnológicos y de comunicación de masas así como el análisis de las implicaciones de los mismos en la educación matemática. Los trabajos de popularización, video, uso de medios informáticos,... ¿hasta qué punto influyen en la construcción de conocimiento? Sabemos algunas ventajas en cuanto la capacidad de visualización, reconocimiento y codificación, pero no mucho más...

(g) Implicarse en la reflexión política que implica el análisis de motivaciones que se dan según el tratamiento del lenguaje en la educación. Es decir, valorar las influencias de partir de la realidad de los individuos hacia el saber institucionalizado o el proceso inverso y analizar las dificultades que implica los posibles «usos de lenguaje» distintos que se derivan de una u otra concepción. Ante la necesidad de más investigaciones en España sobre estos temas con mayor profundidad, notemos que sí se han hecho muchas aportaciones en el campo del desarrollo en el aula. Por ello, debe incentivarse la investigación que analice las interacciones entre la actividad de aula que usa los diversos lenguajes y sus interrelaciones con la construcción de conocimiento de estudiantes y profesores.

Quizás sea que las relaciones lenguaje-matemática existen sólo en el placer de muchos profesores e investigadores... y se han usado métodos anticonceptivos. Quizás es que hay miedo al embarazo de trabajos sobre el tema, ... Pero, como catalizadores

posibles de esta pareja, ya sea fecundación «in vitro» o, mejor, «in vivo», en el aula (VINNER 1992), pensemos que no debería importarnos superpoblar el mercado de producción científica sobre el tema, engendrando nuevos «habitantes».

## Bibliografía

- \* AIKEN, L. (1971) **Verbal factors and mathematics learning. A review of research.** Journal for Research in Mathematics Education 2 (4), 304-312.
- \* AGUILAR, J. (1986) **Senyals símbols i sorolls.** En Butlletí Soc. Catalana de Ciències. VIII, 11-34.
- \* AUSUBEL, G. (1976) **Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.** Trillas ed. (v.o. 1970).
- \* AUSTIN, J.L. & HOWSON, A. (1979) **Language and Mathematics Education,** in Educational Studies in Mathematics 10, 13-15.
- \* AZCARATE, C. (1992) **La velocidad: Introducción al concepto de derivada.** Tesis doctoral. UAB. Barcelona.
- \* AZZOLINO, A. (1990) **Writing as a tool for teaching Mathematics: The silent Revolution,** in Teaching and learning Mathematics in the 1990's NCTM Yearbook. Reston VA.
- \* BALACHEFF & LABORDE, C. (1988) **Social interaction for experimental studies of pupil's conceptions: Its relevance for research in didactics of mathematics.** In HG Steiner et al (eds) Proceedings II TME Univ Bielefeld. Univ Antwerpen. pp. 189-195.
- \* BEHR, M. et al. (1983) **Acquisition of rational numbers.** In Lesh & Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processes. Academic Press. New York.
- \* BALDINO, R. (1993) **Object of knowledge and object of desire in a cooperative learning ca/culus course.** Unpublished paper. UNESP.
- \* BARNES (1976) **From communication to curriculum.** Harmondsworth Penguin.
- \* BARNES (1977) **Monitoring communication for learning.** In M. Marland (ed) Language across the curriculum (pp. 171-178) Heineman. London.
- \* BEAUDICHON (1982) **La communication sociale chez l'enfant.** Presses Universitaires de France. Paris.
- \* BISHOP, A. (1988) **Mathematical enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.** Kluwer ac. press. Dordrecht.
- \* BROUSSEAU, G. (1986) **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.** These d'état. Univ. Bordeaux.
- \* BRUNER, J. (ed) (1966) **Studies in cognitive growth** Wiley. New York.
- \* BRUNER, J. (1983) **Child's talk. Learning to use language.** Oxford Univ Press. Oxford.
- \* CALDWELL, J.H. & GOLDIN, G. (1979) **Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics.** Journal for research in Mathematics Education, 10, 5, 323-336.
- \* CARPENTER & MOSER (1983) **The acquisition of addition and subtraction concepts.** In Lesh & Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processes. London. Academic Press.
- \* CLEMENT, J. (1982) **Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception.** Journal for Research in Mathematics Education 13, 16-30.
- \* CERDAN, F. Y PUIG, L. (1989) **Problemas aritméticos escolares.** Ed Síntesis. Madrid.
- \* COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) **Linguistic and cultural influences on learning mathematics.** Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.
- \* COOB, P. (1986) **Contexts, goals, beliefs and learning mathematics.** For the learning of mathematics 6 (2) 2-9.
- \* COSSIO, M.G. (1978) **The effects of language on mathematics placement scores in metropolitan colleges.** DAI 38, 4002A-4003A (University Microfilms no. 77-27. 882).
- \* CRANDALL, J. et al. (1989) **The language of mathematics: the english barrier.** Proc. of 1985 Delaware Symposium on language studies VII Newark.
- \* CURRICULUM and EVALUATION STANDARDS for SCHOOL MATHEMATICS- N.C.T.M., 1989. - Edic. en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», 1991.
- \* CHARBONNEAU, M., JOHN STEINER, V. (1988) **Patterns of experience and the language of mathematics.** In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on

- learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey, 91-100.
- \* CHEVALLARD, Y. (1991) **Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique**, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1990-91, n° 122, pp. 103-117.
- \* CHOMSKY, N. (1985) *Reflexiones sobre el lenguaje*. Planeta. Barcelona.
- \* D'AMORE, B. (1993) **Esporre la matematica appres: un problema didattico e linguistico**. La matematica ella sua didattica. Bologna pp. 289-301.
- \* D.C.B. (1989) **Diseño Curricular Base. Área de Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria**. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- \* DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1985) **The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and subtraction word problems** Journal for Research in Mathematics Education 18, 363-381.
- \* DE CORTE, E. et al. (eds) (1987) **Learning and instruction. European research in an international context**. Leuven University Press. Leuven.
- \* DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1991) **Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems**. In Durkin & Shire (eds) *Language in mathematics education*. Open University Press. Milton Keynes.
- \* DE LANGE, J. (1987) **Mathematics Insight and meaning. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the life and social sciences**. Utrecht. OW & OC.
- \* DESAUSSURE (1915) **Cours de linguistique générale**. Payot. Paris.
- \* DEULOFEU, J. (1993) **Els grafics cartesianes de funcions. Un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del grafic**. PhD Thesis. Universitat Autònoma de Barcelona.
- \* DÍAZ GODINO, J. (1993) **Verso una teoria della didattica della matematica**, La matematica e la sua didattica 3, 261-288.
- \* DICKSON, L. et al. (1990) **La enseñanza de las matemáticas**. Labor. Madrid. p 351-390.
- \* DIENES, Z.P. (1970) **La construcción de las matemáticas**. Vicens Vives. Barcelona.
- \* DOLCIANI, MP. & WOOTON, W. (1970) **Book one, modern algebra, rev. ed.** Boston. Houghton. Mifflin.
- \* DURKIN (1986) **Language and social cognition during the school years**. In Durkin (ed) *Language development in the school years*. London. Croom Helm.
- \* DURKIN, J. (1991) **Language in mathematics education**. Open University Milton Keynes.
- \* ERNEST, P. (1987) **Understanding the language of mathematics**. CASTME Journal h2), 10-15.
- \* FILLOY, E. & ROJANO, T. (1989) **Solving equations: the transition from arithmetic to algebra**. For the learning of mathematics. 9, 2, 19-25.
- \* FILLOY & KIERAN (1989) **La adquisición del lenguaje algebraico**. Enseñanza de las Ciencias.
- \* FORTUNY, JM. (1990) **Información y control en educación matemática**. En Linares & Sánchez (eds) *Teoría y práctica de la educación matemática*. Alfar Sevilla. 239- 294.
- \* FRANKESTEIN, M. & POWELL, A. (1993) **Toward liberatory mathematics: Paulo Freire's epistemology and ethnomathematics** in McLaren & Lankshea (eds) *Conscientization and oppression*. Routledge. London.
- \* FREUDENTHAL, H. (1983) **Didactical phaenomenology of mathematical structures**. Reidel. Dordrecht.
- \* FUSON (1988) **Children's counting and concept of number**. New York. Springer Verlag.
- \* GAULIN, C. (1985) **The need of emphasizing 3d**. Proc. In L.Streefland (ed) *PME V Utrecht*.
- \* GIMÉNEZ, J. (1989) **About continuous operator sub-construct on rational numbers**. In G.VERGNSAUD et al. (eds) *Proc. PME*. Paris. 1, 5-10.
- \* GIMÉNEZ, J. (1991) **Innovación metodológica sobre el número racional positivo**. PhD thesis Microfilm. Universitat Autònoma de Barcelona.
- \* GIMÉNEZ, J. (1991b) **Elaboración de un test de diagnóstico algebraico en el marco de la formación del profesorado**. Epsilon n. 23. Sevilla.
- \* GIMÉNEZ, J. (1992) **Unpublished presentation to CIEAEM meeting**. Chicago.
- \* GIMÉNEZ, J. (1994) **Provocadores de descripción en el aula de Matemáticas**. «I Seminario Nacional sobre Lenguaje

y Matemáticas - Soc. Canaria «Isaac Newton» de Profs. de Matemáticas - Tenerife, 1993.

\* GINSBURG, G (1980) **Children's arithmetic The learning process.** Van Nostrand. New York.

\* GOLDIN, G (1984) **Syntax, content, and context variables examined in a Research study.** In Goldin & McLintock (eds) Task variables in mathematical problem solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia. 235-276.

\* GOPEN, G & SMITH, D (1989) **What's an Assignment like you doing in a course like this? Writing to learn Mathematics.** In Paul Connolly et al. (eds) Writing to learn mathematics & science. New York. Teachers College Press. Columbia University.

\* GRIGNON, C & PASSERON, J. (1992) **Lo culto y lo popular.** La piqueta. Madrid.

\* HALLIDAY (1975) **Some aspects of sociolinguistics. In Interactions between language and mathematic education.** UNESCO. Copenhagen.

\* HART, K et al. (1981) **SESM Strategies and errors in Secondary Mathematics Project.** Londres. Chelsea College.

\* HASEMAN, K (1986) **Mathematische lehnprozesse.** Wiesbaden. Brunschweig.

\* HOYLES, SUTHERLAND, HEALY (1991) **Childrn talking in computer environments New insight s into the role of discussion in mathematics learning.** In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes. 162-176.

\* JACOBSON, E (1975) **Interactions between linguistics and mathematics education.** Symposium UNESCO, CEDO & ICMI. Kenia. UNESCO Report no. ED-74/CONF. 808 Paris. Unesco.

\* JANVIER, C (ed) (1987) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.

\* JONES, P (1982) **Learning mathematics in a second language. A problem with more and less.** Educational Studies in Mathematics 13, 269-288.

\* KAPUT (1987) **Representation Systems and mathematics.** In C. Janvier (ed) Problems of representation in the teaching and learning of mathematic pp. 19-26. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale.

\* KAPUT (1987) **Toward a theory of symbol use in mathematics.** In C. Janvier (ed) Problems of representation in

the teaching of mathematics pp 159-195. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.

\* KEITEL, K (1991) **Matemáticas, tecnología y sociedad.** Conferencia pronunciada en V J.A.E.M. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Actas por aparecer.

\* KERSLAKE, D (1986) **Fractions: children's errors and strategies.** Windsor. NFER Nelson.

\* KESSLER, C, QUINN, M & HAYES, C (1986) **Processing mathematics in a second language.** Problems for LEP children. Proc. Delaware Symposium on Language Studies VII. Newark.

\* KIEREN, T (1988) **Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development.** In J. Hiebert & M. Behr (eds) Number concepts and operations in the middle grades. NCTM. Reston VA. pp. 162-181.

\* KIEREN, T (1992) **Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding.** In T. Carpenter et al. (eds) Rational numbers. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. pp. 49-83.

\* KILPATRICK, J (1986) **Reflexion and recursion** Proc. V PME Birkhauser. Boston.

\* KILPATRICK, J (1987) Problem formulating Where do good Problems come from? *Cognitive Science and Mathematics EducaVon.* LEA. Hillsdale.

\* KINGHT, L. & HARRIS, C. (1977) **Math language ability: Its relationship to reading in math.** Language Arts 54, 423-428.

\* KNIJNIK, G. (1993) **An ethnomathematical approach in mathematical education: a matter of political power.** In For the teaching of mathematics. Montreal.

\* LABORDE, C (1982) **Langue naturelle et écriture symbolique.** These d'état. Univ. scientifique et médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble.

\* LABORDE, C (1990) **Language and mathematics.** In Howson & Kahane (eds) Mathematics and cognition. A Research synthesis by IGPME pp. 53-69. Cambridge University Press. Cambridge.

\* LACAN, J (1991) **Le séminaire de Jacques Lacan Livre XVII L'envers de la psychanalyse.** Ed du Seuil. Paris.

\* LEE (1987) **The status of understanding of generalised algebraic statements by high school students.** In JC Bergeron et al. (eds) Proceedings of XI PME vol. 1, 316-323. Montréal.

- \* LESH, R. (1985) **Conceptual analysis of problem solving performance**. In E. Silver (ed) Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. LEA. Hillsdale. 309-329.
- \* LINS, R. (1992) **A framework for understanding what algebraic thinking is**. PhD Thesis. Univ of Nottingham.
- \* LOVE, E. & TATHA, D. (1991) **Reflexions in some words used in mathematics education**, in D. Pimm & E. Love (eds) Teaching and learning School mathematics Hodder & Stoughton, London.
- \* MAIER, H (1993) **Problemi di lingua e di comunicazioni durante le ore di matematica**. La matematica ella sua didattica 1.
- \* MASON, J. et al. (1985) **Routes to roots of algebra**. Open University. Milton Keynes.
- \* MASON, J. (1989) **Expressing generality**. Open Univ. Milton Keynes.
- \* MATURANA, H. & VARELA, F. (1987) **The tree of knowledge**. Boston & London. New Science Library. Shambhala.
- \* MESTRE, JP. **The role of language comprehension in Mathematics Problem solving**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey, 221-240.
- \* MESTRE, J.P., GERACE, W., LOCKHEAD, J. (1982) **The interdependence of language and translational math skills among bilingual Hispanic engineering students**. Journal for Research in Science Teaching, 19, 399-410.
- \* MOORE, T. & HARRIS, AE. (1978) **Language and thought in Piagetian Theory**, en L. Siegel & Brainerd (eds) Alternatives to Piaget Critical essays on the Theory. New York Academic Press.
- \* MORRIS, C. (1955) **Foundations on the theory of signs**. International Encyclopedia of Unified Science 1(2) 78-137. Chicago, Il. Univ. of Chicago Press.
- \* MORRIS, R.W. (1975) **The role of language in learning mathematics**. Prospects 8, 73-81.
- \* MUNROE, J. (1979) **Language abilities and math performance**. Reading Teacher, 32, 900-915.
- \* MURRAY (1985) **Maths and exploratory talk**. Mathematics in School 14 (4) 15.
- \* MYERS, D., MILNE, A. (1988) **Effects of home language and Primary Language on Mathematics achievement**. In COCKING, R. & MESTRE, J. (1988) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey. 259-293.
- \* NESHHER (1989) **The stereotyped nature of school word problems** For the learning of mathematics 1, 41-48.
- \* NESHHER, P. & TEUBAL, E. (1975) **Verbal cues an interfering Factor in verbal problem solving**, Educational Studies in Mathematics 6, 41-51.
- \* NORTES CHECA, A. (1992) **El lenguaje en matemáticas**, en Epsilon n. 20, Sevilla pp. 41-44.
- \* ORTON (1993) **What is a pattern?** In Mathematics in school 1, 8-10.
- \* OSTA, I. (1988) **L'ordinateur comme outil d'aide a l'enseignement d'une séquence didactique pou l'enseignement du repérage dans l'espace a l'aide des logiciels graphiques**. Doctoral dissertation. Univ Joseph Fourier IMAG. Grenoble.
- \* PIMM, D. (1990) **El lenguaje matemático en el aula (TRAD)**. Labor MEC. Madrid.
- \* PIRIE & SCHWARRZENBERGER (1988) **Mathematical discussion and mathematical understanding**. Educational studies in Mathematics 19, 459-470.
- \* PIRIE (1991) **Peer discussion in the context of mathematical problem solving**. In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes, 143-161.
- \* ROBITAILLE (1992) **ISMG. International Study**. Paper presented to ICME 8, Québec.
- \* ROMBERG, T. et al. (1988) **Essential features of the mathematical domain: Ratio and proportion**. Int. document. Univ. of Wisconsin. Madison.
- \* ROMBERG, T. et al. (1991) **How one comes to know Epistemological issues and challenges of assessment II** In Niss et al. (eds) Assessment and mathematics Education. SA Calonge. Spain.
- \* ROMISZOWSKI (1981) **Designing instructional systems**. Kohan Page London.
- \* SAADA & BRUN (1984) **L'elaboration de formulations dans un jeu arithmétique**. Recherches en didactique des mathématiques. 2 (2), 215-231.
- \* SANZ, I. (1989) **Las representaciones en relación con la presentación de la información en los textos escolares de**

**matemáticas.** Actas del 2º Encuentro Nacional sobre el Libro de Texto. Sevilla.

- \* SANZ, I. (1990) **Comunicación, lenguaje y matemáticas.** En Linares & Sánchez (eds) Teoría y práctica de la educación matemática. Alfar. Sevilla. 177-235.
- \* SAXE, G. (1988) **Linking Language with Mathematics achievement.** In COCKING, R. & MESTRE, J. (eds) Linguistic and cultural influences on learning mathematics. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey. 47-62.
- \* SHANON & WEAVER (1949) **A mathematical theory of communication.** Urbana Univ. Press.
- \* SINCLAIR, A. (1991) **Children's production and comprehension of written numerical representations.** In Durkin & Shire (eds) Language in mathematics education. Open University Press. Milton Keynes.
- \* SKEMP, R. (1982) **Understanding the symbolism of mathematics (special issue) Visible language 16 (3).** El autor tiene el artículo «Communicating mathematics: surface structures and deep structures».
- \* SKINNER, L. (1980) **Language and social change,** in L. Michael & C. Ricks (eds), The state of language, California University Press. pp. 574 ss.
- \* SPANOS, G. et al. (1988) **Linguistic Features of Mathematical Problem Solving.** 221-240.
- \* SPERANZA, F. (1989) **Matematica e linguaggio.** En L'educazione matematica Ago 89, pp. 97-114.
- \* STEFFE, L., COBB, P., VON GRASERFELD, E. (1988) **Construction of arithmetical meanings and strategies.** Springer Verlag. New York.
- \* STREEFLAND, L. (1991) **Fractions in realistic mathematics education.** Kluwer. Dordrecht.
- \* STREEFLAND, L. (ed) (1993) **Realistic mathematics education in primary school.** Freudenthal Inst. Utrecht.
- \* TAKAHASHI, H., MINATO, S. & HONMA, M. (1993) **Formats and situations for solving mathematical story problems** in Hirabaishi et al. (eds) Proceedings of PME XVII, Univ of Tsukuba, 11, 191-198.
- \* TALL & VINNER, S. (1981) **Concept images and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
- \* TATHA, D. (1988) **Lucas turns in his grave.** In D. Pimm (ed) Mathematics, teacher and children. Hodder & Stoughton. & Open University London.
- \* TATHA, D. (1991) **Understanding and desire<sup>1</sup>.** In Pimm & Love (eds) Teaching and Learning School Mathematics. Hodder & Stoughton. London.
- \* THORNDIKE (1912) **The measurement of educational products.** School review 20, 289-299.
- \* TIROSH & GRAEBER (1989) **Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division.** Educational Studies in Mathematics 20, 79-96.
- \* TRABASSO, T., ROLLIN, H., SHAUGHNESSEY, E. (1971) **Storage and verification shapes in processing concepts.** Cognitive Psychology, 2, 231-289.
- \* TREEFERS, A. (1987) **Three dimensions.** Reidel. Dordrecht.
- \* TREFERS, A. & GOFREE, F. (1985) **Rational analysis of realistic mathematics education. The Wiskobas Program.** In L. Streefland (ed) Proc. PME IX, 2, 97-123. Utrecht. OW & OC.
- \* VERGNAUD, G. (1983) **Multiplicative structures.** In Lesh & Landau (eds) Acquisition of mathematical concepts and processes. Academic Press. New York.
- \* VIGOTSKY (1962) **Thought and language.** MIT Press.
- \* VINNER, S. (1992) **In Vivo situations.** Unpublished paper Hebrew Univ. of Jerusalem.
- \* WALDERKINE, V. (1988) **The mastery of reason.** Routledge. London.
- \* WEBB, N. (1984) **Content and context variables in problem tasks,** in Goldin & McLintock (eds) Task variables in mathematical problem solving. The Franklin Institute Press. Philadelphia. 69-102.
- \* WILLIAMS, R. (1982) **Keywords,** Fontana. Edimburg.
- \* WINOGRAD, T. (1972) **Understanding natural language.** New York. Academic Press.
- \* WITTGESTEIN (1977) **Investigaciones filosóficas.** (v.o. 1953) Ed. 62. Barcelona.
- \* YACKEL (1993) **Childrens' talk in mathematics class as a function of context.** In Hirabaishi et al. (eds) Proceedings of PME XVII, Univ of Tsukuba, 11, 199-206.
- \* ZEPP, R. (1989) **Language and mathematics education.** Hong Kong API Press.

Joaquín Giménez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona  
 Soc. de Professors de Matemàtiques de les comarques  
 Meridionals de Catalunya