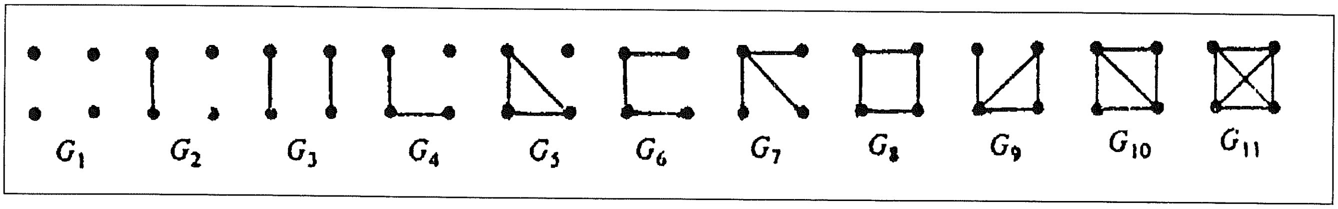
El lenguaje de los grafos

María Candelaria Espinel Febles

Existen medios de comunicación universales como la música o el arte. La notación de las matemáticas también goza, afortunadamente, de cierta universalidad. Una parte de las matemáticas, la teoría de grafos, se ha mostrado, en los últimos tiempos, como una notación muy útil y unificadora en diversas disciplinas.

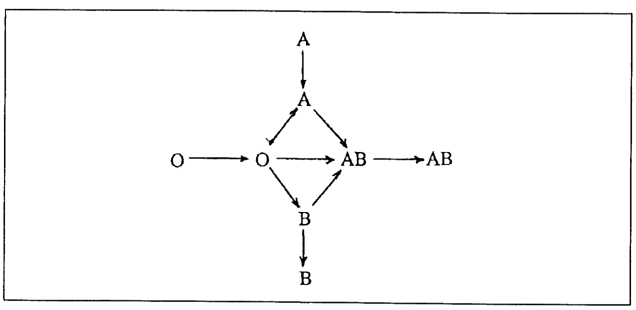


Ante un problema, a menudo uno tiende a trazar un grafo. Con sólo puntos y líneas podemos describir una situación, un sistema o una estructura. Los grafos son una teoría de relaciones y necesita de un número mínimo de definiciones para trabajar.

Aportamos algunas familias de grafos que consideramos factibles de incorporar a la enseñanza no universitaria. Proponemos una reflexión sobre una metodología que incorpore los grafos o redes al currículo de estos alumnos.

Mi exposición reducirá al mínimo las palabras. Dejaré que los gráficos hablen.

Donantes



El grupo O, conocido como donante universal, puede donar a todos; A y B sólo pueden hacerlo a los de su propio grupo y a los AB; los AB, sólo entre ellos.

Amistad-movilidad

Posibles relaciones de amistad en grupos de 4 personas:

En G_5, G_6 y G_7 hay tres pares de amigos, pero son patrones distintos, ya que:

En G_5 hay 3 personas que tienen dos amigos cada una y 1 persona no tiene amigos.

En G_6 , 2 personas tienen un amigo cada una y 2 personas tienen dos amigos cada una.

En G_7 , 3 personas tienen un amigo cada una y 1 persona tiene tres amigos.

Tabla de recuento: Puntos (Personas) / Líneas (Amigos)

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	2	2	2
3		1	3	4	5	5
4			2	6	9	10
5			1	6	15	21
6			1	6	21	41
7				4	24	65

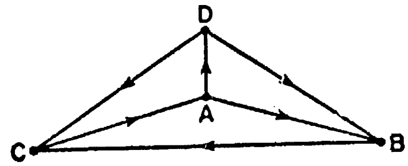
En la tabla se puede observar cierta relación entre el número de puntos y el de líneas, al menos en las primeras columnas. Para 4 puntos, en la tercera columna de la tabla, se tiene

$$\mathbf{1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11},$$

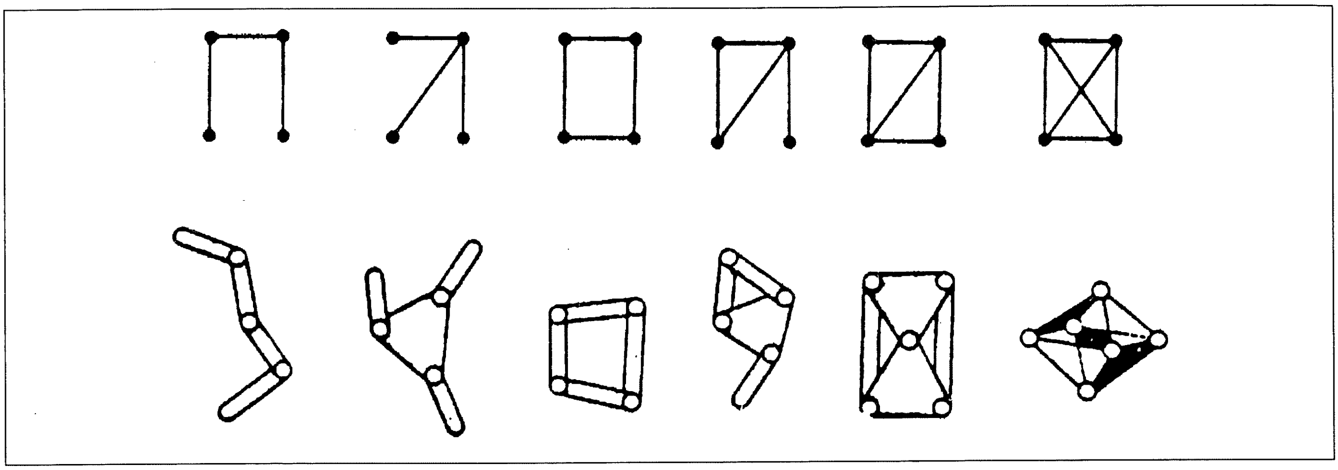
que son las posibilidades ya dibujadas. De $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_5$ son grafos no conexos, mientras que de $\mathbf{G}_6$ a $\mathbf{G}_{11}$ los grafos se mantienen unidos.

Obsérvese que, si $\mathbf{M(G) < 0}$, se pueden eliminar ciertas aristas sin afectar a la movilidad del sistema.

Torneos



A gana a B y D
B gana a C
C gana a A
D gana a C y B



Los cinco grafos conexos modelizan sistemas cinemáticos de movilidad. Su aplicación es evidente; por ejemplo, en el diseño de robots. En este caso, los vértices del grafo corresponden a las articulaciones del sistema, y las aristas a los enlaces.

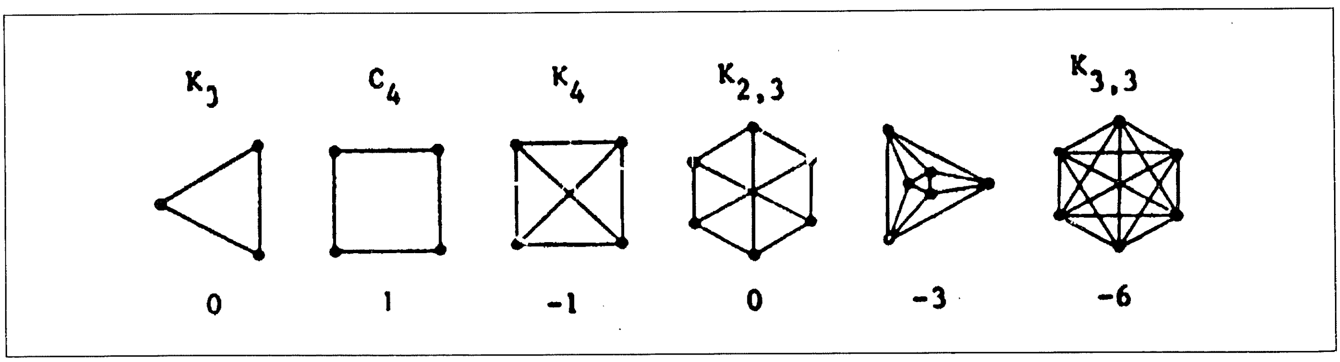
La movilidad del sistema es $\mathbf{M(G) = 2n - k - 3}$, siendo $\mathbf{G}$ un grafo planar con $\mathbf{n}$ vértices y $\mathbf{k}$ aristas.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Matriz de dominancia: **M**

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Dominancia de segundo orden: $\mathbf{M}^2$



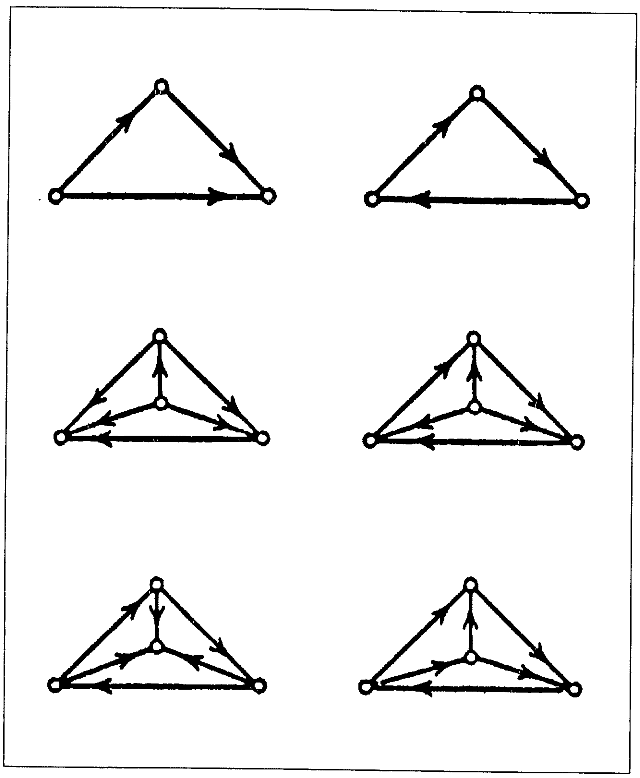
El tema de la movilidad se enseña tradicionalmente en geometría con tiras de mécano. Los grafos constituyen una forma más de trabajar el tema.

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{matrix}$$

Matriz $\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^2$

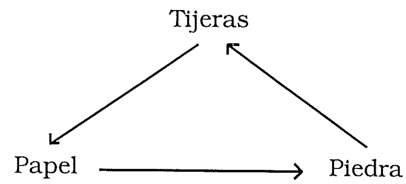
El «poder» de cada jugador, en la situación de dominancia descrita en el grafo, se entiende como el número total de dominancia en primero y segundo orden. Así, el «poder» de A es 5, el de B es 2, el de C es 3 y el de D es 4.

Un torneo o *tournament* es un grafo completo orientado. En un torneo siempre hay un camino dirigido que contiene a todos los vértices. A continuación se muestran todos los torneos posibles con 2, 3 y 4 vértices:



A estos grafos se les ha encontrado varias aplicaciones, pero más que en los torneos, de donde les viene el nombre, en situaciones de dominancia de la naturaleza. Así, hay especies de aves y mamíferos en las que uno de los individuos de cada pareja domina al otro. Otra aplicación surge en los métodos de *scaling*, por ejemplo, para conocer las preferencias de las personas en técnicas de *marketing*. También están presentes en la teoría de comités y elecciones.

El siguiente juego puede resultar divertido:



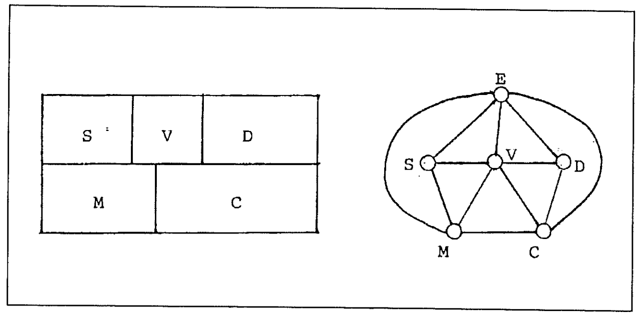
«Tijeras corta Papel»

«Piedra rompe Tijeras»

«Papel oculta Piedra»

Dos jugadores dicen simultáneamente: «uno, dos, tres». Al llegar a tres eligen: «tijeras», mostrando la V de victoria con los dedos; «papel», y muestran dos dedos juntos; o «piedra», enseñando el puño cerrado. Si los dos jugadores eligen el mismo objeto, se considera empate. Para cualquier otro caso, hay ganador: el jugador que coge tijeras vence al que coge papel, pero pierde ante un jugador que coge piedra; un jugador que coge papel vence a un jugador que coge piedra.

Arquitectura

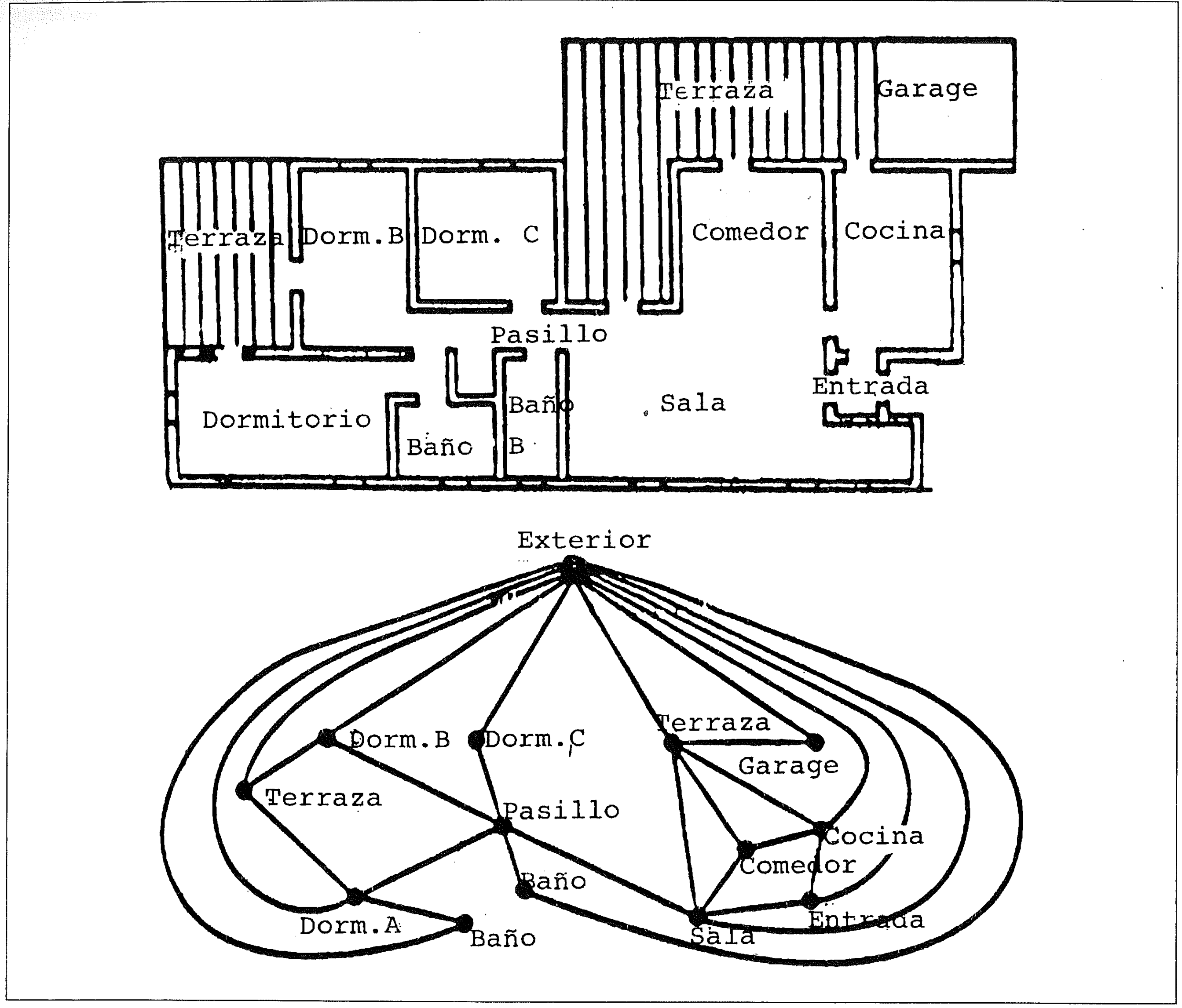


V: Vestíbulo
D: Dormitorio
C: Cocina

S: Salón
M: Comedor
E: Exterior

El grafo anterior recoge la relación de adyacencia entre habitaciones y de todas ellas con el exterior.

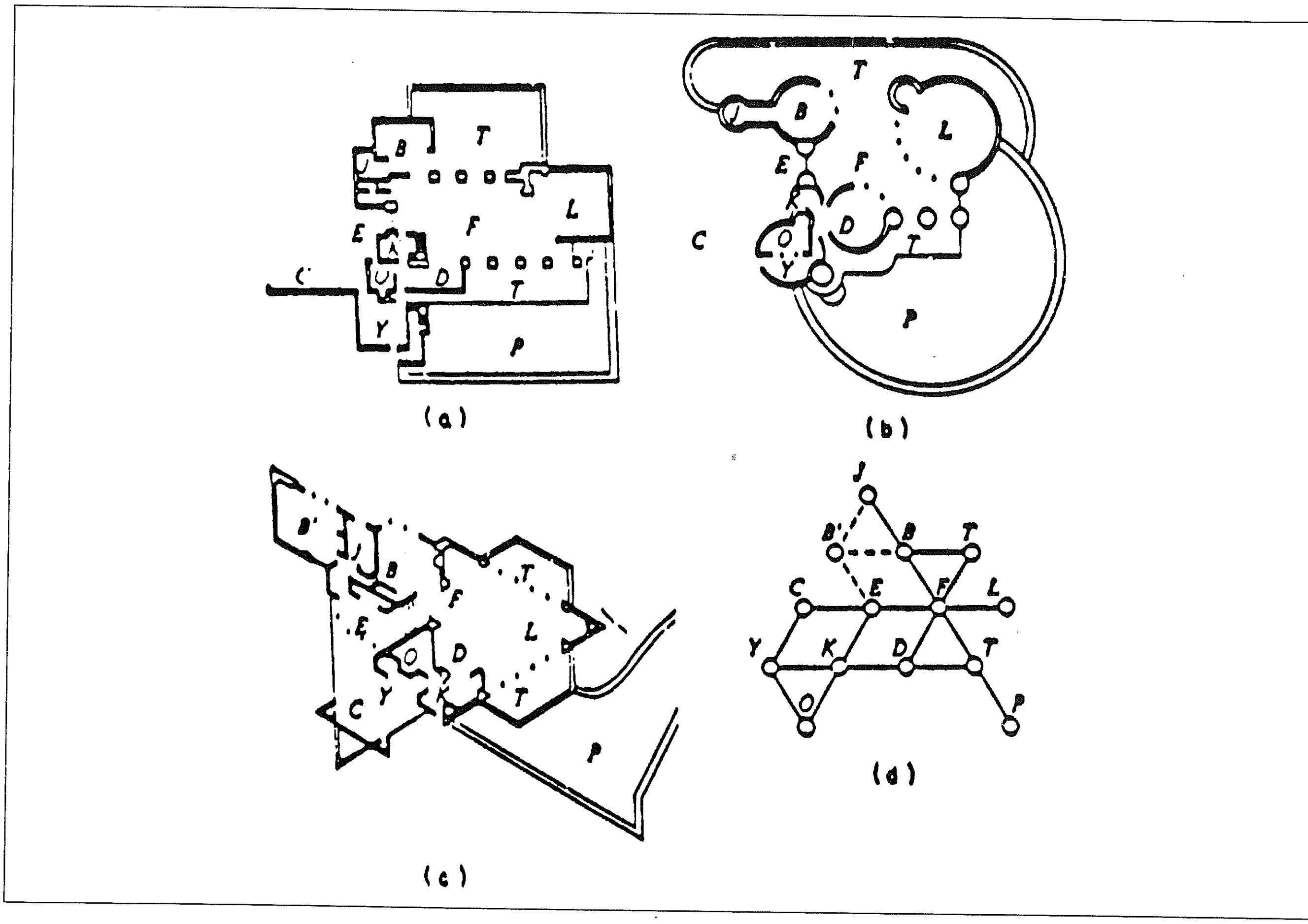
A continuación, el plano de una casa y su grafo de acceso asociado:



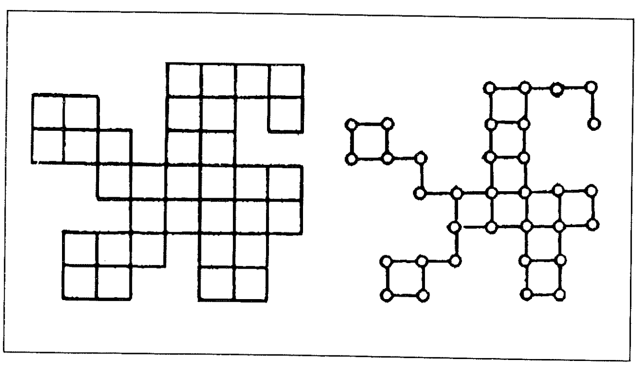
Las ilustraciones que siguen corresponden a tres casas, (a), (b) y (c), con planta cuadrada, circular y triangular, respectivamente. En ella es:

B: Dormitorio	F: Sala	P: Piscina
B': Dormitorio	J: Baño	T: Terraza
C: Garage	K: Cocina	Y: Patio
D: Comedor	L: Recibidor	
E: Entrada	O: Despacho	

El grafo de acceso, (d), es el mismo, a excepción de la habitación B' de la casa (c).



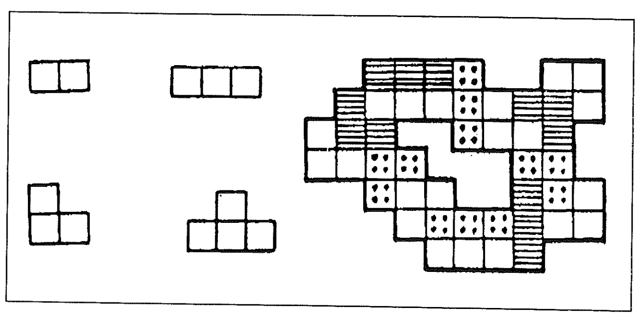
Poliminos



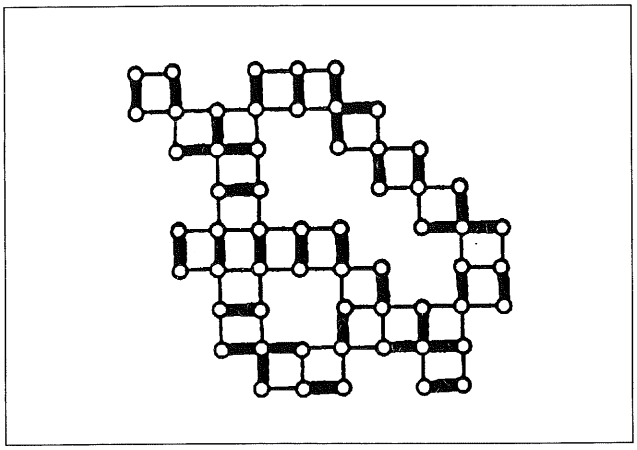
La cuestión es si con un dominó podemos teselar determinadas figuras, como por ejemplo la que se muestra en el dibujo. La teoría de grafos se ha mostrado muy útil para resolver esta cuestión. Con cualquier figura reticular se puede asociar un grafo, representando cada polígono de la figura por un vértice y uniendo dos vértices por una arista si los polígonos son adyacentes. En la figura anterior se muestra un retículo y su grafo asociado.

La existencia de teselación con un dominó es equivalente a que existe un 1-factor en el grafo asociado.

El problema es análogo con triminós y tetraminós. El siguiente tablero se muestra teselado con triminós.

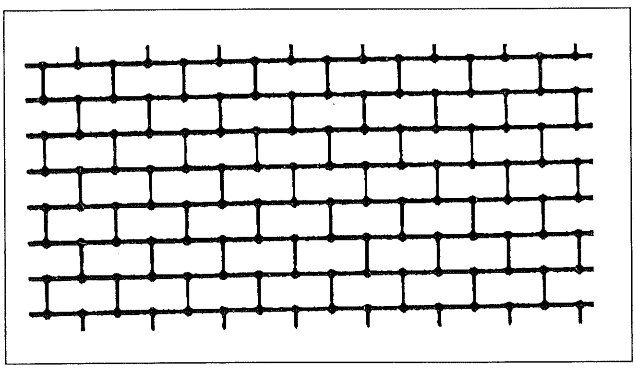


Un tetraminó y un dominó se utilizan para teselar el siguiente grafo:

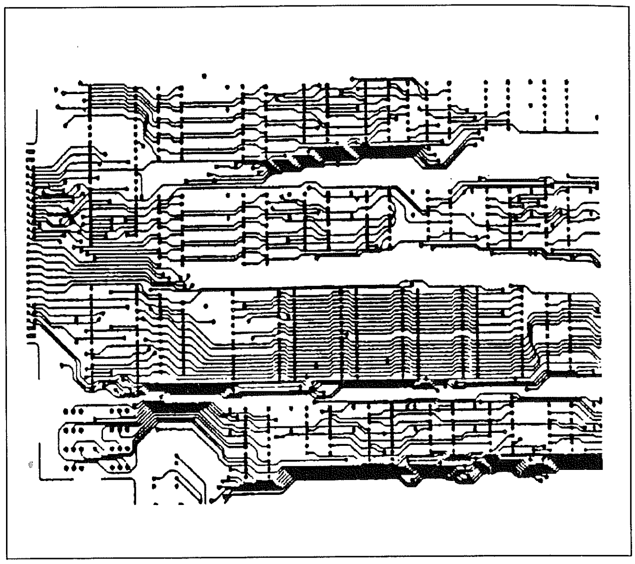


Circuitos impresos

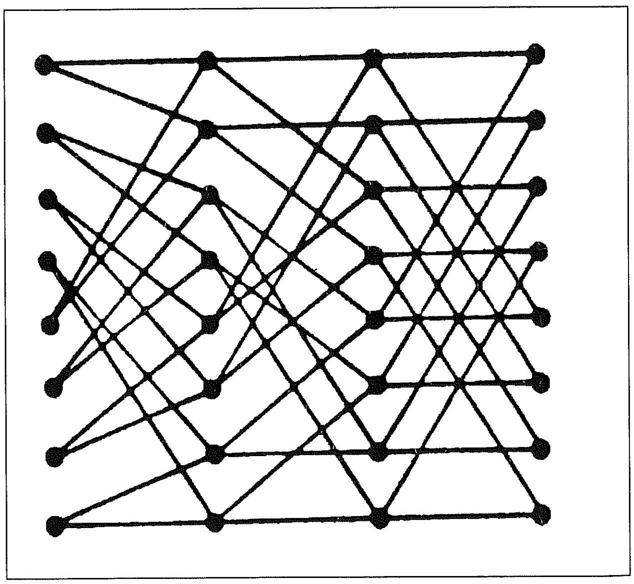
Quizás les hayan dicho alguna vez que los poliminós son poco útiles, pues nadie embaldosa su casa con estas figuras. Casi a modo de curiosidad, pues sé poco sobre el tema, les puedo decir que se están utilizando en el diseño de computadores en paralelo. De ello son una muestra los siguientes gráficos.



De hecho, la teoría de grafos ya se venía utilizando para diseñar circuitos. A continuación se muestra parte de un circuito impreso:

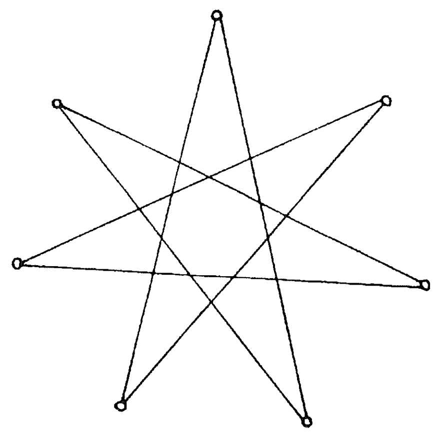


El grafo siguiente es un mapa de los pasos utilizados por un algoritmo para resolver cierto problema mediante ordenador.

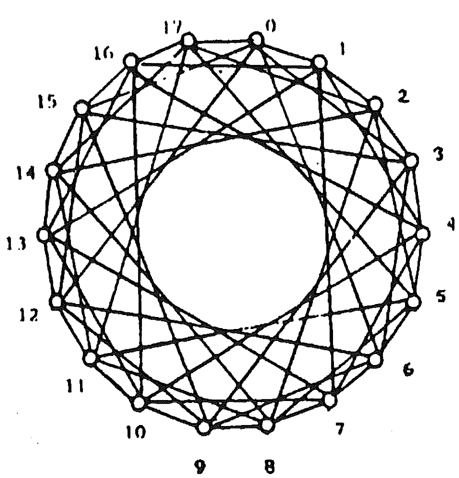


Pienso que hay muchos conocimientos que han estado dormidos y que la llegada de los ordenadores está despertando.

Polígonos estrellados - grafos circulantes - redes de doble bucle

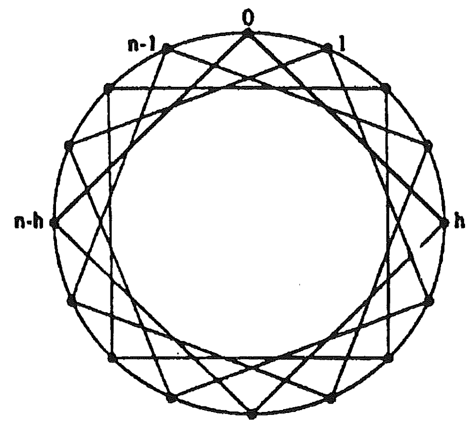


Se suele considerar que los polígonos estrellados datan del 540 a. C., con el pentagrama, símbolo de los pitagóricos. Se han venido utilizando con fines decorativos y fueron estudiados por varios matemáticos, entre ellos KEPLER. La idea de unir **n** puntos dando saltos de longitud **s** suscitó varias cuestiones como: si se cerrará siempre el polígono, el número de vueltas necesarias para que se cierre o el número de lados que tendrá. Las respuestas están relacionadas con la divisibilidad de los números **n** y **s**.



$C_{18}\langle 1,3,6\rangle$

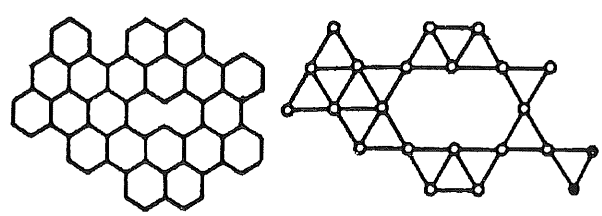
En 1846, CATALÁN introduce las matrices circulantes, que son las matrices de adyacencia de unos grafos que recuerdan a polígonos estrellados superpuestos y que llamaron grafos circulantes. Por su simetría, regularidad y, en particular, su conectividad, estos grafos se utilizan para la implantación de redes locales de ordenadores. La conectividad es máxima si el número de puntos **n** y la longitud **h** de todos los saltos son primos entre sí, lo cual en un factor muy importante porque garantiza la no vulnerabilidad de la red.



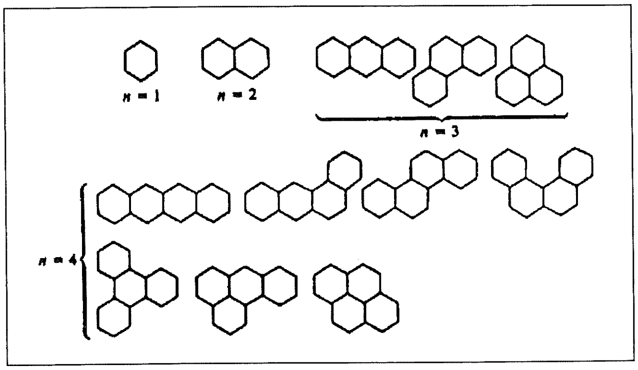
G(n,h)

En los últimos años, la programación en paralelo ha recurrido también al mismo modelo, llamándolos «redes de doble bucle», **G(n,h)**. La cuestión está en buscar **n** y **s** para que la red tenga diámetro mínimo.

Poliexos - Química - Geografía

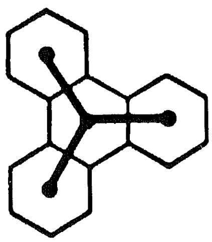


En la figura anterior tenemos un panal y su grafo asociado. Sin embargo, la teoría de grafos no ha resuelto totalmente la cuestión de teselar con poliexos; para algunos casos se conocen condiciones necesarias, pero no suficientes.

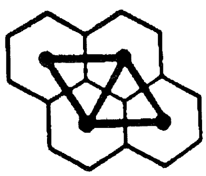


A las figuras formadas por hexágonos se les conoce como «animales hexagonales». De ellos, los más sencillos son los hidrocarburos aromáticos, también llamados arenos, algunos de los cuales son derivados del benceno.

La Química es uno de los campos de la ciencia donde la teoría de grafos ha resultado más productiva, tanto para fijar nomenclatura como para clasificación y definición de estructuras moleculares.

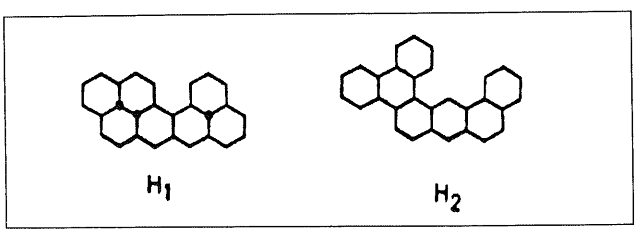


Cata-condensado



Peri-condensado

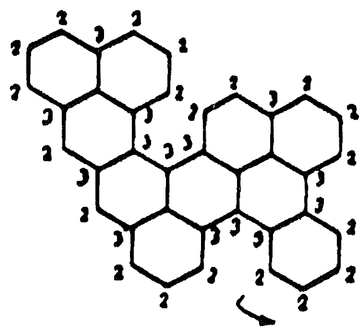
Para los polímeros se utilizan los términos cata-condensados y peri-condensados, según como sea la adyacencia. Los cata-condensados dan lugar a árboles en grafos y los peri-condensados han de tener al menos un circuito en el grafo asociado.



En general, el sistema hexagonal es peri-condensado si tiene vértices internos y cata-condensado si no los tiene; pero siempre se considera un sistema sin agujeros.

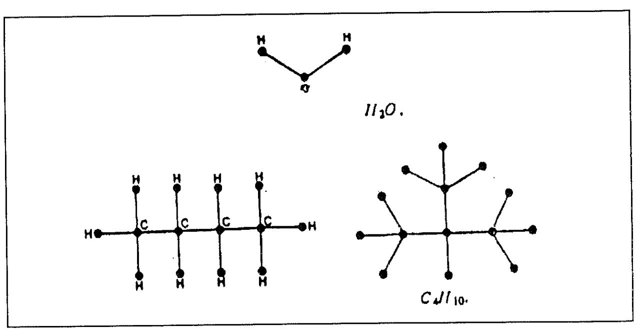
B = 2222332223223333222322232323222333

Grupo	n_s	Δk_b
22223333	4	+3
222333	3	+2
2233	2	+1
23	1	0
333	3	-1
33	2	-1
3	1	-1
222	0	+3
22	0	+2
2	0	+1



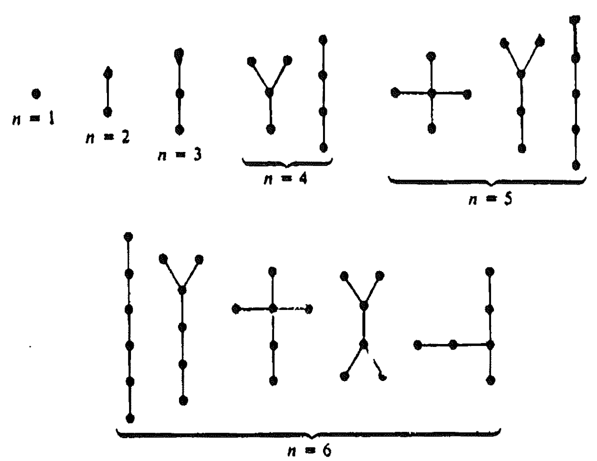
Otra forma de trabajar con los animales hexagonales es codificando su perímetro.

Para los que como yo no sabemos tanta química, es un placer reconocer en los siguientes árboles el agua y el butano.

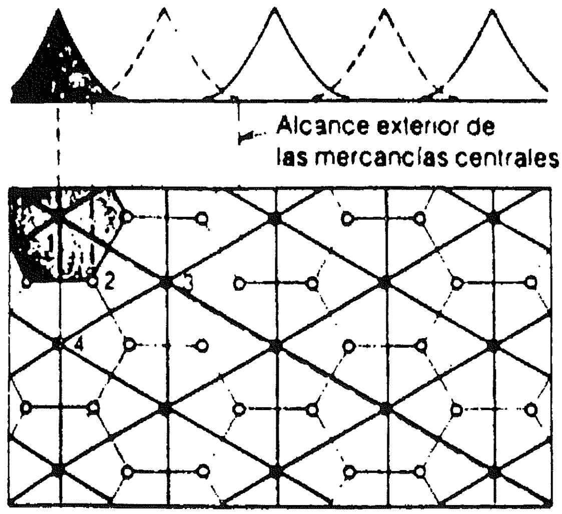


La teoría de árboles fue descubierta por CALEY (1857), a partir del trabajo de KIRCHHOFF, y completada luego por SYLVESTER (1878). La siguiente figura muestra los 6 primeros miembros de la serie alcalinos, C_nH_{2n+2}, donde se han quitado los hidrógenos y sólo se muestran los átomos del carbono. El primero es el metano, CH_4.

El método más poderoso para resolver los problemas de enumeración se debe a G. POLYIA (1937). Es válido para enumerar isómeros, alcoholes y una amplia variedad de estructuras inorgánicas.



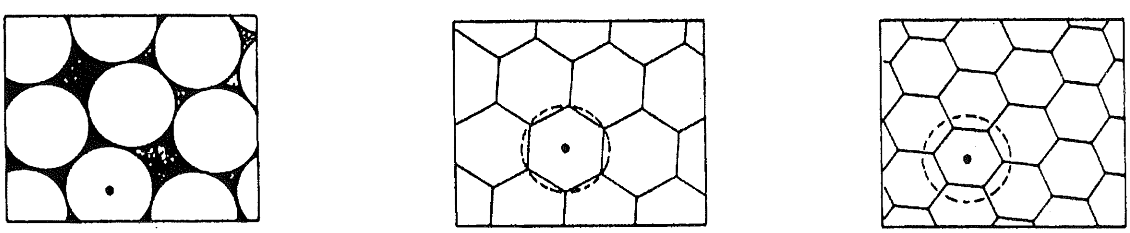
Principios alternativos de organización en el modelo de Christaller

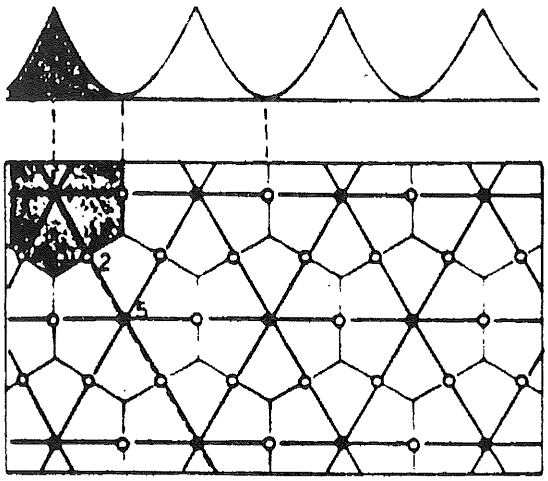


a) Principio de mercado $K = 1 + (6 \times 1/3) = 3$

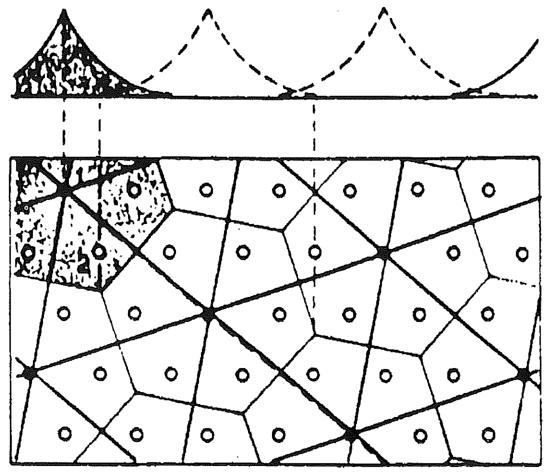
Uno de los modelos de asentamiento de las poblaciones, diseñado por el geógrafo alemán CHRISTALLER, considera la formación hexagonal. Además, este modelo de asentamiento se ha mostrado como el más eficiente para solucionar los problemas de transporte.

Formación hexagonal



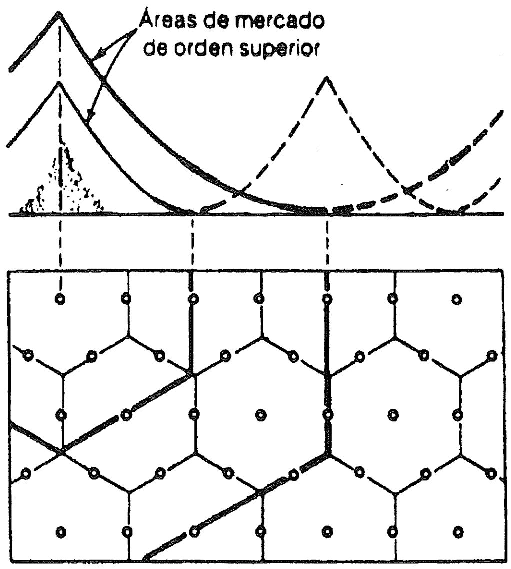


b) Principio de tráfico $K = 1 + (6 \times 1/2) = 4$



c) Principio administrativo $K = 1 + (6 \times 1) = 7$

● Lugar central ○ Lugar dependiente
——— Límite de región complementaria
- - - - - Tráfico entre lugares centrales



d) $K = 9$

Espero haber despertado su interés por el lenguaje de los grafos. El qué, el cómo y el cuándo se debe enseñar a los alumnos, espero se empiece a responder en el debate que seguirá.

Bibliografía

* HAGGETT, P. (1988).- **Geografía. Una síntesis moderna**. Omega.

* HARARY, F. (1972).- **Graph theory**. Addison Wesley.

* HARARY, F. - ROBINSON, R.W.(1984).- **Connect-it Games**. The College Mathematics Journal. 15, 5, 411-418.

* JAÑES ESCALADA, L. (1989).- **Fundamentos de Psicología Matemática**. Pirámide.

* LIESTMAN, A.L. - SHERMER T.C. (1993).- **Grid Spanners**. Networks. 23, 123-133

* PIMM, D. (1990).- **El lenguaje matemático en el aula**. MEC. Morata.

* SOCIEDAD CANARIA «ISAAC NEWTON» DE PROFS. DE MATEMÁTICAS - **Horizontes Matemáticos**. Exposición Itinerante.

* SOBRON, M.I. - ESPINEL, M.C. (1992) **Grafos a través de juegos**. SUMA, Revista de la Federación Española de Socs. Profs. Mats., 11 y 12, 86-94.

* WILSON, R.J. - BEINEKE, L.W. Eds (1979) **Applications of Graph Theory**. Academic Press.

ZEROVNIK, J. - PISANSKI, T. (1993) **Computing the Diameter in Multiple-Loop Networks**. Journal of algorithms 14, 226-243.

María Candelaria Espinel Febles
Área de Didáctica de las Matemáticas
Univ. de La Laguna
S.C. «Isaac Newton» P.M.