Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos

Alicia Bruno Castañeda
Antonio Martinón Cejas

Introducción

En este trabajo exponemos algunos de los resultados obtenidos en una experiencia que hemos realizado sobre el aprendizaje de los números negativos, tratando principalmente la resolución de problemas aditivos simples, esto es, de dos sumandos. Nuestra atención se centra en los ***contextos*** y en la ***estructura*** de sus enunciados.

El término *contexto* se ha usado con distintas interpretaciones en la investigación sobre resolución de problemas (WEBB, 1980; CALDWELL, 1980; BELL, 1985). En este trabajo entendemos por contexto la *situación, entorno o ambiente con el que se enuncia una determinada actividad matemática.*

En los trabajos anteriormente citados se pone de manifiesto cómo el contexto que se usa en los enunciados de los problemas verbales es una variable a tener en cuenta al analizar sus dificultades. En la investigación realizada por BELL sobre problemas de multiplicación y división con números positivos, se comprobó que un contexto determinado induce a los alumnos a elegir una operación en lugar de otra. Y, asimismo, que los problemas con el mismo tipo de números e igual estructura, aumentan en dificultad sólo por el hecho de tener contextos distintos.

La influencia que tienen los contextos que se eligen en la enseñanza, para la buena comprensión de los conceptos matemáticos, ha llevado a los escritores de libros de texto y a los educadores a esforzarse por encontrar situaciones familiares al alumno, y que sirvan para ejemplificar, del mejor modo posible, las ideas matemáticas.

En la enseñanza de los números negativos, los contextos quedan considerablemente reducidos con respecto a los que pueden utilizarse en la enseñanza de los positivos. En este trabajo estudiamos cinco contextos que se usan con frecuencia en los libros de texto para presentar los números negativos, y que detallamos a continuación:

* ***Deber-tener***:
«Yo debo 6 pesetas».
«Perdí 6 pesetas».

* ***Nivel del mar***:
«6 metros bajo el nivel del mar».
«Bajé 6 metros».

* ***Temperatura***:
«Hay 6 grados bajo cero».
«La temperatura bajó 6 grados».

* ***Tiempo***:
«Año 6 antes de Cristo».
«Hace 6 años».

* ***Carreteras***:
«6 km a la izquierda del 0».
«Moverse 6 km a la izquierda».

Para presentar los tipos de estructura que hemos considerado en nuestro estudio, introducmimos ahora la terminología que utilizamos. Los números se utilizan para expresar un ***estado*** **(e)**, como se hace en los siguientes ejemplos:

«Debo 5 pesetas».
«La temperatura es de 8 grados bajo cero».

También se usan para comparar estados. Prestamos atención a las ***comparaciones*** **(c)** entre estados, que expresan una comparación absoluta de dos estados simultáneos:

«Yo debo 2 más que tú».
«Hay dos grados menos en Madrid que en Londres».

Y, finalmente, para las ***variaciones* (v)** entre estados de un mismo sujeto en momentos diferentes:

«Perdí 8 pesetas».
«La temperatura bajó 6 grados».

A partir de esto puede hacerse una clasificación de los problemas aditivos según el *tipo de estructura*, es decir, teniendo en cuenta cómo son las situaciones que aparecen en el enunciado del problema (estados, variaciones o comparaciones). En esta investigación hemos trabajado con los tipos de problemas que exponemos a continuación:

(1) Suma de dos *estados*, con resultado el *estado total*:

$$e_1 + e_2 = e_t$$

«Yo tengo 6 pesetas y debo 9 pesetas. ¿Cuál es mi situación económica?».

(2) Suma de un *estado inicial* y una *variación*, con resultado el *estado final*:

$$e_i + v = e_f$$

«La temperatura era de 6 grados bajo cero y subió 4 grados. ¿Cuál era la temperatura después de esa subida?»

(3) Suma de dos *variaciones*, con resultado la *variación total*:

$$v_1 + v_2 = v_t$$

«Un buzo bajó 6 metros y posteriormente subió 8 metros. ¿Cuánto ha variado su posición desde el primer movimiento?»

(4) Diferencia de dos *estados*, con resultado una *variación*:

$$e_f - e_i = v$$

«La temperatura por la mañana era de 3 grados bajo cero y por la noche era de 8 grados bajo cero. ¿Cuál ha sido la variación de la temperatura a lo largo del día?»

(5) Comparación de dos *estados*, con resultado la *comparación*:

$$e_1 - e_2 = c$$

«Un buzo está a 6 metros bajo el nivel del mar y un tiburón está a 15 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros debe moverse el tiburón para estar a la misma altura que el buzo?»

Un análisis de estos tipos de problemas ha sido realizado por VERNAUD (1976, 1982) en el ámbito de los números negativos. En este trabajo hacemos un primer acercamiento al estudio de estos problemas, relacionando la estructura y los contextos. Observamos también si los alumnos tienden a emplear un tipo de estructura o contexto con más frecuencia que otros al dar sentido a las operaciones (suma y resta), y qué contextos ocasionan más dificultades a la hora de resolver problemas aditivos.

En el primer apartado explicamos brevemente la metodología seguida en la experiencia de aula. En el segundo, damos los resultados de algunos «items» de las pruebas realizadas a los alumnos que participaron en la experiencia. En el tercero, aparecen las conclusiones de las entrevistas clínicas efectuadas a seis alumnos. El último apartado lo dedicamos a las conclusiones.

Experiencia

Para la realización de la investigación elaboramos un material curricular en el que se aborda la enseñanza de los números negativos y que fue seguido, durante dos meses, por 111 alumnos de edades comprendidas entre los 12-14 años de Séptimo nivel de E.G.B. (curso en el que normalmente se estudia el tema de los números enteros), en dos Colegios Públicos de Tenerife. Los 111 alumnos estaban divididos en cuatro grupos distintos, en uno de los cuales la experiencia fue realizada por la coautora de este trabajo.

En el material curricular que siguieron los alumnos se presentan los números negativos a través de situaciones concretas, en los contextos mencionados en el apartado anterior, que sirven para darles sentido y que, como ya hemos comentado, aparecen con frecuencia en los libros de texto. Todos los contextos aparecen en el material con el mismo grado de importancia y en situaciones que expresan *estados* o *variaciones*.

Enseñamos a los alumnos a representar los números con puntos en la recta (preferentemente para los estados) y con flechas (preferentemente para las variaciones), de modo que el trabajo en la recta se convirtió en algo habitual para ellos a la hora de resolver los problemas.

Las operaciones con números positivos y negativos se introdujeron a través de problemas verbales cuyos enunciados se referían a los contextos y estructuras ya mencionados. Para la suma, los alumnos trabajaron con problemas del tipo:

$$\mathbf{e_1 + e_2 = e_t} \qquad \mathbf{e_i + v = e_f} \qquad \mathbf{v_1 + v_2 = v_t}$$

y para la resta con problemas del tipo:

$$\mathbf{e_f - e_i = v} \qquad \mathbf{e_1 - e_2 = c}$$

La multiplicación y división también se explicaron a través de situaciones concretas.

El objetivo de presentar los números negativos a través de situaciones era, por un lado, dar significado a estos números y, por otro, que pudieran encontrar sentido y justificación a las reglas que rigen su aritmética. A lo largo de la experiencia se pasaron a los alumnos distintas pruebas (al principio, a mitad y al final de la experiencia). En el apartado siguiente presentamos el análisis de los «items» pertenecientes a estas pruebas que tienen relación con aspectos contextuales y estructurales.

Resultados de las pruebas

El análisis de los resultados de las pruebas lo hemos dividido en dos apartados: *Resolución de problemas* e *Interpretación de operaciones.*

Resolución de problemas

En las pruebas incluimos 6 problemas con enunciado verbal (**Tabla 1**) que se resuelven con sumas o restas de números positivos o negativos y cuyos enunciados responden a los contextos y a algunas de las estructuras ya mencionadas. El objetivo principal de estos problemas era descubrir qué aspectos sería interesante analizar en las entrevistas clínicas posteriores.

El problema de carretera, señalado con **(*)**, se acompañó de una recta y tenía un objetivo distinto a los demás: se observó si los alumnos lo resolvían solamente en la recta o si planteaban una operación. En caso de que usaran la recta, el objetivo era observar si identificaban los estados con un punto, y las variaciones con flechas (cuestión que efectivamente se cumplió en un 98%).

Tabla 1: Problemas planteados en las pruebas

Temperatura
La temperatura en Valle Guerra es de 14 grados sobre cero y en Izaña la temperatura es de 3 grados bajo cero. ¿Qué tiene que ocurrir en Izaña para que la temperatura sea igual a la de Valle Guerra?

Temperatura
en Valle Guerra la temperatura subió 4 grados por la mañana y disminuyó 9 grados por la tarde. ¿Cuál ha sido la variación de la temperatura a lo largo del día?

Deber-tener
Sonia tiene 200 pesetas en el banco y debe a una amiga 260 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?

Nivel del mar
Un buzo está a 5 metros bajo el nivel del mar y desciende 6 metros. ¿Cuál es su posisción después de este descenso?

Tiempo
Si un hombre nació en el año 56 antes de Cristo y murió en el año 17 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

Carretera (*)
Un coche se encuentra en el kilómetro 6 de una carretera y se mueve 5 kilómetros hacia la izquierda. ¿En qué kilómetro se encuentra el coche después de este movimiento?

En la **Tabla 2** aparece el porcentaje de respuestas correctas, excluyendo el problema de la carretera.

Tabla 2: % de respuestas correctas a los problemas

Deber-tener $e_1 + e_2 = e_t$	Nivel-mar $e_i + v = e_f$	Temperatura $e_1 - e_2 = c$	Temperatura $v_1 + v_2 = v_t$	Tiempo $e_f - e_i = v$
83	64	54	53	40

Como puede observarse, el problema que resultó más fácil fue el del contexto de *deber-tener*, a pesar de que era el que tenía números mayores, mientras que los problemas en contextos de *temperaturas* y de *nivel del mar* presentaron una dificultad media. Por contra, el porcentaje más bajo de aciertos se dió en el problema de *iempo*. Encontramos que los alumnos seguían una de estas dos estrategias de resolución de los problemas:

* plantear una operación;
* buscar la solución apoyándose en la recta (en ocasiones sólo escribían la recta y la solución y, en otras, escribían los números en la recta y también una operación).

En la **Tabla 3** aparecen los porcentajes de alumnos que escribieron la recta para dar la solución del problema.

el aula mientras realizamos la experiencia,que lo que ocurre es esto último.

Es significativo el bajo porcentaje de alumnos que utilizan la recta en el problema de *tiempo*. Muchos alumnos resolvieron el problema por medio de la resta 56 - 17, ignorando cualquier planteamiento del problema con números negativos, lo que no se dió en el resto de los problemas. En algunos alumnos que usaban la representación gráfica, comprobamos la dificultad para representar, no sólo las fechas (antes o después de Cristo), sino también los años vividos por una persona, que algunos alumnos escriben con números negativos.

En cualquier caso, estas cuestiones relacionadas con el uso o no de la recta numérica a través de las pruebas escritas, sólo puede suponer un primer acercamiento al tema, ya que son aspectos de la resolución de problemas que se prestan más a ser analizados por medio de entrevistas clínicas, pues puede ocurrir que un alumno resuelva los problemas

Tabla 3: % de alumnos que utilizaron la recta para resolver el problema

Deber-tener $e_1 + e_2 = e_t$	Nivel-mar $e_i + v = e_f$	Temperatura $e_1 - e_2 = c$	Temperatura $v_1 + v_2 = v_t$	Tiempo $e_f - e_i = v$
15	46	54	56	30

Como se observa en esta tabla, los alumnos no se inclinan por representar los problemas de *deber-tener* en una recta, lo que puede ser por dos razones: o bien porque los números eran de tres cifras; o bien porque los problemas con esta estructura no se prestan a ser representados en una recta de forma natural, ya que hay que representar un estado con una flecha. Nos inclinamos a pensar, por lo que pudimos comprobar en pensando en la recta numérica y, sin embargo, no llegue a dibujarla.

Interpretación de operaciones

En otra serie de preguntas se pedía la interpretación de operaciones con números positivos y negativos. El enunciado de estas preguntas aparece en la **Tabla 4.**

Tabla 4: Enunciado de 4 items de las pruebas generales

Escribe una situación que pueda ser representada por cada una de las siguientes expresiones:
- 3 + (-14); - 4 + 13; -32 - 67; 4 - (-6)

En estos «items» analizamos principalmente los contextos y estructuras que emplean los alumnos. Los resultados aparecen en las tablas **5, 6, 7 y 8** con independencia de que el problema enunciado por los alumnos se correspondiera correctamente o no con la expresión numérica dada.

Tabla 5: % de contextos y estructuras para -3 + (-14)

Estructura / Contexto	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Deber-tener	43,2	19,8	11,7	0,9	-	0,9	76,5
Temperatura		3,6	0,9	0,9	0,9	1,8	8,1
Nivel-mar		-	2,7	-	-	-	2,7
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	0,9	-	-	1,8	2,7
Total	43,2	23,4	16,2	1,8	0,9	4,5	100

Respuestas en blanco: 10%

Tabla 6: % de contextos y estructuras para -4 + 13

Estructura / Contexto	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Deber-tener	17,1	33,3	15,3	-	-	0,9	66,6
Temperatura		11,7	1,8	1,8	-	0,9	16,2
Nivel-mar		0,9	2,7	-	-	-	3,6
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	1,8	-	-	0,9	2,7
Total	17,1	45,9	21,6	1,8	-	2,7	100

Respuestas en blanco: 10'9%

Tabla 7: % de contextos y estructuras para -32 - 67

Estructura	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Contexto							
Deber-tener	34,2	16,2	16,2	-	-	0,9	67,5
Temperatura		2,7	0,9	3,6	-	-	7,2
Nivel-mar		2,7	1,8	-	0,9	-	5,4
Tiempo		-	-	0,9	-	-	0,9
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	0,9	-	-	-	0,9
Total	34,2	21,6	19,8	4,5	0,9	0,9	100

Respuestas en blanco: 18'1%

Tabla 8: % de contextos y estructuras para 4 - (-6)

Estructura	$e_1 + e_2 = e_t$	$e_i + v = e_f$	$v_1 + v_2 = v_t$	$e_f - e_i = v$	$e_1 - e_2 = c$	Otros	Total
Contexto							
Deber-tener	18	28,8	5,4	-	-	2,7	54,9
Temperatura		9	2,7	0,9	2,7	-	15,3
Nivel-mar		1,8	1,8	-	1,8	-	5,4
Tiempo		-	-	-	-	-	-
Carretera		-	-	-	-	-	-
Otros	-	-	2,7	-	-	0,9	3,6
Total	18	39,6	12,6	0,9	4,5	3,6	100

Respuestas en blanco: 20'8%

El contexto que eligen los alumnos con más frecuencia para interpretar las operaciones es *deber-tener*. El *tiempo* y la *carretera* prácticamente no se eligen; la *temperatura* y *el nivel del mar* son utilizados por más alumnos que los dos anteriores, pero no con demasiada frecuencia. Estos resultados indican la importancia de las situaciones *deber-tener* en el conocimiento numérico de los niños, no sólo en los números negativos, sino también en los positivos.

Los tipos de estructura por los que se inclinan los alumnos mayoritariamente son $\mathbf{e_1 + e_2 = e_t}$, $\mathbf{e_i + v = e_f}$

y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$, es decir, las estructuras utilizadas para presentar la suma en la experiencia realizada. Por otro lado, las interpretaciones de las restas como diferencias, $\mathbf{e}_f - \mathbf{e}_i = \mathbf{v}$ y $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}$, fueron casi nulas. Estos resultados los encontramos significativos porque, como ya hemos comentado, en el material curricular que trabajaron los alumnos, los problemas de estos dos últimos tipos sirvieron para apoyar la enseñanza y dar sentido a la resta; lo que indica que para ellos resulta muy compleja esta interpretación de la resta. Un alto número de alumnos interpretó las restas convirtiéndolas en las sumas -32 + (-67) y 4+6 y dando un enunciado de los tipos: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_i + \mathbf{v} = \mathbf{e}_f$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$. Por otra parte, es curioso el hecho de que, para la suma -3 + (-14) , el 43'2 % de los alumnos escribió una situación del tipo $e_1+e_2=e_t$, frente al 17'1% que usaron este mismo esquema para la suma -4 + 13. Esto lleva a plantearse si distintas operaciones inducen a distintas estructuras.

El porcentaje de respuestas correctas fue mayor en la interpretación de las sumas que en la de las restas. De hecho, como se puede comprobar en las tablas 5-8, el número de respuestas en blanco aumentó en las dos restas (tablas 7 y 8).

A nivel lingüístico destacamos que, para cada operación, aproximadamente un 70% de los alumnos redactó el problema en primera persona del singular. Así, para la operación (-3) + (-14), la redacción más frecuente fue: «Yo debo 3 pesetas y debo 14 pesetas a otro amigo. ¿Cuánto debo en total?».

Como ya ha sido estudiado en algunas investigaciones con números positivos, hay palabras que determinan, al menos parcialmente, la elección de la operación en problemas verbales (lo que se ha denominado ***palabras claves***). Por ejemplo, los verbos «juntar», «reunir», «agregar»... se asocian con la suma; los verbos «separar», «quitar», «disminuir»,... con la resta. Esto queda reflejado claramente en estos 4 items, ya que los alumnos emplean verbos para dar sentido a los números y a las operaciones, que tenían asociados a la suma o resta de números positivos. La diferencia ahora es que estos verbos sirven tanto para las operaciones como para los números. Es el caso de un alumno que, para la operación -32 - 67, escribió: «Arranco 32 páginas de un libro, y luego arranco otras 67».

Algunos verbos que los alumnos emplearon, para las sumas o para interpretar los números positivos, fueron los siguientes: «dar», «quedar», «encontrar», «comprar», etc. Mientras que, para las restas o para la interpretación de números negativos, algunos alumnos escribieron: «arrancar», «quitar», «robar», «romper», «regalar», «comer», etc.

Otro ejemplo de las palabras que los alumnos tienen asociadas a determinadas operaciones es el siguiente:

«La temperatura en Londres es -4 grados y en Francia es -13 grados. ¿Cuánta temperatura tienen entre las dos?»

La repetición de un esquema lingüístico relacionado con la suma, como es «¿cuánto tienen entre los dos?», y que resulta válido en otros contextos, lleva a un error en este caso.

Entrevistas clínicas

El objetivo de las entrevistas clínicas era descubrir cómo razonan los alumnos cuando se enfrentan a problemas aditivos con números negativos, qué tipo de estrategia siguen y encontrar explicaciones a por qué unos contextos les resultan más fáciles que otros.

Las entrevistas se realizaron a seis alumnos que habían participado en nuestra experiencia, seleccionados según el nivel de comprensión del tema: dos de nivel alto (A1 y A2), dos de nivel medio (M1 y M2) y dos de nivel bajo (B1 y B2). Cada alumno fue entrevistado en cuatro sesiones de media hora cada una y se les pidió que resolviesen 17 de los problemas que ya habían trabajado en el aula o que habían aparecido en las pruebas pasadas. Se les ofreció la posibilidad de utilizar rectas numéricas, si querían o si las necesitaban, y que fueron dibujadas en folios y colocadas encima de la mesa de entrevistas.

A continuación exponemos los resultados que nos parecen más interesantes. En las entrevistas se observaron las dos estrategias para resolver los problemas que ya habían aparecido en las pruebas generales, es decir:

* Plantear una operación (una suma o una resta).
* Apoyarse en la recta numérica.

Al investigar la relación existente entre estas estrategias comprobamos que, efectivamente, los alumnos entrevistados parecen inclinarse hacia una de estas dos formas de resolver los problemas; esto es, unos tienden a resolverlos usando la recta y otros planteando solamente una operación, siendo esta inclinación muy clara en algunos casos. Esto último se puede comprobar en la **Tabla 9**, que muestra el número de problemas realizados con cada estrategia por cada alumno.

Tabla 9: Número de problemas realizado con cada estrategia

Alumno / Estrategia	A1	A2	M1	M2	B1	B2
Con Operación	6	14	6	4	13	11
Con la Recta	11	3	11	13	4	6

A la vista de las contestaciones de estos alumnos, sería interesante realizar un estudio más profundo sobre si estas preferencias tienen relación con el nivel de cada uno.

Lo que parece claro es que, a pesar de las preferencias, todos los alumnos manifiestan la capacidad para utilizar ambas estrategias en algún momento, y que su elección viene determinada por el tipo de problema. En este sentido coincidimos con PELED (1990), quien afirma que el conocimiento que tienen los niños sobre las operaciones con números negativos se manifiesta en dos dimensiones: la dimensión de recta numérica y la dimensión cuantitativa. Además, afirma que un niño puede tener más de una imagen de los números con signo, y puede usar diferentes imágenes en distintos tipos de problemas numéricos.

Una vez que los alumnos habían resuelto un problema, usando una de las dos estrategias ya mencionadas, se les pedía que lo resolviesen usando la otra. En muchas ocasiones, los alumnos obtenían resultados diferentes con cada estrategia. Al preguntarles cuál de los dos resultados era el correcto, daban como cierto el resultado obtenido en la recta. Así, por ejemplo, una de las conductas más frecuentes era la siguiente: empezaban el problema planteando una operación, posteriormente nosotros les pedíamos que lo hicieran con la recta. Si los resultados eran distintos, corregían la operación para que el resultado coincidiese con el de la recta. Otra conducta que se repitió fue la de realizar el problema con la ayuda de la recta y, al pedirles que plantearan una operación, buscar la operación adecuada para que les diese el mismo resultado que en la recta. Por lo tanto, los alumnos entrevistados tenían más seguridad en los resultados de los problemas cuando los hacían apoyándose en la recta que cuando los planteaban con una operación. Esto se hizo especialmente patente en los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ y $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$.

Intentamos indagar en las entrevistas por qué se producía esa diferencia de dificultad entre los distintos contextos y pudimos ver como los alumnos manifiestan una gran seguridad al explicar cuestiones relacionadas con *deber-tener*, quizás porque les aparecen con frecuencia en su vida diaria desde muy pequeños y porque, además, las pueden resolver usando números positivos.

Sin embargo, al pedirles explicaciones de los problemas sobre *tiempo* y, en concreto, los relacionados con fechas negativas (años a.C.), suelen dudar y sus argumentos se vuelven confusos. Hay que tener en cuenta que este contexto no es usual para ellos y lo ven prácticamente por primera vez en este curso. La principal dificultad que tenían los alumnos era la identificación de las fechas positivas y negativas, probablemente porque las palabras «antes» y «después» no se relacionan tan fácilmente con «negativo» y «positivo», como se pueden relacionar las palabras «bajo cero» y «sobre cero» o «bajo el nivel del mar» y «sobre el nivel del mar». Esta misma dificultad les lleva, en ocasiones, a escribir con números negativos los años vividos por una persona cuando esta ha nacido antes de Cristo.

Nuestra preocupación se centró también en averiguar por qué los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ y $\mathbf{e_1 - e_2 = c}$ resultaban tan difíciles. Encontramos como causa de esta dificultad que los alumnos no tienen asimilado el concepto que está detrás de este tipo de problemas. Es decir, para ellos la sustracción está más relacionada con la idea de «quitar» que con la «diferencia» de dos estados, tanto cuando trabajan con números positivos como cuando trabajan con números negativos. Además, otra complejidad que se añade a los problemas del tipo $\mathbf{e_f - e_i = v}$ es la interpretación de la variación como un número negativo, ya que los alumnos tienden a dar siempre el resultado de la variación con un número positivo.

Cuando los alumnos estudian una ampliación numérica es normal que se sigan manteniendo formas de plantear y resolver problemas que utilizaban con los conjuntos numéricos previos. La siguiente observación es un ejemplo de este hecho. Los alumnos entrevistados, cuando resolvían los problemas planteando una operación, mostraban una tendencia a escribir el primer número que aparecía en el enunciado del texto y luego el segundo número del texto. Esta conducta ya ha sido estudiada en algunas investigaciones con números positivos.

Ya ha sido probado en diversos trabajos de investigación que los problemas del tipo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$ son más difíciles de resolver que los del tipo $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_t$ o los del tipo $\mathbf{e}_i + \mathbf{v} = \mathbf{e}_f$ (VERGNAUD, 1982). Al analizar cómo resuelven los alumnos los problemas del tipo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_t$ descubrimos que la primera dificultad que tienen al intentar representar la situación en la recta es que no saben en qué punto comenzar a representar la primera variación. La secuencia de actuación más común fue la siguiente:

1º) Representan la primera variación partiendo de cero.
2º) Convierten el número en que finaliza la variación en un estado.
3º) Resuelven el problema como si fuera del tipo $\mathbf{e}_i + \mathbf{v} = \mathbf{e}_f$. De esta forma superan la dificultad antes mencionada.

En las entrevistas repetimos tres problemas, que ya habían sido puestos en alguna de las pruebas, con el objetivo de comprobar cambios significativos en la forma de enfrentarse a ellos. Los cambios que observamos fueron de tipo procedimental. Por un lado, los alumnos pasaron de escribir los operaciones en vertical a escribirlas en horizontal. Y, por otro, cambiaron el tipo de operación, es decir, pasaron de plantear una resta a plantear una suma (o viceversa). Por ejemplo, el problema siguiente:

«Una persona debe 3.600 pesetas y tiene en el banco 4.000 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?».

En la prueba inicial realizaban la operación mientras que en la entrevista realizaron la operación **-3.600 + 4.000 = 400**. Por supuesto, entendemos que esto es una influencia del tipo de enseñanza recibida y de la cercanía de fechas entre la terminación de la experiencia y la realización de la entrevista.

A pesar de que la instrucción previa había sido la misma para los seis alumnos, las entrevistas revelaron que la comprensión de los problemas aditivos y sustractivos con números negativos es distinta de un alumno a otro. Respuestas iguales a un problema no implican el mismo grado de entendimiento. Así, por ejemplo, contrastamos las explicaciones dadas por distintos alumnos a un problema que habían resuelto de la misma forma y, mientras que unos se sentían incapaces de justificar sus respuesta, otros tenían argumentos claros del por qué de sus contestaciones. Estos distintos grados de comprensión de los problemas también quedan reflejados en los métodos que siguen para resolverlos. Exponemos a continuación dos formas de actuar de dos alumnos entrevistados: Uno de los alumnos de nivel medio resolvía siempre los problemas planteando operaciones con números positivos y apoyándose en la recta. Es decir, nunca llegó a escribir una operación en la que los números implicados fueran negativos, aunque sí representaba los números negativos en la recta. A pesar de ello, la mayoría de sus respuestas fueron correctas y sus explicaciones válidas.

Una de las alumnas de nivel bajo, seguía la siguiente secuencia de actuación: Primero escribía por separado los números que se daban en el enunciado del problema y colocaba el signo «=»; por ejemplo, **-7 11 =**. Su siguiente paso era decidir el signo que tenía el resultado del problema, y escribía: **- 7 11 = -** . Y, por último, buscaba la operación adecuada para que diese resultado negativo: **-7 - 11 = -18**.

Las preguntas que se le realizaron a esta alumna al finalizar los problemas mostraron que tenía una escasa comprensión de los mismos.

Conclusiones

Las dificultades que surgen en las operaciones con números negativos debido a la necesidad de usar reglas que, en ocasiones, son difíciles de entender por los alumnos, y los numerosos errores que se producen a causa de la notación de los números con signo o por el mal uso de los paréntesis, implica que el trabajo en el aula se centra la mayor parte del tiempo en la práctica rutinaria de operaciones.

Entendemos que abordar la enseñanza de los números negativos a través de la resolución de problemas es interesante, ya que permite a los alumnos reflexionar y razonar sobre las operaciones básicas y se les puede ofrecer una mayor riqueza de significados para ellas.

El número de contextos que puede usarse para dar sentido a los números negativos no es tan amplio como el los números positivos, pero esto, que en principio puede ser un impedimento, tiene la ventaja de que permite realizar una elección adecuada al preparar el tipo de problemas que se plantearán en el aula. En esta elección es importante tener en cuenta, por un lado, que los contextos que se utilicen influyen en la dificultad de los problemas, y, por otro, que deben trabajarse distintos tipos de estructuras que consoliden o amplien la visión que tienen los alumnos de los números y sus operaciones, teniendo en cuenta también que hay estructuras, como la diferencia de estados, que son más difíciles de interiorizar por los alumnos.

A la vista de los resultados de las pruebas, de las entrevistas clínicas y de las observaciones realizadas en el aula durante los dos meses que estuvimos con los alumnos, concluimos que el contexto que permite una mayor comprensión de determinadas operaciones con números negativos es el *deber-tener* y, más en concreto, las situaciones de dinero. La *temperatura* y el *nivel del mar* presentan una dificultad media, la *carretera* no parece ser un contexto difícil aunque su nula utilización induce a pensar que sea un contexto lejano para los alumnos. Esto mismo ocurre con el *tiempo*, con el añadido ahora de que este contexto sí resulta complicado para ellos. Pensamos que el uso de la recta numérica es beneficioso para comprender los problemas aditivos con números negativos. La recta parece ser fuente de significado para los alumnos, hasta el punto de ser el apoyo a través del cual resuelven los problemas o buscan la operación a plantear, aunque queda por estudiar en qué tipos de problemas tienden a usarla.

Bibliografía

* BELL, A., FISCHEIN, E. y GREER, B. (1984). **Choice of operation in verbal arithmetic problems: the efects of numbers size, problem structure and context.** Educational Studies in Mathematics. vol 15. pp 129-147.

* CALDWELL, J. (1980). **Syntax, Content, and Context Variables in Instruction.** In Goldin, G. and McClintock (eds) Task Variables in Mathematical Problem Solving. Eric/SMEAC: Columbus, Ohio.

* CASTRO E. RICO, L. y GIL, F. (1992). **Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos.** Enseñanza de las Ciencias. 10 (3), 243-253.

* PELED, I. (1991). **Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability.** Proceedings of the XV International Conference of PME. pp 145-152.

* VERGNAUD, G. y DURAND, C. (1976). **Structures additives et complexité psychogenetique.** La revue française de pedagogie. vol 36. pp 28-43.

* VERGNAUD, G. (1982). **Cognitive tasks and operations of thought.** In Carpenter, T., Moser, J. and Romberg, T. (eds). Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Lawrence Erlbaum Associates. Hilsdale, New Jersey.

* WEBB, N. (1980). **Content and Context Variables in Problem Tasks.** In Goldin, G. and McClintock (eds) Task Variables in Mathematical Problem Solving. Eric/SMEAC: Columbus, Ohio.

Alicia Bruno Castañeda
Antonio Martinón Cejas
Univ. de La Laguna
Área de Didáctica de las Matemáticas.
S.C. "Isaac Newton" P.M.