Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros

Manuel Fernández

Introducción

Hace ahora más de treinta años, nuestro PUIG ADAM (1), refiriéndose al papel de los modelos materiales en la enseñanza, escribía:

«... para nuestros alumnos de clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos, y al mismo tiempo lo que les invita a actuar. Si la percepción y la acción constituyen dos aspectos del aprendizaje, será necesario que los primeros modelos puedan provocar una y otra. Limitándonos, pues, a los modelos materiales, exigiremos que la traducción o la sugestión que entrañen no sean puramente contemplativas, sino que susciten una acción efectiva. Dicho de otro modo: los modelos deberán traducir o sugerir, creando situaciones activas de aprendizaje».

Es verdad que es una lástima, y es lástima que sea verdad, que visiones como ésta hayan sido tanto tiempo ignoradas. Mejor les hubiera ido a nuestros alumnos si las hubiéramos llevado a las aulas desde que fueron expuestas. Pero no, se ha esperado a que fueran sacralizadas por los ICMEs y demás cofradías. En fin, más vale tarde que nunca.

Por otro lado, desde que el niño entra en la escuela - sabiendo hablar, pero no escribir - se pretende (se pretendía y aún se sigue pretendiendo por muchos) que escriba «en Matemáticas» y, generalmente, no se insiste lo necesario en la expresión de nociones y destrezas matemáticas en **lenguaje natural**. Inexplicablemente, se suele olvidar que, en los niveles que nos ocupan, se piensa en palabras, no en símbolos.

El que en el título de este trabajo aparezca la frase **«lenguajes matemáticos»** obedece a la idea de considerar entre ellos al que, a falta de nombre mejor, denominaré **lenguaje físico** (los objetos también hablan) y al **ordinario o natural**.

Expondré aquí variados ejemplos de cómo acceder a determinados conceptos y relaciones a través de material (comercial o elaborado al efecto), haré hincapié en la posterior **verbalización** (oral y escrita), para, finalmente, ejemplificar el proceso de paso al **lenguaje simbólico**.

Se considerará también el empleo del **lenguaje gráfico**, entendiendo por tal la expresión mediante dibujos, diagramas, tablas, gráficas, etc.; la verbalización de lo así tratado y su traducción al lenguaje simbólico.

He de advertir que considero que la meta final de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los niveles no universitarios, ha de ser que el alumno adquiera una cierta soltura en la interpretación y escritura del lenguaje simbólico. Creo que no pretenderlo es jugar a enseñar Matemáticas; no es tratar seriamente de enseñarlas y de que sean aprendidas.

Un ejemplo del uso introductorio del lenguaje físico y sus sucesivas traducciones: Estudio de las unidades decimales de numeración a través del decímetro cúbico desmontable.

A) Fase físico-oral

Material: Un par de juegos para cada grupo de 3 ó 4 alumnos. Otros para el profesor.

Terminología: Al decímetro cúbico completo se le denominará **cubo**. A las partes, **plancha**, **barra** y **cubito**.

Los alumnos deben manipular el material hasta que lleguen a descubrir y expresar **oralmente** con corrección que: **una plancha** es **una décima** de **un cubo**; **una barra** es **una centésima** de **un cubo**; etc.

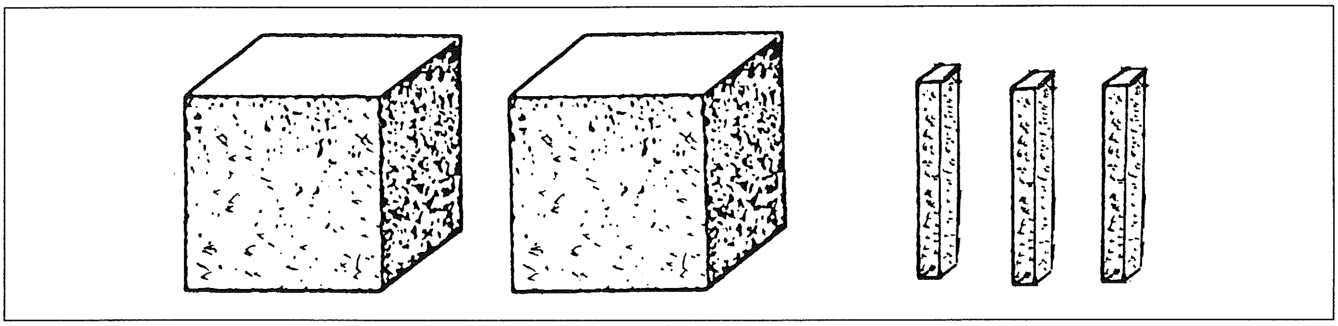
Oportunamente, sin precipitaciones peligrosas, debe procederse a ir cambiando la **unidad de referencia**. Entonces, los ejercicios consistirán en ver que, por ejemplo, **una barra** es **una décima** de **una plancha**; **un cubito** es **una centésima** de **una plancha**;...

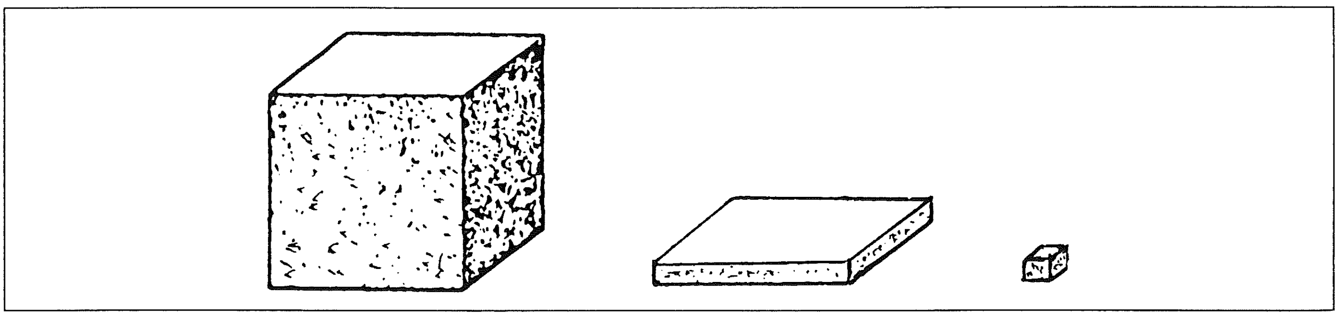
Cuando haya constancia de que lo anterior ha sido debidamente interiorizado, puede el profesor mostrar diversas combinaciones de distintas unidades **sucesivas**, y pedir que expresen en forma oral cada cantidad.

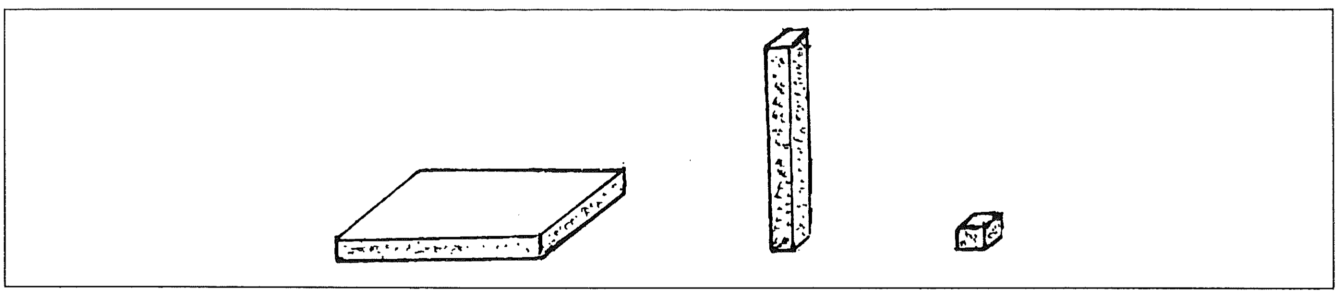
Más tarde, repetir el proceso con unidades **no sucesivas**. Por ejemplo, mostrándoles commbinaciones **materiales** como las que se representan a continuación, ayudarles a que expresen en lenguaje habitual las correspondientes cantidades.

Esto supone un importante paso más, una primera abstracción. Se trata, por ejemplo, de que digan, en el caso de la primera figura: **dos unidades y tres centésimas**.

O bien, tomando como unidad una parte del cubo, verbalizar la expresión **material** correspondiente. Tal es el caso representado a continuación:







Pero la actividad no debe terminar aquí. Debe adiestrarse al alumnado en el paso inverso, esto es, proponer muchos y variados ejercicios en los que se pida materializar enunciados como los que, a vía de ejemplos, siguen, sobreentendiendo que cada cual es libre de elegir, cuando se dé el caso, **la unidad de referencia**:

3 unidades y 2 décimas.
2 unidades, 2 décimas y 5 centésimas.
4 décimas y 3 centésimas.
2 unidades y 3 milésimas.
10 décimas
5 décimas.
15 centésimas.
25 milésimas.
100 centésimas es lo mismo que 1 unidad.
1007 milésimas equivale a 1 unidad y 7 milésimas.
200 centésimas es lo mismo que 20 décimas.
...

En todo este proceso surgen conflictos cognitivos entre el alumnado. Y es bueno que así sea. Cuando consigan superarlos -con nuestra ayuda o, mejor, sin ella- podremos asegurar que las nociones tratadas han sido significativamente aprendidas. Y cuando, más adelante, tengan que efectuar mediciones y anotar, pongamos por caso, la medida de un listón de **1 m 5 mm** , escribirán, con la seguridad con que lo hace un carpintero, **1'005 m**.

B) Fase físico-escrito

El proceso a seguir es igual que el de la fase anterior, pero aquí debe darse más autonomía a los alumnos: que sean ellos los que propongan los ejercicios, que comenten en voz alta las incidencias y dificultades encontradas, ...

Debe propiciarse el empleo de otros materiales; por ejemplo, manojos de palillos de dientes de 10 y 100 unidades, para el trabajo con décimas y centésimas; probetas graduadas y agua coloreada, etc. También, aprovechar la creatividad natural de los niños y proponerles que fabriquen otros; por lo menos, para el estudio de décimas y centésimas.

C) Fase del lenguaje gráfico

El decímetro cúbico real y sus partes se sustituyen ahora por buenos dibujos en tamaño real. Debe disponerse de varios juegos e irles mostrando diversas combinaciones para que expresen, oralmente y por escrito, lo que ven.

Constituye también un buen ejercicio que los alumnos vayan diciendo cantidades, y el profesor vaya enseñando los correspondientes dibujos. Y repetir esta escenificación, actuando sólo los alumnos.

No se le ocultará al lector que el objetivo de esto es aprovechar la ocasión para establecer una ***comunicación*** que facilite la construcción del conocimiento, la comprensión verdadera de los conceptos y relaciones.

D) Desde el lenguaje físico hasta el simbólico, y viceversa

Ha llegado el momento de hacer ver que las Matemáticas disponen de una forma más rápida y cómoda de escribir estas cosas. Procede ahora introducir el convenio del uso de la «**coma**» para separar y distinguir las **unidades** de las **unidades decimales.**

(Y, ¡cuidado!: Se está empezando a copiar el uso del punto decimal anglosajón, lo que puede acarrear problemas).

Se debe partir, aunque aquí no lo hagamos, de las representaciones materiales.

En esta etapa, hay que ir muy despacio. Es fundamental que, desde un principio, los chicos caminen seguros por esta vía a la abstracción. Se evitará así el que, más tarde -en especial cuando traten con fracciones ordinarias o medidas- cometan errores de difícil erradicación.

Ejemplos de ejercicios:

a) Traduce al lenguaje simbólico:
* 4 unidades 5 décimas
* 3 unidades 3 décimas 1 centésima
* 25 unidades 7 centésimas
* 7 décimas 5 milésimas
* 6 centésimas 5 milésimas
* 9 centésimas
* 23 milésimas
* 115 centésimas es lo mismo que 1 unidad y 15 centésimas
...

b) Expresa con números y palabras:
* 3'12

* 3'02
* 5'005
* 0'35
* 0'02
* 0'003
* 32'07

...

c) Materializa y representa con dibujos las cantidades propuestas en los ejercicios anteriores.

Pero... el lenguaje físico sirve para más: otros ejemplos

Ocurre que una parte muy considerable del profesorado considera, y actúa en consecuencia, que esto de manipular, de intentar que los alumnos «visualicen» las relaciones y matemáticos, sólo es útil cuando de los primeros niveles de la enseñanza se trata. Idea esta tan peregrina, como creer que a un laboratorio de Física sólo es necesario entrar para comprobar la dilatación de los cuerpos al absorber calor, o lo que el genial Arquímedes cuentan que descubrió mientras tomaba un placentero baño.

Creo, por el contrario, que casi todos los contenidos matemáticos de la Enseñanza Obligatoria y algunos correspondientes a los Bachilleratos pueden introducirse a través de materiales que, en muchos casos, se encuentran comercializados; en otros, se puede, y es altamente instructivo, diseñarlos y construirlos con nuestros alumnos.

EJEMPLOS:

A) Redescubrimiento del Teorema de Pitágoras

Material:
Para cada grupo de 3 ó 4 alumnos, varios juegos de varillas metálicas finas y difícilmente deformables: unos, con medidas equimúltiplos de 3, 4 y 5; otros, con medidas cualesquiera.

Proceso a seguir:
1º) Pedir a los alumnos que construyan triángulos, utilizando sólo las varillas de un mismo juego.

El objetivo primero es, solamente, que lleguen a la conclusión de que «no siempre se puede formar un triángulo». No creo que se deba pretender más, es decir, no se trata de introducir el teorema que afirma que «Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma...» que, además, no tiene mucho interés.

2º) Separar los juegos constituidos por varillas que no cierran triángulos.

3º) En una cartulina o chapa de madera, pegar los triángulos ***rectángulos*** resultantes.

4º) Medir los lados con la mayor precisión posible (la medición y corte de las varillas ha debido hacerse con el máximo rigor) y anotar las medidas.

5º) Procede ahora hacer una revisión del trabajo hecho. Habrá casos en que nuestras ternas pitagóricas habrán dejado de serlo, porque las mediciones hechas por los chicos no han sido correctas y, en consecuencia, han der ser corregidas.

6º) Una vez hechas y revisadas las correcciones, tabular los resultados, según el modelo adjunto:

3	4	5
6	8	10
...	...	...

A continuación, proponer las siguientes cuestiones:

1) Calcular los cuadrados de las medidas de los lados de cada triángulo.

2) ***Intentar descubrir qué relación existe entre los dos primeros cuadrados y el tercero.*** (Hay que evitar a toda costa que algún alumno conocedor del Teorema, nos chafe el invento).

Una disposición adecuada de los cálculos, aprovechando la tabla anterior, es esta:

3	4	5
$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
6	8	10
$6^2 = 36$	$8^2 = 64$	$10^2 = 100$
...	...	...

7º) Después del consiguiente debate, proponer la pregunta siguiente.

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados traduce la relación descubierta?:

* La suma de los cuadrados de las medidas de los lados menores de un triángulo, es igual al cuadrado de la medida del lado mayor.

* En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados.

* En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

* En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de la suma de los catetos.

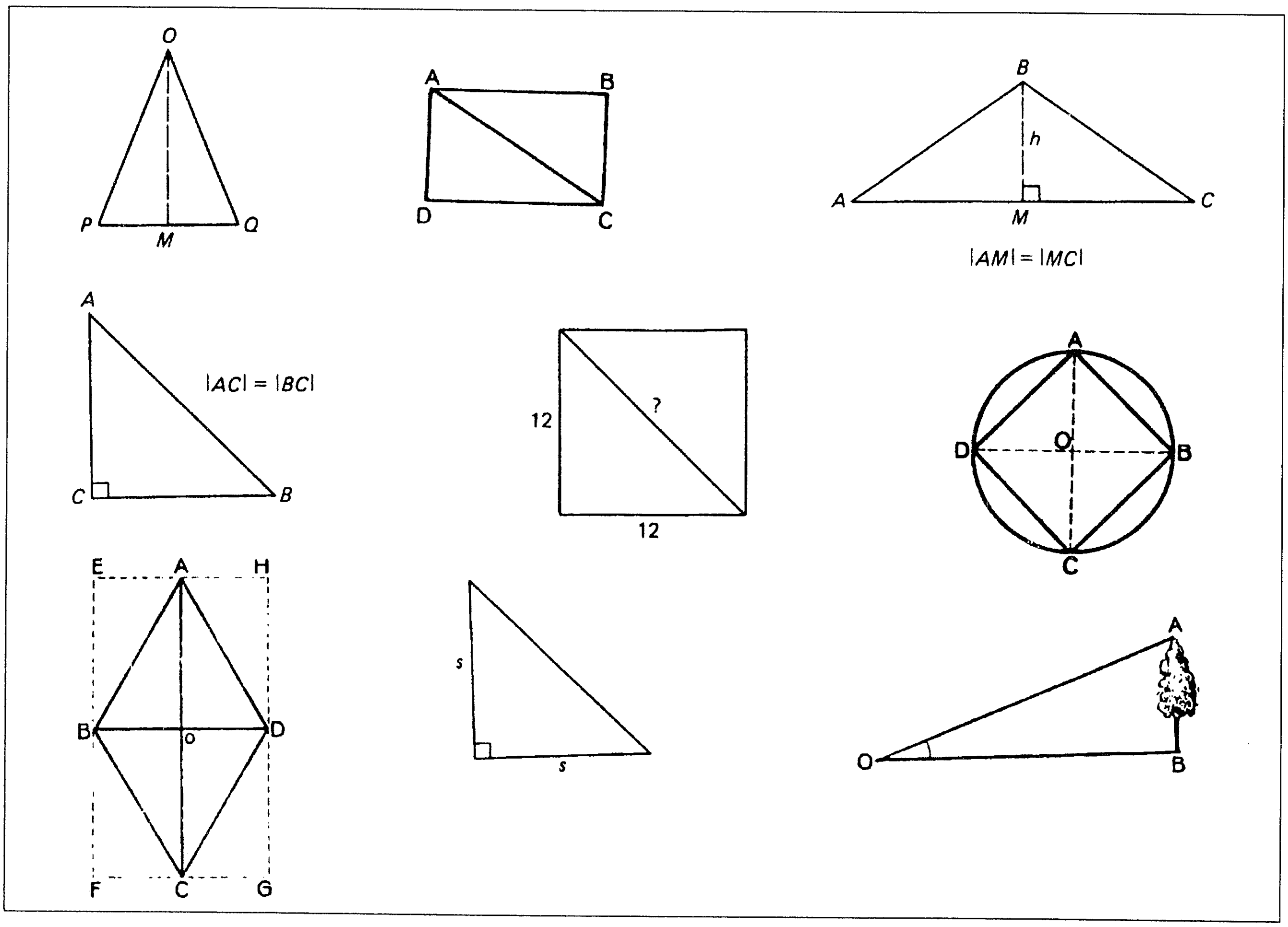
* Si un triángulo rectángulo tiene iguales sus catetos, el cuadrado de su hipotenusa es igual al doble del cuadrado de uno de los catetos.

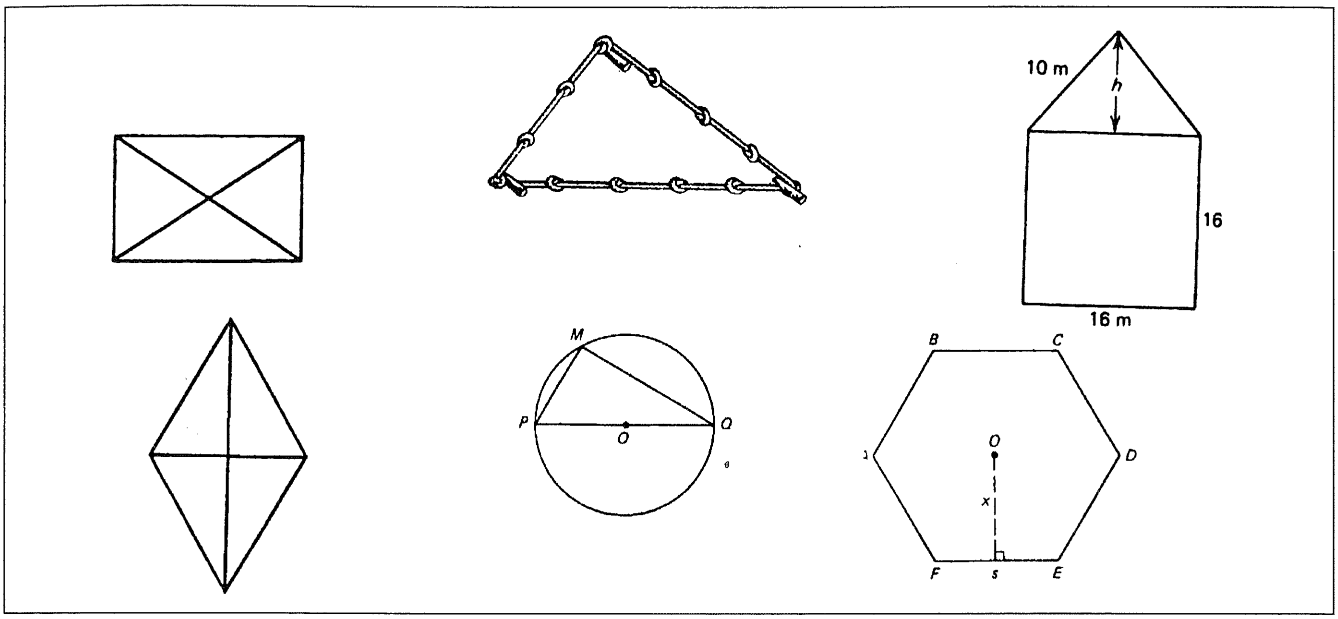
8º) El profesor puede ahora hacer alguna referencia a Pitágoras, los pitagóricos, etc., proporcionar alguna bibliografía y proponer al alumnado un sencillo trabajo sobre el tema; por ejemplo, un comentario de texto.

9º) El Teorema de Pitágoras suele enunciarse así:

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Aplicarlo a los triángulos rectángulos de las figuras que siguen:



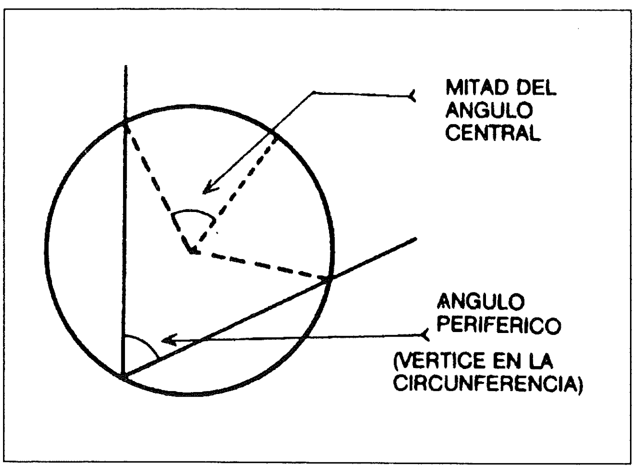


B) Medida de un ángulo periférico (Tomado de «CIRCULANDO POR EL CIRCULO» (2)).

Angulo ***central*** es cualquier ángulo con vértice en el centro de un círculo. Sus lados son semirrectas radiales.

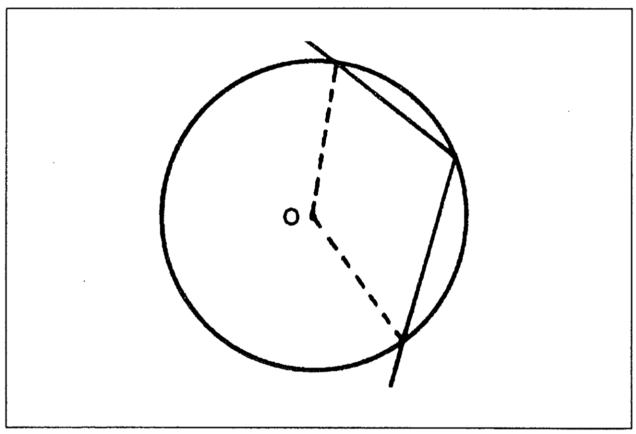
El ángulo ***periférico*** tiene su vértice en un punto cualquiera de la circunferencia. Sus lados pueden pertenecer a rectas secantes a la circunferencia, o bien, uno a una secante y el otro a una tangente.

1º) Entregar reproducciones en cartulina y en tamaño adecuado de la siguiente figura:

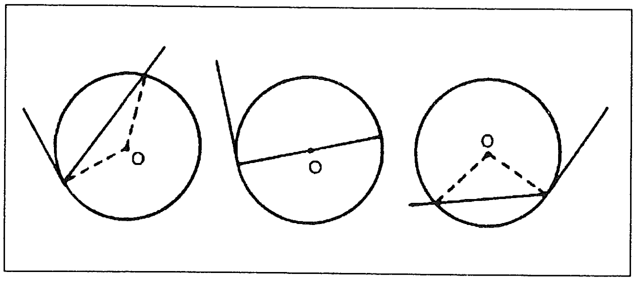


2º) Pedir que recorten el ángulo «mitad del central» y lo encajen en el «periférico». ¿Qué relación parece haber entre ambos ángulos?

3º) En reproducciones de la figura adjunta, pedir que tracen las bisectrices de los ángulos centrales y procedan como en el apartado anterior. (Advertir que, como el ángulo periférico es mayor que un recto, le corresponde un ángulo central mayor que un llano).



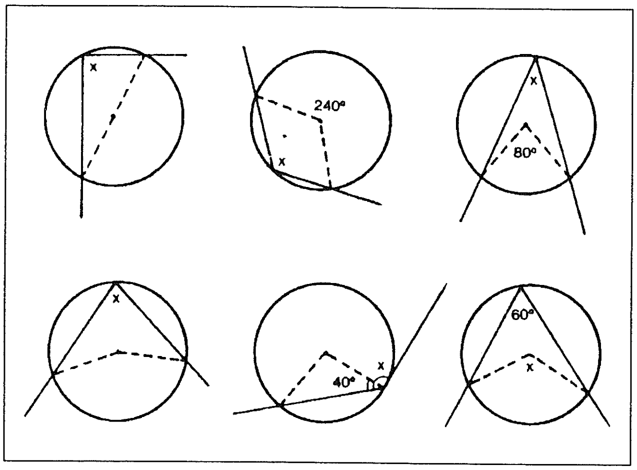
4º) En los ángulos periféricos de las figuras que siguen, un lado pertenece a una tangente a la circunferencia; por eso los llamamos «periféricos tangenciales».



Los alumnos han de disponer de cartulinas, tijeras e instrumentos de dibujo, y proceder como en los casos anteriores.

5º) Escribir en palabras la relación entre cualquier ángulo periférico y el central correspondiente.

6º) Calcular el valor del ángulo X de cada una de las figuras que siguen:



C) Algunas de las cosas que pueden hacerse con una moneda (3)

1. Medir el diámetro con un calibrador.
2. Medir su espesor.
3. Calcular la superficie de una cara.
4. Determinar, con una probeta, su volumen.
5. Verificar el resultado obtenido en 4, mediante el cáculo.
6. Pesarla.
7. Calcular el peso específico de la aleación de que está hecha.
8. Averiguar cuántas monedas iguales a la dada habría que fundir para llenar el espacio de la clase.
9. Si llenáramos la clase de mercurio, ¿cuánto más pesaría éste que el bloque obtenido en la fundición de las monedas?
10. ¿Qué presión ejercería el bloque de monedas sobre el piso de la clase? ¿Y el mercurio?

Dibujando y aprendiendo

La poca atención prestada en los últimos años a la Geometría, ha traído aparejado el no aprovechar el enorme potencial del dibujo geométrico como lenguaje aclaratorio y enriquecedor; el no considerar la gran ayuda que puede prestar para:

* Fijar nociones intuidas a través de otras actividades de aproximación (con geoplanos, objetos circulares, recorte de figuras, etc.).

* Llegar, mediante un proceso inductivo, al descubrimiento de nuevas relaciones y propiedades.

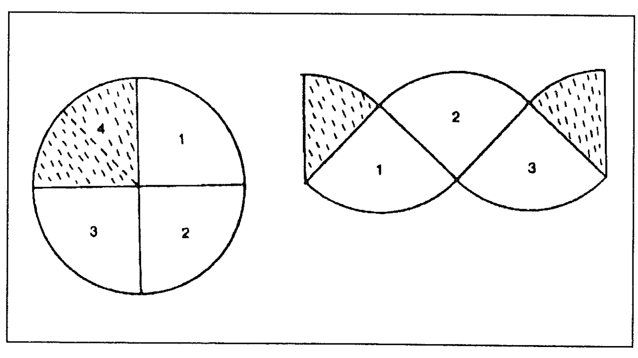
* Preparar el camino para que el alumno pueda llegar, más tarde, a expresar, tanto en lenguaje ordinario como en el simbólico, y con la necesaria precisión y concreción, las propiedades y relaciones que tendrá que utilizar en la resolución de problemas geométricos.

* Ejercitarse en la construcción de figuras y, lo que es más importante, adiestrase en su observación, para descubrir o establecer relaciones, aspecto este que debe tratarse detenidamente, ya que es fundamental en el proceso de resolución de problemas de cierta complejidad.

Siempre a vía de ejemplos, incluyo a continuación dos actividades de este tipo. La primera, tomada del libro anteriormente citado.

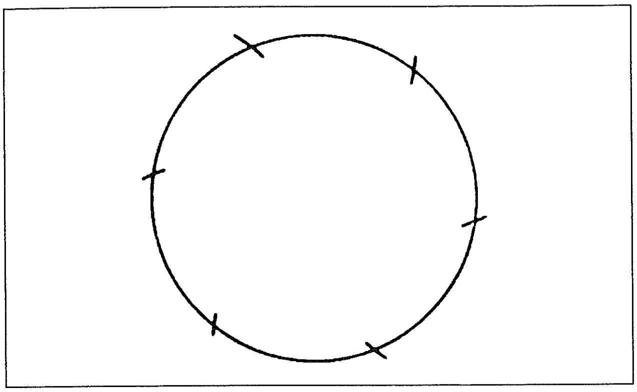
A) Deducción empírica de la fórmula para calcular el área del círculo

1. Dividamos un círculo en 4 sectores iguales y dispongamos estos como indica la figura:

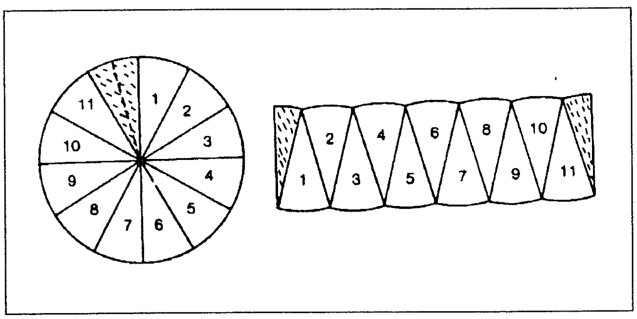


¿Se parece esto a un rectángulo? Tienes razón; no se parece en nada.

2. Prueba tú, partiendo el círculo en 6 sectores:



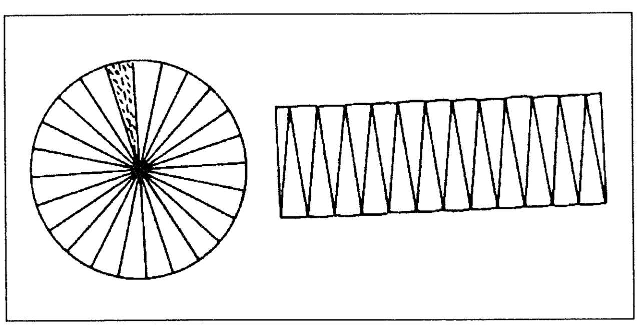
3. Veamos qué ocurrre con 12 divisiones:



4. ¿Y haciendo 15 sectores? Prueba a ver.

5. Antes de seguir, observa esto: la suma de los arcos de arriba (o la de los de abajo) es una ***semicircunferencia***, es decir, vale πr ¿Por qué?

6. Por lo que llevamos visto, cuanto mayor es el número de sectores, más se parece a un rectángulo la figura que se obtiene. Veamos el aspecto con 24:



7. Imagina ahora que divides un círculo en muchos, muchísimos sectores iguales. ¿Cómo serían los arcos? Casi como puntos, ¿verdad?. La figura obtenida se asemejaría mucho a un rectángulo de πr de largo y r de ancho y, por tanto, de área

$$A = \pi r^2$$

Por eso empleamos esta fórmula para calcular el área de un círculo.

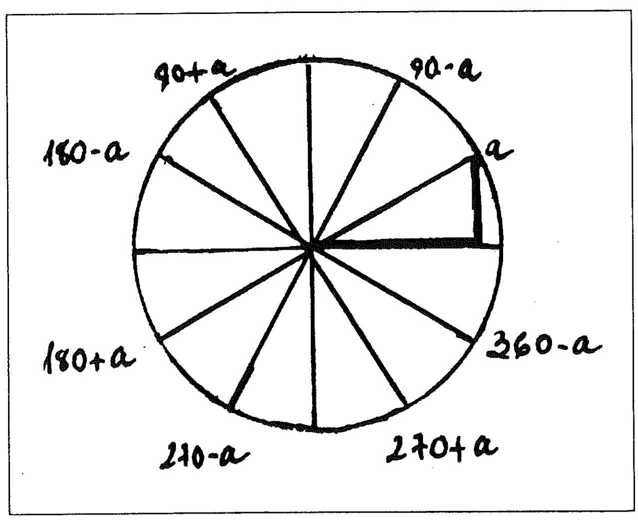
B) Signo y valor del seno (coseno) de ángulos que suman (o difieren en) a°, con a < 90 °

Conocidas son las dificultades que encuentra la mayoría de los alumnos para establecer la relación entre las razones de un ángulo en función de las de otro ángulo menor que un recto; esto es, para llegar, pongamos por caso, a escribir

$$\text{sen } 240° = - \cos 30°$$

El proceso que describo a continuación tiene la estructura expuesta en todo este trabajo: ***ir «atacando» el concepto mediante diversos lenguajes y, una vez realmente interiorizado por los alumnos, pasar a simbolizarlo.***

1º) Enseñar a la clase un panel en el que aparezcan, tal como muestra la figura, los ángulos indicados, el seno (marcado en verde) del ángulo auxiliar ***a*** y el coseno (en rojo) de dicho ángulo.



2º) Los alumnos, utilizando compás y regla, reproducen la figura.

3º) A continuación, vamos trazando el seno y coseno de 90–***a*** , 90+***a*** , etc., hasta que vayan viendo que la razón pedida es siempre igual «en tamaño», o sea, en valor absoluto, a la razón o **«co-razón»** del ángulo auxiliar. Y, en cuanto al signo, depende de que se trate de una abscisa (ordenada) positiva o negativa.

En caso de que la razón o co-razón buscada tenga signo contrario al de la correspondiente razón o co-razón del ángulo auxiliar, hay que hacer entender que la susodicha razón o co-razón es igual a la «menos razón» o «menos co-razón» de dicho ángulo auxiliar. Así, por ejemplo:

$$\text{sen } (270^\circ - a) = - \cos a$$
$$\cos (270^\circ - a) = - \text{sen } a$$

4º) Procede luego ir adiestrando al alumnado en casos concretos. Para ello, hay que conseguir que caigan en la cuenta de que para obtener el ángulo auxiliar hay que restar al dado **«el número de rectos que quede detrás»**, es decir: 90º, si el ángulo dado está en el segundo cuadrante; 180º, si está en el tercero; 270º, si en el cuarto. Por ejemplo, para hallar las razones de 200º, trabajaremos con 200º - 180º = 20º.

Es necesario advertirles que si el ángulo auxiliar tiene una amplitud próxima a 45º, puede haber confusión entre su seno y su coseno, por lo que debe medirse con la mayor precisión posible.

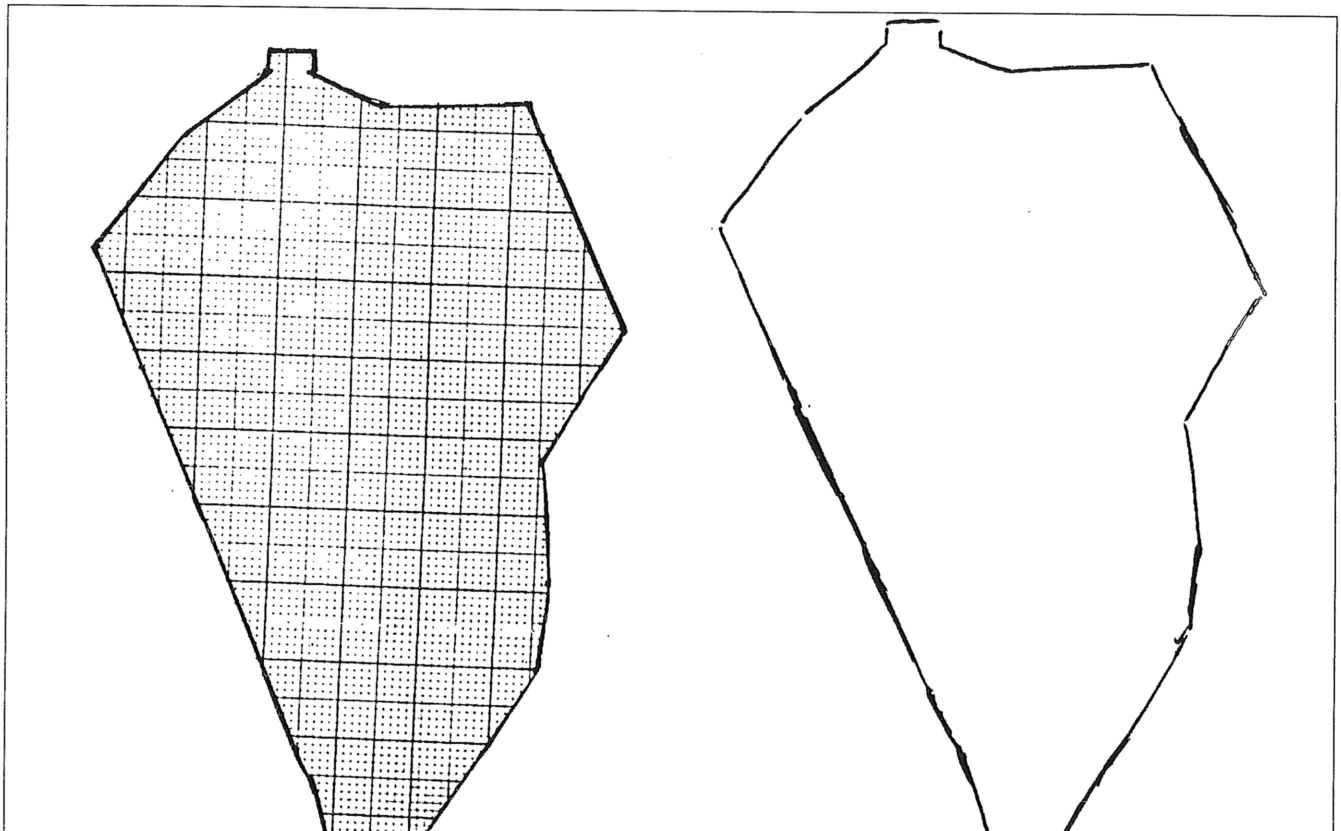
En el caso del ejemplo, tenemos:

$$\text{sen } 200^\circ = - \text{sen } 30^\circ = - 1/2$$
$$\cos 200^\circ = - \cos 30^\circ = \sqrt{3} / 2$$

Si se insiste en este tipo de ejercitación, llega el momento en que los alumnos no necesitan dibujar la figura; SON CAPACES DE IMAGINARLA.

5º) Como ejercicio final, pedir que intenten tabular los valores del seno, coseno y tangente de todos los ángulos relacionados con 30º y 60º, incluidos -30º y 390º, **sin ayudarse del dibujo**. Me consta que la mayoría lo logra.

C) Tomando medidas a La Palma



El primero de los dibujos anteriores reproduce la forma y extensión (a escala 1: 400.000) de La Palma, una de las Islas Canarias.

Pedir a los alumnos que los reproduzcan y contesten el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es la distancia máxima Norte-Sur?
2. ¿Cuál la Oeste-Este?
3. Calcula el área aproximada de la primera figura.
4. ¿Cuál es la superficie aproximada de la isla?
5. Si el único dato fuera el segundo dibujo, ¿cómo podrías calcular lo anterior? (Una pista: necesitarías unas tijeras, cartón grueso y una balanza de precisión).
6. Calcula el error absoluto y el error relativo de tus dos cálculos.
   (La extensión de La Palma es 730 km^2).

Hay que mimar la expresión verbal

No es sólo misión nuestra, claro está, pero debemos hacer todo lo posible para conseguir de nuestros alumnos un considerable nivel de uso del lenguaje natural para expresar sus descubrimientos, elaborar e interpretar definiciones, enunciar conjeturas y, en definitiva, para que logren alcanzar la necesaria competencia de comunicación y recepción de ideas matemáticas.

Entre otros varios aspectos a tratar al respecto, cabe citar los siguientes:

a) Intentar conseguir el dominio por parte del alumnado de la terminología (términos y expresiones) necesaria - sólo la necesaria - para que el tratamiento de contenidos matemáticos pueda llevarse a término sin dificultades añadidas.

b) Evitar expresiones equívocas. Valgan como ejemplos las que siguen:

* «Máximo común divisor» y «mínimo común múltiplo», que llevan siglos ocasionando errores, y que podrían sustituirse por «**divisor mayor**» y «**múltiplo menor**», respectivamente. Propongo estas denominaciones y las notaciones usadas en los siguientes ejemplos:

$$\overset{\vdots}{\mathbf{M}}\,(4, 26) = 2$$

$$\overset{\cdot}{\mathbf{m}}\,(4, 26) = 52$$

*«Cuadrado de una diferencia», frasecita que, irremediablemente, llegan a confundir con «diferencia de cuadrados». ¿Por qué no decir «**cuadrado de un binomio diferencia**»? Y, consecuentemente, «cuadrado de un binomio suma».

c) Desterrar el abuso de términos o expresiones sinónimos. ¿De cuántas maneras hemos visto denominar, por ejemplo, a la aplicación biyectiva?

Al respecto, convendría hacer un rastreo en los libros de texto para hacer un listado lo más completo posible de la terminología. Después de un detenido estudio del mismo, proponer (podría hacerlo la F.E.S.P.M. al MEC, a las Consejerías de Educación y las Editoriales) la eliminación de sinonimias innecesarias. Tal estudio podría aprovecharse, además, para analizar la coincidencia o no de significado entre términos y expresiones del lenguaje habitual y del matemático.

d) Partir siempre de enunciados verbales, no de operaciones indicadas. He aquí, algunos ejemplos:

1.Indica y calcula:

* Doble de 756
* Mitad de 75
* Tres cuartos de 600
* Triplo de 27'6...más cuadrado de 8
* Triplo...de 27'6 más cuadrado de 8

Los puntos suspensivos traducen la pausa que debe hacerse en la expresión verbal, para distinguir un enunciado de otro. Simbólicamente vienen representados, respectivamente, por la ausencia o no de paréntesis, es decir:

en el primer caso escribimos $3x27'6 + 8^2$;
en el segundo, $3x(27'6 + 8^2)$

* Cuarta parte de 180 disminuida en la mitad de 18
* Cuarta parte de 180 disminuido en la mitad de 18

...

2. Si **X** representa el dinero que tengo, simboliza:
* El cuádruplo de lo que tengo
* El doble de lo que tengo... más 1000

...

e) Acostumbrar a los alumnos a que, antes de operar con determinadas expresiones simbólicas, las verbalicen. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio:

Dadas las aplicaciones $\mathbf{f(x) = x^2 - 3}$ y $\mathbf{g(x) = x + 2}$, hallar las fórmulas que definan $\mathbf{f \circ g}$ y $\mathbf{g \circ f}$.

La aplicación **f** consiste en «elevar al cuadrado y restar 3»; la **g** es «sumar 2». Entonces,

$\mathbf{f \circ g}$ es «cuadrar y disminuir en 3, lo que resulte de añadir 2», es decir,

$$\mathbf{f \circ g(x)} = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$$

Por el contrario, $\mathbf{g \circ f}$ supone «añadir 2, al resultado de cuadrar y restar 3», esto es,

$$\mathbf{g \circ f(x)} = (x^2 - 3) + 2 = x^2 - 6x + 11$$

f) Nos solemos quejar de la mala preparación de los chicos en el uso del lenguaje ordinario (no entienden los enunciados de los problemas, son incapaces de definir, no saben relatar el proceso que han seguido al resolver un problema, ...). Intentemos ver las cosas al revés: Valgámonos de las Matemáticas para ayudarles a expresarse mejor. Fomentemos los razonamientos verbales en la resolución de ciertos problemas, provoquemos y animemos discusiones en clase, dejemos de ser tan algorítmicamente aburridos.

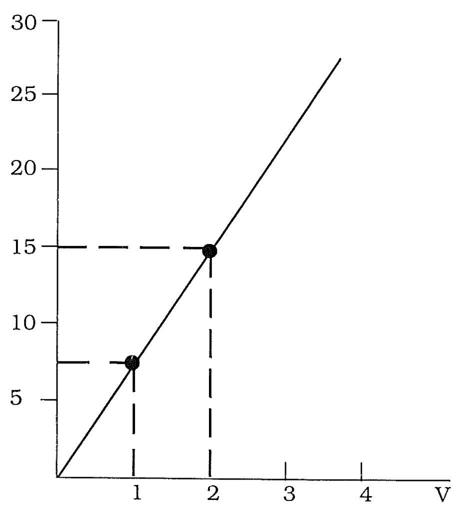
Dos ejemplos de actividades con gráficas

A) Relación volumen-peso.

Entre el volumen y el peso hay una relación de ***proporcionalidad directa***. La gráfica que ilustra esta relación es una ***recta***. Veamos un ejemplo para el caso del hierro:

Volumen: Peso:

1 cm^3 7'5 g.
2 cm^3 15 g.



Estudia la gráfica y, sin hacer ningún cálculo, contesta:

* ¿Cuál es el peso de 4 cm^3 de hierro?
* ¿Cuál es el volumen correspondiente a 37'5 g?

Elige un escala conveniente para cada eje y, sin hacer cálculos, determina:

* El peso de 45 cm^3 de Fe.
* El volumen correspondiente a 15 g.

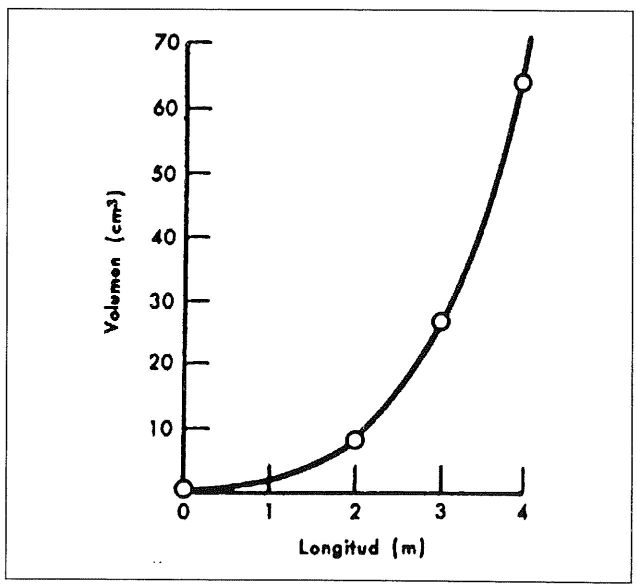
B) Apolo y el cubo

Es imposible duplicar el volumen de un cubo utilizando solamente una regla no graduada y un compás. En relación con este problema, que trajo de cabeza a muchos insignes matemáticos, existe la siguiente leyenda:

«*Una plaga amenazaba a la población de una ciudad griega. Sus habitantes consultaron al Oráculo de Delfos para averiguar qué dios estaba enojado y por qué. La respuesta fue que era Apolo, y que su enfado era debido a que quería que el altar que la ciudad le había dedicado, consistente en un cubo sólido de oro, fuese exactamente el doble de grande.*

El pueblo construyó entonces un nuevo altar, con una arista doble que la del otro...¡ y la plaga empeoró !

¿Crees que este mito tiene algo que ver con la gráfica que sigue?



Uso de los distintos lenguajes en la resolución de problemas

Este punto será tratado en el II Seminario Nnal. sobre Lenguaje y Matemáticas, a celebrar próximamente. No obstante, expondré aquí algunas de las consideraciones en las que baso mi enfoque del tema.

Aunque actualmente la expresión **resolución de problemas** hace referencia casi exclusivamente a problemas **abiertos o de investigación**, considero que:

* No debe excluir algunos de los problemas clásicos de aplicación.
* Tampoco debemos dejar de proponer algunos ejercicios puramente mecánicos.

Unos y otros, debidamente dosificados, contribuyen a que los alumnos vayan adquiriendo relativa destreza en el lenguaje formal.

Por otro lado, algunas de las modalidades del **lenguaje gráfico** no tratadas aquí, tendrán cabida en la segunda parte de este trabajo; la resolución de problemas es el lugar adecuado.

En conclusión, a lo largo de estas páginas -seguramente mal hilvanadas- he querido exponer mi creencia de que el tratamiento lento, ininterrumpido y debidamente graduado, de todos y cada uno de los modos de expresión de nuestra disciplina, y el paso de unos a otros, la hace más asequible e, incluso, puede generar entusiastas de su estudio. Muchos años de oficio, buscando caminos y veredas para enseñarla mejor, me han llevado a tal convencimiento.

En las repetidas lecturas de este trabajo, que impone la obligada revisión previa al envío a imprenta, he llegado a pensar que, en líneas generales, su enfoque se ajusta a las recomendaciones del **National Council of Teachers of Mathematics** (¡hay que ver, oiga!), ya que, en una de sus publicaciones (4), se dice textualmente:

«...el estudio de las matemáticas ha de incluir muchas oportunidades de comunicación, de forma que los alumnos puedan:

* **relacionar materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas;**
* **reflexionar y aclarar sus ideas sobre conceptos y situaciones con contenido matemático;**
* **relacionar su lenguaje diario con el lenguaje y los símbolos matemáticos;**
* **darse cuenta de que una parte fundamental para el aprendizaje y uso de las matemáticas conlleva el hecho de que éstas se representen, se discutan, se lean, se escriban y se escuchen;**
* **modelar situaciones usando métodos orales, escritos, concretos, pictóricos, gráficos y algebrai-cos;**
* **desarrollar estructuras conceptuales comunes sobre ideas matemáticas, incluyendo el papel de las definiciones;**
* **utilizar las destrezas de leer, escuchar y visualizar para intrerpretar y evaluar ideas matemáticas;**
* **discutir ideas matemáticas y elaborar conjeturas y argumentos convincentes;**
* **apreciar el valor de la notación matemática y el papel que cumple en el desarrollo de ideas matemáticas.**

En los niveles 9-12 (correspondientes a nuestra Secundaria Obligatoria), **el currículo de matemáticas debe incluir un desarrollo continuo del lenguaje y del simbolismo para comunicar ideas matemáticas para que los estudiantes sean capaces de:**

* **reflexionar y clarificar sus ideas sobre conceptos y relaciones matemáticas;**
* **formular definiciones matemáticas y expresar generalizaciones que se descubran por medio de la investigación;**
* **expresar ideas matemáticas oralmente y por escrito;**
* **leer comprensivamente presentaciones matemáticas escritas;**
* **formular preguntas de aclaración y ampliación en relación con las matemáticas que hayan leído u oído;**
* **apreciar la economía, potencia y elegancia de la notación matemática y el papel que cumple en el desarrollo de ideas matemáticas».**

Bibliografía

(1) **El material para la enseñanza de las Matemáticas:** Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de la Matemática. Aguilar S.A. de Ediciones, 1964.

(2) **Circulando por el círculo**: Fernández, M. ; Padilla, F.; Santos, A. y Velázquez, F. - Editorial Síntesis, 1991.

(3) **Las actividades 2C, 3C, 5A y 5B están sacadas de LA MEDIDA**, Cuaderno de trabajo elaborado por Fernández, M., González, S., Padilla, F., Santos, A., Trujillo, P. y Velázquez, F., en lo que corrresponde a «Práctica de la medida»; y por Artiles, J., Hernández, F., Morales, A. y Medina, J., en lo relativo a «Aspectos teóricos». El Cuaderno, actualmente agotado, fue publicado por la Soc. Canaria «Isaac Newton».

(4) **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática**: Edición en castellano de la S.A.E.M. «Thales», 1991.

Manuel Fernández
S.C. "Isaac Newton" P.M.